Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Milan Bogić

Haršad brojevi

-master rad-

Mentor:
Docent dr Anna Slivková

Novi Sad, 2021.

Predgovor

Tema ovog master rada su haršad (ili Nivenovi) brojevi. Njih je definisao indijski matematičar D. R. Kaprekar. Reč haršad (harshad) vodi poreklo iz Sanskrita i sastoji se iz dva dela: harsa, što znači radost, i da, što znači dati. Dakle, haršad brojevi su "oni koji pružaju radost". Drugi naziv su dobili po matematičaru Ivanu M. Nivenu, koji se bavio njima i proučavao ih je.

Na početku rada navodimo bitne definicije, oznake i tvrđenja koja ćemo koristiti u daljem radu, kao i nekoliko primera koji služe za ilustraciju. Navedena je većina oznaka, a neke specifične oznake ćemo dati u glavama u kojima se koriste.

U drugoj glavi se prvo bavimo zbirovima cifara i nekim bitnim tvrđenjima vezanim za njih, a zatim prelazimo na nizove uzastopnih haršad brojeva (u bazi 10). Daćemo primer najdužeg mogućeg niza uzastopnih prirodnih brojeva koji su haršad brojevi i pokazaćemo da ne može da postoji duži niz.

U trećoj glavi nastavljamo priču iz druge glave tako što tražimo najduže moguće nizove sa manjim brojevima. Na kraju dajemo primer niza sa brojevima koji imaju možda i najmanji mogući broj cifara.

Četvrta glava se sastoji iz dva dela. U prvom delu se bavimo nizovima n-haršad brojeva (to su haršad brojevi u bazi $n \geq 2$) i dobijamo najveću moguću dužinu takvog niza za proizvoljno n. U drugom delu dajemo dokaz da za svako n postoji niz maksimalne dužine, i to na konstruktivan način. Zatim dajemo dva primera najdužeg niza za $n = 2$.

U petoj glavi, za fiksirano $n \geq 2$, određujemo koji je najmanji haršad broj sa zbirom cifara k u bazi n, gde je k neki prirodan broj, i dajemo primere za $n = 10$ i $n = 2$.

U poslednjoj, šestoj celini, bavimo se monojediničnim haršad brojevima. Monojedinični brojevi se sastoje samo od cifre 1 u dekadnom sistemu. Pored lakih, očiglednih primera, dajemo i teže, neintuitivne primere. Takođe, dajemo ekvivalentne uslove da bi neki monojediničan broj bio haršad broj.

Na kraju bih hteo da napomenem da su mi brojevi bili zanimljivi još od malena i da sam iz tog razloga izabrao temu iz ove oblasti.

Takođe, želeo bih da se zahvalim mojim mentorima, dr Bojanu Bašiću i dr Anni Slivkovoj, na korisnim savetima, primedbama i strpljenju, kao i svim ostalim profesorima koji su mi predavali.
Zatim bih zahvalio mojim roditeljima, Radoslavu i Ljiljani, i bratu Goranu, koji su mi davali neizmernu podršku, kako tokom pisanja ovog rada, tako i kroz celo moje školovanje.

Naravno, zahvaljujem se i mojim dragim kolegama, koji su mi pomogli da lakše preguram ove studentske dane, koji će mi svakako ostati u lepom sećanju.

Novi Sad, oktobar 2021.

Milan Bogić

Sadržaj

1 Uvod **4**

2 Uzastopni haršad brojevi **6**
2.1 Sume cifara i prenošenja 6
2.2 Nizovi uzastopnih haršad brojeva 7

3 "Mali" uzastopni haršad brojevi **13**
3.1 Uslovi kongruencije za sumu cifara 13
3.2 Objašnjenje metoda 16
3.3 Niže granice za broj cifara 17

4 Uzastopni n-haršad brojevi **18**
4.1 Dužina nizova uzastopnih n-haršad brojeva 18
4.2 Konstrukcija $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva 19

5 Minimalni haršad brojevi **27**
5.1 Elementarne granice za a_k u slučaju $n = 2$ 28
5.2 Poboljšanje granice za $n = 2$ 31

6 Monojedinični haršad brojevi i jednačina $10^n \equiv 1 \pmod{n}$ **35**
6.1 Generisanje monojediničnih haršad brojeva 36

Literatura **39**

Biografija **40**

1 Uvod

Ovde navodimo definicije, tvrđenja i oznake koje ćemo koristiti u daljem radu.

Definicija 1.1. Haršad (ili Nivenovi) brojevi su prirodni brojevi koji su deljivi zbirom svojih cifara u sistemu sa osnovom 10.

Primer 1.2. Primer jednog haršad broja je broj 12 (zato što je $1 + 2 = 3$ i $3|12$).

Definicija 1.3. n-haršad (ili n-Nivenovi) brojevi su prirodni brojevi koji su deljivi zbirom svojih cifara u bazi $n \geq 2$.

Sa $s(n)$ označavamo zbir cifara broja n (u bazi 10). Dakle, za sve haršad brojeve n važi da $s(n)|n$.
Sa $s_n(k)$ označavamo zbir cifara broja k u bazi n, gde je $n \geq 2$.
Broj u bazi n pišemo sa indeksom (n). Na primer, $13 = 21_{(6)}$.
Sa $v_n(a)$ označavamo broj cifara broja a zapisanog u bazi n, to jest $n^{v_n(a)-1} \leq a < n^{v_n(a)}$, $n \geq 2$.
Sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći ceo deo broja x.
Oznaka a_t predstavlja t uzastopnih pojavljivanja cifre ili bloka cifara a (u dekadnom zapisu). Na primer, $12_3(53)_29 = 122253539$.
Broj $\overline{x_1x_2...x_k}$ u bazi n predstavlja broj $n^{k-1} \cdot x_1 + ... + n \cdot x_{k-1} + x_k$, $x_1, ..., x_k$ su cifre. Sa $\overline{ab}_{(n)}$ označavamo konkatenaciju (nadovezivanje) brojeva a i b u bazi n, to jest $\overline{ab}_{(n)} = a \cdot n^{v_n(b)} + b$.
Izraz $n^k||x$ znači da $n^k|x$, ali $n^{k+1} \not| x$.

Teorema 1.4 (Kineska teorema o ostacima)**.** *Neka su m_1, m_2, ..., m_n po parovima uzajamno prosti prirodni brojevi veći od 1 i neka su a_1, a_2, ..., a_n celi brojevi. Tada postoji rešenje sistema kongruencija*

$$\begin{gathered} x \equiv a_1 \pmod m_1 \\ x \equiv a_2 \pmod m_2 \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod m_n. \end{gathered}$$

Ako je x_0 jedno rešenje sistema, tada za sva ostala rešenja važi $x \equiv x_0$ (mod M), gde je $M = m_1 \cdot ... \cdot m_n$.

Dokaz ove teoreme je dat u [6].

Lema 1.5. *Neka su m i n prirodni brojevi veći od 1 i neka su a i b proizvoljni celi brojevi. Sistem kongruencijskih jednačina $x \equiv a \pmod{m}$ i $x \equiv b \pmod{n}$ ima rešenje ako i samo ako $NZD\,(m,n)|(a-b)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je x_0 rešenje datog sistema. Tada važi da $m|(x_0-a)$ i $n|(x_0-b)$. Kako $NZD\,(m,n)|m$ i $NZD\,(m,n)|n$, sledi da $NZD\,(m,n)|(x_0-a)$ i $NZD\,(m,n)|(x_0-b)$, pa sada $NZD\,(m,n)|(x_0-b-(x_0-a)) = a-b$.
($\Leftarrow$) Neka važi $NZD\,(m,n)|(a-b)$. Onda je $a-b = r\cdot NZD\,(m,n)$, za neko $r \in \mathbb{Z}$. Neka je $m' = \frac{m}{NZD\,(m,n)}$ i $n' = \frac{n}{NZD\,(m,n)}$. Oni su uzajamno prosti brojevi, pa postoje celi brojevi p i q tako da važi $p\cdot m' + r = q\cdot n$. Neka je $x = p\cdot m + a$. Tada je očigledno $x \equiv a \pmod{m}$. Dalje je $x = p\cdot m'\cdot NZD\,(m,n) + r\cdot NZD\,(m,n) + b = (p\cdot m' + r)\cdot NZD\,(m,n) + b$, tj. $x = q\cdot n'\cdot NZD\,(m,n) + b = q\cdot n + b$, pa x zadovoljava i drugu kongruenciju, odnosno $x \equiv b \pmod{n}$. □

Teorema 1.6 (Euklidov algoritam)**.** *Neka su a i b prirodni brojevi i neka je $a > b$. Tada je $a = q\cdot b + r$, gde je $0 \le r < b$ i $q \in \mathbb{N}$. Dalje, neka je*

$$\begin{aligned} b &= q_1\cdot r + r_1 \\ r &= q_2\cdot r_1 + r_2 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= q_k\cdot r_{k-1} + r_k \\ r_{k-1} &= q_{k+1}\cdot r_k \end{aligned}$$

Tada je r_k najveći zajednički delilac za brojeve a i b. Opisani postupak za određivanje NZD nazivamo Euklidov algoritam.

Dokaz ovog tvrđenja se može naći u [6].

Teorema 1.7 (Ojlerova teorema)**.** *Neka je $NZD\,(k,n) = 1$. Tada je $k^{\varphi(n)} \equiv 1$ (mod n), gde je $\varphi(n)$ Ojlerova fi funkcija, koja nam daje koliko prirodnih brojeva manjih od n je uzajamno prosto sa n.*

Dokaz ovog tvrđenja se može naći u [6].

Teorema 1.8 (Mala Fermaova teorema)**.** *Za svaki prost broj p i za svaki prirodan broj a tako da $p \nmid a$ važi: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Dokaz. Direktna posledica Ojlerove teoreme. □

2 Uzastopni haršad brojevi

2.1 Sume cifara i prenošenja

U ovom poglavlju navodimo neke osobine sume cifara. Naime, prvo pokazujemo da važi sledeće tvrđenje.

Lema 2.1. *Za svaki prirodan broj n važi sledeća formula:*

$$s(n) = n - 9 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{10^t} \right\rfloor .$$

Dokaz. Neka broj n ima k cifara, gde je $k \geq 1$. Tada n možemo zapisati kao $n = \overline{i_1 i_2 \ldots i_k} = 10^{k-1} \cdot i_1 + 10^{k-2} \cdot i_2 + ... + i_k$. Zbir cifara broja n je $s(n) = i_1 + i_2 + ... + i_k$. Razlika između n i $s(n)$ je
$n - s(n) = (10^{k-1} - 1) \cdot i_1 + (10^{k-2} - 1) \cdot i_2 + ... + (10 - 1) \cdot i_{k-1} =$
$= (10-1) \cdot \big((10^{k-2} + 10^{k-3} + ... + 1) \cdot i_1 + (10^{k-3} + 10^{k-4} + ... + 1) \cdot i_2 + ... + i_{k-1}\big) =$
$= 9 \cdot \big((10^{k-2} \cdot i_1 + 10^{k-3} \cdot i_2 + ... + i_{k-1}) + ... + (10 \cdot i_1 + i_2) + i_1\big) =$
$= 9 \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{10^2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{n}{10^{k-1}} \right\rfloor \right) = 9 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{10^t} \right\rfloor .$
Primetimo da je $n < 10^k$, pa je $\left\lfloor \frac{n}{10^t} \right\rfloor = 0$ za $t \geq k$. □

Za prirodne brojeve m i n, $c(m+n)$ označava količinu "prenošenja" koja nastaje kada računamo zbir $m + n$. Na primer, prilikom računanja zbira brojeva 46 i 35, imamo jedno prenošenje, odnosno važi $c(46 + 35) = 1$, zato što je zbir jedinica $6 + 5 = 11 > 9$. Naredna lema nam daje vezu između $s(m + n)$ i $c(m + n)$.

