Univerzitet u Novom Sadu

Prirodno-matematički fakultet

Departman za matematiku i informatiku

Tamara Petrović

Lanci Markova i neke primene u biologiji

Master rad

Mentor:

Prof. dr Danijela Rajter-Ćirić

2021, Novi Sad

Sadržaj

Predgovor

Još prilikom slušanja kursa iz Verovatnoće zaintesovala sam se za primenu te grane matematike u drugim naukama. U odabiru teme za rad presudno je bilo da bude nešto interesantno i da mogu kroz rad da prikažem primenu matematike u svakodnevnom životu. Biologija mi je oduvek, posle matematike, bila omiljena nauka pa sam takođe htela da nekako povežem te dve nauke. Na redovnim studijama nisam imala kurs iz Stohastičke analize i Stohastičkih procesa, tako da se sada prvi put susrećem sa pojmom stohastički procesi.

Osnovni cilj ovog rada jeste da predstavi i definiše lance Markova i takođe da na praktičnim primerima objasni njihovu primenu. Lanci Markova, koji su tema ovog rada, predstavljaju veoma važan alat u modeliranju velikog broja prirodnih pojava i rešavanju svakodnevnih problema. Koriste se za modeliranje procesa u biologiji, za predviđanje rasta populacije, u genetici za modeliranje prenošenja gena kroz generacije, imaju primenu u medicini, fizici, hemiji, biologiji, ekonomiji, finansijama itd.

Rad je podeljen na četiri celine. One obuhvataju teoriju verovatnoće, stohastičkih procesa i lance Markova, kao i njihovu primenu. U prvom poglavlju ovog rada izložićemo osnovne pojmove teorije verovatnoće i stohastičkih procesa. U drugom poglavlju uvešćemo lance Markova, oznake, definicije i osnovne osobine u diskretnom vremenu. U narednom poglavlju daćemo neke dobro poznate primere lanaca Markova kao što su model slučajne šetnje i propast kockara. Četvrta glava ovog rada je u potpunosti posvećena primenama lanaca Markova u biologiji. Pomenućemo i primene lanaca Markova u epidemiologiji. Na kraju rada je pregled literature koja je korišćena u pripremi ovog rada.

Ovom prilikom se zahvaljujem svom mentoru, prof. dr Danijeli Rajter-Ćirić na savetima i pomoći prilikom izrade ovog master rada. Od srca se zahvaljujem svojoj porodici, ocu Dušanu, majci Zorici i sestri Juliji, koji su verovali u moje sposobnosti i pružili mi maksimalnu podršku od početka studiranja do izrade master rada. Takođe, želim da se zahvalim dečku Marku, koji je bio uz mene tokom perioda studiranja, na razumevanju i neizmernoj podršci. Hvala svim prijateljima i kolegama što su mi ulepšali studentske dane.

Glava 1

1. Uvod

1.1 Kratak pregled teorije verovatnoće

Teorija verovatnoće je centralno polje matematike, široko primenjivo u naučnim, tehnološkim i svakodnevnim situacijama koje uključuju neizvesnost. Najočiglednije primene su u situacijama poput igara na sreću, u kojima proces ponavljanja suštinski istog postupka dovodi do različitih ishoda. Na primer kada bacimo novčić, bacimo kockicu, izaberemo kartu iz promešanog špila, ili bacimo kuglicu na točku ruleta, postupak je isti od jednog do drugog pokušaja, ali ishod varira na naizgled slučajan način. Svi mislimo da razumemo bacanje novčića ili kockice, ali ipak prihvatamo slučajnost u svakom ishodu. Teorija verovatnoće je razvijena posebno da bi se dalo precizno i kvantitativno razumevanje ovih vrsta situacija.

Teorija verovatnoće, kao matematička disciplina, počela je da se razvija u 17. veku i u početku je bila fokusirana na igre na sreću. Značaj teorije je brzo rastao, posebno u 20. veku, a sada igra centralnu ulogu u proceni rizika, statistici, mreži podataka, teoriji informacija, teoriji upravljanja, kvantnoj teoriji, teoriji igara, neurofiziologiji i mnogim drugim poljima. Primenjuje se u raznim oblastima, kao što su: statistička fizika, geodezija (račun izravnanja), stohastička hidrologija, biologija (zakoni nasleđivanja), medicina, meteorologija (prognoziranje vremena), astronomija, demografija, ekonomija, itd.

1.1.1 Prostor verovatnoća

Osnovni model u teoriji verovatnoće jeste eksperiment. Skup svih mogućih događaja nekog eksperimenta označavaćemo sa Ω. Elemente skupa Ω nazivamo elementarnim događajima i označavamo ih sa ω.

Definicija 1.1.1. Slučajan događaj A je podskup skupa elementarnih događaja Ω. On se sastoji od onih elementarnih događaja ω koji imaju svojstvo kojim se događaj A definiše.

Kažemo da se neki događaj A realizovao ako se realizovao neki od elementarnih događaja koji mu pripadaju. Ceo skup Ω je događaj koji se realizuje uvek. Zato skup Ω nazivamo sigurnim događajem. Prazan skup Ø je nemoguć događaj i on se nikada ne može realizovati. Komplement događaja A u odnosu na skup Ω, $\Omega \backslash A$, zove se suprotan događaj događaju A i označava se sa A^C. Događaj A^C se realizuje ako i samo ako se događaj A ne realizuje.

Označimo sa $\mathfrak{F}$ klasu događaja koji se posmatraju kod nekog eksperimenta. Drugim rečima, $\mathfrak{F}$ je podskup partitivnog skupa od Ω, $\mathfrak{F} \subseteq P(\Omega)$. Presek dva skupa ćemo često umesto $A \cap B$ označavati sa AB, a uniju dva disjunktna skupa ćemo umesto $A \cup B$ označavati sa $A + B$.

Aksioma σ-polja Podskup Ƒ partitivnog skupa $P(\Omega)$ je σ–polje (σ-algebra) nad Ω ako važe uslovi:

i. $\Omega \in$ Ƒ
ii. Ako $A \in$ Ƒ, onda $A^C \in$ Ƒ
iii. Ako $\{A_i\}_{i \in N} \subseteq$ Ƒ, onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in$ Ƒ.

Primer σ-polja je Borelovo σ-polje $B = B(\mathbb{R})$ koje je definisano nad skupom realnih brojeva. Formira se pomoću familije poluotvorenih intervala $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.1.2. Neka je Ω skup elementarnih događaja i Ƒ σ–polje nad Ω. Funkcija $P :$ Ƒ $\rightarrow [0,1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega,$ Ƒ$)$ ako zadovoljava uslove:

i. $P(\Omega) = 1$
ii. Ako $\{A_i\}_{i \in N} \subseteq$ Ƒ, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1,2, \ldots$, onda

$$P(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Prostor verovatnoća je uređena trojka $(\Omega,$ Ƒ$, P)$, gde je Ω skup svih elementarnih događaja. Ƒ je σ–polje nad Ω, a P je verovatnoća na $(\Omega,$ Ƒ$)$.

Osobine verovatnoće

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Ako $A_1, A_2, \ldots, A_n \in$ Ƒ$, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n$ onda
$$P(\textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
3. Ako je $A \subseteq B$, onda je $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A^C) = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
6. Formula uključenja-isključenja
$$P(\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \ldots A_n)$$
7. $P(\sum_{i \in N} A_i) = P(A_1) + P({A_1}^C A_2) + \ldots + P({A_1}^C {A_2}^C \ldots {A_{n-1}}^C A_n)$
8. Lema o pokrivanju
$P(\bigcup_{i \in N} A_i) \leq \sum_{i \in N} P(A_i)$.

Definicija 1.1.3. Neka je $(\Omega,$ Ƒ$, P)$ prostor verovatnoća i $A, B \in$ Ƒ, pri čemu je $P(B) > 0$. Uslovna verovatnoća $P(A \mid B)$ (verovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B) je

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Događaji A i B su nezavisni ako realizacija jednog ne utiče na realizaciju drugog. Formalnije:

Definicija 1.1.4. Neka su $A, B \in \digamma$ dva događaja. Događaji A i B su nezavisni ako i samo ako

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ako događaji A i B nisu nezavisni, kažemo da su oni zavisni. Dakle A i B su nezavisni ako i samo ako $P(B \mid A) = P(B)$ ili $P(A \mid B) = P(A)$.

1.1.2 Slučajne promenljive

Koncept slučajne promenljive je centralan u teoriji verovatnoće. Zamislimo da svakom elementarnom događaju korespondiramo neku njegovu brojnu karakteristiku. Promenljiva veličina koja te brojne vrednosti prima sa određenim verovatnoćama zove se slučajna promenljiva. Slučajna promenljiva može da uzme različite brojevne vrednosti, pod uticajem slučajnih okolnosti.

Definicija 1.1.5. Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \digamma, P)$ ako $X^{-1}(S) \in \digamma$ za svako $S \in B$, gde je $B = B(\mathbb{R})$ Borelovo σ–polje. Ekvivalentno, kažemo da je X $\digamma$ – merljivo.

Neka je preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva. Ako je $X(\Omega)$ konačan skup kažemo da je X prosta slučajna promenljiva. Ako je $\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ skup realnih brojeva i

$$A_1 = \{\omega \mid X(\omega) = x_1\}$$

$$A_2 = \{\omega \mid X(\omega) = x_2\}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \{\omega \mid X(\omega) = x_n\}$$

Prosta slučajna promenljiva je linearna kombinacija indikatora $I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots, I_{A_n}$:

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k} .$$

Kako je u prostoru verovatnoća $(\Omega, \digamma, P)$ verovatnoća definisana za svaki skup iz $\digamma$ i kako $X^{-1}(S) \in \digamma$ za svako $S \in B(\mathbb{R})$, to znači da je za svako $S \in B(\mathbb{R})$ definisana funkcija

$$P_X(S) = P\{X \in S\} = P\{\omega \mid X(\omega) \in S\} = P(X^{-1}(S)).$$

Funkcija $P_X(S)$, $S \in B(\mathbb{R})$ zove se raspodela verovatnoća slučajne promenljive X.

Definicija 1.1.6. Funkcija $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ definisana sa

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Funkcija raspodele F_X u tački $x \in \mathbb{R}$ predstavlja verovatnoću događaja sastavljenog od onih elementarnih događaja ω čija je slika $X(\omega)$ manja od x. To ćemo kraće pisati

$$F_X = P\{X < x\}.$$

Funkcija raspodele postoji i jedinstvena je za svaku slučajnu promenljivu.

Najćešći tipovi slučajnih promenljivih su diskretne slučajne promenljive i apsolutno neprekidne slučajne promenljive.

Definicija 1.1.7. Slučajna promenljiva X je diskretna ako postoji prebrojiv skup brojeva R_X takav da je $P\{X \in \overline{R_x}\} = 0$, odnosno ako je skup slika od X najviše prebrojiv skup. Ako je $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ skup različitih vrednosti slučajne promenljive X diskretnog tipa, tada sa $p(x_i),\ i = 1, 2, \dots$ označavamo verovatnoću događaja $\{X = x_i\} = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$:

$$p(x_i) = P\{\omega \mid X(\omega) = x_i\} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots .$$

I važi

$$\sum_{i \in N} p(x_i) = \sum_{i \in N} P\{X = x_i\} = P(\sum_{i \in N}\{X = x_i\}) = P(\Omega) = 1.$$

Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i odgovarajuće verovatnoće $p(x_i) = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots$ čine zakon raspodele slučajne promenljive X, ili kraće raspodelu slučajne promenljive X. Zakon raspodele diskretne slučajne promenljive najčešće zapisujemo na sledeći način:

$$X\!: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \end{pmatrix}.$$

Za razliku od diskretnih, apsolutno neprekidne slučajne promenljive su takve da im ne možemo dodeliti konkretne vrednosti sa odgovarajućim verovatnoćama, već je njihov skup vrednosti neki interval ili čak čitava realna prava.

Definicija 1.1.8. Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x),\ -\infty < x < \infty$, takva da je za svaki skup $S \in B(\mathbb{R})$

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x).$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se gustina raspodele verovatnoća slučajne promenljive X.

Za $S = [a, b)\ a, b \in \mathbb{R}$, dobijamo

$$P\{a \le X < b\} = \int_a^b \varphi_X(x)dx.$$

Specijalno, ako izaberemo $S = (-\infty, x)$ dobijamo

$$F_x(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)dt, x \in \mathbb{R}.$$

Osnovne raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive su binomna raspodela, Poasonova raspodela i geometrijska raspodela. Osnovne raspodele verovatnoća apsolutno neprekidne slučajne promenljive su uniformna raspodela, eksponencijalna raspodela i normalna raspodela.

Binomna raspodela:

Upoznajmo se najpre sa Bernulijevom šemom:

U jednom eksperimentu posmatramo samo događaj A, odnosno $\Omega = \{A, \overline{A}\}$. Označimo:

$$P(A) = p, \qquad P(\overline{A}\,) = 1 - p = q.$$

Eksperiment ponavljamo n puta. Slučajna promenljiva S_n koja predstavlja broj realizacije događaja A zove se Bernulijeva slučajna promenljiva. Verovatnoća da se u n ponavljanja eksperimenta događaj A realizuje tačno k puta je jednaka

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n.$$

Binomna raspodela predstavlja model za izvođenje n istih eksperimenata, pri čemu je p verovatnoća da se realizovao pozitivno (desio se A), a q verovatnoća da se realizovao negativno (nije se desio A). Ako slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu, zapisujemo $X: \beta(n, p)$. Binomna raspodela je raspodela određena sa

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad p \in (0,1), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Poasonova raspodela:

Poasonova raspodela je nastala radi bržeg izračunavanja binomnih verovatnoća, kada je n veliko, pa posmatramo asimptotsko ponašanje kada $n \to \infty$. Tada umesto S_n pišemo S_∞. Ako slučajna promenljiva X ima Poasonovu raspodelu, to zapisujemo $X : P(\lambda)$, $\lambda > 0$ i ona je određena sa

$$P\{\, S_\infty = j \,\} = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Geometrijska raspodela:

Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj nezavisnih ponavljanja nekog eksperimenta do prve realizacije događaja A, pri čemu je $P(A) = p$. Geometrijska raspodela verovatnoća sa parametrom p data je sa

$$p(k) = P\{X = k\} = q^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad q = 1 - p.$$

Uniformna raspodela:

Uniformna raspodela je osnovna za generisanje slučajnih brojeva, što je obimno korišćeno u numeričkim simulacijama stohastičkih modela. Funkcija raspodele slučajne promenljive $X : U(a,b),\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b$ je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b. \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Eksponencijalna raspodela:

Ako slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu, to zapisujemo $X : \varepsilon(\lambda),\ \lambda > 0$. Tada je funkcija raspodele slučajne promenljive X data sa

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Normalna raspodela:

Normalna raspodela ima najveći značaj među raspodelama verovatnoća apsolutno neprekidne slučajne promenljive. Nju je uveo matematičar Gaus u vezi sa obradom rezultata merenja i, posebno, sa ocenom slučajnih grešaka. Slučajna promenljiva X ima normalnu $N(m,\sigma^2)$ raspodelu, $m \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$, ako je njena gustina raspodele

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

1.1.3 Očekivanje i disperzija slučajne promenljive

Očekivanje $E(X)$ diskretne slučajne promenljive X sa raspodelom $p(x_k),\ k = 1,2,..$ definiše se

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k),$$

i postoji ako i samo ako je $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty$.

Za apsolutno neprekidnu slučajnu promenljivu X, sa gustinom $\varphi_X(x)$, očekivanje je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)dx,$$

i ono postoji ako gornji integral apsolutno konvergira.

Disperzija (varijansa) slučajne promenljive X je:

$$D(X) = E((X - E(X))^2).$$

Standardna devijacija (prosečno odstupanje) slučajne promenljive X se definiše kao

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Neka je X slučajna promenljiva sa očekivanjem $E(X)$ i disperzijom $D(X)$. Standardizovana slučajna promenljiva X^* je

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

Neka je X^* standardizovana slučajna promenljiva. Tada je

$$E(X^*) = 0, D(X^*) = 1.$$

Centralna granična teorema Ako su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i konačnom disperzijom $D(X_k) = \sigma^2$, $k = 1, 2, \ldots$ onda važi

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}}\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, n \to \infty$$

1.2 Stohastički procesi

Poreklo teorije stohastičkih procesa može se pratiti na terenu statističke fizike. Prvi primeri i nekoliko osnovnih pojmova o stohastičkim procesima u početku su se razmatrali u statističkoj fizici na početku ovog veka. Stohastički procesi imaju veliku ulogu u mnogim granama fizike, biologije, društvenim naukama, poslovanju, ekonomiji i inženjeringu. U teoriji verovatnoće i srodnim poljima, stohastički ili slučajni proces je matematički objekat koji je obično definisan kao familija slučajnih promenljivih.

Istorijski, slučajne promenljive su bile povezane ili indeksirane nizom brojeva, koji se obično posmatraju kao tačke u vremenu, dajući interpretaciju stohastičkog procesa koji predstavlja numeričke vrednosti nekog sistema koji se slučajno menja tokom vremena, kao što je rast bakterijske populacije, fluktuiranje električne struje, kretanje molekula gasa. Primena i studiranje fenomena su inspirisali predloge za nove stohastičke procese. Primeri takvih stohastičkih procesa su Vinerov proces ili Braunovo kretanje koji je Luj Bašel koristio da izučava promene cena na Pariskoj berzi i Poasonov proces koji je koristio A. K. Erlang da studira broj telefonskih poziva koji se javlja u izvesnim vremenskim periodima. Ova dva stohastička procesa se smatraju najvažnijim i centralnim u teoriji stohastičkih procesa.

Na osnovu njihovih matematičkih svojstava, stohastički procesi se mogu podeliti u različite kategorije, koje uključuju slučajne šetnje, Markove procese, Levijeve procese, Gausovske procese, obnovljive procese, procese grananja...

1.2.1 Definicije i osobine

Zamislimo da se u svakom vremenskom trenutku t vremenskog intervala T posmatra neka karakteristika X nekog fizičkog sistema koja je slučajnog karaktera. Dakle, $X(t)$ je neka slučajna promenljiva za svako $t \in T$. To znači da na skup svih slučajnih promenljivih $\{X(t),\ t \in T\}$ možemo gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, odnosno dobijamo jednu slučajnu funkciju vremena. U tom slučaju kažemo da je $\{X(t), t \in T\}$ jedan slučajan (stohastički) proces.

Definicija 1.2.1. Stohastički (slučajni) proces je familija slučajnih promenljivih $\{X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ definisana na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Skup T je parametarski skup, a Ω je zajednički prostor ishoda slučajnih promenljivih tj. skup stanja.

Slučajni proces $\{X(t), t \in T\}$ je u stvari funkcija dva parametra t i ω. Kada govorimo o stohastičkom procesu, nekada promenljiva ω bude izostavljena, pa stohastički proces zapisujemo kao X_t ili $X(t)$. Ako je parametarski skup prebrojiv, govorimo o nizu, lancu slučajnih promenljivih. Ukoliko fiksiramo t, X_t označava slučajnu promenljivu definisanu na Ω, a ako fiksiramo $\omega \in \Omega$, X_t odgovara funkciji definisanoj na T koja se naziva jedinstvena putanja (trajektorija) ili realizacija stohastičkog procesa. Dodatno, stohastički proces može biti familija slučajnih vektora. Na primer, za dve slučajne promenljive stohastički proces je familija slučajnih vektora $\{{X_t}^1, {X_t}^2, t \in T\}$.

Postoje različite metode i tehnike za formulaciju i analizu stohastičkih procesa koji zavise od toga da li su slučajna promenljiva i parametarski skup diskretni ili neprekidni. Skup T će u našem stohastičkom modelu često predstavljati vreme. U ovom radu navešćemo neke primere stohastičkih procesa iz populacione genetike:

1. X_t je položaj objekta u vremenu t, u toku perioda od 24h, čije je rastojanje od određene tačke 0 mereno celobrojnom jedinicom. U ovom slučaju $T = \{0,1,\ldots,24\}$, a prostor stanja je $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Oba, i vreme i prostor stanja su diskretni.
2. X_t je broj rođenih u datoj populaciji u periodu $[0, t]$. U ovom slučaju $T = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ i prostor stanja je $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Vreme je neprekidno, a prostor stanja diskretan.
3. X_t je gustina populacije u vremenu $t \in T = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Prostor stanja je takođe $\mathbb{R}_+$. Oba, i vreme i prostor stanja su neprekidni.
4. X_t je gustina jednogodišnjih vrsti biljaka u godini t, gde je $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ i prostor stanja je $\mathbb{R}_+$. Vreme je diskretno, ali je prostor stanja neprekidan.

U slučaju diskretnog vremena, pretpostavke se prave u pogledu veze između stanja sistema u trenutku t i stanja u trenutku $t + 1$. U jednostavnijem slučaju prvi primer je model slučajne šetnje ili slučajnog hoda, drugi primer je jednostavan proces rađanja i treći primer je proces rađanja i umiranja sa neprekidnim prostorom stanja.

1.2.2 Uvodni primer – jednostavan proces rađanja

Jedan od najjednostavnijih primera stohastičkih procesa, opisan u drugom primeru gore, je jednostavan proces rađanja (analog eksponencijalnom rastu u determinističkoj teoriji). Deterministički model eksponencijalnog rasta zadovoljava $y = ae^{bt}$, $a, b > 0, t \in [0, \infty)$. Stohastički model je neprekidan u vremenu, ali diskretnog prostora stanja. Pretpostavljamo tri stvari u razvoju modela procesa rađanja:

i. Nijedan pojedinac ne umire.
ii. Ne postoji interakcija između pojedinaca.
iii. Stopa rađanja b je ista za sve pojedince.