Lema 2.2. *Neka su m i n prirodni brojevi. Tada je*

$$s(m + n) = s(m) + s(n) - 9c(m + n).$$

Dokaz. Znamo da je $s(m) = m - 9 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{10^t} \rfloor$ i $s(n) = n - 9 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{10^t} \rfloor$. Sada važi da je

$$s(m) + s(n) = m + n - 9 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{m}{10^t} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{10^t} \right\rfloor \right) =$$

$$= s(m + n) + 9 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{m+n}{10^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{10^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{10^t} \right\rfloor \right) .$$

Ako je zbir odgovarajućih cifara brojeva m i n veći od 9, onda je izraz $\left\lfloor \frac{m+n}{10^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{10^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{10^t} \right\rfloor$ jednak 1 i on predstavlja jedno "prenošenje".
Odavde dobijamo da je $s(m+n) = s(m) + s(n) - 9c(m+n)$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Primer 2.3. Neka je $m = 2021$ i $n = 989$. Njihov zbir je $m + n = 3010$. Suma cifara broja m je $s(m) = 2 + 0 + 2 + 1 = 5$, a suma cifara broja n je $s(n) = 9 + 8 + 9 = 26$. Primetimo da, prilikom računanja zbira, imamo čak tri prenošenja. Sada je
$s(m+n) = s(m) + s(n) - 9c(m+n) = 5 + 26 - 9 \cdot 3 = 31 - 27 = 4$. Zaista, suma cifara broja $m + n$ je $s(m+n) = 3 + 0 + 1 + 0 = 4$.

2.2 Nizovi uzastopnih haršad brojeva

U ovom delu rada nas zanima postoje li uzastopni prirodni brojevi koji su haršad brojevi i koliko takvi nizovi uzastopnih brojeva mogu biti dugački. Takođe, bitno je da napomenemo da kada kažemo da su haršad brojevi uzastopni, mislimo na uzastopne prirodne brojeve koji su haršad brojevi. Nije teško pronaći manje nizove uzastopnih haršad brojeva. Na primer,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 je jedan takav niz. Dakle, najveća dužina niza uzastopnih haršad brojeva je bar 10.
U nastavku ćemo dati gornje ograničenje za ovu dužinu. Posmatrajmo nizove uzastopnih haršad brojeva u fiksiranoj desetici. Podsetimo se prvo pojmova desetice i stotine. Za proizvoljan nenegativan ceo broj n, desetica predstavlja skup brojeva $\{10n, 10n + 1, ..., 10n + 9\}$, a stotina predstavlja skup brojeva $\{100n, 100n + 1, ..., 100n + 99\}$. Primetimo da u datoj desetici svi neparni brojevi imaju ili paran ili neparan zbir cifara.
Dalje, neka P predstavlja tvrđenje
"Neparni brojevi imaju paran zbir cifara", a N tvrđenje
"Neparni brojevi imaju neparan zbir cifara".
Dalje primetimo da za deset desetica u datoj stotini važe redom tvrđenja
N, P, N, P, N, P, N, P, N, P ili
P, N, P, N, P, N, P, N, P, N.
Konačno, primećujemo da u desetici za koju važi P nijedan neparan broj ne može biti haršad, jer je njihov zbir cifara paran.
Dakle, jedini način da nađemo više od 11 haršad brojeva je da posmatramo granicu dve stotine gde su desetice poređane ovako:
$..., P, N, P, N|N, P, N, P, ...$

Dakle, ne možemo imati više od 21 uzastopnih haršad brojeva i ako takav niz uopšte postoji, mora da počne parnim brojem koji je oblika $n \cdot 10^t + 9_{t-1}0$, $t \geq 2$. Možemo zaključiti da ovde n i t moraju biti različite parnosti.
Međutim, ako je moguće pronaći niz od 21 uzastopnog haršad broja, onda možemo naći primer za sve moguće nizove od k uzastopnih haršad brojeva za $k = 1, 2, ..., 21$. Pokazaćemo da k ne može biti veće od 20 i daćemo beskonačan broj primera za $k = 20$.
Primer u nastavku je preuzet iz [1]. Do ovog primera se ne može doći bez korišćenja računara koji je sposoban da manipuliše velikim brojevima, jer bi u suprotnom bilo potrebno izuzetno mnogo vremena.

Primer 2.4. Neka je
$a = 40906690701877775923480774714474088396215648012007115$
$516094806249015486761744582584646124234154085554364174232574529411$
$5007591954820126570087071005523266064292043054902370439430_{1120}$ i
$b = 284636219016681829471642961977015454423331186341873018274784226$
$585433875893066810881514467032759507916140833155837906335537198825$
$2068027748430283149755020972927459559360592362156 9_{1119}0$.

Broj a ima 1296 cifara, b ima 1298 cifara, $s(a) = 720$ i $s(b) = 10870$.
Dalje, primetimo da je svaki od brojeva
2464645030, 2464645031, ..., 2464645039, 2464634960, 2464634961,..., 2464634969
delilac od a i da pritom

$$\begin{gathered}2464645030 \text{ deli } b,\\ 2464645031 \text{ deli } b+1,\\ \vdots\\ 2464645039 \text{ deli } b+9,\\ 2464634960 \text{ deli } b+10,\\ 2464634961 \text{ deli } b+11,\\ \vdots\\ 2464634969 \text{ deli } b+19.\end{gathered}$$

Sada, neka je $m \geq 0$ proizvoljan ceo broj i posmatrajmo broj
$x = a_{3423103}0_m b$. Tada x ima $44363342786 + m$ cifara i to je haršad broj sa sumom cifara $s(x) = 2464645030$.

Dalje, po konstrukciji, svaki od brojeva $x+1, x+2, ..., x+19$ je takođe haršad broj, i tako smo konstruisali niz od 20 uzastopnih haršad brojeva. Takođe, pošto je $m \geq 0$ proizvoljan ceo broj, vidimo da postoji beskonačan broj takvih nizova.

Sada se pitamo da li je moguće naći niz od 21 uzastopnog haršad broja. Naredna teorema nam daje odgovor na to pitanje.

Teorema 2.5. *Ne postoji niz od 21 uzastopnog haršad broja.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji niz uzastopnih haršad brojeva $x, x+1, ..., x+19, x+20$ dužine 21. Tada je $x \equiv 9_{t-1}0 \pmod{10^t}$, i pretpostavljamo da (t+1)-va cifra zdesna broja x nije 9. Odatle je:

$$x \equiv 0 \pmod{s(x)} \tag{1}$$
$$x \equiv -1 \pmod{s(x)+1} \tag{2}$$
$$x \equiv -2 \pmod{s(x)+2} \tag{3}$$
$$x \equiv -3 \pmod{s(x)+3} \tag{4}$$
$$x \equiv -4 \pmod{s(x)+4} \tag{5}$$
$$x \equiv -5 \pmod{s(x)+5} \tag{6}$$
$$x \equiv -6 \pmod{s(x)+6} \tag{7}$$
$$x \equiv -7 \pmod{s(x)+7} \tag{8}$$
$$x \equiv -8 \pmod{s(x)+8} \tag{9}$$
$$x \equiv -9 \pmod{s(x)+9} \tag{10}$$
$$x \equiv -10 \pmod{s(x)+10-9t} \tag{11}$$
$$x \equiv -11 \pmod{s(x)+11-9t} \tag{12}$$
$$x \equiv -12 \pmod{s(x)+12-9t} \tag{13}$$
$$x \equiv -13 \pmod{s(x)+13-9t} \tag{14}$$
$$x \equiv -14 \pmod{s(x)+14-9t} \tag{15}$$
$$x \equiv -15 \pmod{s(x)+15-9t} \tag{16}$$
$$x \equiv -16 \pmod{s(x)+16-9t} \tag{17}$$
$$x \equiv -17 \pmod{s(x)+17-9t} \tag{18}$$
$$x \equiv -18 \pmod{s(x)+18-9t} \tag{19}$$
$$x \equiv -19 \pmod{s(x)+19-9t} \tag{20}$$
$$x \equiv -20 \pmod{s(x)+11-9t} \tag{21}$$

Oblici modula iz gornje liste slede iz leme 2.2. Odatle je

$s(x+k) = s(x) + s(k) - 9c(x+k) = s(x) + s(k) - 9 \cdot (t-1), k = 10, \ldots, 19.$

Ispišimo slučaj za $k = 11$, dok se ostali slučajevi rade analogno.
$s(x+11) = s(x) + 2 - 9(t-1) = s(x) + 11 - 9t$ i sada kongruenciju

$$x + 11 \equiv 0 \pmod{s(x+11)}$$

možemo napisati kao

$$x \equiv -11 \pmod{s(x) + 11 - 9t}.$$

S obzirom na to da važi $x \equiv -20 \pmod{s(x) + 11 - 9t}$ i
$x \equiv -11 \pmod{s(x) + 11 - 9t}$, dobijamo da je $9 \equiv 0 \pmod{s(x) + 11 - 9t}$. Odavde sledi da vrednost izraza $s(x) + 11 - 9t$ može biti 1, 3 ili 9, prema tome, $9t - s(x)$ može biti 2, 8 ili 10. S druge strane, kako važi
$x \equiv 9_{t-1}0 \pmod{10^t}$, dobijamo da je $s(x) \geq 9t - 9$, te ostaje da vrednost izraza $9t - s(x)$ može biti samo 2 ili 8.
Posmatrajmo prvo slučaj $9t - s(x) = 8$. Tada na osnovu kongruencija (11), (12), (14), (16) i (20), dobijamo sledeći sistem.

$$\begin{gathered} x \equiv 0 \pmod 2, \\ x \equiv 1 \pmod 3, \\ x \equiv 2 \pmod 5, \\ x \equiv 6 \pmod 7, \\ x \equiv 3 \pmod{11}. \end{gathered}$$

Koristeći Kinesku teoremu o ostacima, dobijamo da je rešenje ovog sistema $x \equiv 6922 \equiv -8 \pmod{2310}$.
S druge strane, kako je $x \equiv 9_{t-1}0 \pmod{10^t}$, sledi da je x deljivo sa 5. Ali, to ne može biti slučaj ako je $x \equiv 2 \pmod 5$. Dakle, u ovom slučaju dobijamo kontradikciju, te mora da važi $9t - s(x) \neq 8$.
Sada pretpostavimo da je $9t - s(x) = 2$. Tada se kongruencije od (1) do (21) svode na sledeći sistem kongruencija:

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 0 \pmod{9t-2}\,(1')\\
x &\equiv -1 \pmod{9t-1}\,(2')\\
x &\equiv -2 \pmod{9t}\,(3')\\
x &\equiv -3 \pmod{9t+1}\,(4')\\
x &\equiv -4 \pmod{9t+2}\,(5')\\
x &\equiv -5 \pmod{9t+3}\,(6')\\
x &\equiv -6 \pmod{9t+4}\,(7')\\
x &\equiv -7 \pmod{9t+5}\,(8')\\
x &\equiv -8 \pmod{9t+6}\,(9')\\
x &\equiv -9 \pmod{9t+7}\,(10')\\
x &\equiv 6 \pmod{8}\,(11')\\
x &\equiv 7 \pmod{9}\,(12')\\
x &\equiv 8 \pmod{10}\,(13')\\
x &\equiv 9 \pmod{11}\,(14')\\
x &\equiv 10 \pmod{12}\,(15')\\
x &\equiv 11 \pmod{13}\,(16')\\
x &\equiv 12 \pmod{14}\,(17')\\
x &\equiv 13 \pmod{15}\,(18')\\
x &\equiv 14 \pmod{16}\,(19')\\
x &\equiv 15 \pmod{17}\,(20')\\
x &\equiv 7 \pmod{9}\,(21')
\end{aligned}
$$

Na osnovu leme 1.5, kada uparimo kongruencije (4’) sa (13’), (6’) sa (13’), (7’) sa (13’) i (10’) sa (13’), dobijamo da je

NZD (10, 9t+1)=1
NZD (10, 9t+3)=1
NZD (10, 9t+4)=1 ili 2
NZD (10, 9t+7)=1,

redom. Kako važi (2’) i kako je x paran broj, sledi da je t takođe paran. Međutim, ako je $t \equiv 2 \pmod{10}$, tada je $9t + 7 \equiv 9 \cdot 2 + 7 \equiv 5 \pmod{10}$, pa je $NZD\,(10, 9t + 7) = 5 \neq 1$.

Dalje, ako je $t \equiv 4 \pmod{10}$, tada je $9t + 4 \equiv 0 \pmod{10}$, pa je $NZD\,(10, 9t + 4) \neq 1$ i $NZD\,(10, 9t + 4) \neq 2$. Ako je $t \equiv 6 \pmod{10}$, onda je $9t + 1 \equiv 5 \pmod{10}$, pa je $NZD\,(10, 9t + 1) \neq 1$. Na kraju, ako je $t \equiv 8 \pmod{10}$, onda je $9t + 3 \equiv 5 \pmod{10}$, pa je ponovo $NZD\,(10, 9t + 3) \neq 1$, što je u kontradikciji sa gornjim zapažanjem.
Odavde zaključujemo da t ne može biti kongruentno po modulu 10 ni sa jednim od brojeva 2, 4, 6 i 8.
Primenom tvrđenja 1.5 na kongruencije $x \equiv 9_{t-1}0 \pmod{10^t}$ i $x \equiv -7 \pmod{9t + 5}$ dobijamo da $NZD\,(10^t, 9t + 5)$ deli $9_{t-1}7$, odakle sledi da 5 ne može da deli $NZD\,(10^t, 9t + 5)$, pa zaključujemo da važi $t \not\equiv 0 \pmod{10}$.
Dakle, iz pretpostavke da je $9t - s(x) = 2$ dobijamo da t ne može biti kongruentno sa parnim brojem po modulu 10, odnosno t ne može biti paran broj, te i u ovom slučaju dolazimo do kontradikcije. Na ovaj način su odstranjene jedine dve mogućnosti za $9t - s(x)$, pa iz toga zaključujemo da traženi niz ne postoji. $\square$

Teorema 2.6. *Svaki niz od 20 uzastopnih haršad brojeva počinje brojem kongruentnim sa 90 po modulu 100.*

Dokaz. Iz diskusije o deseticama i stotinama zaključili smo da najduži niz n-haršad brojeva mora početi brojem iz poslednje desetice u stotini. Da bismo dobili niz od 20 brojeva, vidimo da taj broj mora biti kongruentan sa 90 ili 91 po modulu 100. Videli smo primer niza od 20 brojeva koji počinje brojem oblika $100 \cdot a + 90$, gde je a neki prirodan broj. Sada pretpostavimo da postoji niz koji počinje brojem oblika $\overline{a91}$. Tada su u nizu i brojevi $\overline{(a + 1)01}$ i $\overline{(a + 1)10}$. Primetimo da ova dva broja imaju isti zbir cifara, označimo ga sa s. Pošto s deli oba broja, mora da deli i njihovu razliku, a to je 9. Dakle, s može da bude samo 3 ili 9.
Pretpostavimo prvo da je $s = 3$. Tada je $s(\overline{(a + 1)02}) = s + 1 = 4$, a na osnovu pravila deljivosti vidimo da ovakav broj nikad nije deljiv sa 4.
Neka je sada $s = 9$. Tada je $s(\overline{(a + 1)02}) = 10$, a ovakav broj nikad nije deljiv ni sa 10. Ovo je u kontradikciji sa našom pretpostavkom. Dakle, prvi broj svakog niza od 20 uzastopnih haršad brojeva mora biti kongruentan sa 90 po modulu 100. $\square$

3 "Mali" uzastopni haršad brojevi

U prethodnom poglavlju smo dokazali da postoji niz od najviše 20 uzastopnih haršad brojeva, odnosno da postoji beskonačna familija takvih nizova (dobili smo broj $x = a_{3423103}0_m b$, gde je m proizvoljan nenegativan ceo broj). Pritom se brojevi u tim nizovima sastoje od preko 4 milijarde cifara. Takođe je dokazano da svaki niz od 20 uzastopnih haršad brojeva počinje brojem koji je kongruentan sa 90 po modulu 100.
U ovoj sekciji nastavljamo dalje u tom smeru. Na kraju ćemo odrediti donju granicu za broj cifara 20 uzastopnih haršad brojeva i daćemo primer brojeva sa malo više cifara od minimalnog.

Definicija 3.1. Neka $n \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. Prirodan broj m je 10^n-tipa ako je kongruentan sa $9_{n-1}0$ po modulu 10^n, ali nije kongruentan sa 9_n0 po modulu 10^{n+1}. Dakle, $m = \overline{a9_{n-1}0}$, a a je broj kome poslednja cifra nije 9.

Kuper i Kenedi su u [1] dokazali da prvi broj u nizu od 20 uzastopnih haršad brojeva mora biti $10^{2\cdot n_1}$-tipa, za neko $n_1 \in \mathbb{N}$. U nastavku dajemo lemu koja daje precizniji opis prvog broja u takvom nizu.

Lema 3.2. *Niz od 20 uzastopnih haršad brojeva mora početi brojem $10^{280\cdot n_2}$-tipa, za neko $n_2 \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.*

Dokaz. S obzirom na to da prvi broj niza od 20 uzastopnih haršad brojeva završava nulom sledi da su zbirovi cifara prvih 10 brojeva u nizu, kao i zbirovi cifara drugih 10 brojeva, uzastopni brojevi. Prema tome, u prvom delu niza postoji bar jedan broj m čiji je zbir cifara deljiv sa $8 = 2^3$. Analogno, i u drugom delu niza postoji takav broj. Označimo ga sa m'. Posmatrajmo takve m i m' čija je razlika tačno 8. Sada, pošto je prvi broj $10^{2\cdot n_1}$-tipa, sledi da je $s(m) - s(m') = 9 \cdot (2n_1 - 1) + 1 = 18n_1 - 8$, jer imamo $2n_1 - 1$ devetki koje se "pretvaraju" u nule kada prelazimo iz m u m'.
Dalje, kako je $18n_1 - 8 = s(m) - s(m') \equiv 0 \pmod 8$, sledi da je $2 \cdot n_1$ deljivo sa 8, tj. $4|n_1$. Istim rezonovanjem dobijamo da je broj n_1 deljiv i sa 5 i sa 7. Kada sve ovo povežemo, proizlazi da je naš početni broj
$10^{8\cdot 5\cdot 7 n_2} = 10^{280\cdot n_2}$-tipa za neko $n_2 \in \mathbb{N}$, gde je $n_2 = \frac{2n_1}{280} = \frac{n_1}{140} \in \mathbb{N}$. $\square$

3.1 Uslovi kongruencije za sumu cifara

U ovom odeljku određujemo kongruencijske restrikcije (uslove) za zbir cifara prvog člana niza uzastopnih haršad brojeva.

Radi lakšeg određivanja ovih uslova, prvi član niza od 20 uzastopnih haršad brojeva, koji je pri tome i $10^{280 \cdot n_2}$-tipa za fiksirano $n_2 \in \mathbb{N}$, označićemo sa β. Njegovu sumu cifara označićemo sa α, odnosno $s(\beta) = \alpha$.
Važi sledeća lema.

Lema 3.3. *Za svako $i = 0, 1, \ldots, 9$ važi $(\alpha + i)|(\beta + i)$ i za svako $j = 10, 11, \ldots, 19$ važi $(\alpha + j - 2520n_2)|(\beta + j)$.*

Dokaz. S obzirom na to da su $\beta, \beta + 1, \ldots, \beta + 19$ haršad brojevi, svaki od njih mora biti deljiv svojim zbirom cifara. Za $i = 0, 1, \ldots, 9$ zbir je $\alpha + i$, dok za $j = 10, 11, \ldots, 19$ važi

$$s(\beta + j) = s(\beta) + j - 9 \cdot 280 \cdot n_2 = \alpha + j - 2520 \cdot n_2.$$

$\square$

Uvedimo još dve pomoćne oznake: Neka je $\gamma = NZS\,(\alpha, \alpha + 1, ..., \alpha + 9)$ i $\gamma' = NZS\,(\alpha + 10 - 2520n_2, ..., \alpha + 19 - 2520n_2)$.

Lema 3.4. *Za α, β, γ i γ' je ispunjeno*

$$\beta \equiv \alpha \pmod{\gamma} \text{ i } \beta \equiv \alpha - 2520n_2 \pmod{\gamma'}.$$

Dokaz. Prvi uslov je ekvivalentan uslovu da je β kongruentno sa α po modulima $\alpha, \alpha + 1, ..., \alpha + 9$. Na osnovu leme 3.3, znamo da za svako $i = 0, 1, \ldots, 9$ važi $(\alpha + i)|(\beta + i)$, pa je $(\beta + i) \equiv (\alpha + i) \pmod{\alpha + i}$, odnosno $\beta \equiv \alpha \pmod{\alpha + i}$. Neka je sada $\alpha' = \alpha - 2520n_2$. Istim rezonovanjem dobijamo da je β kongruentno sa α' po svim modulima iz skupa $\{\alpha' + 10, ..., \alpha' + 19\}$. $\square$

Na osnovu Kineske teoreme o ostacima i leme 1.5, možemo zaključiti da važi sledeće tvrđenje.

Lema 3.5. *Sistem kongruencija iz leme 3.4 ima rešenje po $\beta - \alpha$ ako i samo ako $NZD(\gamma, \gamma') \mid 2520n_2$. (1)*

Sada određujemo kongruencije koje treba da budu ispunjene za elemente skupa $A = \{2520n_2 - 1, \ldots, 2520n_2 - 19\}$. Skup A je dobijen kao skup svih mogućih razlika dva elementa, gde je jedan iz skupa $\{\alpha, \ldots, \alpha + 9\}$, a drugi iz skupa $\{\alpha + 10 - 2520n_2, \ldots, \alpha + 19 - 2520n_2\}$. Neka je P skup svih prostih delilaca elemenata skupa A. Za $p \in P$, neka je $v(p)$ takvo da $p^{v(p)}|2520n_2$, ali $p^{v(p)+1} \nmid 2520n_2$. Takođe važi sledeće tvrđenje.