Prvo ćemo izvesti deterministički model. Neka $n(t)$ označava obim populacije u trenutku t. U kratkom vremenskom periodu Δt porast obima populacije u odnosu na jednog pojedinca je $b \times \Delta t$, a porast obima u odnosu na sve pojedince je $b\Delta t \times n(t)$. Tada

$$n(t + \Delta t) = n(t) + b\Delta t n(t).$$

Sređivanjem ovog izraza dobijamo

$$\frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{\Delta t} = bn(t).$$

Puštajući da $\Delta t \to 0$ dolazimo do diferencijalne jednačine za eksponencijalni rast

$$\frac{dn(t)}{dt} = bn(t).$$

Ako je početni obim populacije (broj stanovnika) $n(0) = a$, tada je rešenje diferencijalne jednačine

$$n(t) = ae^{bt}.$$

Obim populacije je predviđen u vremenu t sa apsolutnom sigurnošću kada su poznate početna veličina a i stopa rađanja b.

Dalje ćemo formulisati stohastički model. U ovom slučaju obim populacije nije poznat sa sigurnošću već sa nekom verovatnoćom. Obim populacije će biti n u vremenu t. Pretpostavićemo je da je obim populacije diskretna vrednost, ali je vreme neprekidno. Tada stohastički proces zadovoljava $X_t \in \{0,1,2, \dots\}$, $t \in [0, \infty)$, gde je X_t diskretna slučajna promenljiva za obim populacije u trenutku t. Neka je funkcija verovatnoće slučajne promenljive X_t u oznaci $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ gde je

$$p_n(t) = P\{X_t = n\}.$$

Slučajne promenljive $\{X_t\}$ povezane su sledećim pretpostavkama. Pretpostavimo da u dovoljno malom vremenskom periodu Δt:

1. Verovatnoća da se desi rođenje je približno $b\, \Delta t$.
2. Verovatnoća više od jednog rođenja u vremenu Δt je zanemarljiva.
3. U $t = 0, P\{X_0 = a\} = 1$, gde je a kao gore navedeno.

To da je verovatnoća zanemarljiva znači da je reda Δt ili $o(\Delta t)$; to jest $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, $o(\Delta t)$ teži nuli brže nego Δt. Tada se prva pretpostavka može navesti preciznije kao verovatnoća da se dogodi rođenje je $b\Delta t + o(\Delta t)$.

Zasnovano na pretpostavkama 1 i 2, da bi populacija bila veličine n u trenutku $t + \Delta t$, ili je veličine n u trenutku t i ne dešava se rođenje u $(t, t + \Delta t)$, ili je veličine $n - 1$ u trenutku t i desi se jedno rođenje u $(t, t + \Delta t)$. Verovatnoća da se obim populacije sa n poveća na $n + 1$ u $(t, t + \Delta t)$ je približno $b\, \Delta t \times n$, a verovatnoća da populacija ne uspe da se poveća u tom vremenskom periodu je $1 - b\, \Delta t \times n$.

Pretpostavke povezuju stanje procesa u trenutku $t + \Delta t$, $X_{t+\Delta t}$, sa stanjem u trenutku t, X_t. U terminima verovatnoće, verovatnoća da je stanje jednako n u trenutku $t + \Delta t$ zavisi od toga da li je u trenutku t obim populacije bio $n - 1$ i desilo se rođenje ili je obim bio n i nije se desilo rođenje, to jest

$$p_n(t + \Delta t) = p_{n-1}(t) b(n-1)\Delta t + p_n(t)(1 - bn\, \Delta t).$$

Stanje procesa u trenutku $t + \Delta t$ zavisi samo od stanja u trenutku t, a ne od vremena pre t (ovo je poznato kao svojstvo Markova, o čemu će biti reči kasnije). Kada oduzmemo $p_n(t)$ od obe strane jednačine gore, podelimo sa Δt i pustimo da $\Delta t \to 0$ dobijamo sistem diferencijalnih jednačina poznatih kao Kolmogorove diferencijalne jednačine:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = b(n-1)p_{n-1}(t) - bnp_n, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Na primer,

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -bp_1(t), \frac{dp_2(t)}{dt} = bp_1(t) - 2bp_2(t).$$

Ako je obim populacije na početku 0, tada ne može da se dogodi rođenje i $p_0(t) = 1$ u svakom trenutku.

Proces počinje sa poznatom raspodelom verovatnoće za X_0, to je $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$. Neka je u početku obim populacije a, tj. $X_0 = a$, tako da početna verovatnoća zadovoljava $p_0(0) = 1$ i $p_n(0) = 0,\ n \neq a$. Jednačina Kolmogorova se može rešiti iterativno ili koristeći tehnike generatrise momenta. Rešenje $p_n(t)$ ima negativnu binomnu raspodelu za svako fiksirano vreme t:

$$p_n(t) = \binom{n-1}{a-1} e^{-abt}(1 - e^{-bt})^{n-a}, n = a, a+1, a+2.$$

Informacije o stohastičkom procesu mogu se proceniti iz raspodele verovatnoće (npr. očekivanje i varijansa). Stoga, cilj stohastičkog modeliranja je određivanje raspodele verovatnoće povezane sa stohastičkim procesom. Ako ovo nije moguće onda se traže očekivanje ili disperzija ili neko drugo svojstvo raspodele.

Glava 2

2. Lanci Markova u diskretnom vremenu

2.1 Uvod

Osnovni koncept lanaca Markova predstavio je Andrej Andrejevič Markov u radu koji je objavljen 1907. godine. Od tada su mnogi veliki matematičari doprineli daljem razvoju teorije lanaca Markova, a jedni od najznačajnijih bili su Kolmogorov, Dub, Levi itd. Inače, ova tema je i dalje veoma aktuelna, sa važnim razvojem kako u teoriji, tako i u praktičnoj primeni. Lanci Markova spadaju u relativno jednostavnu, ali i veoma interesantnu i korisnu klasu slučajnih procesa. Oni opisuju slučajne pojave ili sisteme koji se menjaju tokom vremena, a njihova jednostavna struktura omogućava nam da saznamo mnogo toga o njihovom ponašanju u budućnosti. Teorija i primene lanaca Markova su verovatno jedna od najrazvijenijih teorija stohastičkih procesa. Njima se mogu modelirati mnoge pojave u biologiji, psihologiji, teoriji masovnog opsluživanja, sportu itd.

Imati svojstvo Markova znači, ukratko, da pored datog trenutnog stanja, verovatnoća budućeg stanja sistema ne zavisi od prošlih. Drugim rečima, to znači da opis sadašnjosti u potpunosti sadrži informaciju koja može uticati na buduće stanje procesa. Primer može da bude slučajna šetnja po brojevnoj pravoj, gde se pri svakom koraku pozicija menja za 1. Sa svake pozicije postoje dva moguća prelaza: na sledeći ili na prethodni ceo broj. Verovatnoće ovih prelaza tada zavise samo od trenutnog stanja, a ne od načina kako se do njega došlo.

U ovoj glavi uvedeni su lanci Markova u diskretnom vremenu, oznake, definicije i osnovne osobine. Kasnije ćemo dati i neke dobro poznate primere lanaca Markova u diskretnom vremenu, uključujući i model slučajne šetnje (hoda) u 1, 2 i 3 dimenzije. Oba, i vreme i prostor stanja su diskretni. Lanci Markova u diskretnom vremenu mogu biti klasifikovani kao nesvodljivi ili svodljivi, periodični ili aperiodični i povratni ili prelazni. Ova klasifikacija pomaže u određivanju ponašanja lanaca Markova.

2.2 Definicija i oznake

Razmatramo stohastički proces u diskretnom vremenu $\{X_n\}$, $n = 0,1,2,\dots$, gde je slučajna promenljiva X_n diskretna slučajna promenljiva definisana na konačnom ili beskonačno prebrojivom prostoru stanja. Označavaćemo prostor stanja sa $\{1,2,\dots\}$. Promenljiva n koristi se umesto promenljive t da označi element iz parametarskog skupa, gde je parametarski skup definisan kao $\{0,1,2,\dots\}$. Dakle, indeks n je označen kao „vreme“ n.

Markovljev proces je stohastički proces u kome buduće ponašanje sistema zavisi samo od sadašnjosti, ne od prošlosti. Formalnije:

Definicija 2.2.1. Stohastički proces u diskretnom vremenu $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ima svojstvo Markova ako

$$P\{X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\},$$

gde vrednosti $i_k \in \{1,2,\dots\}$, za $k = 0,1,2,\dots,n$. Tada se stohastički proces zove lanac Markova, ili tačnije lanac Markova u diskretnom vremenu. Ako je prostor stanja konačan naziva se konačan lanac Markova ili lanac Markova u konačnom procesu. Stohastički proces označava se kao lanac onda kada je prostor stanja diskretan.

Označimo funkciju raspodele verovatnoće slučajne promenljive X_n sa $\{p_i(n)\}_{i=0}^{\infty}$ gde je

$$p_i(n) = P\{X_n = i\}\,.$$

Stanje procesa u trenutku n, X_n, je povezano sa procesom u trenutku $n+1$ uz to da se zna verovatnoća prelaza. Ako je proces u stanju i u trenutku n, u narednom trenutku $n+1$ biće isto u stanju i, ili će se premestiti u drugo stanje j. Verovatnoće za ove promene u stanjima definisane su kroz verovatnoće prelaza.

Definicija 2.2.2. Verovatnoće prelaza iz i–tog stanja u trenutku n u j-to stanje u trenutku $n+1$ ili samo verovatnoće prelaza u oznaci $p_{ji}(n)$ definisane su kroz uslovnu verovatnoću:

$$p_{ji}(n) = P\{\,X_{n+1} = j \mid X_n = i\,\}, i,j = 1,2,\dots$$

Definicija 2.2.3. Ako verovatnoće prelaza $p_{ji}(n)$ u lancu Markova ne zavise od trenutka n, kaže se da je lanac stacionaran ili homogen (ili da su verovatnoće prelaza lanaca Markova homogene). U ovom slučaju koristimo oznaku p_{ji}. Ukoliko verovatnoće prelaza zavise od vremena, $p_{ji}(n)$, kažemo da je lanac nestacionaran ili nehomogen.

Ukoliko nije naznačeno drugačije, podrazumevaćemo da je lanac Markova stacionaran. Za svako stanje, verovatnoće prelaza iz jednog u drugo stanje zadovoljavaju

$$\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} p_{ji} = 1, \text{ za } i = 1,2,\dots \text{ i } p_{ji} \geq 0.$$

To znači da, sa verovatnoćom jedan, proces u nekom stanju i mora da se pomeri u neko drugo stanje j, $j \neq i$ ili da ostane u stanju i u sledećem vremenskom intervalu.

Definicija 2.2.4. Matrica prelaza lanaca Markova u diskretnom vremenu $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ sa prostorom stanja $\{1,2,\dots\}$ i verovatnoćom prelaza $\{p_{ji}(n)\}_{i,j=0}^{\infty}$ je označena sa $P = (p_{ji})$ gde je

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ako je skup stanja konačan $\{1,2,\ldots,N\}$ tada je P jedna $N \times N$ matrica. Primetimo da kada saberemo elemente kolona dobijamo $\sum_{j=1}^{N} p_{ji} = 1$.

Matrica prelaza P je takozvana stohastička matrica:

Definicija 2.2.5. Nenegativna matrica sa svojstvom da je suma svake kolone jednaka 1 naziva se stohastička matrica. Ukoliko je i suma vrste takođe 1, tada se matrica zove dvostruko stohastička.

Definicija 2.2.6. Verovatnoća prelaza u n koraka, u oznaci ${p_{ji}}^{(n)}$ je verovatnoća prelaza iz stanja i u stanje j u n koraka:

$$
{p_{ji}}^{(n)} = P\{X_n = j \mid X_0 = i\}.
$$

Matrica prelaza u n koraka je označena $P^{(n)} = ({p_{ji}}^{(n)})$. U slučaju $n = 1$, imamo ${p_{ji}}^{(1)}$ = p_{ji} i $P^{(1)} = P$, a u slučaju $n = 0$ je

$$
{p_{ji}}^{(0)} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases},
$$

gde je δ_{ji} Kronekerov delta simbol i $P^{(0)} = I$, a I jedinična matrica.

Postoji veza između verovatnoće prelaza u n koraka, verovatnoće prelaza u s koraka i verovatnoće prelaza u $(n-s)$ koraka. Ove veze date su jednačinana Čepmen – Kolmogorova:

$$
{p_{ji}}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} {p_{jk}}^{(n-s)} {p_{ki}}^{(s)}, 0 < s < n.
$$

Za dokaz koristimo definiciju verovatnoće prelaza u n koraka, uslovnu verovatnoću i svojstvo Markova:

$$
\begin{aligned}
{p_{ji}}^{(n)} &= P\{X_n = j \mid X_0 = i\} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} P\{X_n = j, X_s = k \mid X_0 = i\} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} P\{X_n = j, X_s = k, X_0 = i \mid X_0 = i\} P\{X_s = k \mid X_0 = i\} \\
&= P\{X_n = j \mid X_s = k\} P\{X_s = k \mid X_0 = i\} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} {p_{jk}}^{(n-s)} {p_{ki}}^{(s)}.
\end{aligned}
$$

■

Prethodni identitet možemo zapisati u matričnom obliku

$$
P^{(n)} = P^{(n-s)} P^{(s)}.
$$

Kako je $P^{(1)} = P$, pa je i $P^{(2)} = P^2$ tj. uopšteno $P^{(n)} = \ P^n$.

Neka $p(n)$ označava vektor iz funkcije verovatnoće X_n, tj. $p(\mathrm{n}) = (p_1(n), p_2(n), ..)^T$, gde je $p_i(n) = P\{\, X_n = i\}$, stanja su raspoređena u rastućem redosledu u vektoru kolona $p(n)$ i zadovoljeno je $\sum_{i=1}^{\infty} p_i\,(n) = 1$. S obzirom na datu raspodelu verovatnoće X_n, raspodela verovatnoća X_{n+1} može se naći množenjem matrice prelaza P sa $p(n)$, tj.

$$p_i(n+1) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}\, p_j(n)$$

Ili u matričnom obliku

$$p(n+1) = Pp(n).$$

Uopšteno

$$p(n+m) = P^{(n+m)}p(0) = P^n\big(P^m p(0)\big) = P^n p(m).$$

2.3 Klasifikacija stanja

Veze između stanja lanaca Markova vode do klasifikacione šeme stanja i konačne klasifikacije lanaca Markova.

Definicija 2.3.1. Stanje j se može dostići iz stanja i (ili u stanje j se može stići iz stanja i) ako postoji nenula verovatnoća ${p_{ji}}^{(n)} > 0$, za neko $n \geq 0$, u oznaci $i \to j$. Ako i može biti dostignuto iz j, $j \to i$ i ako j može biti dostignuto iz i, $i \to j$, tada kažemo da stanja i i j međusobno komuniciraju ili su iste klase, u oznaci $i \leftrightarrow j$.

Tada postoje nenegativni celi brojevi n i n' takvi da ${p_{ji}}^{(n)} > 0$ i ${p_{ij}}^{(n\prime)} > 0$. Relacija $i \to j$ može biti predstavljena kao na slici 2.3.1.

Slika 2.3.1. Na direktnom grafu važi $i \to j$ i $i \to k$, ali nije slučaj da $k \to i$. *Slika preuzeta iz [1].*

Relacija $i \leftrightarrow j$ je relacija ekvivalencije na prostoru stanja $\{1, 2, \ldots\}$. Relacija zadovoljava sledeća tri svojstva:

1) Refleksivnost: $i \leftrightarrow i$, zato što je ${p_{ii}}^{(0)} = 1$. Počev od stanja i, sistem ostaje u stanju i ako nema promene vremena.
2) Simetričnost: $i \to j$ iz definicije sledi $j \to i$.
3) Tranzitivnost: $i \to j, j \to k$ sledi $i \to k$
   Da bismo dokazali ovo, primetimo da iz 1) i 2) sledi da postoje nenegativni celi brojevi

n i m takvi da $p_{ji}{}^{(n)} > 0$ i $p_{kj}{}^{(m)} > 0$. Tako:

$$\begin{aligned} p_{ki}{}^{(n+m)} &= P\{ X_{n+m} = k \mid X_0 = i \} \\ &\geq P\{ X_{n+m} = k, X_n = j \mid X_0 = i \} \\ &= P\{ X_{n+m} = k \mid X_n = j\} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} \\ &= p_{kj}{}^{(m)} p_{ji}{}^{(n)} \end{aligned}$$

Tada $p_{ki}{}^{(n+m)} > 0$ i $i \to k$. Slično može biti pokazano $p_{ik}{}^{(n+m)} > 0$ što implicira $k \to i$.

Definicija 2.3.2. Relacija ekvivalencije stanja u lancu Markova se definiše kao skup klasa ekvivalencije.

Definicija 2.3.3. Skup klasa ekvivalencije stanja u lancu Markova u diskretnom vremenu se definiše kao klasa lanaca Markova ili klase komunikacije.

Ako svako stanje lanaca Markova može biti dostignuto iz svakog drugog stanja, tada postoji samo jedna klasa komunikacije (sva stanja su u jednoj klasi komunikacije).

Definicija 2.3.4. Ako postoji samo jedna klasa lanaca Markova (klasa komunikacije), onda kažemo da je lanac Markova nesvodljiv, ali ako postoji više od jedne klase, tada je lanac Markova svodljiv.

Definicija 2.3.5. Skup stanja C je zatvoren, ako je nemoguće dostići bilo koje stanje van C iz bilo kog stanja u C prelazom iz jednog u drugo; $p_{ji} = 0$ ako $i \in C$ i $j \in C$.

Dovoljan uslov koji pokazuje da je lanac Markova nesvodljiv je postojanje pozitivnog celog broja n, takvog da $p_{ji}{}^{(n)} > 0$ za svako i i j, tada je svaki element u P^n pozitivan $P^n > 0$ za neki pozitivan ceo broj n. Za konačan lanac Markova, nesvodljivost može biti pokazana iz usmerenog grafa za taj lanac. Konačan lanac Markova sa stanjima $\{1, 2, \dots N\}$ je nesvodljiv ako postoji usmerena putanja iz i u j $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

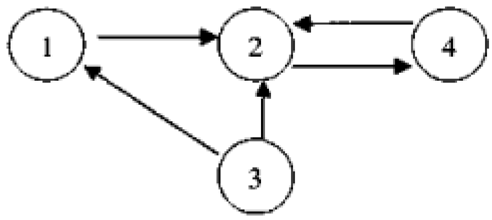
Definicija nesvodljivih i svodljivih lanaca primenjuje se opštije na $N \times N$ matrice $A = (a_{ij})$. Usmereni graf, ili digraf, sa N čvorova može biti konstruisan iz $N \times N$ matrice. Postoji jedinstvena usmerena putanja iz čvora i do čvora j, ako $a_{ji} \neq 0$. Tada čvor j može biti dostignut od čvora i u jednom koraku. Čvor j može biti dostignut iz čvora i u n koraka ako $a_{ji}{}^{(n)} \neq 0$, gde je $a_{ji}{}^{(n)}$ element u j-tom redu i i-toj koloni A^n. Usmereni graf sa N čvorova, konstruisan iz matrice A je jako povezan ako postoji niz usmerenih putanja iz i do j $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ (tj. $i \leftrightarrow j$). Ili je jako povezan ako postoji direktna putanja od čvora i do čvora j i direktna putanja od čvora j do čvora i. Tada je usmereni graf jako povezan ako je moguće početi od bilo kog čvora i i stići u bilo koji čvor j u konačnom broju koraka. Matrična nesvodljivost je definisana kao jako povezan graf.

Definicija 2.3.6 Kažemo da je matrica A nesvodljiva ako i samo ako je njen usmereni graf jako povezan. Matrica A je svodljiva ako njen usmereni graf nije jako povezan.

Primer 2.3.1. Lanac Markova u diskretnom vremenu sa 4 stanja {1, 2, 3, 4} ima sledeću matricu prelaza:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{13} & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ 0 & p_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gde p_{ij} označava pozitivan element. Tada je lako videti $4 \leftrightarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$ i $4 \leftrightarrow 2 \leftarrow 3$ tj.



Slika 2.3.2. Direktni graf za primer 2.3.1 . *Slika preuzeta iz [1].*

Kako je nemoguće vratiti se u stanja 1 ili 3 nakon što su napuštena, svako od ovih stanja formira jednu klasu komunikacije $\{1\}$, $\{3\}$. Skup $\{2,4\}$ je treća klasa komunikacije. Lanac Markova je svodljiv. Dodatno, skup $\{2,4\}$ je zatvoren, ali skupovi $\{1\}$, $\{3\}$ nisu zatvoreni. Kada bi jedan od elemenata p_{12} ili p_{14}bio pozitivan, klasa komunikacije bi se sastojala od $\{1,2,4\}$ i $\{3\}$. Kada bi jedan od elemenata p_{32} ili p_{34} bio pozitivan, tada bi postojala jedna (jedinstvena) klasa komunikacije $\{1,2,3,4\}$. Onda bi lanac Markova bio nesvodljiv, matrica P nesvodljiva i direktan graf jako povezan.

□

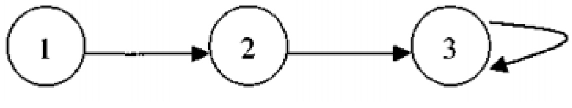
Definicija 2.3.7. Period stanja i, u oznaci $d(i)$ je najveći zajednički delilac svih celih brojeva $n \geq 1$ za koje je ${p_{ii}}^{(n)} > 0$, tj.

$$d(i) = NZD\left(n \mid {p_{ii}}^{(n)} > 0, n \geq 1\right).$$

Definicija 2.3.8. Ako stanje i ima period $d(i) > 1$, kažemo da je ono periodično ili da je njegov period $d(i)$. Ako je period stanja jednak 1, kažemo da je aperiodično. Ako ${p_{ii}}^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 1$, definišemo $d(i) = 0$.

Primer 2.3.2 Na slici 2.3.3. dat je direktan graf lanaca Markova sa 3 stanja {1,2,3}. Odgovarajuća matrica prelaza je

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Slika 2.3.3. Direktan graf za primer 2.3.2 . *Slika preuzeta iz [1].*

Vidimo da postoje 3 klase komunikacije $\{1\}$, $\{2\}$ i $\{3\}$. Važi $d(i) = 0$ za $i = 1,2$ zato što je $p_{ii}{}^{(n)} = 0, i = 1, 2, n = 1, 2, \ldots, d(3) = 1$, pa je stanje 3 aperiodično.