Lema 3.6. *Uslov (1) je ispunjen ako i samo ako je*
$\alpha \equiv 1, 2, ..., p^{v(p)+1} - 10 \pmod{p^{v(p)+1}}$ *ili*
$\alpha + 10 - 2520n_2 \equiv 1, 2, ..., p^{v(p)+1} - 10 \pmod{p^{v(p)+1}}$ *(2).*

Dokaz. Neka je ispunjen uslov (1). Sada imamo da $p^{v(p)+1} \nmid NZD\,(\gamma, \gamma')$, pa stoga važi $p^{v(p)+1} \nmid \gamma$ ili $p^{v(p)+1} \nmid \gamma'$, što možemo zapisati na sledeći način:
$\alpha \equiv 1, 2, ..., p^{v(p)+1} - 10 \pmod{p^{v(p)+1}}$ ili
$\alpha + 10 - 2520n_2 \equiv 1, 2, ..., p^{v(p)+1} - 10 \pmod{p^{v(p)+1}}$.
Neka sada važi uslov (2). Dobijamo da $p^{v(p)+1} \nmid NZD\,(\gamma, \gamma')$, a iz $p|NZD\,(\gamma, \gamma')$ sledi da $p \in P$, pa imamo da $NZD\,(\gamma, \gamma')|2520n_2$. □

Broj α takođe zadovoljava još neke uslove koji će nam biti korisni u nastavku.

Lema 3.7. *1)* $\alpha \equiv 6 \pmod 8$. *(3)*
2) $\alpha \equiv 0 \pmod 5$. *(4)*

Dokaz. S obzirom na to da je β 10^{280n_2}-tipa, sledi da je $\beta \equiv 990 \pmod{1000}$. Odavde je $\beta \equiv 6 \pmod 8$, pa je i $\alpha \equiv 6 \pmod 8$, zato što je γ deljivo sa 8 i $\beta \equiv \alpha \pmod \gamma$. Istim rezonovanjem, pošto je $\beta \equiv 0 \pmod 5$, onda je i $\alpha \equiv 0 \pmod 5$, zato što je γ deljivo sa 5. □

Sada možemo dokazati još jedan uslov koji preciznije opisuje prvi broj niza od 20 uzastopnih haršad brojeva.

Lema 3.8. *Prvi broj niza od 20 uzastopnih haršad brojeva mora biti* $10^{560 \cdot n_3}$*-tipa, za neko* $n_3 \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da je prvi član niza od 20 haršad brojeva $10^{280 \cdot n_2}$-tipa, gde je n_2 neparan broj. Sada primenom uslova (2) važi $\alpha \equiv 1, 2, ..., 6 \pmod{16}$ ili $\alpha + 10 - 2520n_2 \equiv \alpha + 2 \equiv 1, ..., 6 \pmod{16}$. Odavde je $\alpha \equiv -1, 0, ..., 4 \pmod{16}$, pa je sada $\alpha \equiv 0, 1, ..., 6 \pmod{16}$ ili $\alpha \equiv 15 \pmod{16}$. Primenom (3) vidimo da je $\alpha \equiv 6 \pmod{16}$. Primetimo da je tada $\alpha + 18 - 2520n_2 \equiv 0 \pmod{16}$, pa odavde sledi da $16|s(\beta + 18)$, tj. $16|(\beta + 18)$. S druge strane, važi $\beta \equiv 9990 \pmod{10000}$, pa je
$\beta \equiv 6 \pmod{16}$. Onda je $\beta + 18 \equiv 8 \pmod{16}$.
Dakle, naša pretpostavka je pogrešna, pa sada zaključujemo da n_2 mora biti paran broj. □

Lema 3.9. *Važi sledeći uslov:* $\alpha \equiv 6 \pmod{16}$.

Dokaz. Iz prethodne leme dobijamo da važi $2520 \cdot n_2 \equiv 0 \pmod{16}$, pa su zbirovi cifara brojeva $\beta, \beta + 1, ..., \beta + 19$ uzastopni po modulu 16. Sada iz $\beta \equiv 6 \pmod{16}$ sledi $\alpha \equiv 6 \pmod{16}$. □

3.2 Objašnjenje metoda

Ovde pokazujemo kako da konstruišemo prvi od 20 uzastopnih haršad brojeva, β, tako da je $s(\beta) = \alpha$. Pođimo od toga da $n_2 \in 2\mathbb{Z}^+ = 2\mathbb{N}$ fiksirano i da α zadovoljava uslove (2), (4) i (5). Na osnovu izbora broja α, možemo otkriti rešenje za $x \equiv \alpha \pmod{\gamma}$ (6) i $x \equiv \alpha - 2520n_2 \pmod{\gamma'}$ (7).
Ovim postupkom možemo dobiti beskonačno mnogo rešenja koja se međusobno razlikuju za umnoške od $\delta = NZS\,(\gamma, \gamma')$. Neka je b najmanje pozitivno rešenje. "Doterujemo" b tako što dodajemo umnoške od δ. Tako dobijamo broj b', koji i dalje zadovoljava uslove (6) i (7) i isto je $10^{280 \cdot n_2}$-tipa. Posle toga možemo da izmenimo b' dodajući mu umnoške od δ tako da konačan broj β ima zbir cifara baš α i pritom zadovoljava prethodne uslove. Na kraju zaključujemo da β jeste prvi član niza od 20 uzastopnih haršad brojeva.
U nastavku dajemo primere konstrukcije ovakvih brojeva.

Primer 3.10. Želimo da dobijemo broj $10^{280 \cdot 4} = 10^{1120}$-tipa. Dakle, $n_2 = 4$. Rešavamo sistem kongruencija (2), (4) i (5) za α po modulu $p \in P$ i dobijamo $\alpha = 15830$. Odavde sledi:
$\delta = NZS\,(\alpha, \alpha + 1, ..., \alpha + 19 - 10080) =$
$= 3048830655878437890226799866816603216269482282665704639500236070 2080.$
Određivanjem x iz uslova (6) i (7) imamo da je $b = x =$
$= 36346620873326536780272919778661480190436142337371175681890462969 50.$
Dodajući odgovarajući umnožak od δ (da bismo imali broj 10^{1120}-tipa), dobijamo $b' = 21222185596541538670917359810786534$
$26215175822736105351778251310 59_{1119}0.$
Nastavljamo ovaj postupak pod uslovom da poslednja 1121 cifra ostane nepromenjena. Preciznije, dodajemo umnoške od $5^6 \cdot 10^{1114} \cdot \delta$.
Sada sledi da je
$\beta = 49814979458796395830735187579935382447$
$76448858055060558725279140729_{601}59_{1119}0.$
Lako se može proveriti da β ima 1788 cifara i zbir cifara mu je 15830. Takođe, β je prvi član niza od 20 uzastopnih haršad brojeva.

3.3 Niže granice za broj cifara

Moguće je odrediti i donju granicu za prvi član niza od 20 uzastopnih haršad brojeva i to dajemo u nastavku.

Teorema 3.11. *Najmanji niz od 20 uzastopnih haršad brojeva počinje brojem* 10^{1120}*-tipa sa zbirom cifara 15830.*

Dokaz. Neka je β prvi od 20 uzastopnih haršad brojeva i neka je $\alpha = s(\beta)$. Pretpostavimo da β ima manje od 1789 cifara (odnosno ne više od broja u primeru 3.10). Kako je β broj 10^{280*n_2}-tipa i n_2 je parno, sledi da je $n_2 = 2$, 4 ili 6. Računarskim pretragama se dobija da, osim za $\alpha = 15830$ i $n_2 = 4$, ne postoji α manje od $9 \cdot 1789 = 16101$ koje zadovoljava uslove (2), (4) i (5), za $n_2 = 2$, 4 ili 6. $\square$

U prethodnom odeljku smo videli primer sa 1788 cifara. To ne mora biti najmanji takav broj, što možemo videti na osnovu naredne teoreme. Ukoliko nije najmanji, onda možemo slobodno reći da je blizu najmanjeg.

Teorema 3.12. *Najmanji niz od 20 uzastopnih haršad brojeva mora da počinje brojem koji ima najmanje 1760 cifara.*

Dokaz. Teorema 3.11 nam kaže da je zbir cifara prvog broja u nizu jednak 15830. S obzirom na to da poslednja cifra mora biti 0, sledi da naš broj mora da ima najmanje $1 + \lceil 15830/9 \rceil = 1760$ cifara. $\square$

4 Uzastopni n-haršad brojevi

4.1 Dužina nizova uzastopnih n-haršad brojeva

U ovom delu posmatramo najveću moguću dužinu nizova uzastopnih n-haršad brojeva. Krećemo od jednostavnijih tvrđenja koja su nam potrebna za dokazivanje glavne teoreme koju navodimo na kraju.

Lema 4.1. *Neka je $a0_{(n)}$, $a1_{(n)}$,..., $a(n-1)_{(n)}$ niz od n uzastopnih n-haršad brojeva. Tada n deli $s_n(a)$.*

Dokaz. Neka je $s = s_n(a)$. Znamo da su zbirovi cifara brojeva $a0_{(n)}$, ..., $a(n-1)_{(n)}$ u bazi n redom $s, s+1, ..., s+n-1$. Tačno jedan od ovih zbirova je deljiv sa n. Pretpostavimo suprotno, da $n|(s+i) = s_n(ai)$, gde je $i \neq 0$. S druge strane, pošto $n|(s+i)$ i $(s+i)|ai_{(n)}$, sledi da i $n|ai_{(n)}$, pa kako $n|a0_{(n)}$, sledi da $n|i$, gde je $i < n$, što je kontradikcija. Dakle, $n|s = s_n(a)$. □

Lema 4.2. *Ako je $i \neq n-1$ i $s_n(a) + i > 0$, onda brojevi $ai(n-1)_{(n)}$ i $a(i+1)(n-2)_{(n)}$ ne mogu istovremeno biti n-haršad brojevi.*

Dokaz. Neka je ponovo $s = s_n(a)$. Zbir cifara brojeva $ai(n-1)_{(n)}$ i $a(i+1)(n-2)_{(n)}$ u bazi n je $s+i+n-1$. Ako su oba n-haršad brojevi, onda $s+i+n-1$ mora da deli njihovu razliku, $n-1$. S druge strane, iz $s+i > 0$ sledi da je $s+i+n-1 > n-1$, što vodi u kontradikciju. □

Lema 4.3. *Niz od $n+1$ uzastopnih brojeva $a00_{(n)}$, ..., $a10_{(n)}$ ne može biti niz uzastopnih n-haršad brojeva.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da su svi brojevi u nizu n-haršad brojevi. S obzirom na to da su po definiciji n-haršad brojevi pozitivni, važi $s = s_n(a) > 0$. Zatim, primenom leme 4.1, sledi da $n|s$. To znači da je $n \leq s$. Dalje, zbir brojeva $a01_{(n)}$ i $a10_{(n)}$ je $s+1$. Pošto $s+1$ deli oba broja, onda deli i njihovu razliku, $n-1$. Međutim, $s+1 \leq n-1 < n \leq s$, što je kontradikcija. □

Teorema 4.4. *Ako je $aij_{(n)}$ prvi član niza uzastopnih n-haršad brojeva dužine najmanje $2n$, onda je $i = n-1$ i $j = 0$.*

Dokaz. Neka je $aij_{(n)}$ prvi član ovog niza. Pretpostavimo prvo da je $i < n-1$. Sada je $a(i+1)0_{(n)}$,..., $a(i+1)(n-1)_{(n)}$ podniz datog niza uzastopnih n-haršad brojeva dužine n. Neka je ponovo $s = s_n(a)$.

Iz leme 4.1 znamo da n deli $s+i+1$ i pritom važi $s+i>0$. Takođe, brojevi $ai(n-1)_{(n)}$ i $a(i+1)(n-2)_{(n)}$ su n-haršad brojevi. S druge strane, primenom leme 4.2 vidimo da to nije moguće. Sada, ako je $i=n-1$ i $j\neq 0$, onda ovaj niz sadrži podniz $(a+1)00_{(n)}$,..., $(a+1)10_{(n)}$. Koristeći lemu 4.3, dobijamo da ne mogu svi brojevi u ovom podnizu biti n-haršad brojevi, što nas dovodi do kontradikcije. □

Pošto smo pokazali pomoćna tvrđenja, sada možemo preći na glavni rezultat ovog odeljka koji nam daje gornje ograničenje dužine niza uzastopnih n-haršad brojeva.

Teorema 4.5. *Za proizvoljno $n\geq 2$ ne postoji niz sa više od 2n uzastopnih n-haršad brojeva.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x_1, x_2, ... niz sa više od 2n uzastopnih n-haršad brojeva. Na osnovu teoreme 4.4 znamo da poslednja cifra brojeva x_1 i x_2 u bazi n mora biti nula. To očigledno nije moguće. Dakle, za proizvoljno $n\geq 2$, najveća moguća dužina niza uzastopnih n-haršad brojeva ne može biti veća od $2n$. □

4.2 Konstrukcija $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva

U prethodnom poglavlju smo pokazali da za svako $n\geq 2$ može da bude najviše $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva. Ovde pokazujemo da za svako $n\geq 2$ postoji takav niz. Prilikom dokaza ovog tvrđenja primenjuje se ideja za konstrukciju 20 uzastopnih haršad brojeva.
U nastavku dajemo postupak za konstrukciju $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva, za svako $n\geq 2$. Videli smo primer 20 uzastopnih 10-haršad brojeva, a na kraju dajemo primer niza od 4 uzastopna 2-haršad broja.
Na početku uvodimo oznake koje ćemo koristiti u nastavku. Za proizvoljan prost prirodan broj p, neka je $a(p)$ takvo da je $p^{a(p)}\leq n$, ali $p^{a(p)+1}>n$.
Za proizvoljan prost broj p, neka je $b(p)$ takvo da $p^{b(p)}|(n-1)$, ali $p^{b(p)+1} \nmid (n-1)$. Neka je $\mu=\prod_p p^{a(p)-b(p)}$. Pre dokaza glavnog tvrđenja ovog odeljka dajemo neophodna tvrđenja i kongruencijske uslove.

Teorema 4.6. *Svaki niz od 2n uzastopnih n-haršad brojeva počinje brojem koji je kongruentan sa $n^{\mu\cdot m}-n$ po modulu $n^{\mu\cdot m}$ (ali nije kongruentan sa $n^{\mu\cdot m+1}-n$ po modulu $n^{\mu\cdot m+1}$) za neki prirodan broj m.*

Dokaz. Primenom teoreme 4.3 znamo da je prvi član, označimo ga sa β, niza od $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva uvek deljiv sa n. Pretpostavimo da za neko m' važi $\beta \equiv n^{m'} - n \pmod{n^{m'}}$ i $\beta \not\equiv n^{m'+1} - n \pmod{n^{m'+1}}$. Pokažimo da tada $\mu | m'$. Dovoljno je da pokažemo da $p^{a(p)-b(p)} | m'$ za svako p, pa će tada i μ deliti m'. U nizu od n uzastopnih brojeva $s_n(\beta), s_n(\beta+1), ..., s_n(\beta+n-1)$, bar jedan je deljiv sa $p^{a(p)}$ (jer je $n \geq p^{a(p)}$). Isto to važi i za niz $s_n(\beta+n), s_n(\beta+n+1), ..., s_n(\beta+2n-1)$.
Neka $p^{a(p)} | s_n(\beta+i)$ i $p^{a(p)} | s_n(\beta+n+j)$, za neke $i, j = 0, 1, ..., n-1$. Koristeći definiciju n-haršad broja, znamo da $s_n(\beta+i) | \beta+i$ i $s_n(\beta+n+j) | \beta+n+j$. Na osnovu tranzitivnosti i pravila deljivosti, zaključujemo da $p^{a(p)} | (n+j-i)$. S druge strane, $s_n(\beta+i) = s_n(\beta)+i$ i $s_n(\beta+n+j) = s_n(\beta)+n+j-m' \cdot (n-1)$, pa dalje sledi da $p^{a(p)} | (n+j-i-m' \cdot (n-1))$, pa odavde dobijamo da $p^{a(p)} | m' \cdot (n-1)$. S obzirom na to da je $p^{b(p)}$ najveći stepen od p koji deli $n-1$, sada važi da $p^{a(p)-b(p)} | m'$ za svako p. □

Sada navodimo dve posledice teoreme 4.6.

Lema 4.7. *Svaki broj u nizu od 2n uzastopnih n-haršad brojeva u bazi n ima najmanje μ cifara.*

Druga posledica teoreme 4.6 nam daje ograničenja za zbir cifara α prvog člana niza od $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva.

Lema 4.8. *Ako je β prvi član niza od 2n uzastopnih n-haršad brojeva i $\alpha = s_n(\beta)$, onda za m iz teoreme 4.6 i za*
$\gamma = NZS\,(\alpha, \alpha+1, ..., \alpha+n-1)$ *i*
$\gamma' = NZS(\alpha+n-\mu m(n-1), \alpha+n+1-\mu m(n-1), ..., \alpha+2n-1-\mu m(n-1))$
važi da $NZD(\gamma, \gamma') | \mu \cdot m \cdot (n-1)$.

Dokaz. Neka je β prvi član niza i $\alpha = s_n(\beta)$. Iz $\beta \equiv 0 \pmod{n}$ sledi da $\alpha + i | \beta + i$, za svako $i = 0, 1, ..., n-1$. Koristeći teoremu 4.6, vidimo da $(\alpha+n+j-\mu \cdot m \cdot (n-1)) | (\beta+n+j)$ za svako $j = 0, 1, ..., n-1$. Odavde dobijamo da je $\beta \equiv \alpha \pmod{\gamma}$ i $\beta \equiv \alpha - \mu \cdot m \cdot (n-1) \pmod{\gamma'}$. Ove dve kongruencije su saglasne ako i samo ako $NZD\,(\gamma, \gamma') | \mu \cdot m \cdot (n-1)$. □

Lema 4.9. *Za $\delta = NZS(\gamma, \gamma')$ postoje prirodni umnošci od δ, $k \cdot \delta$ i $k' \cdot \delta$, tako da je $NZD(s_n(k \cdot \delta), s_n(k' \cdot \delta)) = n-1$. Takođe, ovo je najmanji mogući najveći zajednički delilac suma cifara od bilo koja dva umnoška broja δ.*

Dokaz. S obzirom na to da $(n-1)|\delta$, sledi da $(n-1)|k \cdot \delta$ za svako $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $n-1$ za 1 manje od naše baze, dobijamo da $(n-1)|s_n(k \cdot \delta)$.

Sada vidimo da je najmanji mogući najveći zajednički delilac baš $n-1$.
Dalje, neka je $a\mathbf{a}b0_l$ zapis broja δ u bazi n sa nenula ciframa a i b i **a** blok cifara dužine l'. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da **a** završava cifrom različitom (manjom) od $n-1$, a ako slučajno završava cifrom $n-1$, možemo koristiti $(n+1)\cdot\delta$ umesto δ.
Znamo da je $\delta < n^{l+l'+2}$, pa mora da postoji umnožak od δ između bilo koja dva umnoška od $n^{l+l'+2}$, pa sada postoji umnožak od δ između $(n-1)\cdot n^{l+l'+2}$ i $n\cdot n^{l+l'+2} = n^{l+l'+3}$, to jest neko κ takvo da je $\kappa\cdot\delta = (n-1)\mathbf{a'}$ u bazi n, i pritom je $v(\mathbf{a'}) = l+l'+2$.
Zatim je $k = \kappa\cdot n^{l+l'+2}+1$ i $k' = k\cdot(n^{l+2l'+4}+1)$, i sada broj $k\cdot\delta$ možemo zapisati kao $(n-1)\mathbf{a'}a\mathbf{a}b0_l$ u bazi n, dok $k'\cdot\delta$ u bazi n zapisujemo kao $(n-1)\mathbf{a'}a(\mathbf{a}+1)(b-1)\mathbf{a'}a\mathbf{a}b0_l$. Dalje je
$s_n(k\cdot\delta) = n-1+s_n(\mathbf{a'})+s_n(a)+s_n(\mathbf{a})+s_n(b)$ i
$s_n(k'\cdot\delta) = n-1+2s_n(\mathbf{a'})+2s_n(a)+2s_n(\mathbf{a})+1+2s_n(b)-1 =$
$= n-1+2s_n(\mathbf{a'})+2s_n(a)+2s_n(\mathbf{a})+2s_n(b)$.
Odavde vidimo da je $s(k'\cdot\delta) = 2s_n(k\cdot\delta)-(n-1)$, pa je sada
$NZD\,(s_n(k\cdot\delta), s_n(k'\cdot\delta)) = n-1$. □

Napomena. Na osnovu dokaza vidimo da u lemi možemo izabrati k i k' tako da je $v(k\cdot\delta)\leq 5+2l+2l'$ i $v(k'\cdot\delta)\leq 9+3l+4l'$, kada δ ima $l+l'+2$ cifre u bazi n (ili $(n+1)\cdot\delta$ ako **a** završava cifrom $n-1$). Broj l predstavlja broj krajnjih nula u δ, a l' je broj cifara između prve i poslednje nenula cifre od δ (ne uzimajući ih). Odavde proizlazi da je
$v(k\cdot\delta)\leq 5+2\cdot(l+l')\leq 5+2\cdot(v(\delta)-1)$. S obzirom na to da je $\delta < (\alpha+n-1)^{2n}$, važi $v(\delta)\leq 2n\cdot(log_n(\alpha+n-1)+1)$. Iz ove nejednakosti dobijamo
$v(k\cdot\delta)\leq 5+2\cdot(2n\cdot(log_n(\alpha+n-1)+1)-1)\leq 5+4n\cdot(log_n(\alpha+n-1)+1)$.
Na sličan način se dobija $v(k\cdot\delta)\leq 2\cdot(5+4\cdot n\cdot(log_n(\alpha+n-1)+1))$.
Ovo ćemo koristiti prilikom konstrukcije "rastućeg uslova" u nastavku.

Lema 4.10. *Za prirodne brojeve x, y i z, ako $NZD(x,y)|z$ i $z\geq x\cdot y$, onda z možemo izraziti kao nenegativnu linearnu kombinaciju brojeva x i y.*

Dokaz. Koristeći prošireni Euklidov algoritam, znamo da se svako z može zapisati kao linearna kombinacija brojeva x i y. Neka je $z = r\cdot x+t\cdot y$.
S obzirom na to da su $x,y,z>0$, bar jedan od brojeva r i t je pozitivan.
Ako su oba nenegativna, tu je kraj, pa bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $r<0$. Tada je $z = z+yx-xy = rx+ty+yx-xy = (r+y)\cdot x+(t-x)\cdot y$.
Ovaj postupak možemo ponavljati dok god ne dobijemo nenegativan umnožak od x, pa b. u. o. pretpostavimo da je $r+y\geq 0$.