□

Teorema 2.3.1. Ako $i \leftrightarrow j$, tada je $d(i) = d(j)$.

2.4 Vreme prvog povratka

Pretpostavimo da proces počinje u stanju i, $X_0 = i$. Tada definišemo prvi povratak u stanje i prvi dolazak u stanje j, $j \neq i$.

Definicija 2.4.1. Neka $f_{ii}{}^{(n)}$ označava verovatnoću da sistem prvi put dođe u stanje i u trenutku $n, n \geq 1$, ako je u početnom trenutku bio u stanju i, tj.

$$f_{ii}{}^{(n)} = P\{\, X_n = i, X_m \neq i, m = 1, 2, \ldots, n-1 \mid X_0 = i\}\,.$$

Verovatnoće $f_{ii}{}^{(n)}$ su poznate kao verovatnoće prvog povratka i označavaju prvi put kada se lanac Markova vrati u stanje i, tada

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}{}^{(n)} \leq 1.$$

Definišemo $f_{ii}{}^{(0)} = 0$ i primetimo $f_{ii}{}^{(1)} = p_{ii}$, ali u opstem slučaju $f_{ii}{}^{(n)}$ nije jednak $p_{ii}{}^{(n)}$.

Definicija 2.4.2. Kažemo da je stanje i prelazno ako $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}{}^{(n)} < 1$ i da je stanje i povratno ako važi $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}{}^{(n)} = 1$.

Dakle, stanje je povratno ako je verovatnoća da se sistem iz stanja i barem jednom vrati u stanje i, u suprotnom je prelazno. Ako je stanje i povratno, onda skup $\{f_{ii}{}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ definiše raspodelu verovatnoća za slučajnu promenljivu koja predstavlja prvi trenutak vraćanja

$$T_{ii} = \inf_{m \geq 1} \{\, m \mid X_m = i, X_0 = i\,\},$$

gde je $T_{ii} = n$ sa verovatnoćom $f_{ii}{}^{(n)}, n = 0,1, \ldots$.

Ako je stanje i prelazno, onda skup $\{f_{ii}{}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ ne definiše ceo skup verovatnoća neophodnih za definisanje raspodele verovatnoća. Međutim, možemo definisati $1 - f_{ii}$ kao verovatnoću da se neće vratiti u stanje i. Slučajnu promenljivu T_{ii} možemo posmatrati kao vreme čekanja dok se lanac ne vrati u stanje i.

Definicija 2.4.3. Očekivanje raspodele T_{ii} se naziva i očekivanje vremena povratka ili očekivanje trenutka prvog povratka za stanje i u oznaci $\mu_{ii} = E(T_{ii})$, tj. za povratno stanje i:

$$\mu_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ji}{}^{(n)}.$$

Pošto T_{ii} nije definisano za prelazno stanje, pretpostavićemo da je očekivanje trenutka prvog povratka za prelazno stanje uvek beskonačno. Očekivanje trenutka povratka za povratno stanje može biti konačno ili beskonačno.

Definicija 2.4.4. Ako povratno stanje i zadovoljava $\mu_{ii} < \infty$, tada kažemo da je stanje i pozitivno povratno, a ako zadovoljava $\mu_{ii} = \infty$, tada je stanje nula povratno.

Definicija 2.4.5. Neka $f_{ji}{}^{(n)}$ označava verovatnoću da sistem prvi put dođe u stanje j, u trenutku $n, n \geq 1$, ako je u početnom trenutku bio u stanju $i, X_0 = i, i \neq j$, tj.

$$f_{ji}{}^{(n)} = P\{X_n = j, X_m \neq j, m = 1, 2, \ldots, n-1 \mid X_0 = i\}, i \neq j.$$

Verovatnoće $f_{ji}{}^{(n)}$ su poznate kao verovatnoće prvog prelaza. Definišemo $f_{ji}{}^{(0)} = 0$. To dolazi iz definicije da je $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}{}^{(n)} \leq 1$. Ako $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}{}^{(n)} = 1$, onda je $\{f_{ii}{}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ raspodela verovatnoća slučajne promenljive T_{ji}, poznatom kao prvi prelaz u stanje j iz stanja i, gde je

$$T_{ji} = inf_{m\geq 1}\{m \mid X_m = j, X_0 = i\}.$$

Definicija 2.4.6. Ako $X_0 = i$, tada se očekivanje trenutka prvog prelaza u stanje j, u oznaci $\mu_{ii} = E(T_{ji})$ definiše kao

$$\mu_{ji} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ji}{}^{(n)}, j \neq i.$$

2.5 Osnovna teorema lanaca Markova

Lema 2.5.1. (Abelova konvergencija)

i. Ako $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergira, tada $\lim_{s\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$.
ii. Ako $a_k \geq 0$ i $\lim_{s\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = a \leq \infty$, tada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$.

Teorema 2.5.1. Stanje i je povratno (prelazno) ako i samo ako $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}{}^{(n)}$ divergira (konvergira), tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}{}^{(n)} = \infty \ (< \infty).$$

Posledica 2.5.1. Pretpostavimo da je $i \leftrightarrow j$. Stanje i je povratno (prelazno) ako i samo ako je stanje j povratno (prelazno).

Dokaz Pretpostavimo da je $i \leftrightarrow j$ i i je povratno stanje. Tada $\exists n, m \geq 1$ takvi da ${p_{ij}}^{(n)} > 0$ i ${p_{ji}}^{(m)} > 0$. Neka je k nenegativan ceo broj, takav da važi

$$ {p_{jj}}^{(m+n+k)} \geq {p_{ji}}^{(m)} {p_{ii}}^{(k)} {p_{ij}}^{(n)}. $$

Tada je

$$ \sum_{k=0}^{\infty} {p_{jj}}^{(k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} {p_{jj}}^{(m+n+k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} {p_{ji}}^{(m)} {p_{ii}}^{(k)} {p_{ij}}^{(n)} = {p_{ji}}^{(m)} {p_{ij}}^{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} {p_{ii}}^{(k)}. $$

Desna strana je beskonačna, tj. divergira zato što je stanje i povratno (prema teoremi 2.5.1.). Tada i $\sum_{k=0}^{\infty} {p_{jj}}^{(k)}$ mora da divergira, pa je stanje j povratno. Analogno za prelazno stanje, jer stanje koje nije povratno jeste prelazno.

■

Posledica 2.5.2. Svaka klasa povratnih stanja u lancu Markova je zatvoren skup.

Dokaz Neka je C klasa povratnih stanja. Pretpostavimo suprotno da C nije zatvoren skup. Tada, za neko $i \in C$ i $j \notin C$ $p_{ji} > 0$. Kako $j \notin C$, nemoguce je vratiti se u skup C iz stanja j (inače $i \leftrightarrow j$). Tada počevši od stanja i, verovatnoća da se nikad ne vrati u C je barem p_{ji} ili $\sum_n {f_{ii}}^{(n)} \leq 1 - p_{ji} < 1$, što je u kontradikciji sa tim da je i povratno stanje. Zato, C mora biti zatvoren skup.

■

Teorema 2.5.2. (Osnovna granična teorema za aperiodične lance Markova) Neka je lanac Markova povratan, nesvodljiv i aperiodičan. Tada je

$$ \lim_{n \to \infty} {p_{ij}}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}}, $$

gde je μ_{ii} očekivanje trenutka povratka za stanje i definisano u Definiciji 2.4.3. i i i j su bilo koja stanja lanca. Ako $\mu_{ii} = \infty$, tada $\lim_{n \to \infty} {p_{ij}}^{(n)} = 0$.

Teorema 2.5.3. (Osnovna granična teorema za periodične lance Markova) Neka je lanac Markova povratan, nesvodljiv i d-periodičan. Tada je

$$ \lim_{n \to \infty} {p_{ij}}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{ii}}, $$

i ${p_{ii}}^{(m)} = 0$, ako m nije višestrukost od d, gde je μ_{ii} očekivanje trenutka povratka za stanje i. Ako $\mu_{ii} = \infty$, tada $\lim_{n \to \infty} {p_{ij}}^{(nd)} = 0$.

Ako je $\mu_{ii} = \infty$, tada je stanje i nula povratno i ako je $0 < \mu_{ii} < \infty$, tada je stanje i pozitivno povratno. Može se pokazati da, ako je jedno stanje u klasi komunikacije pozitivno povratno, onda su sva stanja u klasi pozitivno povratna. U ovom slučaju je cela klasa pozitivno povratna. Dodatno imamo, ako je jedno stanje u klasi komunikacije nula povratno, onda su sva stanja u klasi nula povratna. Tada na osnovu prethodnih rezultata imamo da svaki nesvodljiv lanac Markova može biti klasifikovan kao:

- *(1)* periodičan ili *(2)* aperiodičan
- *(i)* prelazan ili *(ii)* nula povratan ili *(iii)* pozitivno povratan.

Definicija 2.5.1. Stanje je ergodično, ako je i aperiodično i pozitivno povratno. Ergodičan lanac je lanac Markova koji je nesvodljiv, aperiodičan i pozitivno povratan.

Kada je cela klasa stanja ili lanac ergodičan, onda kažemo da su jako ergodični. Ako je ergodična klasa ili je lanac nula povratan, kažemo da su slabo ergodični.

2.6 Stacionarna raspodela verovatnoća

Stacionarna raspodela verovatnoća predstavlja ekvilibrijum lanaca Markova, to je raspodela verovatnoća koja ostaje fiksna u vremenu. Na primer, ako je lanac inicijalno stacionarne raspodele verovatnoća, $p(0) = \pi$, tada $p(n) = p^n \pi$, za svaki trenutak n.

Definicija 2.6.1. Stacionarna raspodela verovatnoća lanca Markova sa skupom stanja $\{1,2,\ldots\}$ je nenegativan vektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)^T$ koji zadovoljava $P\pi = \pi$ i čiji je zbir elemenata jednak 1, tj. $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$.

Definicija 2.6.1. takođe se primenjuje za konačan lanac Markova, gde je vektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)^T$ i $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$. U konačnom slučaju π je desni svojstveni vektor od P koji odgovara svojstvenoj vrednosti $\lambda = 1$. Može postojati jedan ili više od jednog linearnog svojstvenog vektora koji odgovara svojstvenoj vrednosti $\lambda = 1$. Zapravo, može biti najviše *N* linearno nezavisnih svojstvenih vektora. Ako postoji više od jednog, tada stacionarna raspodela nije jedinstvena.

Teorema 2.6.1 Pretpostavimo da je lanac Markova u diskretnom vremenu nesvodljiv, pozitivno povratan i aperiocičan (jako ergodičan) sa skupom stanja $\{1,2,\ldots\}$ i matricom prelaza P. Tada postoji jedinstvena pozitivna stacionarna raspodela $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)^T$, $P\pi = \pi$ takva da

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}{}^{(n)} = \pi_i \,, i = 1,2,\ldots$$

Ova teorema daje dovoljne uslove na lancu za egzistenciju i jedinstvenost. Matrica prelaza jako ergodičnog lanca zadovoljava

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_1 & \pi_1 & \cdots \\ \pi_2 & \pi_2 & \pi_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tako, $\lim_{n\to\infty} P^{(n)} p(0) = \pi$.

2.7 Konačni lanci Markova

Važno svojstvo konačnih lanaca Markova (lanaca Markova sa konačnim skupom stanja) je to što ne postoje nula povratna stanja i ne mogu sva stanja da budu prelazna. Dakle, nesvodljiv konačan lanac Markova je pozitivno povratan.

Lema 2.7.1. Ako je j prelazno stanje, a i je proizvoljno stanje u lancu Markova sa konačnim skupom stanja, onda je

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}{}^{(n)} = 0.$$

Teorema 2.7.1. U konačnom lancu Markova ne mogu sva stanja biti prelazna i nijedno stanje ne može biti nula povratno. Tada je nesvodljiv konačan lanac Markova pozitivno povratan.

Dokaz Iz prethodne leme imamo da, ako je j prelazno, tada $\lim_{n\to\infty} p_{ji}{}^{(n)} = 0$ za $i = 1, 2, \ldots, N$, gde je N broj stanja.

Pretpostavimo da su sva stanja prelazna. Identitet $\lim_{n\to\infty} p_{ji}{}^{(n)} = 0$ važi za svako $i, j = 1, 2, \ldots, N$ i $\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = 0$. Matrica $P^{(n)}$ je stohastička matrica. Zato je $\sum_{j=1}^{N} p_{ji}{}^{(n)} = 1$, tj. suma kolona $P^{(n)}$ je 1. Pustimo limes kada $n \to \infty$. Kako je suma konačna limes i suma mogu da zamene mesta i dobijamo $\sum_{j=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p_{ji}}^{(n)} = 1$, što je u kontradikciji sa tvrđenjem sa početka dokaza, tako da ne mogu sva stanja da budu prelazna.

Pretpostavimo da postoji stanje i koje je nula povratno i $i \in C$, gde je C klasa stanja. Klasa C je zatvorena prema Posledici 2.5.2. i sva stanja u C su nula povratna. Pretpostavimo da je klasa C nula povratna i aperiodična. Tada, prema osnovnoj graničnoj teoremi za aperiodične lance Markova važi $\lim_{n\to\infty} p_{ij}{}^{(n)} = 0 \; \forall i, j \in C$. Podmatrica P_C matrice P, koja sadrži sva stanja iz C je stohastička matrica ($p_{kj}{}^{(n)} = 0, k \notin C$). Međutim $\lim_{n\to\infty} P_C{}^{(n)} = 0$, što je nemoguće. Tada su sva stanja pozitivno povratna.

Pretpostavimo da je klasa C periodična i nula povratna. Tada, prema osnovnoj graničnoj teoremi za periodične lance Markova imamo $\lim_{n\to\infty} p_{ii}{}^{(n)} = 0$ za bilo koje $i \in C$. Dalje, za bilo koje stanje $j \in C$, kako je $i \leftrightarrow j$, postoje pozitivni celi brojevi n i m takvi da

$$p_{ij}{}^{(m)} > 0 \text{ i } p_{ji}{}^{(n)} > 0.$$

Dakle,

$$p_{ii}{}^{(m+n)} \geq p_{ij}{}^{(n)} p_{ji}{}^{(m)} > 0.$$

Kada fiksiramo n i pustimo da $m \to \infty$, dobijamo $\lim_{m\to\infty} p_{ji}{}^{(m)} = 0$. Takođe, kada fiksiramo m i pustimo da $n \to \infty$, dobijamo $\lim_{n\to\infty} p_{ij}{}^{(n)} = 0$. Tako $\lim_{n\to\infty} P_C{}^{(n)} = 0$, gde je P_C podmatrica P sastavljena od stanja iz C. Ovo je nemoguće pošto je $P_C{}^{(n)}$ stohastička matrica. Tada su sva stanja pozitivno povratna.

U slučaju da je lanac Markova nesvodljiv, tada postoji samo jedna klasa i sva stanja u toj klasi moraju biti pozitivno povratna, nula povratna ili prelazna. Kako ne mogu sva stanja biti prelazna i nema nula povratnih stanja, sledi da sva stanja moraju biti pozitivno povratna.

■

Kako ne postoji nula povratno stanje u konačnim lancima Markova, postoje samo četiri tipa klasifikacione šeme zasnovane na periodičnosti i povratnosti. Stanja u konačnom lancu Markova mogu biti klasifikovana kao periodična ili aperiodična i prelazna ili pozitivno povratna. Povratnost u konačnim lancima Markova će uvek značiti pozitivna povratnost.

Teorema 2.7.2. U konačnom lancu Markova klasa je povratna ako i samo ako je zatvorena.

Dokaz Pokazali smo da ako je klasa povratna, ona je zatvorena. U obrnutom smeru implikacija se dokazuje kontradikcijom.

Pretpostavimo da je klasa stanja C zatvorena, ali C nije povratna. Tada je klasa C prelazna. Iz Leme 2.7.1., ako je j prelazno stanje, tada je $\lim_{n\to\infty} p_{ji}{}^{(n)} = 0$ za sva stanja i. Posebno, za stanje $i \in C$ imamo

$$\sum_{j\in C} \lim_{n\to\infty} p_{ji}{}^{(n)} = 0.$$

Kako je C zatvoren, podmatrica P_C koja se sastoji od svih stanja iz C je stohastička matrica. Dodatno, $P_C{}^{(n)}$ je stohastička matrica. Suma kolona u $P_C{}^{(n)}$ je jednaka 1 i mora biti jednako 1 kada pustimo limes da $n \to \infty$, a to je u kontradikciji sa $\sum_{j\in C} \lim_{n\to\infty} p_{ji}{}^{(n)} = 0$. Tada C ne može biti prelazna, pa mora biti povratna klasa.

■

U teoriji lanca Markova sa konačnim skupom stanja, stohastička matrica sa svojstvom $p_{ji}{}^{(n)} > 0$, za neko $n > 0$ i svako $i, j = 1, 2, \ldots, N$ $(P^n > 0)$ je nazvana regularna matrica. Ako je matrica prelaza regularna, tada je lanac Markova nesvodljiv i aperiodičan. Lanac Markova je u ovom slučaju nazvan regularan. Dakle, regularan lanac Markova je pozitivno povratan (jako ergodičan). Teoreme Perrona i Frobeniusa iz linearne algebre kažu da regularna matrica P ima pozitivnu dominantnu svojstvenu vrednost, koja zadovoljava $\lambda > |\lambda_i|$, gde je λ_i bilo koja druga svojstvena vrednost od P. Svojstvena vrednost λ regularne stohastičke matrice P je $\lambda = 1$ i svojstveni vektor π, koji zadovoljava $\sum \pi_j = 1$, definiše stacionarnu raspodelu verovatnoća $P\pi = \pi$. Ako je pretpostavka regularnosti oslabljena, tako da je stohastička matrica P nesvodljiva, tada teoreme Perrona i Frobeniusa još uvek podrazumevaju da je $\lambda = 1$ svojstvena vrednost koja zadovoljava $\lambda \geq |\lambda_i|$. Dakle, sve što je potrebno za postojanje jedinstvene stacionarne raspodele verovatnoća je da P bude nesvodljiva.

Posledica 2.7.1. Pretpostavimo da je konačan lanac Markova nesvodljiv i aperiodičan. Tada postoji jedinstvena stacionarna raspodela verovatnoća $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)^T$ tako da

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}{}^{(n)} = \pi_i, i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

2.7.1 Očekivanje trenutka povratka i očekivanje trenutka prvog prelaza

Označimo matricu očekivanja trenutka povratka i očekivanja trenutka prvog prelaza sa

$$M = (\mu_{ij}) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1N} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_{N1} & \mu_{N2} & \cdots & \mu_{NN} \end{pmatrix}.$$

Umesto izračunavanja elemenata matrice putem definicije, koristeći $\{f_{ii}{}^{(n)}\}$ i $\{f_{ji}{}^{(n)}\}$, primenjuje se alternativna metoda. Izvedena je veza izmenju očekivanja povratka i očekivanja trenutka prelaza, koja definiše linearni sistem čije je rešenje M.

Razmatramo šta se dešava u prvom vremenskom koraku. Stanje j može se dostići u jednom vremenskom koraku sa verovatnoćom p_{ji} ili treba više od jednog vremenskog koraka. Ako je potrebno više od jednog koraka da se dostigne stanje j, tada je u jednom koraku dostignuto stanje k, $k \neq j$, sa verovatnoćom p_{ki} . Tada vreme koje je potrebno za dostizanje stanja j iznosi $1 + \mu_{jk}$, jedan vremenski korak plus očekivanje vremena koje protekne do dostizanja stanja j iz stanja k. Ova veza data je sa

$$\mu_{ji} = p_{ji} + \sum_{k=1, k\neq j}^{N} p_{ki}(1 + \mu_{jk}) = 1 + \sum_{k=1, k\neq j}^{N} p_{ki}\, \mu_{jk}.$$

Ova veza podrazumeva da je matrica P nesvodljiva. Svako stanje j može biti dostignuto iz bilo kog stanja i. Jednačina se može zapisati i u matričnom obliku

$$M = E + (M - diag(M))P,$$

gde je E jedinična $N \times N$ matrica. Kako je P nesvodljiva, lanac Markova je nesvodljiv, što znači da je pozitivno povratan, $1 \leq \mu_{ii} \leq \infty$, $i = 1,2, \ldots, N$. Sledi da je $1 \leq \mu_{ji} \leq \infty, j \neq i$.

Primer 2.7.1. Pretpostavimo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jednačinu $M = E + (M - diag(M))P$ možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mu_{12} & 1 \\ 1 & 1 + \mu_{21} \end{pmatrix}.$$

Tako $\mu_{12} = \mu_{21} = 1$ i $\mu_{11} = \mu_{22} = 2$. Ovaj rezultat je očigledan onda kada prepoznamo da je lanac periodičan, perioda 2. Treba 2 vremenska koraka za povratak u stanje 1 ili 2 i samo jedan vremenski korak za odlazak iz stanja 1 u stanje 2 ili iz stanja 2 u stanje 1.

□

2.8 Matrice prelaza u n koraka

U slučaju konačnog lanca Markova može biti izveden opšti oblik matrica prelaza u n koraka. Može se generisati pojednostavljeni oblik za $P^{(n)}$ ako se P može izraziti kao

$$P = UDU^{-1},$$

gde je D dijagonalna matrica i U je nesingularna matrica. U ovom slučaju, matrica $P^{(n)}$ zadovoljava

$$P^{(n)} = UD^nU^{-1}.$$

Važna teorema u linearnoj algebri navodi da P može biti izražena kao $P = UDU^{-1}$ ako i samo ako je P dijagonalizabilna, tj. ako i samo ako P ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora. Stoga, pretpostavlja se da P ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora.