Ako je $t - x \geq 0$, u tom slučaju imamo nenegativnu linearnu kombinaciju. Preostao nam je još slučaj $r < 0$, $t > 0$, $r + y \geq 0$ i $t - x < 0$. Neka je $z = r \cdot x + t \cdot y$, gde je $r < 0$ i $x > 0$. Sada je $t \cdot y > z$, pa je prema pretpostavci $(t - x) \cdot y = ty - xy > z - xy \geq 0$. S druge strane, iz $y > 0$ i $(t - x) \cdot y \geq 0$ dobijamo da je $t - x \geq 0$. □

Lema 4.11. *Za proizvoljan prirodan broj z, ako je $\alpha \equiv z \pmod{\gamma}$, onda $(n-1)|(\alpha - s_n(z))$.*

Dokaz. Ono što treba da pokažemo je ekvivalentno sa uslovom $\alpha \equiv s_n(z) \pmod{n-1}$. Kako je $n - 1$ za 1 manje od naše baze, vidimo da je $z \equiv s_n(z) \pmod{n-1}$. Iz činjenice da $(n-1)|\gamma$ sledi da je $\alpha \equiv z \pmod{n-1}$, pa je sada na osnovu tranzitivnosti kongruencije $\alpha \equiv s_n(z) \pmod{n-1}$. □

Sada ćemo preći na konstrukciju dodatnih uslova koje treba da ispunjava α, koji predstavlja zbir cifara najmanjeg broja u nizu od $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva. Ovi uslovi će nam pomoći prilikom određivanja broja α. Prilikom konstrukcije koristimo tvrđenja koja smo pokazali. Postavili smo ograničenja (uslove kongruencije) za zbir cifara prvog od $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva (pod pretpostavkom da takav niz postoji). Sada koristimo te restrikcije da konstruišemo takav niz od $2n$ brojeva, čiji je prvi broj β. Ovde definišemo $m = \prod_{p|n} p$. Za prost broj p, definišemo $c(p)$ tako da $p^{c(p)}|(\mu \cdot m \cdot (n-1) - i)$, za neko $i = 1, 2, ..., 2n-1$, ali $p^{c(p)+1} \not| (\mu \cdot m \cdot (n-1) - i)$, za svako $i = 1, 2, ..., 2n-1$.
Naredni uslov koristimo da bismo pronašli α za koje važi da $NZD(\gamma, \gamma')|\mu \cdot m \cdot (n-1)$.
Prvi uslov kongruentnosti: Za svako p koje ne deli n i za koje je $c(p) > a(p)$ mora da važi $\alpha \equiv 1, 2, ..., p^{a(p)+1} - n \pmod{p^{a(p)+1}}$ ili $\alpha + n - \mu \cdot m \cdot n - 1) \equiv 1, 2, ..., p^{a(p)+1} - n \pmod{p^{a(p)+1}}$. (1)
Ovaj uslov nam kaže da, ako $p \not| n$, u tom slučaju $NZD(\gamma, \gamma')$ deli $\mu \cdot (n-1)$. S druge strane, ako $p|n$, neophodan nam je stroži uslov da bismo dobili traženo α.
Drugi uslov kongruentnosti: Za svako p koje deli n moraju biti ispunjena sledeća dva uslova:
$\alpha + n - \mu \cdot m \cdot (n-1) \equiv 1, 2, ..., p^{a(p)+2} - n \pmod{p^{a(p)+2}}$ (2)
i $\alpha \equiv 1, 2, ..., p^{a(p)+1} - n \pmod{p^{a(p)+1}}$. (3)

Napomena. Može se naći α koje zadovoljava sve ove uslove. Lako se vidi da postoji α koje za svako p zadovoljava Prvi uslov.
Dalje, u Drugom uslovu, (3) je ekvivalentno sa
$\alpha \equiv p^{a(p)+1} - n, 2 \cdot p^{a(p)+1} - n, ..., p \cdot p^{a(p)+1} - n \pmod{p^{a(p)+2}}$. (4)
Zatim, primenom uslova (2), vidimo da α mora da pripada jednoj od $p^{a(p)+2} - n$ uzastopnih klasa ostataka po modulu $p^{a(p)+2}$.
S druge strane, s obzirom na to da se rešenja jednačine (4) razlikuju za $p^{a(p)+1}$, najmanje jedna od ovih klasa mora da zadovolji taj uslov. Sada iz $p^{a(p)+1} > n$ sledi da je $p^{a(p)+2} - n > p^{a(p)+1}$.

Odavde dobijamo da postoji beskonačno mnogo α koji zadovoljavaju Prvi i Drugi uslov. Biramo ono α koje zadovoljava sledeći uslov.
Rastući uslov: Za α važi:
$\alpha \geq (n-1) \cdot (\mu \cdot m + 2n \cdot (log_n(\alpha + n - 1) + 1)) +$
$+ (n-1)^2 \cdot 2 \cdot (5 + 4n \cdot (log_n(\alpha + n - 1) + 1))^2$. (5)
Ova nejednačina ima rešenje zato što leva strana raste linearno, dok desna strana ima logaritamski rast po α.

Teorema 4.12. *Svako α koje zadovoljava Prvi i Drugi uslov kongruencije i Rastući uslov može biti zbir cifara prvog člana nekog niza od $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva. Štaviše, za svako $n \geq 2$ postoji niz od $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva.*

Dokaz. Neka je α takvo da ispunjava Prvi i Drugi uslov kongruencije i Rastući uslov. Ako je $\gamma = NZS(\alpha, \alpha+1, ..., \alpha+n-1)$ i
$\gamma' = NZS(\alpha + n - \mu m(n-1), ..., \alpha + 2n - 1 - \mu m(n-1))$, onda postoji rešenje sistema jednačina $\beta \equiv \alpha \pmod{\gamma}$ i
$\beta \equiv \alpha - \mu \cdot m \cdot (n-1) \pmod{\gamma'}$. (6)
Najpre primetimo da, ako $p \not| n$, sledi da je $v_p(\mu \cdot m \cdot (n-1)) = a(p)$. Sada zbog Prvog uslova kongruencije važi $v_p(NZD(\gamma, \gamma')) \leq a(p)$.
U slučaju da $p|n$, tada važi $v_p(\mu \cdot m \cdot (n-1)) = a(p) + 1$ i, koristeći uslov (3), vidimo da je $v_p(NZD(\gamma, \gamma')) \leq a(p)$.
Uzmimo da je b najmanje pozitivno rešenje sistema (6). Sva ostala rešenja su jednaka zbiru b i nekog umnoška od $\delta = NZS(\gamma, \gamma')$. Sada pokažimo da na ovaj način možemo dobiti broj b' tako da važi $b' \equiv n^{\mu \cdot m} - n \pmod{n^{\mu \cdot m}}$ i $b' \not\equiv n^{\mu \cdot m+1} - n \pmod{n^{\mu \cdot m+1}}$. (7)
Koristeći Drugi uslov kongruencije, vidimo da je ovo moguće, jer ako $p|n$, prema Drugom uslovu važi da je $\alpha \equiv p^{a(p)+1} - n \pmod{p^{a(p)+1}}$. Pošto je $\mu \cdot m \cdot (n-1) \equiv 0 \pmod{p^{a(p)+1}}$, sada je $\alpha + n - \mu m(n-1) \equiv 0 \pmod{p^{a(p)+1}}$.

Dalje, iz (6) dobijamo $b + n \equiv 0 \pmod{p^{a(p)+1}}$. Daljom primenom Drugog uslova, važi $v_p(\delta) \leq a(p) + 1 = v_p(\mu \cdot m)$, pa je odavde
$b \equiv n^{\mu \cdot m} - n \pmod{\prod_{p|n} p^{v_p(\delta)}}$. Dakle, zaključujemo da je ovaj postupak korektan.
Sledeći korak je da izmenimo b' nadovezivanjem kopija umnožaka od δ da dobijemo broj β tako da važi $s(\beta) = \alpha$. S obzirom na to da je δ najveći broj koji zadovoljava nejednakost $v(\alpha+n-1) \leq log_n(\alpha+n-1)+1$ i da je manje od proizvoda $2n$ brojeva $\alpha, \alpha+1, ..., \alpha+2n-1-\mu m(n-1)$, sledi
$v(\delta) \leq 2n \cdot (log_n(\alpha+n-1)+1)$. Zatim iz minimalnosti rešenja b dobijamo da je $v(b) \leq v(\delta)$. Analiziranjem cifara, dobijamo da važi $v(b') \leq \mu \cdot m + v(\delta) + 1$. Prvo biramo umnožak od δ manji od $n \cdot \delta$ da bismo promenili drugu cifru zdesna od b na $n-1$, pa zatim biramo umnožak od $n \cdot \delta$ manji od $n^2\delta$ da "postavimo" treću cifru zdesna na $n-1$, i tako dalje. Sada vidimo da nam ne preostaje više od $v(\delta)+1$ cifara ispred pretposlednjeg bloka od $n-1$ cifara za dodavanje umnožaka od δ.
Nastavljamo postupak sve dok ne dobijemo umnožak od $n^{\mu \cdot m-2} \cdot \delta$ manji od $n^{\mu \cdot m-1} \cdot \delta$ da bismo promenili $(\mu \cdot m)$-tu cifru zdesna na $n-1$. Poslednji umnožak od $n^{\mu \cdot m-1} \cdot \delta$ dodajemo da budemo sigurni da je $\mu \cdot m + 1$ cifra različita od $n-1$.
S obzirom na to da svaka cifra može da bude najviše $n-1$, proizlazi da je
$s_n(\delta) \leq (n-1) \cdot 2n \cdot (log_n(\alpha+n-1)+1)$ i
$s_n(b') \leq (n-1) \cdot (\mu \cdot m + 2n \cdot (log_n(\alpha+n-1)+1))$. Kako je
$b' \equiv b \equiv \alpha \pmod{\gamma}$, iz leme 4.11 sledi da $(n-1)|(\alpha - s_n(b'))$. Koristeći lemu 4.9, vidimo da postoje k i k' tako da je $NZD\,(s_n(k \cdot \delta), s_n(k' \cdot \delta)) = n-1$ i sada $NZD\,\Big(s_n(k \cdot \delta), s_n(k' \cdot \delta)\Big)\Big|(\alpha - s(b'))$. Zahvaljujući napomeni posle leme 4.9, naše k i k' možemo izabrati tako da zadovoljavaju nejednakosti
$s_n(k \cdot \delta) \leq (n-1) \cdot (5 + 2 \cdot (2n \cdot (log_{(n)}(\alpha+n-1)+1)))$ i
$s_n(k' \cdot \delta) \leq 2 \cdot (n-1) \cdot (5 + 2 \cdot (2n \cdot (log_{(n)}(\alpha+n-1)+1)))$.
Koristeći ove dve nejednakosti i Rastući uslov dobijamo
$\alpha - s_n(b') \geq s_n(k \cdot \delta) \cdot s_n(k' \cdot \delta)$, pa možemo iskoristiti lemu 4.10, gde je $z = \alpha - s_n(b')$, $x = s_n(k \cdot \delta)$ i $y = s_n(k' \cdot \delta)$.
Odavde znamo da postoje nenegativni celi brojevi r i t tako da je
$\alpha - s_n(b') = r \cdot s_n(k \cdot \delta) + t \cdot s_n(k' \cdot \delta)$. S druge strane je
$\alpha = r \cdot s_n(k \cdot \delta) + t \cdot s_n(k' \cdot \delta) + s_n(b')$, pa je $\alpha = s_n((k \cdot \delta)_r (k' \cdot \delta)_t b')$.
Primenom kongruencije $(k \cdot \delta)_r (k' \cdot \delta)_t b' \equiv n^{\mu \cdot m} - n \pmod{n^{\mu \cdot m}}$,
vidimo da je $\alpha + i = s_n((k \cdot \delta)_r (k' \cdot \delta)_t b' + i)$ i
$\alpha + n + i - \mu m(n-1) = s_n((k \cdot \delta)_r (k' \cdot \delta)_t b' + n + i)$ (8), za $i = 0, 1, ..., n-1$.

S obzirom na to da je $(k \cdot \delta)_r(k' \cdot \delta)_t b' \equiv b \pmod{\delta}$, na osnovu (6) sledi da $(\alpha+i)|((k\delta)_r(k'\delta)_t b' + i)$ i $(\alpha+n+i)|((k\delta)_r(k'\delta)_t b' + n + i)$ (9), za sve $i = 0, 1, ..., n-1$.
Sada, koristeći definiciju n-haršad broja i primenom uslova (8) i (9), zaključujemo da je broj $(k \cdot \delta)_r(k' \cdot \delta)_t b'$ najmanji u našem nizu od $2n$ uzastopnih n-haršad brojeva. $\square$

Napomena. Naime, postoji beskonačno mnogo α koji zadovoljavaju Prvi uslov, Drugi uslov i Rastući uslov. Odavde vidimo da zapravo postoji beskonačno mnogo nizova n-haršad brojeva dužine 2n, što je još više od tvrđenja teoreme.

U nastavku prvo dajemo primer niza uzastopnih n-haršad brojeva za $n = 2$ sa prilično malim brojevima, a zatim ćemo videti veći niz, koji dobijamo primenom Rastućeg uslova.

Primer 4.13. Neka je $n = 2$. Sada važi $\mu = 2, m = 2$ i uslovi kongruencije $\alpha \equiv 0, 1 \pmod{3}$ i $\alpha \equiv 6 \pmod{8}$. $\alpha = 6$ zadovoljava ove uslove (iako ne zadovoljava Rastući uslov). Odavde dobijamo da je $b = 342 = 101010110_{(2)}$ i $\delta = 420 = 110100100_{(2)}$. Može se lako dobiti da $\beta = b + 14\delta = 6222$ u bazi 2 ima zapis $1100001001110_{(2)}$. Sada je $s_2(\beta) = 6 = \alpha$. Dakle, β jeste prvi u nizu od četiri uzastopna 2-haršad broja. Pokažimo to.
$\beta = 6222 = 1100001001110_{(2)}, s_2(\beta) = 6$ i $6|6222$.
$\beta + 1 = 6223 = 1100001001111_{(2)}, s_2(\beta+1) = 7$ i $7|6223$.
$\beta + 2 = 6224 = 1100001010000_{(2)}, s_2(\beta+2) = 4$ i $4|6224$.
$\beta + 3 = 6225 = 1100001010001_{(2)}, s_2(\beta+3) = 5$ i $5|6225$.

Primer 4.14. Kao i malopre, $n = 2, \mu = 2$ i $m = 2$. Sada iz uslova (1) - (3) i (5) imamo da je $\alpha \equiv 0, 1 \pmod{3}$, $\alpha \equiv 6 \pmod{8}$ i $\alpha \geq 36033$.
Neka je, na primer, $\alpha = 36046$. Sada je:
$b = 1_5 001_4 0101_3 0010010101_7 0_3 1011010_5 1_4 0_4 1010_{(2)}$;
$\delta = 101_3 0110110101101011010110110_4 10011010101010_3 1_6 01001_4 00_{(2)}$.
Sada, ako je $b' = b + 7\delta$, imamo pravi broj jedinica pre poslednje nule:
$b' = 1011001_3 001_3 00101010_3 1101010_3 1101101_5 0_3 1_5 01_3 0101_3 0_{(2)}$.
Lako se dobija da je $s_2(b') = 37$. Sada želimo da iskoristimo lemu 4.9 da bismo otkrili umnoške od δ koji su uzajamno prosti sa zbirovima cifara u bazi 2. Pošto se blok **a** završava sa $n-1$, uzimamo da je $\delta' = (n+1) \cdot \delta$. Ako stavimo δ' umesto δ, proizlazi da je $k = 2 \cdot 2^{62} + 1 = 2^{63} + 1$ i $k' = k \cdot (2^{122} + 1) = 2^{185} + 2^{122} + 2^{63} + 1$. Zatim dobijamo da je

$k \cdot \delta' = 10_3 110010010_4 10_4 10_3 10_3 1_3 001_9 0101_4 01_4 011010_3 10_3 110010010_4 10_4 10_3$
$10_3 1_3 001_9 0101_4 01_4 0110100_{(2)}$, gde je $s_2(k \cdot \delta') = 64$ i
$k \cdot \delta' = 10_3 110010010_4 10_4 10_3 10_3 1_3 001_9 0101_4 01_4 011010_3 10_3 110010010_4 104_1 0_3$
$10_3 1_3 001_9 0101_4 01_4 01_3 0_4 110010010_4 10_4 10_3 10_3 1_3 001_9 0101_4 01_4 011010_3 10_3$
$110010010_4 10_4 10_3 10_3 1_3 001_9 0101_4 01_4 0110100_{(2)}$, gde je $s_2(k' \cdot \delta') = 127$.
Lako se pokazuje da je
$\alpha - s_2(b) = 36009 = 517 \cdot 64 + 23 \cdot 127 = 517 s_2(k \cdot \delta') + 23 s_2(k' \cdot \delta')$,
pa je odavde $\alpha = s_2((k \cdot \delta')_{517}(k' \cdot \delta')_{23} b') = 36046$. Sada vidimo da je $(k \cdot \delta')_{517}(k' \cdot \delta')_{23} b'$ prvi broj u nizu od 4 uzastopna 2-haršad broja zapisan u bazi 2.

5 Minimalni haršad brojevi

U ovoj glavi naš zadatak je da definišemo niz koji je povezan sa n-haršad brojevima. Za fiksirano ali proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ i za bazu $n \geq 2$, pitamo se da li postoji n-haršad broj čiji je zbir cifara baš k. U nastavku ćemo pokazati da je odgovor na pitanje potvrdan za svako n i za svako k. Sada možemo da definišemo a_k kao najmanji n-haršad broj čiji je zbir cifara k, to jest $s_n(a_k) = k$ i $k|a_k$ i pritom je a_k najmanji takav broj. Dalje, sa c_k označavamo količnik brojeva a_k i k, $c_k = a_k/k$, gde $k \in \mathbb{N}$. Očigledno, a_k i k zavise od n, ali to nećemo stalno naglašavati. Ovde ćemo pokazati dve različite konstruktivne tehnike, za bazu 2 i za ostale baze, tako što ćemo spuštati gornje granice za a_k. Prvo tražimo precizne gornje granice za sve k, a zatim bolje, neelementarne granice za većinu neparnih brojeva k. U ovoj celini ćemo umesto $s_2(k)$ pisati samo $s(k)$.

Lema 5.1. *Za svako $k \in \mathbb{N}$ i za svako $n \geq 2$ broj a_k je dobro definisan.*

Dokaz. Neka je prvo k uzajamno prosto sa n, tj. $NZD\,(k, n) = 1$. Primenom Ojlerove teoreme dobijamo ceo broj t tako da je $n^t \equiv 1 \pmod{k}$, tj.
$t = \varphi_k(n)$. Sada definišimo $K = 1 + n^t + n^{2t} + ... + n^{(k-1)t}$. Lako se vidi da je $K \equiv k \equiv 0 \pmod{k}$, kao i da je $s_n(K) = k$. Zaključujemo da je K zapravo n-haršad broj koji se sastoji samo od cifara 0 i 1 čiji je zbir cifara k (dakle, ima tačno k jedinica). Ako k nije uzajamno prosto sa n, tada je $k = a \cdot b$, gde je $NZD\,(b, n) = 1$ i a deli n^m za neko $m \in \mathbb{N}$. Kao u prethodnom slučaju, dobijamo da je $K \equiv 0 \pmod{\text{b}}$ i $s_n(K) = b$. Sada definišimo
$u = max\{n, \lceil log_n K \rceil\} + 1$ i $K' = K \cdot (n^u + ... + n^{au})$. Očigledno, $k = a \cdot b$ deli broj K' i $s_n(K') = a \cdot b = k$. Ovom diskusijom smo zapravo pokazali da za sve k postoji broj čiji je zbir cifara deljiv sa k. Međutim, ako postoji jedan, onda zbog dobre uređenosti skupa prirodnih brojeva postoji i najmanji takav broj, a to je a_k po definiciji. Zato je a_k dobro definisano. □

Napomena. Ovo tvrđenje nam daje veliku gornju granicu za a_k, reda veličine $\exp(O(k^2))$. Takođe, možemo primetiti da, ako je m najmanji n-haršad broj sa zbirom cifara k, tada $n - 1$ deli izraz
$m - s_n(m) = a_k - k = k \cdot c_k - k = k \cdot (c_k - 1)$.
Ova činjenica je korisna za računanje c_k za male vrednosti broja k.
U sistemu sa osnovom 10 lako možemo izračunati vrednosti a_k i c_k, zato što izraz $k \cdot (c_k - 1)$ mora da bude deljiv sa 9. Na primer, za $k = 12$, pošto je 12 deljivo sa 3, dovoljno je da $c_k - 1$ bude deljivo sa 3, pa za c_k proveravamo samo vrednosti 4, 7, 10, ...

k	c_k	a_k
10	19	190
11	19	209
12	4	48
13	19	247
14	19	266
15	13	195
16	28	448
17	28	476
18	11	198
19	46	874
20	199	3980
21	19	399
22	109	2398
23	73	1679

Tabela 1. U ovoj tabeli vidimo izračunate vrednosti brojeva c_k i a_k za $k = 10, 11, \ldots, 23$.

5.1 Elementarne granice za a_k u slučaju $n = 2$

Za svaki prirodan broj k uvodimo oznaku $n_k = \lceil log_2 k \rceil$. Dakle, n_k je najmanji prirodan broj takav da je $k \leq 2^{n_k}$. Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, neparan broj. Neka je sada t_k red broja 2 po modulu k, tj. važi $2^{t_k} \equiv 1 \pmod{k}$. Očigledno je $t_k \geq n_k$ i $t_k | \varphi(k)$, gde φ predstavlja Ojlerovu funkciju. Odavde je $n_k \leq t_k \leq k - 1$ (1).