Pokazujemo kako se matrice U i D mogu formirati. Pretpostavimo da je P matrica $N \times N$ sa N svojstvenih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Neka je x_j desni svojstveni vektor (vektor kolona) koji odgovara λ_j i y_j je levi svojstveni vektor (vektor kolona):

$$Px_j = \lambda_j x_j \quad \text{i}$$

$$y_j{}^{(T)}P = \lambda_j y_j{}^{(T)}.$$

Definišimo $N \times N$ matrice

$$H = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

$$K = (y_1, y_2, \ldots, y_N).$$

Kolone matrice H su desni svojstveni vektori, a kolone matrice K su levi svojstveni vektori. Ove matrice su nesingularne zato što su vektori linearno nezavisni. Zbog prethodnih identiteta važi

$$PH = HD, K^TP = DK^T,$$

gde je $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$. Tako

$$U = H^{-1} \quad \text{ili} \quad U = (K^T)^{-1}.$$

Matrica prelaza sa n koraka zadovoljava:

$$P^n = HD^nH^{-1} \quad \text{i} \quad P^n = (K^T)^{-1}D^nK^T. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Ovo predstavlja jedan od načina za računanje P^n. Drugi način će biti predstavljen u nastavku. Napomenimo da

$$y_j{}^T P x_j = y_j{}^T \lambda_i x_i = y_j{}^T \lambda_j x_i.$$

Ako $\lambda_i \neq \lambda_j$, tada $y_j{}^T x_i = 0$, desni i levi svojstveni vektori su ortogonalni. Pretpostavimo da su x_i i y_j ortogonalni

$$y_j{}^T x_i = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}.$$

Tada $K^T H = I$ ili $K^T = H^{-1}$ i važi

$$\begin{aligned} P &= HDH^{-1} = HDK^T \\ &= (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_N x_N)(y_1, \qquad y_2, \ldots, y_N)^T \\ &= \lambda_1 x_1 y_1{}^T + \lambda_2 x_2 y_2{}^T + \ldots + \lambda_N x_N y_N{}^T. \end{aligned}$$

Dakle,

$$P = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i y_i{}^T.$$

Kako je matrica $x_i y_i{}^T x_j y_j{}^T$ nula matrica za $i \neq j$ i suma $\sum_{i=1}^{N} x_i y_i{}^T = HK^T = I$, sledi da se P^2 može izraziti preko matrice $x_i y_i{}^T$

$$P^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k y_k{}^T\right)\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k y_k{}^T\right) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i{}^2 x_i y_i{}^T.$$

Uopšteno, matrica prelaska u n koraka zadovoljava

$$P^n = \textstyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i{}^n x_i y_i{}^T. \qquad \textbf{(2.2)}$$

U slučaju da je lanac Markova regularan (ili ergodičan), što znači da je nesvodljiv i aperiodičan, tada P^n ima ograničenu raspodelu. Ograničena raspodela je stacionarna raspodela koja odgovara svojstvenoj vrednosti $\lambda_1 = 1$. U ovom slučaju imamo

$$\lim_{n\to\infty} P^n = x_1 y_1{}^T = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_1 & \ldots & \pi_1 \\ \pi_2 & \pi_2 & \ldots & \pi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_N & \pi_N & \pi_N & \pi_N \end{pmatrix},$$

gde je $x_1 = \pi$, $y_1{}^T = (1, 1, \ldots, 1)$.

Obe metode računanja P^n primenjuju se na bilo koju konačnu matricu sa različitim svojstvenim vrednostima.

Postoje još neke metode za računanje P^n. Razmotrićemo jednu dodatnu metodu, gde nije neophodno da P bude dijagonalizabilna. Pretpostavimo da je karakterističan polinom matrice P dimenzije $N \times N$ dat sa

$$det(\lambda I - P) = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Važi

$$x(N+n) + a_{n-1}x(N+n-1) + \ldots + a_0 x(n) = 0.$$

Za nalaženje uopštene formule za P^n neophodno je naći N linearno nezavisnih rešenja za ovaj skalar N-tog reda diferencijalne jednačine, $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_N(n)$ sa početnim uslovima:

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_1(1) = 0 \\ \vdots \\ x_1(N-1) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2(0) = 0 \\ x_2(1) = 1 \\ \vdots \\ x_2(N-1) = 0 \end{cases}, \quad \cdots \quad , \begin{cases} x_N(0) = 0 \\ x_N(1) = 0 \\ \vdots \\ x_N(N-1) = 1 \end{cases}.$$

Tada,

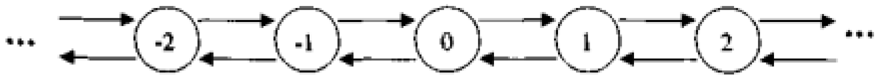
$$P^n = x_1(n)I + x_2(n)P + \ldots + x_N(n)P^{N-1}, n = 0,1,2, \ldots$$

Glava 3

3. Neki primeri lanaca Markova

3.1 Neograničen slučajan hod u dve ili tri dimenzije

U neograničenom slučajnom hodu stanja su celi brojevi $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Neka je $p > 0$ verovatnoća kretanja na desno i $q > 0$ verovatnoća kretanja na levo, $p + q = 1$. Iz direktnog grafa na slici 3.2.1 se lako može videti da je lanac Markova nesvodljiv. Svako stanje u sistemu komunicira sa svakim drugim stanjem.



Slika 3.2.1. Neograničeni slučajni hod. *Slika preuzeta iz [1].*

Lanac Markova za ovaj proces je povratan ako i samo ako su verovatnoće pomeranja levo i desno jednake, $p = \frac{1}{2} = q$, što znači da se radi o simetričnom slučajnom hodu.

Neograničen slučajan hod može se proširiti na dve i tri dimenzije. Za neograničen slučajan hod u jednoj dimenziji važi da je lanac nula povratan ako i samo ako je $p = \frac{1}{2} = q$. Za dve i tri dimenzije pretpostavićemo da je verovatnoća pomeranja u bilo kom pravcu jednaka. Tako, za dve dimenzije verovatnoća je $\frac{1}{4}$ za pomeranje u bilo koji od četiri pravca: gore, dole, desno ili levo. Za tri dimenzije verovatnoća pomeranja za bilo koji od šest pravaca: gore, dole, levo, desno, napred, nazad je $\frac{1}{6}$. Za dve dimenzije lanac je nula povratan, dok je za tri dimenzije prelazan.

Lanac Markova predstavljen ovim neograničenim slučajnim hodom je nesvodljiv i periodičan sa periodom 2. Dakle, povratnost i prelaznost se mogu potvrditi proverom povratnosti i prelaznosti u poreklu. Neka je poreklo označeno sa 0 i ${p_{00}}^{(n)}$ je verovatnoća povratka na poreklo posle n koraka. Primetimo da ${p_{00}}^{(2n)} > 0$, ali ${p_{00}}^{(2n+1)} > 0$, za $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Nemoguće je početi od porekla i vratiti se na poreklo u neparnom broju koraka.

3.1.1 Dve dimenzije

U dve dimenzije, za putanju dužine $2n$ sa početkom i završetkom u 0 , ako je napravljeno k koraka udesno, tada takođe mora biti napravljeno k koraka ulevo i ako je napravljeno $n - k$ koraka na gore, tada mora biti napravljeno $n - k$ koraka na dole, $k + k + n - k + n - k = 2n$. Postoji

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!\,k!\,(n-k)!\,(n-k)!}$$

različitih putanja dužine $2n$ koje počinju i završavaju se u poreklu. Svaka od ovih putanja je jednako verovatna i ima verovatnoću da se dogodi jednaku $\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$. Tako

$$\begin{aligned} p_{00}{}^{(2n)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!\,k!\,(n-k)!\,(n-k)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{(2n)} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{(2n)} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{(2n)}. \end{aligned}$$

Može se pokazati da je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Stoga, $p_{00}{}^{(2n)}$ se može pojednostaviti do

$$p_{00}{}^{(2n)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left[\frac{(2n)}{n!\,n!}\right]^2 \frac{1}{4^{2n}}.$$

Primenimo Stirlingovu formulu na desnu stranu gornje jednačine ($n! \sim n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}$), pa važi

$$\begin{aligned} p_{00}{}^{(2n)} &\sim \left[\frac{(2n)^{2n} \sqrt{4\pi n} e^{-2n}}{n^{2n} 2\pi n e^{-2n}}\right]^2 \frac{1}{4^{2n}} \\ &= \left[\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\right]^2 \frac{1}{4^{2n}}. \end{aligned}$$

Koristeći da je $\sum \frac{1}{\pi n}$ divergentan red, dobijamo da $\sum p_{00}{}^{(2n)}$ takođe divergira. Tada je, prema Teoremi 2.5.1. , poreklo povratno i sva stanja moraju biti povratna. Dodatno, primenjujuću osnovnu graničnu teoremu za periodične lance Markova, važi $\lim_{n\to\infty} p_{00}{}^{(2n)} = \frac{2}{\mu_{00}}$. Međutim ovaj limes je jednak nuli, tako je $\mu_{00} = \infty$. Nula stanje je nula povratno i kako je lanac Markova simetričan, dvodimenzionalni slučajan hod je nula povratan.

3.1.2 Tri dimenzije

U tri dimenzije, na putanji dužine $2n$ koja počinje i završava se u poreklu, ako se napravi k koraka udesno, tada mora biti napravljeno k koraka ulevo, ukoliko se napravi j koraka na gore, mora biti napravljeno j koraka na dole; ako je napravljeno $n-k-j$ koraka unapred, mora biti napravljeno $n-k-j$ unazad, $k+k+j+j-n-k-j+n-k-j=2n$. Ukupan broj putanja dužine $2n$ je:

$$\sum_{j+k\leq n} \frac{(2n)!}{(k!)^2(j!)^2[(n-k-j)!]^2},$$

gde je suma za sve j i k, za koje $j+k \leq n$. Kako svaka putanja ima verovatnoću $\left(\frac{1}{6}\right)^{(2n)}$ sledi da

$$\begin{aligned} p_{00}{}^{(2n)} &= \sum_{j+k\leq n} \frac{(2n)!}{(k!)^2(j!)^2[(n-k-j)!]^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{(2n)} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{j+k\leq n}\left(\frac{n!}{j!\,k!\,(n-k-j)!}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{(2n)}. \end{aligned}$$

Koristimo činjenicu da trinomna raspodela zadovoljava

$$\sum\nolimits_{j+k\leq n} \frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}\frac{1}{3^n} = 1.$$

Označimo trinomni koeficijent

$$\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!} = \binom{n}{j \quad k}.$$

Maksimalna vrednost trinomne raspodele se javlja kada $j \approx \frac{n}{3}$ i $k \approx \frac{n}{3}$ i približno je jednaka

$$M_n \approx \frac{n!\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left[\left(\frac{n}{3}\right)!\right]^3}.$$

gde je n dovoljno veliko. Ovo se može videti u sledećem. Pretpostavimo da se maksimalna vrednost javlja u j' i k'. Tada

$$\binom{n}{j' \quad (k'-1)} \leq \binom{n}{j' \quad k'}.$$

$$\binom{n}{j' \quad (k'+1)} \leq \binom{n}{j' \quad k'}.$$

$$\binom{n}{(j'-1) \quad k'} \leq \binom{n}{j' \quad k'}.$$

$$\binom{n}{(j'-1) \quad k'} \leq \binom{n}{j' \quad k'}.$$

pa tada

$$n - k' - 1 \leq 2j' \leq n - k' + 1,$$

$$n - j' - 1 \leq 2k' \leq n - j' + 1,$$

ili

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{2j' + k'}{n} \leq \frac{n+1}{n},$$

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{2k' + j'}{n} \leq \frac{n-1}{n}.$$

Kada pustimo $n \to \infty$, dobijamo $2j' + k' \sim n$ i $2k' + j' \sim n$, odakle sledi $j' \sim \frac{n}{3}$ i $k' \sim \frac{n}{3}$. Koristimo ove činjenice da dobijemo gornju granicu za $p_{00}{}^{(2n)}$. Prvo

$$\begin{aligned} p_{00}{}^{(2n)} &\leq \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} M_n \left[\sum\nolimits_{j+k \leq n} \frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!} \frac{1}{3^n} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{3}\right)!\right]^3} \frac{1}{3^n} \ . \end{aligned}$$

zato što je izraz u uglastoj zagradi trinomna raspodela čija je suma jednaka 1. Sledeće, Stirlingova formula se koristi da aproksimira desnu stranu nejednakosti iznad, za veliko n:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{3}\right)!\right]^3} \frac{1}{3^n} &\sim \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}e^{-2n}}{n^n\sqrt{2\pi n}e^{-n}\left(\frac{n}{3}\right)^3\left(\sqrt{\frac{2\pi n}{3}}\right)^3 e^{-n}} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{c}{n^{3/2}} \ , \end{aligned}$$

gde je $c = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{3/2}$. Tada, za veliko n , $p_{00}{}^{(2n)} \leq \left(\frac{c}{n}\right)^{3/2}$. Kako je $\sum_n \left(\frac{c}{n}\right)^{3/2}$ konvergentan p-red, sledi da je prema Teoremi 2.5.1. poreklo u prelaznom stanju. Kako je lanac Markova nesvodljiv, sva stanja su prelazna. Lanac Markova za simetrični, trodimenzionalni slučajni hod je prelazan.

Nije uobičajeno izrazito različito ponašanje lanca Markova u diskretnom vremenu u tri dimenzije, u odnosu na jednu ili dve dimenzije.

3.2 Propast kockara

Slučajan hod na konačnom skupu $\{0,1,2,\ldots,N\}$ sa granicom apsorpcije $x = 0$ i $x = N$ je obično nazvan kao propast kockara. Izvešćemo izraz za verovatnoću apsorpcije korišćenjem tehnika iz diferencijalnih jednačina, a zatim izraz za očekivano trajanje dok se apsorpcija ne izvede. Konačno, izvešćemo celu raspodelu verovatnoća za apsorpciju u n-tom vremenskom koraku koristeći generatrise i diferencijalne jednačine.

Pozicija x u propasti kockara predstavlja kockarov kapital, svaki vremenski korak predstavlja jednu igru gde kockar može da ili poveća svoj kapital na $x+1$ ili smanji kapital na $x-1$. Posle svake igre se desi dobitak ili gubitak, nikad nije nerešeno. Ako kockarov kapital dostigne nulu, on je propao, a protivnik je pobedio i igra se završava, dok ako kapital dostigne N, kockar je osvojio sav kapital (protivnik je uništen) i igra se završava.

Definišimo matricu prelaza za problem propasti kockara. Neka je p verovatnoća pomeranja udesno (pobediti u igri), q verovatnoća pomeranja ulevo (izgubiti u igri) i $p+q=1$, tako da je za $i=1,2,\dots,N$

$$p_{ji}=P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}=\begin{cases} p, & j=i+1 \\ q, & j=i-1 \\ 0, & j\neq i+1, i-1 \end{cases}$$

Prostor stanja je $\{0,1,2,\dots,N\}$. Granice 0 i N su apsorbujuće,

$$p_{00}=1 \text{ i } p_{NN}=1.$$

Matrica prelaza P dimenzije $(N+1)\times(N+1)$ je u sledećem obliku:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & 1 \end{pmatrix}.$$

Tu su tri klase komunikacije $\{0\}$, $\{1,2,\dots,N-1\}$ i $\{N\}$. Stanja 0 i N su apsorbujuća (povratna) a ostala stanja su prelazna.

Da bismo istražili dinamiku propasti kockara, istraživaćemo verovatnoću da kockar ili izgubi ili osvoji sav novac (verovatnoća apsorpcije) i očekivani broj igara dok kockar ili ne osvoji ili ne izgubi sav novac (očekivano trajanje igre). Apsorpcija se dešava bilo da je $x=0$ (propast), bilo da je $x=N$ (džekpot). Ako počinje sa kapitalom k, očekivano trajanje igre (očekivano trajanje do apsorpcije) je suma sledećih očekivanja prvog prelaza $\mu_{0k}+\mu_{Nk}$.

Označimo sledeće:

a_{kn} = $P\{X_n=0 \mid X_0=k\}$ tj. verovatnoća apsorpcije u $x=0$ u n-toj igri započetoj sa kapitalom k. Kockar je izgubio sve u n-toj igri.

b_{kn} = $P\{X_n=N \mid X_0=k\}$ tj. verovatnoća apsorpcije u $x=N$ u n-toj igri započetoj sa kapitalom k. Kockar je osvojio sve u n-toj igri.

Pretpostavimo da je početni kapital ograničen na $k=1,\dots,N-1$. Primetimo da je $a_{0n}=1$, $a_{Nn}=0$, $b_{0n}=0$ i $b_{Nn}=1$, zato što se igra završava kada je kapital ili nula ili N. Poput mnemoničkog uređaja neka nas a asocira na levu krajnju tačku ($x = 0$) i neka nas b asocira na desnu krajnju tačku ($x = N$). Primetimo da je $a_{kn} + b_{kn}$ verovatnoća apsorpcije u n-toj igri. Kako se apsorpcija javlja ili u $x = 0$ ili u $x = N$, $\{a_{kn} + b_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ predstavlja raspodelu verovatnoća povezanu sa apsorpcijom,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{kn} + b_{kn}) = 1\,, 1 \leq k \leq N - 1.$$

Neka su A_k i B_k generatrise nizova $\{a_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{b_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}t^n\,, B_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}t^n\,, |t| \leq 1.$$

Funkcije $A_k(t)$ i $B_k(t)$ posebno nisu generatrise verovatnoće, ali njihova suma $A_k(t) + B_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{kn} + b_{kn})t^n$ jeste. Definišimo

$$a_k = A_k(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn},$$

$$b_k = B_k(1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn},$$

I

$$\tau_k = A'(1) + B'(1) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n(a_{kn} + b_{kn}).$$

Tada je a_k verovatnoća apsorpcije u $x = 0$ ili verovatnoća propasti koja počinje sa kapitalom k i b_k verovatnoća apsorpcije u $x = N$ ili verovatnoća dobitka celog kapitala koja počinje sa kapitalom k. Konačno, τ_k je očekivano trajanje igara dok se ne desi apsorpcija, bilo u $x = 0$ ili u $x = N$, $\tau_k = \mu_{0k} + \mu_{Nk}$. Kada bi T_k označavala slučajnu promenljivu za vreme do apsorpcije, tada bi $\tau_k = E(T_k)$. I još

$$a_k + b_k = 1, \tag{3.1}$$

pa je $b_k = 1 - a_k$.

3.2.1 Verovatnoća apsorpcije

Izvešćemo izraz za a_k, verovatnoću apsorpcije u $x = 0$, gde se počinje sa kapitalom k, $k \in [0, N]$. Kockar može da pobedi ili izgubi u sledećoj igri sa verovatnoćama p ili q redom. Ako kockar pobedi, kapital je $k + 1$ i verovatnoća propasti je a_{k+1}. Ako kockar izgubi, kapital je $k - 1$ i verovatnoća propasti je a_{k-1}. Ovo je dato u sledećoj jednačini:

$$a_k = pa_{k+1} + qa_{k-1} \tag{3.2}$$

za $1 \leq k \leq N-1$. Izraženo u standardnom obliku, diferencijalna jednačina izgleda:

$$pa_{k+1} - a_k + qa_{k-1} = 0 \tag{3.3}$$

U izvođenju razmatramo samo šta se desilo u sledećem koraku, zatim primenjujemo Markovljevo svojstvo. Da bismo rešili jednačinu (3.3) potrebni su nam granični uslovi:

$$a_0 = 1 \text{ i } a_N = 0\,.$$

Ako je kapital nula, tada je verovatnoća propasti jednaka jedinici i ako je kapital N, tada je verovatnoća propasti jednaka nuli. Diferencijalna jednačina je linearna i homogena, sa konstantnim koeficijentima. Da bismo je rešili uvodimo smenu $a_k = \lambda^k$ i zamenimo vrednost a_k u jednačinu. Dobijamo karakterističnu jednačinu, oblika:

$$p\lambda^{k+1} - \lambda^k + q\lambda^{k-1} = 0.$$

Kako je $\lambda \neq 0$, karakterističnu jednačinu delimo sa λ^{k-1} i dobijamo:

$$p\lambda^2 - \lambda + q = 0.$$

Koreni karakteristične jednačine su svojstvene vrednosti:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2p}.$$

Primetimo da je $(p+q)^2 = 1$, pa odatle dobijamo:

$$1 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$1 - 4pq = p^2 - 2pq + q^2 = (p-q)^2.$$

Zbog izraza pod korenom sređujemo izraz do $\sqrt{1-4pq} = |p-q|$.

Rešenja jednačine (3.3) delimo u dva slučaja, u zavisnosti od toga da li je $p \neq q$ ili je $p = \frac{1}{2} = q$. U prvom slučaju, za $p \neq q$, $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm (p-q)}{2p}$, pa je $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = \frac{q}{p}$. Uopšteno rešenje je

$$a_k = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Konstante c_1 i c_2 pronalazimo iz graničnih uslova

$$a_0 = 1 = c_1 + c_2$$

$$a_N = 0 = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^N.$$

Rešavanje po c_1 i c_2 i zamena ovih vrednosti u opšte rešenje daje:

$$a_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, p \neq q \tag{3.4}$$

Kako je $a_k + b_k = 1$, rešenje za b_k je

$$b_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, p \neq q.$$

U drugom slučaju, kada je $p = \frac{1}{2} = q$, primetimo da je $1 - 4pq = 0$, pa onda karakteristična jednačina ima koren višestrukosti dva, $\lambda_{1,2} = 1$. Opšte rešenje jednačine (3.3) je $a_k = c_1 + c_2 k$. Kada ponovo primenimo granične uslove $a_0 = 1 = c_1$ i $a_N = 0 = c_1 + c_2 N$, pa je tako partikularno rešenje

$$a_k = \frac{N-k}{N}, p = \frac{1}{2} = q. \tag{3.5}$$

Rešenje za b_k je

$$b_k = \frac{k}{N}, p = \frac{1}{2} = q.$$

Primenićemo teoriju diferencijalnih jednačina da nađemo opšta rešenja za a_k i b_k. Numeričke metode takođe mogu biti korišćene za nalaženje rešenja za a_k i b_k. Da bismo primenili numeričku metodu, sistem jednačina mora prvo biti izražen matrično. Jednačine (3.3) mogu biti izražene kao sledeća matrična jednačina $Da = c$, gde je $a = (a_0, a_1, \ldots, a_N)^T$, $c = (1, 0, \ldots, 0)^T$ i

$$D = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ q & | & -1 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & | & q & -1 & p & \cdots & 0 & 0 & | & 0 \\ \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & -1 & | & p \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ D_1 & D_{N-1} & D_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Matrica *D* je $(N+1) \times (N+1)$ matrica koja je podeljena u blokovsku formu prema tri klase komunikacije $\{0\}, \{1, 2, \ldots, N-1\}$ i $\{N\}$. Primetimo da prvi i poslednji red $Da = c$ daju granične uslove $a_0 = 1$ i $a_N = 0$. Drugi red daje $pa_2 - a_1 + qa_0 = 0$, što je jednačina (3.3) za $k = 1$. Matrica sa oblikom poput *D* će se koristiti u mnogim drugim problemima. Stoga ćemo ukratko dotaći koja svojstva ima *D*, koja je čine nesingularnom.

Definicija 3.2.1. Za matricu $A = (a_{ij})$, dimenzije $n \times n$, kažemo da je dijagonalno dominantna ako

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Matrica A je strogo dijagonalno dominantna, ako je nejednakost u (3.7) stroga, tj. umesto $\geq$ stoji $>$, za svako i.

Nejednakost (3.7) kaže da apsolutna vrednost svakog dijagonalnog elementa dominira nad sumom apsolutnih vrednosti svih ostalih elemenata van dijagonale u tom redu.

Podsetimo se definicije nesvodljive matrice iz prethodnog poglavlja. Kvadratna matrica je nesvodljiva, ako i samo ako je njen direktan (usmeren) graf jako povezan. Svojstvo nesvodljivosti i dijagonalna dominantnost nas dovode do sledeće definicije.

Definicija 3.2.2. Ako je matrica A nesvodljiva, dijagonalno dominantna i nejednakost (3.7) je stroga za bar jedno i, tada je A nesvodljivo dijagonalno dominantna.

Teorema 3.2.1. Ako je $n \times n$ matrica A strogo dijagonalno dominantna ili nesvodljivo dijagonalno dominantna, tada je matrica A nesingularna.

Dodatno, ako je matrica A nesingularna, tada je i matrica A^T nesingularna. Podmatrica D_{N-1} dimenzije $(N-1) \times (N-1)$ matrice D je nesvodljivo dijagonalno dominantna.

3.2.2 Očekivano trajanje igre

Trajanje igara (ili vreme do apsorpcije), koje počinju sa kapitalom k, jeste sve dok se kapital N ne osvoji ili izgubi. Očekivano trajanje igara je označeno sa $\tau_k = E(T_k)$. Kao što je izvedena za verovatnoću propasti, diferencijalna jednačina takođe može biti izvedena i za τ_k. Počevši sa kapitalom k, kockar može ili da pobedi ili da izgubi u n-toj igri, sa verovatnoćom p ili q redom. Ako kockar pobedi, tada je kapital $k+1$, a trajanje igre je $1 + \tau_{k+1}$ (računajući i tek odigranu igru), a ako kockar izbubi, tada je kapital $k-1$ a vreme trajanja igre je $1 + \tau_{k-1}$. Jednačina za τ_k nalazi se u sledećem obliku:

$$\tau_k = p(1 + \tau_{k+1}) + q(1 + \tau_{k-1}),$$

za $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Koristeći činjenicu da je $p + q = 1$, jednačinu možemo zapisati kao:

$$p\tau_{k+1} - \tau_k + q\tau_{k-1} = -1 \qquad \textbf{(3.8)}$$

linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda, sa konstantnim koeficijentima. Granični uslovi zadovoljavaju

$$\tau_0 = 0 = \tau_N$$

zato što je kapital ili 0 ili N, pa ne može biti više igara (desila se apsorpcija). Diferencijalna jednačina (3.8) se može lako rešiti na sličan način kao jednačina za a_k. Prvo će se naći opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine, a zatim partikularno rešenje nehomogene će se dodati homogenom rešenju.

Da bismo dobili homogeno rešenje, uvodimo smenu $\tau_k = \lambda^k \neq 0$ i zamenimo ovu vrednost u jednačinu. Dobijamo sledeću karakterističnu jednačinu:

$$p\lambda^2 - \lambda + q = 0.$$

Svojstvene vrednosti su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = \frac{q}{p}$, ako je $p \neq q$ i $\lambda_1 =1= \lambda_2$, ako je $p = \frac{1}{2} = q$. U prvom slučaju, za $p \neq q$, opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine je $\tau_k = c_1 + c_2\left(\frac{p}{q}\right)^k$. Za nalaženje partikularnog rešenja nehomogene jednačine neka je $\tau_k = ck$, za proizvoljnu konstantu c. Zamenom $\tau_k = ck$ u jednačinu, dobijamo sledeće rešenje za c:

$$c = \frac{1}{(q-p)}.$$

Tada je opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine (3.8)

$$\tau_k = c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^k + \frac{k}{q-p}.$$

Kada primenimo granične uslove, možemo dobiti konstante c_1 i c_2, $\tau_0 = 0 = c_1 + c_2$ i $\tau_N = 0 = c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^N + \frac{N}{q-p}$, onda je

$$c_2 = -c_1, \qquad c_1 = -\frac{N}{q-p}\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Sledi

$$\begin{aligned}\tau_k &= \frac{k}{q-p} - \frac{N}{q-p}\left[\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right] \\ &= \frac{1}{q-p}\left[k - N\left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right)\right], p \neq q \qquad \textbf{(3.9)}\end{aligned}$$

Slična metoda je primenjena za $p = \frac{1}{2} = q$. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine (3.8) je $\tau_k = c_1 + c_2 k$, a partikularno rešenje je u obliku ck^2. Zamenom ck^2 u diferencijalnu jednačinu, dobijamo $c = -1$, pa je opšte rešenje nehomogene jednačine:

$$\tau_k = c_1 + c_2 k - k^2.$$

Rešavanje po c_1 i c_2, daje $c_1 = 0$ i $c_2 = N$. Rešenje jednačine (3.8) u slučaju $p = \frac{1}{2} = q$ je

$$\tau_k = k(N-k), p = \frac{1}{2} = q \ . \quad \textbf{(3.10)}$$

Kao što je bilo prikazano kod verovatnoće apsorpcije, numerička metoda takođe može biti primenjena za pronalaženje očekivanog vremena trajanja igara. Jednačina (3.8) se može izraziti matrično:

$$D\tau = d,$$

gde je D definisano sa (3.6), a $d = (0, -1, -1, \dots, -1, 0)^T$. Rešenje τ, očekivano trajanje igara je dato $\tau = D^{-1}d$.

3.2.3 Raspodela verovatnoće propasti u n-toj igri

Da bismo izračunali raspodelu verovatnoća do apsorpcije u $x = 0$ ili u $x = N$, potrebni su nam izrazi za a_{kn} i b_{kn}. Raspodela verovatnoća do apsorpcije je

$$\{a_{kn} + b_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$$

sa generatrisom

$$A_k(t) + B_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{kn} + b_{kn}) t^n \, , |t| \leq 1.$$

Mogu se izvesti izrazi za $A_k(t), B_k(t)$, ali oni ne daju određene izraze za a_{kn} i b_{kn}. Međutim, pretpostavljajući da $A_k(t)$ i $B_k(t)$ imaju Maklorenov red, ovi koeficijenti se mogu izračunati ponovljenom diferencijacijom, na primer

$$a_{kn} = \frac{1}{n!} \frac{d^n A_k(t)}{dt^n} \Bigg|_{t=0} \quad \textbf{(3.11)}$$

Diferencijalna jednačina za A_k se može izvesti slično kao a_k i τ_k u prethodnoj sekciji. Prvo ćemo izvesti jednačinu za a_{kn}. Ako se apsorpcija u $x = 0$ desi u $n+1$ koraka sa početnim kapitalom k, tada u sledećoj igri, ako kockar pobedi kapital je $k+1$ i apsorpcija će se desiti sa još n igara. Inače, ako kockar izgubi u sledećoj igri, kapital je $k-1$ i apsorpcija će se desiti sa još n igara, tj.

$$a_{k,n+1} = p a_{k+1,n} + q a_{k-1,n}, k \geq 0, n \geq 0.$$

Gornja jednačina je parcijalna diferencijalna jednačina, s obzirom da je a_{kn} funkcija sa dve promenljive k i n. Granični i početni uslovi za sistem diferencijalnih jednačina su

$$a_{0n} = 0 = a_{Nn}, n = 1, 2, \dots \ , a_{00} = 1 \text{ i } a_{k0} = 0, k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Uslovi dolaze iz toga jer je početni kapital nula, apsorpcija se već desila i nije potrebno još igara, $a_{00} = 1$, i apsorpcija se ne može desiti u $n > 0$ koraka, $a_{0n} = 0$. Dodatno, ako kockar ima sav kapital, njegov protivnik je izgubio i nije potrebno još igara $a_{N0} = 0$ i apsorpcija se ne može desiti u $n > 0$ koraka, $a_{Nn} = 0$. Konačno, potrebno je bar k igara da dođe do propasti, sa početnim kapitalom k, $a_{kn} = 0, n < k$. Ovi uslovi dovode do jednostavnih izraza za funkcije $A_0(t)$ i $A_N(t)$:

$$A_0(t) = a_{00} + a_{01}t + a_{02}t^2 + \ldots = 1$$

i

$$A_n(t) = a_{N0} + a_{N1}t + a_{N2}t^2 + \ldots = 0 \ .$$

Da bismo dobili jednačinu za A_k, jednačina a_{kn} je pomnožena sa t^{n+1} i sumirana od $n = 0$ do $n = \infty$. Za $k \geq 1$ sledi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n+1} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} p a_{k+1,n} t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q a_{k-1,n} t^{n+1}.$$

Zato što je $a_{k0} = 0, k \geq 1$, ova jednačina se može pojednostaviti:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} t^{n} = pt \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+1,n} t^{n} + qt \sum_{n=0}^{\infty} a_{k-1,n} t^{n}$$

$$A_k(t) = ptA_{k+1}(t) + qtA_{k-1}(t).$$

Za fiksirano t, $0 < t < 1$, jednačina se može rešiti u zavisnosti od graničnih uslova:

$$A_0(t) = 1 \text{ i } A_N(t) = 0.$$

Neka je $A_k(t) = \lambda \neq 0$, pa je tada karakteristična jednačina

$$pt\lambda^2 - \lambda + qt = 0.$$

Svojstvene vrednosti zadovoljavaju $\lambda_{1,2}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2pt},$$

gde $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Ova dva korena su realna i različita. Opšte rešenje je

$$A_k(t) = c_1 {\lambda_1}^k + c_2 {\lambda_2}^k.$$

Konstante c_1 i c_2 nalazimo primenjujući granične uslove $c_1 + c_2 = 1$ i $c_1 {\lambda_1}^N + c_2 {\lambda_2}^N = 0$, pa tako

$$A_k(t) = \frac{{\lambda_1}^N {\lambda_2}^k - {\lambda_2}^N {\lambda_1}^k}{{\lambda_1}^N - {\lambda_2}^N} \tag{3.12}$$

Izraz za $B_k(t)$ može biti dobijen na sličan način kao i $A_k(t)$,

$$B_k(t) = ptB_{k+1}(t) + qtB_{k-1}(t),$$

za $k = 1, 2, \dots, N-1$, ali se granični uslovi razlikuju

$$B_0(t) = 0 \text{ i } B_N(t) = 1.$$

Rešenje za $B_k(t)$ je

$$B_k(t) = \frac{{\lambda_1}^k - {\lambda_2}^k}{{\lambda_1}^N - {\lambda_2}^N}.$$

Generatrisa verovatnoće je $A_k(t) + B_k(t)$. Iako je formula izvedena za t, $0 < t < 1$, ako je generatrisa verovatnoće izražena kao Maklorenov red,

$$A_k(t) + B_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{kn} + b_{kn})\, t^n,$$

tada je red apsolutno konvergentan za $|t| < 1$ i svi njegovi izvodi postoje za $|t| < 1$. Može se primeniti Abelova teorema za konvergenciju na red i na njegove izvode na domen $t = 1$. Na primer, prvi izvod ovog reda zadovoljava:

$$A_k^{\prime(t)} + B_k^{\prime(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{kn} + b_{kn})t^{n-1},$$

što je konačno za $|t| < 1$ i $n(a_{kn} + b_{kn}) \geq 0$. Tada

$$\lim_{t \to 1^-}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{kn} + b_{kn})t^{n-1}\right] = L \leq \infty.$$

Prema Abelovoj teoremi za konvergenciju $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{kn} + b_{kn}) = L$. Tada, očekivano vreme trajanja igara, τ_k, može biti izvedeno iz generatrise,

$$\tau_k = A_k^{\prime(1)} + B_k^{\prime(1)} = \lim_{t \to 1^-}[A_k{}'(t) + B_k{}'(t)].$$

Glava 4

4. Primena diskretnih lanaca Markova u biologiji

4.1 Uvod

U ovom poglavlju će biti reči o nekoliko klasičnih i bioloških primena lanaca Markova u diskretnom vremenu. Opisaćemo primenu lanaca Markova u problemu ukrštanja životinja u bliskom srodstvu, karcinogenezi, zatim primenu lanaca u procesu rađanja i umiranja. Opisaćemo uopšteni proces rađanja i umiranja u diskretnom vremenu. U ovom modelu pretpostavićemo da je obim populacije maksimalan. Može se definisati i matrica prelaza. Teorija koja se razvila iz slučajnog hoda može biti korisna za analizu procesa rađanja i umiranja. Diskutovaćemo o verovatnoći apsorpcije populacije ili izumiranju populacije i o očekivanom vremenu do izumiranja populacije.

Konačnu primenu lanaca Markova u diskretnom vremenu daćemo u modelima u epidemiologiji. Proučićemo neke SI i SIS modele u epidemiologiji zasnovane na lancima Markova. U SIS modelu podložne/osetljive („susceptible“) osobe/pojedinci („individuals“) postaju inficirani, ali ne razvijaju imunitet, već odmah postaju podložni opet. U SIS modelu ima N stanja, gde stanja odgovaraju broju inficiranih pojedinaca. Pomenućemo još jedan epidemiološki model poznat kao model binomnih lanaca. Epidemiološki modeli binomnih lanaca su prvi put razvili 1920. i 1930. godine Reed, Frost i Greeenwood, pa je po njima i nazvan ovaj model. Za ove modele trajanje i obim epidemije se izračunavaju.

4.2 Genetički problem ukrštanja životinja u bliskom srodstvu

Nasleđe zavisi od informacija sadržanih u hromozomima koji se prenose s generacije na generaciju. Ljudi imaju dve grupe hromozoma (diploidni), po jedan dobijen od svakog roditelja. Određena mesta duž hromozoma sadrže uputstva za neke fizičke karakteristike. Duž hromozoma su nanizani geni, a njihove lokacije se nazivaju lokusi (tj. gen za određeno svojstvo uvek se nalazi na istom mestu na hromozomu koje se naziva genski lokus). Na svakom lokusu gen može da se javi u više oblika koji se nazivaju aleli.

Pretpostavimo da postoje samo dva tipa alela za dati gen, označeni kao a i A. Diploidna jedinka tada može imati jednu od tri različite kombinacije alela: AA, Aa ili aa, poznate kao genotipi lokusa. Kako aa i AA imaju isti homogenski sastav, nazivaju se homozigoti, dok se Aa naziva heterozigot.

Bailey (1990) i Feller (1968) diskutuju o problemu genetskog parenja životinja u srodstvu i formulisali su model lanaca Markova. U nastavku ćemo predstaviti ovaj problem. Pretpostavimo da su dve jedinke nasumično uparene. Tada je, u sledećoj generaciji, njihovo potomstvo suprotnog pola upareno nasumično. Proces parenja brata i sestre, ili parenje u srodstvu, se nastavlja svake godine. Ovaj proces može biti formulisan kao konačan lanac Markova u diskretnom vremenu, čija se stanja sastoje iz 6 tipova parenja:

1. $AA \times AA$
2. $AA \times Aa$
3. $Aa \times Aa$
4. $Aa \times aa$
5. $AA \times aa$
6. $aa \times aa$

Pretpostavimo da su roditelji tipa 1, $AA \times AA$. Tada će sledeća generacija potomaka od ovih roditelja biti AA jedinka, pa to ukrštanje brata i sestre može dati samo tip 1, $p_{11} = 1$. Analogno za roditelje tipa 6, $aa \times aa$, gde je $p_{66} = 1$. Sada, pretpostavimo da su roditelji tipa 2, $AA \times Aa$. Neka X predstavlja njihovog slučajno izabranog potomka. Neka je $Y_1 \in \{A, A\}$ alel koji će se preneti na potomstvo od roditelja sa genotipom AA , a $Y_2 \in \{A, a\}$ predstavlja alel koji će da se prenese na potomstvo od roditelja sa genotipom Aa. Tada važi sledeće:

$$P\{X = AA\} = P\{Y_1 = A, Y_2 = A\} = P\{Y_1 = A\}P\{\, Y_2 = A\} = 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$

$$P\{X = Aa\} = P\{Y_1 = A, Y_2 = a\} + P\{Y_1 = a, Y_2 = A\} =$$

$$= P\{Y_1 = A\}P\{\, Y_2 = a\} + \; P\{Y_1 = a\}P\{\, Y_2 = A\} = 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 0 = \tfrac{1}{2},$$

$$P\{X = aa\} = P\{Y_1 = a, Y_2 = a\} = P\{Y_1 = a\}P\{\, Y_2 = a\} = 0.$$

Iz ove generacije imamo dva moguća genotipa. Ako su X_1 i X_2 dva slučajno izabrana potomka opisane generacije, imamo da je

$$P\{\, X_1 \times X_2 = AA \times AA\} = P\{X_1 = AA\}P\{X_2 = AA\} = \tfrac{1}{4},$$

$$P\{\, X_1 \times X_2 = AA \times Aa\} = P\{X_1 = AA\}P\{X_2 = Aa\} + P\{X_1 = Aa\}P\{X_2 = AA\} = \tfrac{1}{2},$$

$$P\{\, X_1 \times X_2 = Aa \times Aa\} = P\{X_1 = Aa\}P\{X_2 = Aa\} = \tfrac{1}{4}.$$

Prema tome, imamo sledeće

$$p_{12} = \frac{1}{4}, p_{22} = \frac{1}{2}, p_{32} = \frac{1}{4}.$$

Ukoliko su roditelji tipa 3, $Aa \times Aa$, potomstvo je u proporcijama $\frac{1}{4}\,AA$, $\frac{1}{2}\,Aa$ i $\frac{1}{4}\,aa$, pa tako parenje brata i sestre može dati $\frac{1}{16}$ tipa 1, $\frac{1}{4}$ tipa 2, $\frac{1}{4}$ tipa 3, $\frac{1}{4}$ tipa 4, $\frac{1}{8}$ tipa 5 i $\frac{1}{16}$ tipa 6. Nastavljajući na ovaj način možemo završiti matricu verovatnoće prelaza P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 & 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & | & 1/4 & 1/16 & 0 & 0 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & | & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & 1/8 & 0 & 0 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & 1/16 & 1/4 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & A & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & B & 1 \end{pmatrix}.$$

Lanac Markova je nesvodljiv i ima tri klase komunikacije $\{1\}$, $\{6\}$ i $\{2,3,4,5\}$. Prve dve klase su pozitivno povratne, a treća klasa je prelazna. Stanja 1 i 6 su apsorbujuća stanja, $p_{ii} = 1$, $i = 1,6$.

Primetimo

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & A_n & 0 \\ 0 & T^n & 0 \\ 0 & B_n & 1 \end{pmatrix},$$

gde su A_n i B_n funkcije od T, A i B, $A_n = A \sum_{i=0}^{n-1} T^i$ i $B_n = B \sum_{i=0}^{n-1} T^i$. Tada, da bismo odredili P^n, moramo prvo odrediti T^n. Kako T pripada prelaznoj klasi, važi $\lim_{n\to\infty} T^n = 0$.

Može se izvesti uopštena formula za T^n. Svojstveni vektori T su $\lambda_i = {}^1/_2, {}^1/_4$, ${}^1/_4\left(1+\sqrt{5}\right), {}^1/_4\left(1-\sqrt{5}\right)$, $i = 1,2,3,4$. Na primer, primenjujući (2.1) ili (2.2),

$$T^n = HD^nH^{-1} \text{ ili } T^n = \textstyle\sum_{i=1}^{4} {\lambda_i}^n x_i {y_i}^T.$$

Dodatno, može se videti

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B(I-T)^{-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} A_n = A(I-T)^{-1}.$$

Jednom kada je T^n izračunato, mogu se postaviti razna pitanja o dinamici modela u n-tom vremenskom koraku. Na primer, koja je verovatnoća apsorpcije i proporcija heterozigota populacije u n-toj generaciji. Apsorpcija u stanja 1 i 6 može biti izračunata kao u nastavku. Apsorpcija u n-tom koraku u stanje 1 ili 6 podrazumeva da se u $(n-1)$-vom koraku ulazi u stanje 2 ili 3. Tada se u stanje 1 ulazi u sledećem koraku. Tako, apsorpcija u stanje 1 u n-tom koraku je

$$p_{12}p_{2i}{}^{(n-1)} + p_{13}p_{3i}{}^{(n-1)} = \frac{1}{4}p_{2i}{}^{(n-1)} + \frac{1}{16}p_{3i}{}^{(n-1)}.$$

Vrednosti $p_{2i}{}^{(n-1)}$ i $p_{3i}{}^{(n-1)}$ mogu biti izračunate iz T^{n-1}. Apsorpcija u stanje 6 u n-tom koraku je

$$p_{63}p_{3i}{}^{(n-1)} + p_{64}p_{4i}{}^{(n-1)} = \frac{1}{16}p_{3i}{}^{(n-1)} + \frac{1}{4}p_{4i}{}^{(n-1)}.$$

Proporcija heterozigotnih jedinki, Aa, u n-tom trenutku zadovoljava

$$h_n = \frac{1}{2}p_2(n) + p_3(n) + \frac{1}{2}p_4(n),$$

gde su $p_i(n)$ proporcije populacije u stanju $i = 2,3,4$ u trenutku n. Kako su stanja 2,3 i 4 prelazna važi $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

4.3 Ograničen slučajni hod i primena u karcinogenezi

Ograničen slučajni hod je slučajni hod sa najmanje jednom granicom, pa je tako prostor stanja procesa konačan $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ sa dve granice u 0 i N, ili polu-beskonačan $\{0, 1, 2, \dots\}$ sa jednom granicom u 0. U modelu slučajnog hoda stanja su položaji i biće označeni promenljivom x, $x = 0,1,2\ .\ .\ .\ .$ Promenljiva n će označavati vreme, gde je $n \in \{0,1,2,\dots\}$. U najjednostavnijem slučajnom hodu pretpostavljeno je da je p verovatnoća pomeranja udesno, x u $x+1$ i q je verovatnoća pomeranja ulevo, x u $x-1$.