Lema 5.2. *Za svaki neparan ceo broj $k > 1$, svaki broj $x \in \{0, 1, ..., k-1\}$ se može predstaviti kao suma tačno n_k elemenata iz skupa $D = \{2^i : i = 0, ..., n_k + k - 2\}$ po modulu k.*

Dokaz. Dokaz radimo konstruktivnom metodom. Pođimo od jednog primera. Neka je $x = 0$ i $k = 2^{n_k} - 1$. Tada, s obzirom na to da je $x \equiv k \pmod{k}$, na sledeći način dolazimo do traženog zapisa: $k = 1+2+...+2^{n_k-1}$ (koristimo da je uslov $n_k - 1 \leq n_k + k - 2$ ekvivalentan sa $k \geq 1$). Svaki broj $x \in \{0, 1, ..., n_k - 1\}$ ima najviše n_k cifara, od kojih je najviše $n_k - 1$ jedinica. Uzmimo slučaj kada x ima tačno $n_k - 1$ jedinicu. Neka je, na primer, $x = 2^{n_k-1} + ... + 2 + 1 - 2^j$, gde $j \in \{0, 1, ..., n_k - 1\}$.
Pretpostavimo prvo da je $j \leq n_k - 2$. Na osnovu zapisa

$2^{j+1} = 2^j + 2^j \equiv 2^j + 2^{j+t_k} \pmod{k}$, dobijamo da je
$x \equiv 2^{j+t_k} + 2^{n_k-1} + ... + 2^{j+2} + 2^j + 2^{j-1} + ... + 1 \pmod{k}$ i, primenom (1), ispunjena su oba uslova $j + t_k \leq n_k - 2 + k - 1 = n_k + k - 3$ i $j + t_k > n_k - 1$. Sada vidimo da su svi izložiociražličiti i svi su u datom opsegu, odakle dobijamo traženo predstavljanje broja x.
Drugi slučaj, ako je $j = n_k - 1$, onda je $x = 2^{n_k-1} - 1$. Ovde umesto x posmatramo $x + k$. Naime, po definiciji n_k, mora da važi $k \geq 2^{n_k-1} + 1$. Odavde je $x + k \geq 2^{n_k}$, iz čega vidimo da broj x počinje sa 2^{n_k} i zapisan je sa najviše n_k jedinica u bazi 2.
Dalje, ako je $s(x + k) \geq n_k + 1$ (to jest ima više od n_k jedinica), onda je $x + k \geq 2^{n_k} + ... + 2 + 1 = 2^{n_k+1} - 1$, što nas dovodi u kontradikciju sa nejednakošću $x + k \leq k - 1 + k = 2k - 1 \leq 2^{n_k+1} - 3$, zato što je k neparan broj. Ako je $s(x + k) = n_k$, onda je to kraj (jer je $k \geq 3$). Ako je $s(x + k) = n_k - 1$, onda radimo kao u prvom slučaju i uočimo da je sada $j + t_k \leq n_k + k - 2$, za svako $j \in \{0, 1, ..., n_k - 1\}$, i pritom, ako je $j > 0$, onda je $j + t_k > n_k$, što je moguće zato što izostaju dva izložioca dvojke iz skupa 1, 2, ..., 2^{n_k-1} (jer nam je potrebna $n_k - 1$ jedinica).
Sada, neka je $s(x + k) < n_k - 1$. Onda za svaku nulu u predstavljanju broja $x + k$ kojoj prethodi jedinica i nakon koje sledi $l \geq 0$ drugih nula, možemo popuniti nula "rupu" na sledeći način: Ako je ta nula na mestu 2^j, onda umesto 2^{j+1} pišemo $2^j + 2^{j-1} + ... + 2^{j-l} + 2^{j-l+t_k}$. Na ovaj način dobijamo $l + 2$ jedinice umesto 1 jedinice i $l + 1$ nule, i tako popunjavamo sve "rupe" osim one kojoj odgovara najmanji stepen dvojke i važi $l \geq 1$. Pritom, 2^{j+1} zamenjujemo sa $2^j + 2^{j-1} + ... + 2^{j-l+1} + 2^{j-1+l+t_k}$, da bismo obezbedili nejednakost $j' + t_k > n_k$ (gde je $j' = j - l + 1 > 0$). Odavde dobijamo predstavljanje u kome je ukupan broj stepena dvojke baš n_k i svi dodati izložioci oblika $2^{j'+t_k}$ su različiti. Sada sledi da najveći izložilac ovih stepena može da bude najviše $j' + t_k \leq n_k + k - 2$.
Na kraju, ako predstavljanje broja x počinje sa 2^{n_k-1}, onda postupak koji smo opisali možemo odmah da primenimo na x, vodeći računa o tome da sve nula "rupe" budu potpuno popunjene. Inače, isto rezonovanje primenjujemo na broj $x + k$. $\square$

Primer 5.3. Neka je $k = 11$. Tada je $n_{11} = 4$ i $t_{11} = 10$. Želimo da izaberemo 4 različita broja iz skupa $D = \{1, 2, ..., 2^{13}\}$ tako da njihov zbir bude kongruentan sa 10 po modulu 11. Poslednji član smo dobili tako što je $13 = 4 + 11 - 2$. Predstavimo broj 10 na ovaj način. Kako je $10 = 2^3 + 2$, možemo napisati $10 = 2^2 + 2^2 + 1 + 1$, pa je $10 \equiv 2^{12} + 2^2 + 2^{10} + 1 \pmod{11}$.

Sada predstavimo broj $7 = 2^2 + 2 + 1$ na ovaj način. S obzirom na to da predstavljanje ne sadrži izraz 2^3, uzimamo $7 + 11 = 18$ i dobijamo $18 = 2^4 + 2 = 2^3 + 2^3 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^2 + 2$, pa je sada
$7 \equiv 18 \equiv 2^3 + 2^{12} + 2^2 + 2 \pmod{11}$.

Napomena. Primetimo da predstavljanje dato u prethodnoj lemi ne mora biti jedinstveno. Ako konstrukciju primenimo tako da u zapisu uvek bude najveći stepen dvojke, tada dobijamo najveće moguće predstavljanje.
U prethodnom primeru, možemo drugačije postaviti "rupe", i tako dobijamo
$7 \equiv 18 \equiv 2^4 + 2 = 2^3 + 2^3 + 1 + 1 \equiv 2^{13} + 2^3 + 2^{10} + 1 \pmod{11}$.

Uvedimo sledeću oznaku: $\mu_2(m)$ je broj za koji važi $2^{\mu_2(m)} || m$.

Teorema 5.4. *Za sve prirodne brojeve k i l postoji prirodan broj n koji zadovoljava sledeće uslove:*
(a) $s(n \cdot k) = l \cdot k$,
(b) $n \leq (2^{l \cdot k + n_k} - 2^{\mu_2(k)})/k$.

Dokaz. Očigledno je da, ako je k stepen dvojke, na primer $k = 2^s$, onda možemo staviti $n = 2^{l \cdot k} - 1$, pa je sada
$s(n \cdot k) = s((2^{lk} - 1) \cdot 2^s) = s(2^{s+lk-1} + ... + 2^{s+1} + 2^s) = l \cdot k$. U tom slučaju, s obzirom na to da je $n_k = s = \mu_2(k)$, nejednakost u (b) postaje jednakost.
Dalje, ako je k oblika $k = 2^m \cdot d$, za neki prirodan broj m i neparan broj $d \geq 3$, onda možemo naći ceo broj $n \leq (2^{2^m \cdot ld + n'_k} - 1)/d$, gde je $n'_k = \lceil log_2 d \rceil$, tako da je $s(n \cdot d) = 2^m \cdot ld$. S obzirom na to da je
$s(n \cdot k) = s(2^m \cdot nd) = s(nd) = 2^m \cdot ld = l \cdot k$, nk zadovoljava tvrđenje (a).
Primetimo da je u ovom slučaju i (b) ispunjeno pošto je
$(2^{2^m \cdot ld + n'_k} - 1)/d = (2^{lk+n_k} - 2^m)/k$. Ova jednakost važi zato što je ovde
$n_k = \lceil log_2 k \rceil = \lceil log_2(2^m \cdot d) \rceil = m + \lceil log_2 d \rceil = m + n'_k$.
Sada, bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $k \geq 3$ neparan broj. Posmatrajmo broj $M = 2^{lk+n_k} - 1 = 1 + 2 + ... + 2^{lk+n_k-1}$. Odavde je $s(M) = lk + n_k$. Na osnovu leme 5.2, imamo
$M \equiv 2^{j_1} + ... + 2^{j_{n_k}} \pmod{k}$ (2),
za $0 \leq j_1 < ... < j_{n_k} \leq k + n_k - 2 = lk + n_k - 1$. Odavde dobijamo da je $n = \frac{M - (2^{j_1} + 2^{j_2} + ... + 2^{j_{n_k}})}{k}$, što je ceo broj prema (2) i pritom zadovoljava jednakost $s(n \cdot k) = s(M - (2^{j_1} + 2^{j_2} + ... + 2^{j_{n_k}})) = l \cdot k$. Kako je k neparno, imamo da je $\mu_2(k) = 0$, pa je
$n = (M - (2^{j_1} + ... + 2^{j_{n_k}}))/k < M/k = (2^{lk+n_k} - 1)/k$, te je zadovoljen i uslov (b). $\square$

Lema 5.5. *Niz $(a_k)_{k\geq 1}$ zadovoljava sledeći uslov:*
$2^k - 1 \leq a_k \leq 2^{k+n_k} - 2^{\mu_2(k)}$. *(3)*

Dokaz. Prva nejednakost sledi zbog toga što, ako je $s(a_k) = k$, onda a_k ima bar k cifara, pa je odatle $a_k \geq 1 + 2 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$.
Druga nejednakost se dobija kada u teoremi 5.4 uzmemo da je $l = 1$ i primenimo uslov minimalnosti iz definicije broja a_k. □

Desna strana nejednakosti (3) postaje jednakost kada je $k = 2^s$ za neko s, što smo već videli. Za $k = 2^s - 1$, dobijamo vrednosti c_k koje su vrlo blizu $2^k - 1$, ali, generalno, numerička analiza pokazuje da je vrednost $c_k/2^k$ mnogo češće bliža nuli nego jedinici. Zapravo, u [2] je dokazano da je to tačno za sve neparne indekse.

5.2 Poboljšanje granice za $n = 2$

Da bismo pronašli nove granice za a_k, uvodimo sledeće klase neparnih brojeva: Za prirodan broj m, definišemo skup
$C_m = \{k \equiv 1 \pmod 2) : 2^{k+m} - 1 \equiv \sum_{i=1}^{m} 2^{j_i} \pmod k$, za
$0 \leq j_1 < ... < j_m \leq m + k - 2\}$.

Lema 5.6. *Za svako m važi $C_m \subseteq C_{m+1}$.*

Dokaz. Zaista, ako $k \in C_m$, onda je $2^{k+m} - 1 \equiv 2^{j_1} + ... + 2^{j_m} \pmod k$ za neke $0 \leq j_1 < ... < j_m \leq m + k - 2$. Množeći ovu kongruenciju sa 2 i dodajući 1 na obe strane, dobijamo $2^{k+m+1} - 1 \equiv 1 + 2^{j_1+1} + ... + 2^{j_m+1} \pmod k$, što je predstavljanje iz kojeg vidimo da k pripada skupu C_{m+1}. □

Primetimo takođe da iz leme 5.2 dobijamo da svaki neparan broj $k \geq 3$ pripada C_u, za $u = \lceil log_x(k)/log_x(2) \rceil$. Takođe, važi sledeće tvrđenje.

Lema 5.7. $2\mathbb{N} + 1 = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$.

Teorema 5.8. *Za svako $k \in C_1$ važi: $2^k - 1 < a_k < 2^{k+1} - 1$.*
Posebno, $c_k/2^k \to 0$ kada $k \to \infty$ kroz C_1. Dalje, $a_k = 2^{k+1} - 1 - 2^{j_1}$, gde je $j_1 = j_0 + s \cdot t_k$, gde je $s = \lfloor (k - 1 - j_0)/t_k \rfloor$ i $0 \leq j_0 \leq t_k - 1$ je takvo da je $2^{k+1} - 1 \equiv 2^{j_0} \pmod k$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da za neko $k > 1$ važi da $k | 2^k - 1$. Takvo k očigledno nije paran broj. Neka je p najmanji prost broj koji deli k. Tada je $p \geq 3$. Iz Male Fermaove teoreme sledi $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Sada, neka je t najmanji prost broj koji deli $p-1$ za koji važi $2^t \equiv 1 \pmod p$ $(p-1 \geq 2)$. Kako je $t < p \leq k$ i t i p su prosti, sledi da su t i k uzajamno prosti, pa postoje q i r takvi da je $k = q \cdot t + r$ i $0 < r < t \leq p-