Pretpostavke o kretanju na granicama, na $x = 0$ ili $x = N$, razlikuju se od kretanja na drugim pozicijama. Diskutovaćemo o trima vrstama ponašanja na granici: apsorpcija, refleksija i elastičnost. Apsorbujuća granica u $x = 0$ pretpostavlja verovatnoću prelaza u jednom koraku

$$p_{00} = 1.$$

Reflektujuća granica u $x = 0$ pretpostavlja verovatnoće prelaza

$$p_{00} = 1 - p, \qquad p_{10} = p, \qquad 0 < p < 1.$$

Elastična granica u $x = 0$ pretpostavlja verovatnoće prelaza

$$p_{21} = p, \qquad p_{11} = sq, \qquad p_{01} = (1-s)q, \qquad p+q = 1, \qquad p_{00} = 1,$$

za $0 < p, s < 1$. Elastična granica je srednja u odnosu na apsorbujuću i reflektujuću granicu. Ako je $s = 0$, tada je $x = 0$ apsorbujuća granica, i ako je $s = 1$ tada je $x = 1$ reflektujuća granica. Kada je $0 < s < 1$, objekat koji se kreće ka granici sa pozicije $x = 1$ će ili dostići $x = 0$ sa verovatnoćom $(1-s)q$, ili će se vratiti u $x = 1$ sa verovatnoćom sq (elastično svojstvo).

Ograničen slučajni hod sa apsorbujućim granicama $x = 0$ i $x = N$ je takođe poznat kao problem propasti kockara ili samo propast kockara.

Slučajni hod u karcinogenezi

Činilac koji izaziva karcinom naziva se karcinogen. U proučavanju karcinogeneze, pogodak se odnosi na interakciju između kancerogene i normalne ćelije, što rezultira mutacijom te normalne ćelije u kancerogenu ćeliju. Prelaz normalne ćelije u (malignu) ćeliju karcinoma ne mora da se dogodi u jednoj fazi. Broj faza je broj mutacija potrebnih za stvaranje ćelije kancera. Kaže se da se mutacija javlja u datoj fazi, ako je tokom te faze mutiranja ćelija podožna razmnožavanju, umiranju, daljoj mutaciji u sledeću fazu i tako dalje. Za proučavanje jednostavnog modela slučajnog hoda, neka je $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ broj stanja. Ovde 0 predstavlja fazu/stanje totalnog oporavka. U ovom modelu se zahteva nekoliko uzastopnih mutacija od kojih svaka proizvodi klon mutiranih ćelija. Stanje N označava završetak procesa mutacije u kom se stvaraju maligne ćelije. Neka $\{X_n\}, n \geq 0$ označava slučajan hod, koji odgovara procesu mutacije. Korak napred podrazumeva dalju mutaciju u sledeću fazu/stanje i korak unazad podrazumeva pomak ka oporavku. Neka se ovi prelazi dešavaju sa sledećim verovatnoćama:

$$P\{x \to x+1\} = p_x = \frac{x}{N}$$

$$P\{x \to x-1\} = q_x = \frac{N-x}{N}$$

$$P\{N \to N\} = P\{0 \to 0\} = 1$$

$$P\{x \to x\} = 0,$$

za $x = 1, 2, \ldots, N-1$. Stanja 0 i N su apsorbujuća stanja.

Neka π_0, π_N i π_x označavaju redom verovatnoću potpunog oporavka, apsorpciju u kancerogeno stanje N i apsorpciju u stanje karcinoma N, s obzirom da je početno stanje mutacije x, $1 \leq x \leq N-1$. Dobijamo diferencijalnu jednačinu:

$$\pi_x = \frac{x}{N}\pi_{x+1} + \left(1 - \frac{x}{N}\right)\pi_{x-1}, 1 \leq x < N-1$$

sa početnim uslovima

$$\pi_0 = 0, \qquad \pi_N = 1.$$

Neka je $A(t) = \sum_x \pi_x t^x$ generatrisa verovatnoće za $\{\pi_x\}$, sada kada diferencijalnu jednačinu zapišemo kao:

$$\pi_x = \frac{x+1}{N}\pi_{x+1} - \frac{1}{N}\pi_{x+1} + \left(1 - \frac{x-1}{N}\right)\pi_{x-1} - \frac{1}{N}\pi_{x-1}.$$

dobijamo, uzimajući $\pi_{N+k} = 1, k \geq 0$,

$$\mathrm{A(t)} = \sum_{x=0}^{\infty}\left\{\frac{x}{N}\pi_x t^{x-1} - \frac{1}{N}\pi_x t^{x-1} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\pi_x t^{x+1} - \frac{x}{N}\pi_x t^{x+1}\right\},$$

što daje

$$(A(t))^{-1}\frac{dA}{dt} = t^{-1} + (1-t)^{-1} + (N-1)(1+t)^{-1}.$$

Rešavajući diferencijalnu jednačinu vidimo da

$$A(t) = Ct(1+t)^{N+1}(1-t)^{-1} = Ct\left[\sum_{x=0}^{N-1} C\binom{N-1}{x}t^x\right]\sum_{y>0} t^y.$$

gde je C konstanta integracije. Koristeći granične uslove, dobijamo

$$1 = C\sum_{y=0}^{x-1}\binom{N-1}{y} = C2^{N-1}$$

i tada

$$\pi_x = \sum_{y=0}^{x-1}\binom{N-1}{y}2^{1-N}, \qquad 0 \leq x \leq N.$$

Nakon početnog udara karcinogena, pretpostavlja se da je stanje mutacije 1. Dakle,

$$\pi_N = \pi_1\binom{N-1}{0}2^{1-N} = 2^{1-N}.$$

Kako je hod jednostavan,

$$\pi_0 = 1 - \pi_N = 1 - 2^{1-N}.$$

4.4 Proces rađanja i umiranja

4.4.1 Opšti proces rađanja i umiranja

Opšti proces rađanja i umiranja je formulisan kao lanac Markova u diskretnom vremenu. Model lanca Markova povezan je sa problemom propasti kockara, ali verovatnoća rađanja (ili pobede) nije konstantna, več zavisi od obima populacije i verovatnoća umiranja (ili gubitka) takođe zavisi od obima populacije. Za definisanje procesa rađanja i umiranja neka $X_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ označava obim populacije, gde prostor stanja može biti konačan ili beskonačan, tj. $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ ili $\{0, 1, 2, \ldots\}$ i N je maksimalna veličina populacije. Verovatnoće rađanja i umiranja su b_i i d_i redom. Dodatno, $b_0 = 0 = d_0, b_i > 0$ i $d_i > 0$ za $i = 1, 2, \ldots$, osim u konačnom slučaju, gde je $b_N = 0$. Pretpostavlja se da je vremenski interval, $n \to n + 1$, dovoljno mali tako da se u toku ovog vremenskog intervala dogodi najviše jedan događaj, bilo rođenje ili umiranje. Pretpostavimo da verovatnoće prelaza zadovoljavaju

$$p_{ji} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

$$= \begin{cases} b_i, \ j = i + 1 \\ d_i, \ j = i - 1 \\ 1 - (b_i + d_i), \ j = i' \\ 0, \ j \neq i - 1, i + 1 \end{cases}$$

za $i = 1, 2, \ldots$, $p_{00} = 1$ i $p_{j0} = 0$, za $j \neq 0$. U slučaju konačnog prostora stanja, gde je N maksimalan obim populacije, $p_{N+1,N} = b_N = 0$.

Matrica prelaza P za konačan lanac Markova je sledećeg oblika

$$P = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - (b_1 + d_1) & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 1 - (b_2 + d_2) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - (b_{N-1} + d_{N-1}) & d_N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N-1} & 1 - d_N \end{pmatrix}.$$

Kako bi se osiguralo da je P stohastička matrica, pretpostavljamo da je

$$sup_{i \in \{1,2,..\}}\{b_i + d_i\} \leq 1.$$

U svakom vremenskom intervalu, $[n, n + 1]$, obim populacije se ili poveća za jedan, smanji za jedan, ili ostaje isti.

Postoje dve klase komunikacije, $\{0\}$ i $\{0, 1, \ldots, N\}$ u konačnom slučaju. Lako se vidi da je nula pozitivno povratna, a sva ostala stanja su prelazna. Postoji jedinstvena stacionarna raspodela verovatnoća $\pi, P\pi = \pi$, gde je $\pi_0 = 1$ i $\pi_i = 0, i = 1, 2, \ldots$. u slučaju konačnog lanca Markova može se pokazati da na kraju izumiranje populacije dolazi iz bilo kog početnog stanja,

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = 0\} = \lim_{n\to\infty} p_0(n) = 1.$$

Očekivano vreme do izumiranja

U procesu rađanja i umiranja uzimamo da je 0 povratno apsorbujuće stanje ($p_0 = 0$). U ovom slučaju, znamo da će se u nekom trenutku desiti umiranje populacije (sa verovatnoćom jedan). Razumljivo pitanje je onda koliko očekujemo da čekamo pre nego što populacija izumre?

Pretpostavimo da $\lim_{n\to\infty} p_0(n)$ =1. Neka τ_k označava očekivano vreme do izumiranja za populaciju, to jest očekivano vreme pre nego što proces dostigne nulu, gde je k početna veličina populacije. Tada je $\tau_k = 0$ i važi sledeća veza za $k \geq 1$,

$$\tau_k = b_k(1+\tau_{k+1}) + d_k(1+\tau_{k-1}) + \big(1-(b_k+d_k)\big)(1+\tau_k).$$

Ako je maksimalna veličina populacije konačna, tada za $k = N$,

$$\tau_N = d_N(1+\tau_{N-1}) + (1-d_N)(1+\tau_N).$$

Diferencijalna jednačina može se pojednostaviti na sledeći način:

$$d_k\tau_{k-1} - (b_k+d_k)\tau_k + b_k\tau_{k+1} = -1,$$

$k = 1, 2, \ldots$. Ako je $k = N$, tada $d_N\tau_{N-1} - d_N\tau_N = -1$. Kako god, kada je maksimalni obim populacije konačan, tada se ova jednačina može izraziti u matričnom obliku $D\tau = c$, gde je $\tau = (\tau_0,\ \tau_1, \ldots, \tau_N)^T$, $c = (0, -1, \ldots, -1)^T$ i

$$D = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ d_1 & | & -b_1-d_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & | & d_2 & -b_2-d_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_N & -d_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_1 & D_N \end{pmatrix}.$$

Podmatrica D_N matrice D je nesvodljivo dijagonalno dominantna i prema Teoremi 3.2.1 $\det(D_N) \neq 0$, ali $\det(D) = \det(D_N)$. Tada, D je nesingularna i rešenje za očekivano vreme do izumiranja je

$$\tau = D^{-1}c. \tag{4.1}$$

Teorema 4.4.1. Pretpostavimo da je $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, opšti proces rađanja i umiranja sa $X_0 = m \geq 1$, za koji važi $b_0 = 0 = d_0, b_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ i $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$. Očekivano vreme do izumiranja populacije zadovoljava

$$\tau_m = \begin{cases} \dfrac{1}{d_1} + \displaystyle\sum_{i=2}^{N} \frac{b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 \cdots d_i}, & m = 1 \\ \tau_1 + \displaystyle\sum_{s=1}^{m-1} \left[\frac{d_1 \cdots d_s}{b_1 \cdots b_s} \sum_{i=s+1}^{N} \frac{b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 \cdots d_i} \right], & m = 2, \dots N \end{cases}.$$

4.4.2 Logistički proces rasta populacije

U ovom poglavlju napravićemo pretpostavke na osnovu verovatnoća rađanja i umiranja, b_i i d_i, tako da proces dobije logistički oblik. Ukoliko bismo pretpostavili da je $y(t)$ veličina populacije u trenutku t, onda je stopa promene $y(t)$ data sa:

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right), y(0) = y_0 > 0.$$

Desna strana ove diferencijalne jednačine jeste kvadratna funkcija od y i jednaka je razlici stope rađanja i umiranja (nataliteta i mortaliteta). Parametar r predstavlja unutrašnju stopu rasta, i K je kapacitet nosivosti. Opšte je poznato jedinstveno rešenje $y(t)$ ove diferencijalne jednačine, koje zadovoljava $\lim_{t\to\infty} y(t) = K$. To zapravo znači da veličina populacije dostiže kapacitet nosivosti. Za logistički proces rasta pretpostavljamo sledeće:

$$b_i - d_i = ri\left(1 - \frac{i}{K}\right) \quad \textbf{(4.2)}$$

za $i = 0, 1, 2, \dots, N$, gde je $N > K$. Primetimo da je verovatnoća rađanja jednaka verovatnoći umiranja kada je veličina populacije nula, ili kada je veličina populacije jednaka kapacitetu nosivosti K. Kako važi (4.2), razumno je pretpostaviti da su b_i i d_i ili linearne ili kvadratne funkcije po i.

Razmotrićemo dva slučaja za verovatnoće rađanja i umiranja:

(a) $b_i = r\left(i - \frac{i^2}{2K}\right)$ i $d_i = r\frac{i^2}{2K}, i = 0, 1, 2, \dots, 2K$

(b) $b_i = \begin{cases} ri, & i = 0,1,2,\dots,N-1 \\ 0, & i \geq N \end{cases}$ i $d_i = r\frac{i^2}{K}, i = 0, 1, 2, \dots, N$

U slučaju (a) maksimalna veličina populacije je $N = 2K$. Takođe, verovatnoća rađanja raste kada je obim populacije manji od K, ali opada kada je obim populacije veći od K, dok je verovatnoća umiranja rastuća funkcija veličine populacije. U slučaju (b), obe verovatnoće, i rađanja i umiranja, jesu rastuće funkcije veličine populacije.

Logistički proces rasta nema pozitivnu stacionarnu raspodelu, $\pi > 0$. Jedinstvena stacionarna raspodela odgovara procesu rađanja i umiranja, kao i logističkom procesu rasta, $\pi = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$. Kako god, ako je vreme preostalo do izumiranja dovoljno dugo, ovaj proces dostiže kvazistacionarnu raspodelu verovatnoća, raspodelu zasnovanu na neizumiranju.

4.4.3 Kvazistacionarna raspodela verovatnoća

Kada je očekivano vreme do apsorpcije veliko, razumljivo je što ispitujemo dinamiku procesa koji se odvija pre apsorpcije. Neka $\{X_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$ predstavlja proces rađanja i umiranja, sa verovatnoćom $p_i(n) = P\{X_n = i\}, i = 0, 1, 2, \dots, N$. Definišemo uslovnu verovatnoću,

$$q_i(n) = P\{X_n = i \;\; X_j \neq 0, j = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$= \frac{p_i(n)}{1 - p_0(n)},$$

za $i = 1, 2, \dots, N$. Raspodela $q(n) = (q_1(n), q_2(n), \dots, q_N(n))^T$ definiše se kao raspodela verovatnoća zbog sledećeg:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i(n) = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(n)}{1 - p_0(n)} = \frac{1 - p_0(n)}{1 - p_0(n)} = 1.$$

Verovatnoća $q_i(n)$ je uslovljena brojem stanovnika i u trenutku n ne dostiže nulu (uslovno neizumiranje). Neka je data $\{Q_n\}$, gde je Q_n slučajna promenljiva za veličinu populacije u trenutku n, uslov za neizumiranje, $q_i(n) = P\{Q_n = i\}$. Stacionarna raspodela verovatnoće za ovaj proces se označava sa q^*. Dakle, q^* predstavlja kvazistacionarnu raspodelu verovatnoće, ili se naziva još i kvaziekvilibrijum raspodele verovatnoće. Jednačine koje izvodimo za $q_i(n)$ su zasnovane na onim jednačinama koje smo izvodili za $p_i(n)$. Iz ovih diferencijalnih jednačina može biti određena kvazistacionarna raspodela verovatnoće q^*. Takođe ćemo videti da q^* možemo izračunati isključivo indirektnom metodom. Aproksimacija procesa $\{Q_n\}$ daje nesvodljiv, pozitivno povratan lanac Markova, $\{\widetilde{Q_n}\}$, sa pridruženom raspodelom verovatnoće $\tilde{q}(n)$. Za ovaj novi proces može se definisati matrica prelaza, $\tilde{P}$. Stacionarna raspodela verovatnoće $\tilde{q}^*$ je aproksimacija kvazistacionarne raspodele verovatnoće q^*.

Dakle, jednačine koje slede za $q_i(n+1)$ izvedene su iz identiteta $p(n+1) = Pp(n)$, gde smo matricu prelaza P definisali ranije za proces rađanja i umiranja. Primetimo sledeće,

$$q_i(n+1) = \frac{p_i(n+1)}{1 - p_0(n+1)} = \left(\frac{p_i(n+1)}{1 - p_0(n)}\right)\left(\frac{1 - p_0(n)}{1 - p_0(n+1)}\right)$$

$$= \left(\frac{p_i(n+1)}{1 - p_0(n)}\right)\left(\frac{1 - p_0(n)}{1 - p_0(n) - d_1 p_1(n)}\right)$$

ili

$$q_i(n+1)\big(1-d_1q_1(n)\big)=\left(\frac{p_i(n+1)}{1-p_0(n)}\right).$$

Primenjujući identitet

$$p_i(n+1)=b_{i-1}p_{i-1}(n)+(1-b_i-d_i)p_i(n)+d_{i+1}p_{i+1}(n)$$

dobijamo sledeće jednačine:

$$q_i(n+1)[1-d_1q_1(n)]=b_{i-1}q_{i-1}(n)+(1-b_i-d_i)q_i(n)+d_{i+1}q_{i+1}(n) \qquad \textbf{(4.3)}$$

za $i=1,2,\ldots,N, b_0=0$ i $q_i(n)=0$, za $i\neq\{1,2,\ldots,N\}$.

Diferencijalna jednačina za q_i je slična diferencijalnoj jednačini za p_i, osim dodatnog faktora koji dobijamo množenjem sa $q_i(n+1)$. Analitičko rešenje za stacionarno rešenje q^* ne možemo naći direktno iz ovih jednačina, obzirom da koeficijent zavisi od n, ali ga možemo dobiti numeričkim putem iterativnom metodom.

Da bismo aproksimirali kvazistacionarnu raspodelu verovatnoća $q*$ procesa $\{Q_n\}$, pretpostavićemo da je $d_1=0$. Kada se obim populacije smanji na jedinicu, verovatnoća umiranja jednaka je nuli. Ako je tokom dugog vremenskog perioda, verovatnoća da proces ostane u stanju jedan veoma mala, onda je ovo razumna pretpostavka.

Uzimajući u obzir ovu pretpostavku, jednačina (4.3) postaje:

$$\tilde{q}_i(n+1)=b_{i-1}\tilde{q}_{i-1}(n)+(1-b_i-d_i)\tilde{q}_i(n)+d_{i+1}\tilde{q}_{i+1}(n), \qquad i=2,\ldots,N-1$$

$$\tilde{q}_1(n+1)=(1-b_1)\tilde{q}_1(n)+d_2\tilde{q}_2(n), \qquad \tilde{q}_N(n+1)=b_{N-1}\tilde{q}_{N-1}(n)+(1-d_N)\tilde{q}_N(n).$$

Nova matrica prelaza odgovarajuće aproksimacije je:

$$P=\begin{pmatrix}1-b_1 & d_1 & \cdots & 0 & 0\\ b_1 & 1-(b_2+d_2) & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-(b_{N-1}+d_{N-1}) & d_N\\ 0 & 0 & \cdots & b_{N-1} & 1-d_N\end{pmatrix}.$$

Primetimo da je $\tilde{P}$ podmatrica matrice P, gde su obrisani prva kolona i prvi red i $d_1=0$. Lanac Markova u diskretnom vremenu $\{\tilde{Q}_n\}$, gde je $\tilde{q}(n+1)=\tilde{P}\tilde{q}(n)$, je ergodičan (nesvodljiv, pozitivno povratan i aperiodičan) i ima jedinstvenu stacionarnu raspodelu verovatnoće $\tilde{q}^*$, $\tilde{P}\tilde{q}^*=\tilde{q}^*$. Može se pokazati da $\tilde{q}^*=({\tilde{q}^*}_1,{\tilde{q}^*}_2,\ldots,{\tilde{q}^*}_N)^T$ zadovoljava:

$${\tilde{q}^*}_{i+1}=\frac{b_i\cdots b_1}{d_{i+1}\cdots d_2} \text{ i } \sum_{i=1}^{N}{\tilde{q}^*}_i=1. \qquad \textbf{(4.4)}$$

4.5 Modeli u epidemiologiji

Jedna od najvažnijih primena stohastičkih procesa u oblasti biologije i medicine bila je u matematičkoj teoriji epidemija. Epidemiologija je naučna disciplina koja proučava faktore koji utiču na pojavu različitih stanja i pojava u populaciji koje se odnose na zdravlje, kao i rasprostranjenost tih stanja, odnosno pojava u populaciji. Neko oboljenje u populaciji može da se javi na razičite načine:

- u obliku manjeg izbijanja bolesti kada se povremeno pojavi mali broj obolelih
- u obliku endemske bolesti koja je stalno prisutna u populaciji, tj. stalno postoji mali broj obolelih
- u obliku epidemije kada izbijanje neke bolesti pređe određenu granicu, odnosno proširi se na nešto veći deo populacije
- u obliku pandemije, koja predstavlja epidemiju koja se raširi na više država ili čak više kontinenata.

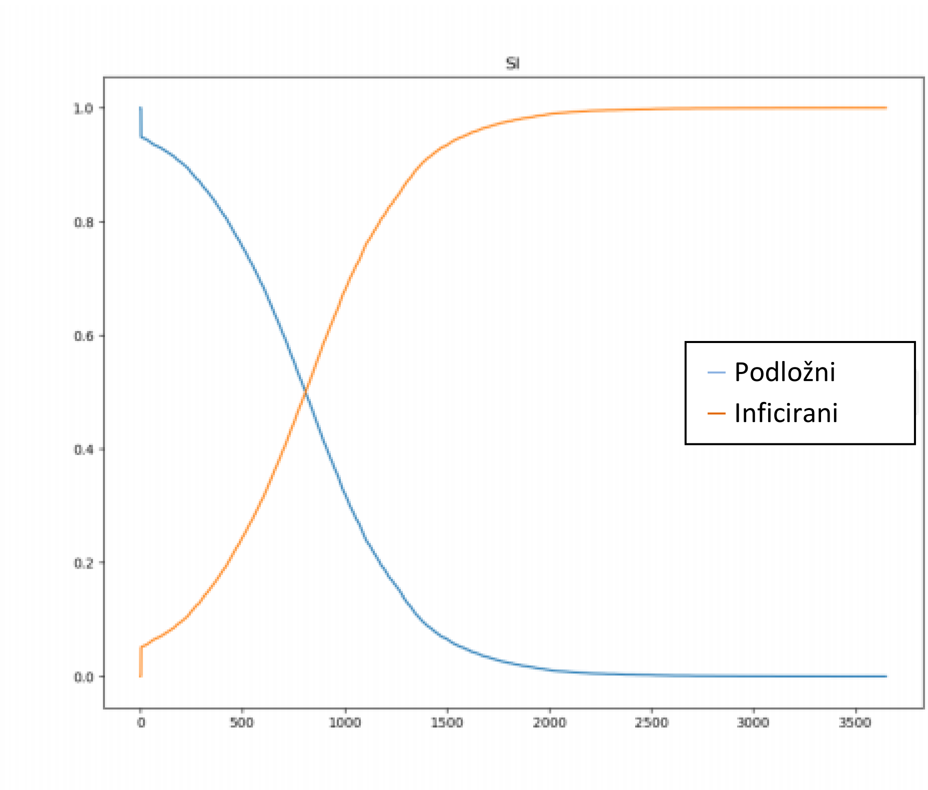
Tokom godina, različiti delovi sveta iskusili su izbijanje zaraznih bolesti. Ove epidemije dovele su do gubitka života i takođe su izazvale ozbiljne negativne ekonomske efekte na pogođenim područjima. Zarazne bolesti uzrokuju patogeni poput bakterija i virusa. Prenošenje zarazne bolesti može da se dogodi fizičkim kontaktom sa zaraženom osobom, upotrebom kontaminiranih predmeta, hrane, vode ili ujedom zaraženih insekata ili životinja. Širenje zaraznih bolesti velika je briga u gusto naseljenim mestima. Glavni razlog je taj što se bolesti mogu brzo proširiti u vrlo kratkom vremenskom periodu.

Jedan od prvih matematičara koji se bavio zaraznim bolestima je bio Daniel Bernulli. Bernulli je otkrio povezanost između vakcine protiv kravljih boginja i malih boginja. U svojoj studiji, oslanjajući se na matematičke modele, ukazao je na značaj vakcina. Nakon toga, kreće razvoj ove interdisciplinarne oblasti, koja je vremenom postala sve značajnija, s obzirom na činjenicu da eksperimenti u oblasti epidemiologije, zbog mnogobrojnih etičkih i tehničkih razloga, nisu mogući, a objašnjavanje načina na koji se određena zarazna bolest širi u populaciji je od velikog značaja za kontrolu same bolesti. Matematički modeli su korisno sredstvo za predviđanje izbijanja epidemija, merenje dejstva različitih mera prevencije i kao pomoć pri razvoju različitih strategija za suzbijanje određenih zaraza.

Ronald Ross, dobitnik Nobelove nagrade za svoju posvećenost u borbi protiv malarije, na početku 20. veka, isticao je značaj primene matematičkih metoda, dok su njegove kolege, W.O. Kermack i A.G. McKendrick, 1927. godine osmislili model kojim se uspešno opisivala većina registrovanih epidemijskih bolesti. Ovaj model je poznat kao SIR epidemiološki model, a naziv je dobio po tome što se čitava populacija osoba koje su izložene nekoj bolesti deli u tri klase: podložni (suspectible), zaraženi (infected) i oporavljeni (recovered). Pored SIR epidemioloških modela, postoje i drugi, o čemu će biti više reči u nastavku.

4.5.1 SI model

Osetljiv-inficiran „Susceptible-infectious“ (SI) model je najjednostavniji oblik epidemije bolesti. SI model se javlja sa specifičnim infekcijama, gde pojedinci ne stiču imunitet. U ovom slučaju podložni pojedinac dolazi u kontakt sa nekim ko je zaražen i od tada više nikada ne može napustiti to stanje. Ovo rezultira doživotnim infekcijama, koje se mogu razbuktavati iznova i iznova. Jedna činjenica koja je zajednička svim epidemijama je da pojedinci nisu rođeni inficirani, ali upadaju odmah u klasu podložnih tj. osetljivih. Dakle, niko se ne rađa sa zaraznom bolešću. Zanimljivo je da podložni pojedinci žive među inficiranom populacijom ne znajući ko bi mogao da im prenese bolest. Ovaj model je logistički proces rasta, zato što broj inficiranih pojedinaca neprekidno raste i nikada se ne smanjuje. Ukupna populacija je prestavljena sa $N = S + I$, gde je N ukupna populacija, S klasa podložnih, a I broj pojedinaca koji su inficirani bolešću.



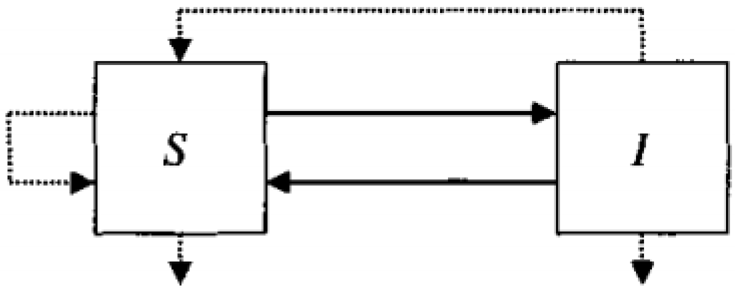
Slika 4.5.1. Prikazana je SI epidemija. Podložni pojedinci su prikazani plavom bojom, a inficirani narandžastom. Kako nijedan novorođeni nije inficiran, svaki pojedinac dolazi iz klase podložnih. Što se više pojedinaca zarazi, to je manji broj među podložnom populacijom. Presek dve krive predstavlja ekvilibrijum, gde je broj podložnih pojedinaca jednak broju zaraženih pojedinaca. Nakon preseka vidimo da populacija uključuje više zaraženih pojedinaca i manje podložnih pojedinaca. Ovaj obrazac se nastavlja sve dok se svaki pojedinac ne uključi u inficiranu populaciju. Budući da ova epidemija raste eksponencijalno i ne oslanja se na rađanje ili umiranje, na kraju se zarazi čitava populacija. *Slika preuzeta iz [14].*

Jedan od najčešćih primera SI epidemije je herpes. Najčešći humani virus je herpes simpleks virus (HSV), koji se može podeliti na dva soja HSV-1 i HSV-2. Procenjuje se da je 2017. bilo 3,7 milijardi pojedinaca starosti ispod 50 godina sa HSV-1 i 417 miliona pojedinaca iste starosne dobi zaraženih sa HSV-2 širom sveta. Kako je HSV virusna infekcija, prenosi se kontaktom, s kože na kožu. Ukoliko zaražena osoba, sa vidljivim ranama, ostvari fizički kontakt sa podložnim pojedincem, ona ga inficira. Ovaj oblik bolesti i epidemije je teško kontrolisati jer mnogi zaraženi pojedinci nemaju saznanja da su zaraženi i nesvesno šire bolest. Ova infekcija se popudara sa slikom 4.5.1., jer antivirusni lekovi mogu pomoći u smanjenju i učestalosti širenja bolesti, ali nema trajnog leka pa inficirana populacija nastavlja da raste u nedogled.

4.5.2 SIS model

Model koji ćemo sada proučavati naziva se SIS model u epidemiologiji. Naziv je dobio zato što podložni (osetljivi) pojedinci (S) postaju inficirani ili zaraženi (I), ali ne stiču imunitet posle oporavka, već mogu odmah da postanu inficirani ponovo, $S \rightarrow I \rightarrow S$. Pojedinci koji postanu inficirani su takođe zarazni, oni mogu da prenesu infekciju na druge. Takođe je pretpostavljeno da nema vertikalnog prenošenja bolesti, odnosno bolest se ne prenosi sa majke na njeno potomstvo. U našem jednostavnom modelu, nema vertikalnog prenošenja znači da se nijedan pojedinac nije rodio inficiran, novorođenčad pripada klasi podložnih ili osetljivih. Ukupna veličina populacije ostaje konstantna sve vreme, budući da je broj rođenih jednak broju umrlih, $S + I = N$.

Na slici 4.5.2. prikazan je prelaz između dva stanja, S i I.



Slika 4.5.2. Diagram SIS modela u epidemiologiji. Osetljivi pojedinci postaju inficirani sa verovatnoćom $\beta \frac{I}{N}$, a inficirani pojedinci oporavljaju sa verovatnoćom γ (pune linije). Verovatnoća rođenja i smrti osetljivog ili inficiranog pojedinca je jednaka b (isprekidane linije). *Slika preuzeta iz [14].*

Neka je vremenski period Δt, u periodu od n do $n+1$, dovoljno mali tako da se desi najviše jedan događaj. U vremenskom intervalu Δt, ili podložan pojedinac postaje zaražen, ili se rodi (odgovarajući pojedinac umire, podložan ili zaražen), ili se zaražen pojedinac oporavi. Podložan pojedinac postaje inficiran sa verovatnoćom $\beta \frac{I}{N}$. Konstanta β je broj kontakata jednog zaraženog (i podložnog) pojedinca koji dovode do infekcije tokom vremenskog intervala Δt, $\beta \frac{S}{N}$ ovih kontakata mogu da dovedu do nove infekcije i ukupan broj novoinficiranih u celoj klasi inficiranih pojedinaca je $\beta\frac{SI}{N}$. Osetljivi i inficirani pojedinci se rađaju ili umiru sa verovatnoćom b, u vremenskom intervalu Δt, a zaraženi pojedinci se oporavljaju sa verovatnoćom γ.

Deterministički SIS model

Prvo ćemo videti dinamiku determinističkog SIS modela, a zatim ćemo formulisati i analizirati analogan stohastički model. Neka S_n i I_n predstavljaju broj osetljivih i zaraženih pojedinaca u trenutku n. Promena u stanjima S_n i I_n u vremenskom intervalu Δt može biti predstavljena sistemom diferencijalnih jednačina:

$$S_{n+1} = S_n - \beta\frac{S_n I_n}{N} + I_n(b+\gamma)$$

$$I_{n+1} = \beta\frac{I_n S_n}{N} + I_n(1-b-\gamma)$$

gde je $n = 0, 1, 2, \ldots, S_0 > 0, I_0 > 0$ i $S_0 + I_0 = N$.

Na primer, broj novih osetljivih pojedinaca u trenutku $n+1$ jednak je broju pojedinaca koji nisu postali inficirani, $S_n[1-\beta\frac{I_n}{N}]$, plus inficirani pojedinaci koji su se oporavili, γI_n, plus novorođeni iz klase inficiranih, bI_n. Broj novorođenih iz klase osetljivih jednak je broju osetljivih pojedinaca koji su umrli, bS_n, zato što je pretpostavljeno da je ukupna veličina populacije konstantna.

Pretpostavimo da su parametri pozitivni i da zadovoljavaju sledeće

$$0 < \beta \leq 1,\ \ 0 < b+\gamma \leq 1.$$

Može se videti da je $S_n + I_n = N$. Stoga je dovoljno razmatrati diferencijalnu jednačinu za I_n. Zamenjujući S_n sa $N - I_n$ dobijamo:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n\left(\beta\frac{N-I_n}{N} + 1 - b - \gamma\right) \\ &= I_n\left(1+\beta-b-\gamma-\beta\tfrac{I_n}{N}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Zbog pretpostavki za parametre i početnih uslova, rešenje I_n zadovoljava $0 \leq I_n \leq N$ u svakom trenutku. Tada postoje dva konstantna rešenja $I_n = \bar{I}$ jednačine (4.5). Ova rešenja su poznata kao stabilna rešenja, ili ekvilibrijumi, gde je $I_{n+1} = I_n = \bar{I}$, i za njih je karakteristično da se ne menjaju vremenom. Ekvilibrijumi su:

$$\bar{I} = 0 \quad \text{i} \qquad \bar{I} = N\left(1-\tfrac{b+\gamma}{\beta}\right). \tag{4.6}$$

Može se pokazati za model (4.5) da dinamika zavisi od parametra R_0, koji je poznat kao osnovni reprodukcioni broj :

$$R_0 = \frac{\beta}{b+\gamma}.$$

Parametar R_0 ima biološku interpretaciju, to jest epidemiološko tumačenje. Kada je cela populacija osetljiva, R_0 predstavlja prosečan broj uspešnih kontakata (β) jedne zaražene osobe tokom perioda infektivnosti $\left(\frac{1}{b+\gamma}\right)$ koji će rezultirati novim zaraznim pojedincem. Ako je $R_0 > 1$, tada jedan zaražen pojedinac dovodi do više od jednog novoinficiranog, a ako je $R_0 < 1$, tada jedan zaražen pojedinac dovodi do manje od jednog novoinficiranog. Primetimo da je drugi ekvilibrijum u (4.6) pozitivan ako i samo ako je $R_0 > 1$. Može se pokazati da, ako je $R_0 \leq 1$, tada $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ i ako je $R_0 > 1$, tada $\lim_{n\to\infty} I_n = N\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$, gde je granica za drugi ekvilibrijum data u (4.6). Veličina (magnituda) R_0 određuje da li epidemija opstaje u populacij i dalje, odnosno da li postaje endemska infekcija.

Stohastički SIS model

Sada ćemo formulisati jedan stohastički SIS model u epidemiologiji. Neka slučajna promenljiva I_n predstavlja broj zaraženih pojedinaca u trenutku n. Prostor stanja slučajne promenljive I_n je skup $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$, a parametarski skup stohastičkog procesa $\{I_n\}$ je $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pokazaćemo da je stohastički proces $\{I_n\}$ lanac Markova u diskretnom vremenu. Definisaćemo matricu prelaza P, izvešćemo izraz za očekivano trajanje epidemije τ_k i daćemo aproksimaciju verovatnoće apsorpcije, a_k, za veliki obim populacije N (verovatnoća da epidemija nestaje).

Pretpostavimo da je Δt dovoljno mali, tako da tokom ovog vremenskog intervala postoji najviše jedna promena slučajne promenljive I_n. Ako je $I_n = i$, tada se I_{n+1} može promeniti u samo jedno od sledećih stanja, $i+1$, $i-1$ ili i.

Verovatnoće prelaza u jednom koraku zadovoljavaju:

$$p_{i+1,i} = P\{\, I_{n+1} = i+1 \mid I_n = i\,\} = \beta\frac{i(N-i)}{N} = \Pi_i$$

$$p_{i-1,i} = P\{\, I_{n+1} = i-1 \mid I_n = i\,\} = (b+\gamma)i$$

$$\begin{aligned} p_{i,i} &= P\{\, I_{n+1} = i \mid I_n = i\,\} = 1 - \beta\frac{i(N-i)}{N} - (b+\gamma)i \\ &= 1 - \Pi_i - (b+\gamma)i\,, \end{aligned}$$

Za $i = 1, 2, \ldots, N-1$ i $p_{ji} = 0$ ako $j \neq i-1, i, i+1$. Takođe, $p_{00} = 1$, odnosno nulto stanje je apsorbujuće stanje. Matrica prelaza P je sledećeg oblika:

$$\begin{pmatrix} 1 & (b+\gamma) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-\Pi_1-(b+\gamma) & 2(b+\gamma) & \dots & 0 \\ 0 & \Pi_1 & 1-\Pi_2-2(b+\gamma) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N(b+\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-N(b+\gamma) \end{pmatrix},$$

gde je $\max_i\{\Pi_i + i(b+\gamma)\} \leq 1$.

Iz matrice prelaza se može videti da postoje dve klase $\{0\}$ i $\{1,2,\dots,N\}$. Nulta klasa je apsorbujuća, a sva ostala stanja su prelazna. Tada je $\lim_{n\to\infty} P^n p(0) = (1,0,\dots,0)^T$. Najzad dolazi do apsorpcije u nulto stanje , gde ima nula inficiranih pojedinaca.

Ovaj model je sličan logističkom procesu rasta populacije ako je $R_0 > 1$. Neka je $b_i = \Pi_i = \beta i\left(1-\frac{i}{N}\right)$ i $d_i = (b+\gamma)i$. Tada

$$b_i - d_i = i\left[\beta - (b+\gamma) - \beta\frac{i}{N}\right] = ri\left[1-\frac{i}{K}\right],$$

gde je unutrašnji rast predstavljen sa $r = \beta - (b+\gamma) > 0$ i kapacitet nosivosti sa $K = \frac{Nr}{\beta} = N\left(1-\frac{1}{R_0}\right)$. Primetimo da ova vrednost K je stabilan ekvilibrijum determinističkog modela (4.6). Ako je $R_0 \leq 1$, tada je $b_i - d_i \leq 0$ i samo u $i = 0$ je stopa rađanja jednaka stopi umiranja. Matrica prelaza se može iskoristiti za računanje raspodele verovatnoća $p(n)$ i postavljanje linearnog sistema kao u (4.1), $D\tau = c$, za rešenje očekivanog trajanja epidemije, τ.

Ako je broj populacije N dovoljno veliki, kao i početan broj inficiranih k može proći dosta vremena dok se epidemija završi. U tom slučaju, umesto epidemije, bolest postaje endemska. Ako je N dovoljno veliko i k dovoljno malo, SIS model se može ponašati slično kao model slučajnog hoda („Random Walk“), bilo da postoji apsorpcija sa verovatnoćom a_k, ili da veličina epidemije postaje velika i ostaje velika dug period vremena. Verovatnoća apsorpcije, a_k, se može koristiti za procenu da se epidemija završava brzo.

Verovatnoća apsorpcije kada je $x = 0$ za model polubeskonačnog slučajnog hoda je data sa:

$$\begin{cases} \frac{q}{p}, & q < p \\ 1, & q \geq p \end{cases},$$

gde je q verovatnoća pomeranja ulevo ($x \to x-1$), p je verovatnoća pomeranja udesno ($x \to x+1$), i k je početna pozicija.

U SIS modelu, verovatnoća pomeranja ulevo je data sa $(b+\gamma)k$, a verovatnoća pomeranja udesno je data sa $\beta k(N-k)/N$. Za veliko N važi

$$\frac{q}{p} \approx \frac{b+\gamma}{\beta} = \frac{1}{R_0}.$$

Iz modela polubeskonačnog slučajnog hoda sledi da je verovatnoća da bolest nestane brzo, data početnom vrednošću k inficiranih pojedinaca, jednaka $\left(\frac{q}{p}\right)^k \approx \left(\frac{1}{R_0}\right)^k$. Procena $p_0(n)$ na početku epidemije je:

$$p_0(n) \approx \left(\frac{1}{R_0}\right)^k, \text{ ako je } R_0 > 1 \text{ i}$$

$$p_0(n) \approx 1, \text{ ako je } R_0 \leq 1.$$

Izvedimo jednačine za uslovnu raspodelu $q(n)$, na način koji primenjujemo u stohastičkom modelu. Neka je

$$q_i(n+1) = \frac{p_i(n+1)}{1-p_0(n+1)}.$$

Odatle sledi:

$$q_i(n+1)\big(1-(b+\gamma)q_1(n)\big) = \frac{p_i(n+1)}{1-p_0(n)}.$$

Aproksimacija za stacionarnu raspodelu $q(n)$ se može naći pod pretpostavkom da, kada je jedna osoba inficirana, ta osoba se ne oporavi ili nema reproduktivnu sposobnost.

Primeri

Najjednostavniji primer modela SIS je obična prehlada. Prehlada je virusna infekcija gornjih disajnih puteva, što obuhvata područje nosa, grla, sinusa itd. . Ovaj virus može trajati od jedne do tri nedelje i prenosi se vazduhom kapljicama iz zaražene osobe koja je kijala ili kašljala. Podložna osoba može dobiti ovu prehladu ako je u blizini osobe koja radi bilo koju od gore navedenih radnji. Ova situacija je SIS model jer se većina pojedinaca prehladi barem jednom u sezoni, ali se zatim oporave do sledećeg rasplamsavanja infekcije.

Složenija SIS epidemija je hlamidija. Hlamidija je uzrokovana bakterijom „Chlamydia trachomatis“. To je polno prenosiva bolest, koja se prenosi kontaktom sa zaraženom osobom. Prema Centru za kontrolu i prevenciju bolesti, hlamidija je među najčešćim od svih polno prenosivih bolesti, posebno kod mladih žena. Godine 2018. SAD su prijavile skoro 1,8 slučajeva hlamidije, ali se smatra da se zaista dogodilo 2,86 miliona slučajeva zaraze. Mnogi pojedinci su asimptomatski i stoga se ne leče. Nelečeni slučajevi mogu biti posebno rizični za žene, jer hlamidija može dovesti do zapaljenske bolesti karlice i ponekad može izazvati neplodnost. Ova tiha bolest može dovesti do infekcije još više podložnih pojedinaca. Ankete pokazuju da samo oko 10% muškaraca i od 5 do 30% žena razvije simptome. Jedna pozitivna osobina hlamidije je to što se lako leči antibioticima. Ovaj tretman omogućava zaraženim osobama da se vrate u podložno stanje. Budući da je u pitanju SIS model, čim se pojedinac vrati u klasu podložnih, nažalost, on se može odmah ponovo zaraziti.

4.5.3 Model binomnih lanaca

Neka su S_n i I_n diskretne slučajne promenljive koje predstavljaju broj podložnih i inficiranih pojedinaca u trenutku n, redom. Vremenski interval $[n, n+1]$, dužine Δt, predstavlja vremenski period dok pojedinac ne postane zaražen, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Broj inficiranih pojedinaca I_n predstavlja nove inficirane pojedince koji su bili latentni tokom vremenskog intervala $[n-1, n]$. Ovi novi zaraženi pojedinci su zarazni. Oni mogu stupiti u kontakt sa podložnim pojedincima u trenutku n, koji se mogu inficirati u trenutku $n+1$. Ne dešava se rođenje ili umiranje, pa se broj podložnih pojedinaca ne povećava u toku vremena. Novoinficirani pojedinci u trenutku $n+1$ i podložni pojedinci u trenutku $n+1$ predstavljaju sve pojedince koji su podložni u trenutku n:

$$S_{n+1} + I_{n+1} = S_n.$$

Epidemija se završava kada broj inficiranih pojedinaca dostigne nulu, $I_n = 0$, zato što u sledećem trenutku nema pojedinaca koji bi postali inficirani, $I_{n+1} = 0$. Tada, $S_{n+1} = S_n$.

Na ovim pretpostavkama zasnovana su dva modela. Oni su poznati kao Greenwood i Reed-Frost modeli, nazvani po naučnicima koji su razvili ove modele. Modeli su razvijeni 1931. i 1928. godine, redom. Lowell Reed i Wade Hampton Frost, dva istraživača u medicini na John Hopkins Univerzitetu, razvili su ove modele u svrhu prikazivanja studentima medicine promenljivost u epidemijskom procesu. Međutim, nijedan od njih dvojice nije objavio svoje radove, već je to uradio Abbey, koji je objavio rezultate njihovog istraživanja 1952. godine. Najpre su ovi modeli korišćeni za male epidemije, ili u epidemiji u domaćinstvu, gde prva zaražena osoba širi infekciju među ostalim članovima porodice. Oba modela su bivarijantni modeli lanaca Markova zato što zavise od dve promenljive, broja podložnih pojedinaca, S_n, i broja zaraženih pojedinaca, I_n. Bivarijantni Markov proces označen je sa $\{S_n, I_n\} = \{(S, I)_n\}$, za $n = 0, 1, 2, \ldots$. Stanje sistema u trenutku $n+1$ zavisi samo od stanja sistema u prethodnom trenutku n. Verovatnoća prelaza $p_{(s,i)_{n+1},(s,i)_n}$ određuje verovatnoću prelaza u jednom koraku, za kretanje između dva stanja, $(s,i)_n \to (s,i)_{n+1}$. Oznake s i i, ili s_n i i_n predstavljaju vrednosti slučajnih promenljivih S_n i I_n, redom, u trenutku n.

Neka je α verovatnoća da dođe do kontakta između podložnog i inficiranog pojedinca, a β verovatnoća da se podložan pojedinac zarazi nakon kontakta. Tada je verovatnoća da se podložan pojedinac ne zarazi:

$$1 - \alpha + \alpha(1-\beta) = 1 - \alpha\beta = p.$$

Verovatnoća p je važan parametar u Greenwood i Reed-Frost modelima.

Greenwood Model

Greenwood model pretpostavlja da je verovatnoća $p_{(s,i)_{n+1},(s,i)_n}$ prelaza binomna verovatnoća. Verovatnoća uspešnog kontakta, koji rezultira infekcijom, jeste $1-p$ i verovatnoća kontakta koji ne rezultira infekcijom (neuspešan kontakt) je p. U trenutku $n+1$, ukoliko ima s_{n+1} podložnih pojedinaca, s_{n+1} neuspešnih kontakata i $i_{n+1}=s_n-s_{n+1}$ uspešnih kontakata, sledi

$$p_{(s,i)_{n+1},(s,i)_n}=\binom{s_n}{s_{n+1}}p^{s_{n+1}}(1-p)^{s_n-s_{n+1}}. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Kao što je pokazano u izrazu, verovatnoća prelaza ne zavisi od i_n. Kako se verovatnoća prelaza može izraziti preko s_n i s_{n+1}, možemo je zapisati kao p_{s_{n+1},s_n}. Da izazovemo epidemiju neka je $I_0=i_0>0$. Prostor stanja za S_n i I_n je $\{0,1,2,\ldots,s_0\}$, gde je $S_0=s_0>0$. Maksimalan broj inficiranih je s_0.

Partikularna realizacija ili putanja uzoraka može biti označena sa $\{s_0,s_1,\ldots,s_{t-1},s_t\}$, gde je $i_t=0$, ili $s_t-s_{t-1}=0$. Vrednost t je dužina putanje uzoraka ili trajanje epidemije. Takođe, veličina epidemije je broj podložnih pojedinaca koji postaju zaraženi tokom epidemije, s_0-s_t. Može se videti iz (4.7) da slučajna promenljiva S_{n+1} ima binomnu raspodelu $\beta(S_n,p)$. To je razlog zbog čega je Greenwood model označen kao model binomnog lanca. Koristeći činjenicu da S_{n+1} ima binomnu raspodelu i da je $I_{n+1}=S_n-S_{n+1}$, može se pokazati da uslovno očekivanje zadovoljava

$$E(S_{n+1}\mid S_n=s_n)=ps_n,$$

i

$$E(I_{n+1}\mid S_n=s_n)=s_n-ps_n=(1-p)s_n.$$

(Podsetimo se da je očekivanje kod binomne raspodele $\beta(s_n,p)$ $\mu=ps_n$.)

Matrica prelaza kod Greenwood modela se može izraziti preko početnog uslova s_0. Matrica je veličine $((s_0+1)\times(s_0+1))$ i sledećeg je oblika:

$$P=\begin{pmatrix}1 & (1-p) & (1-p)^2 & \ldots & (1-p)^{s_0}\\ 0 & p & 2p(1-p) & \ldots & \binom{s_0}{1}p(1-p)^{s_0-1}\\ 0 & 0 & p^2 & \ldots & \binom{s_0}{2}p^2(1-p)^{s_0-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p^{s_0}\end{pmatrix}.$$

Jednom kada dođe do prelaza tipa $s_n\to s_n$, p_{s_n,s_n}, epidemija se završava zato što je $s_n=s_{n+1}$ i $i_n=i_{n+1}$.

Reed-Frost model

U Reed-frost modelu podložan pojedinac u trenutku n će i dalje biti podložan u trenutku $n+1$ ako ne postoji kontakt sa zaraženim pojedincem. Ako je broj zaraženih pojedinaca u trenutku n, i_n, pretpostavljamo da verovatnoća da nije bilo uspešnog kontakta podložnog pojedinca sa bilo kojim od inficiranih pojedinaca i_n iznosi p^{i_n}. Reed-Frost model ima formu modela Greenwood, osim što je p zamenjeno sa p^{i_n}. Verovatnoće prelaza u Reed-Frost modelu su binomne verovatnoće, koje zadovoljavaju:

$$p_{(s,i)_{n+1},(s,i)_n} = \binom{s_n}{s_{n+1}} \left(p^{i_n}\right)^{s_{n+1}} (1-p^{i_n})^{s_n - s_{n+1}}.$$

Verovatnoće prelaza u jednom koraku zavise od i_n, s_n i s_{n+1}, dakle, ne može se izraziti samo preko vrednosti s_n i s_{n+1}, kao što je mogao Greenwood model. Podsetimo se da je $s_n + i_n = s_{n-1}$ i $i_n = s_{n-1} - s_n$. Kako verovatnoća prelaza zavisi od i_n, s_n i s_{n+1}, zbog jednostavnijeg zapisa, označićemo verovatnoću prelaza za Reed-Frost model sa p_{s_{n+1},s_n}. Iz oblika verovatnoće prelaza sledi da slučajna promenljiva S_{n+1} ima binomnu raspodelu $\beta(S_n, p^{I_n})$. Stoga je Reed-Frost model takođe označen kao model binomnog lanca. Koristeći činjenicu da S_{n+1} ima binomnu raspodelu i $I_{n+1} = S_n - S_{n+1}$, može se pokazati da je uslovno očekivanje:

$$E(S_{n+1} \mid (S,I)_n = (s_n, i_n)) = s_n p^{i_n}$$

i

$$E(I_{n+1} \mid (S,I)_n = (s_n, i_n)) = s_n - s_n p^{i_n} = s_n(1-p^{i_n}) .$$

Trajanje i veličina epidemije

Neka T označava trajanje epidemije i W veličinu epidemije ili ukupan broj podložnih pojedinaca koji postaju zaraženi. Na primer, za putanju uzoraka $\{s_0, s_1, \ldots, s_{t-1}, s_t\}$, $T = t$, $W = s_0 - s_t$. Za dati broj podložnih i inficiranih pojedinaca, $s_0 > 0$ i $i_0 > 0$, maksimalna vrednost T je $s_0 + 1$, $T \in \{1, 2, \ldots, s_0 + 1\}$, a maksimalna vrednost W je s_0, $W \in \{0,1,.., s_0\}$. Epidemija se može završiti u jednom koraku ukoliko se niko ne zarazi, $S_1 = s_0$ i $I_0 = 0$ ($T = 1, W = 0$), ili se može završiti nakon ($s_0 + 1$)-tog vremenskog koraka, kada se jedan pojedinac zarazi u svakom vremenskom koraku ($T = s_0 + 1$ i $W = s_0$). Promenljive T i W su slučajne promenljive čije raspodele verovatnoća mogu biti izračunate iz verovatnoća putanje uzoraka.

Može se primeniti i druga metoda za pronalaženje raspodele verovatnoća za T i W u Greenwood modelu. Ovu metodu opisali su Daley i Gani (1999), i ukratko je opisana ovde. Prvo, podelimo matricu prelaza P Greenwood modela na dve matrice, $P = U + D$, gde je U strogo gornje trougaona matrica sa nulama na dijagonali, i D je dijagonalna matrica takva da $D = diag(1, p, p^2, \ .., p^{s_0})$ i

$$U = \begin{pmatrix} 0 & (1-p) & (1-p)^2 & \dots & (1-p)^{s_0} \\ 0 & 0 & 2p(1-p) & \dots & \binom{s_0}{1}p(1-p)^{s_0-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{s_0}{2}p^2(1-p)^{s_0-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Primetimo da matrica U predstavlja one prelaze koji se ne vraćaju u isto stanje u jednom vremenskom koraku sa verovatnoćom $p_{ij}, i \neq j$, dok D predstavlja one prelaze koji se vraćaju u isto stanje u jednom vremenskom koraku sa verovatnoćom p_{ii}. Kada je $s_t = s_{t-1}$ ili $p_{s_t,s_t}^{(n)} > 0$, postoji pozitivna verovatnoća da se epidemija završi u trenutku n. Elementi matrice U^{n-1} predstavljaju verovatnoću prelaza između stanja i i j u $n-1$ koraku, gde $j \to i, j \neq i$. Neka je

$$p(n) = (p_0(n), p_1(n), \dots, p_{s_0}(n))^T,$$

raspodela verovatnoća za stanje podložnih pojedinaca u trenutku n. Tada $U^{n-1}p(0)$ predstavlja raspodelu verovatnoće $p(n-1)$, obzirom na to da se epidemija nije završila u trenutku $n-1$. Ukoliko pomnožimo sa D, $DU^{n-1}p(0)$ je vektor raspodele verovatnoće da se epidemija završila tačno u trenutku n. Suma elemenata vektora raspodele verovatnoće $DU^{n-1}p(0)$ je verovatnoća da se epidemija završila u trenutku n, $P\{T=n\}$. Neka je $E = (1, 1, \dots, 1)$ red vektora jedinica. Tada

$$P\{T=n\} = EDU^{n-1}p(0).$$

Kako se epidemija može završiti u stanjima $0, 1, 2, \dots, s_0$ važi

$$\sum_{n=1}^{s_0+1} EDU^{n-1}p(0)t^n = \sum_{n=1}^{s_0+1} P\{T=n\}t^n.$$

Na isti način se može izraziti funkcija raspodele slučajne promenljive W, koja predstavalja veličinu epidemije.

Neka je za Greenwood model $U(t)$ definisano kao:

$$U(t) = \begin{pmatrix} 0 & (1-p)t & [(1-p)t]^2 & \dots & [(1-p)t]^{s_0} \\ 0 & 0 & 2p(1-p)t & \dots & \binom{s_0}{1}p[(1-p)t]^{s_0-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{s_0}{2}p^2[(1-p)t]^{s_0-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica U definisana predhodno je $U = U(1)$. Elementi $p_{ij}(t)$ matrice $U(t)$ zadovoljavaju $p_{ij}(t) = p_{ij}t^{j-1}$. Elementi matrice $U(t)$, $p_{ij}(t)$ $i \neq j$, predstavljaju elemente verovatnoće da se epidemija nije završila u jednom koraku. Ukoliko se broj podložnih pojedinaca promeni sa j na i, veličina epidemije je $j-i$. Dodatno, elementi $U^2(t)$ zadovoljavaju $p_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)}t^{j-i}$. Ako se, u dva vremenska koraka, broj podložnih pojedinaca promeni sa j na i, veličina epidemije je onda $j-i$. Tada $EDU^{n-1}p(0)$ predstavlja funkciju za veličinu epidemije kada se ona završava u n vremenskih koraka. Kako se epidemija može završiti u $1, 2, \ldots, s_0 + 1$ koraka, funkcija raspodele verovatnoće za W zadovoljava:

$$\sum_{n=1}^{s_0+1} EDU(t)^{n-1} p(0) = \sum_{k=0}^{s_0} P\{W = k\} t^k.$$

Koeficijent t^k u proširenju na levoj strani je $P\{W = k\}$.

Zaključak

U ovom radu smo se najpre podsetili osnovnih pojmova, oznaka i definicija iz teorije verovatnoće. Zatim smo dali definicije i osobine stohastičkih procesa, potrebne za razumevanje dalje teorije u radu. Slučajni (stohastički) procesi predstavljaju matematičke modele procesa čija je evolucija opisana zakonima verovatnoće. Teorija slučajnih procesa, najpre razvijana radi modelovanja fluktuacija i šumova u fizičkim sistemima, svoju primenu danas nalazi u raznovrsnim disciplinama kao što su: statistička fizika, telekomunikacije, automatsko upravljanje, teorija pouzdanosti i u mnogim drugim.

Kroz rad smo predstavili i definisali lance Markova sa diskretnim vremenom i ukazali na njihove pozitivne i korisne strane u primeni prilikom modeliranja slučajnih procesa. Za ove modele oba, vreme i prostor, su diskretni. Markovski procesi su slučajni procesi sa osobinom da sledeće stanje procesa zavisi samo od sadašnjeg stanja. Lanci Markova su posebna vrsta Markovskih procesa koji imaju Markovljevo svojstvo i gde se proces može nalaziti samo u konačnom broju stanja. Lanci Markova predstavljaju korisne alatke u statističkom modelovanju u praktično svim poljima primenjene matematike. Kao što je već rečeno, imaju veliku primenu u modeliranju prirodnih pojava i nauka. Ispostavlja se da je korisno posmatrati lance Markova kao usmerene težinske grafove, iako strogo gledano oni to nisu. Tako da su stanja lanca predstavljena čvorovima grafa, dok grane grafa predstavljaju verovatnoće prelaza. Takva konstrukcija pokazala je simulaciju lanca Markova sa diskretnim vremenom. Na kraju smo razvili neke od osnovnih teorija diskretnih lanaca Markova.

Dali smo neke od mnogobrojnih primera lanaca Markova, posebno se osvrnuvši na primene u biologiji. Analizirali smo matematičke modele za širenje epidemije, koristeći tehnike iz statistike, verovatnoće i diferencijalnih jednačina za praćenje i testiranje ozbiljnosti epidemija. Matematičko modeliranje je vitalni deo razumevanja izbijanja bolesti i predviđanja u epidemiologiji. Koristi se za razumevanje ponašanja problema u stvarnom životu i za predviđanje o budućim događajima.

Literatura

[1] Linda J. S. Allen, *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology,* Department of Mathematics and Statistics Texas Tech University, December 2, 2010

[2] Danijela Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, 2009

[3] Milan Merkle, *Verovatnoća i statistika*, Akademska misao, Beograd, 2002

[4] Johnson Agbinya, *Markov Chain and its Applications an Introduction*, Melbourne Institute of Tehnology, 2020

[5] Richard Serfozo, *Basics of Applied Stochastic Processes,* Georgia Institute of Technology, School of Industrial & Systems Engineering, Atlanta, USA, 2009

[6] Richard Weber, *Markov Chains*, University of Cambridge, Octobar 2011

[7] Anders Tolver, *An Introduction to Markov Chains*, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, 2016

[8] D. Kannan, *An Introduction to Stochastic Processes*, Department of Mathematics University of Georgia, 1979

[9] Norman T. J. Bailey, *The elements of Stochastic Processes with applications to the natural sciences,* University of Oxford, 1964

[10] Edward P. C. Kao, *An introduction to Stochastic Processes,* Wadsworth Publishing Company, USA, 1997

[11] Rinaldo B. Schinazi, *Classical and Spatial Stochastic Processes With Applications to Biology,* Department of Mathematics, Univerzity of Colorado, 2014

[12] David A. Levin, Yuval Peres, *Markov Chains and Mixing Times*, second edition, University of Oregon

[13] Oluwatobiloba Ige, *Markov Chain Epidemic Models and Parameter Estimation*, Marshall University, 2020

[14] Abigail Eleanor Bernhardt, *Markov Chain Model for the Spread of an Epidemic*, University of Mary Washington, 2020

Biografija

Rođena sam 6. 9. 1994. godine u Pirotu, Republika Srbija. Osnovnu školu „Ljupče Španac“ završila sam u Beloj Palanci 2009. godine kao nosilac Vukove diplome. Gimnaziju „Niketa Remezijanski“, opšti smer, u Beloj Palanci, završila sam 2013. godine takođe kao nosilac Vukove diplome.

Zbog sklonosti ka prirodnim naukama iste godine upisujem osnovne studije na Matematičkom fakultetu u Beogradu, smer Profesor matematike i računarstva. Godine 2019. zainteresovala sam se za Integrisane studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Tada sam, sa položenih 36 ispita na Matematičkom fakuletu, prešla na Integrisane studije, smer Master profesor matematike u Novom Sadu. Na pomenutim studijama sam položila sve ispite predviđene nastavnim planom i programom. Aprila 2021. godine, položila sam poslednji, pedeseti ispit, i time stekla uslov za odbranu master rada, sa ukupno 318 espb bodova.

Septembra 2021. godine počela sam da radim kao nastavnik matematike u O.Š. „Njegoš“ u Nišu i kao profesor matematike i računarstva u Gimnaziji „Niketa Remezijanski“ u Beloj Palanci.

Univerzitet u Novom Sadu

Prirodno – matematički fakultet

Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Tamara Petrović

AU

Mentor: prof. dr Danijela Rajter-Ćirić

MN

Naslov rada: Lanci Markova i neke primene u bilogiji

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2021.

GO

Izdavač: autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (4/70/0/0/6/0/0)
(broj poglavlja/ strana/ lit. citata/ tabela/ slika/ grafika/ priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Matematička analiza, Verovatnoća

ND

Predmetna odrednica/ Ključne reči: lanci Markova, stohastički proces, verovatnoće prelaza, stanja, vreme prvog povratka, stacionarna raspodela, propast kockara, slučajan hod, genetički problem, proces rađanja i umiranja, epidemija, SI, SIS, model binomnih lanaca

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Rad se bavi lancima Markova i njihovim klasičnim primenama i primenama u biologiji. U uvodnom delu ovog rada obrađeni su osnovni pojmovi teorije verovatnoće, date su definicije i osobine stohastičkih procesa. U nastavku se uvode lanci Markova, oznake i osnovne definicije. Zatim se daje klasifikacija stanja i osnovne osobine u diskretnom vremenu. U trećem delu, kroz primere, pokazuje se primena lanaca Markova. Opisane su slučajne šetnje u jednoj, dve i tri dimenzije i prikazan je problem propasti kockara. Četvrti deo ovog rada je u potpunosti posvećen primenama lanaca Markova u biologiji.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 02.09.2021.

DP

Datum odbrane: Oktobar, 2021.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Dora Seleši, redovni profesor
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Sanja Rapajić, redovni profesor
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

University of Novi Sad

Faculty of Natural Sciences and Mathematics

Key word documentation

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph documentation

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Content code: Master thesis

CC

Author: Tamara Petrović

AU

Mentor: prof. Dr Danijela Rajter-Ćirić

MN

Title: Markov chains and some applications in biology

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: Serbian/English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2021.

PY

Publisher: Author’s reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (4/70/0/0/6/0/0)
(number of sections/ pages/ references/ tables/ pictures/ graphs/ appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific Discipline: Mathematical analysis, Probability

SD

Subject/Key words: Markov chains, Stohastic process, transition probabilities, states, first passage time, Stationary probability, Gambler Ruin, Random Walk, Genetic problem, Birth and Death Process, epidemic, SI, SIS, Chain Binomial Epidemic Model

SKW

UC

Holding data: The library of Department of Mathematics and Informatics, Facilty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This thesis is about Markov chains and their classical applications and applications in biology. The paper starts with introduction to the basic concepts of probability theory, definitions and there are given properties of stochastic processes. Below are presented Markov chains, notations and basic definitions. Then a classification of states and basic properties is given. The third part, through examples, shows the applications of Markov chains. Random walks in one, two and three dimensions are described and the gambler's ruin problem is presented. The fourth part of this paper is entirely dedicated to the applications of Markov chains in biology.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 02.09.2021.

ASB

Defended: October, 2021.

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dora Seleši, Full Professor
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Mentor: Danijela Rajter-Ćirić, Full Professor
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Sanja Rapajić, Full Professor
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad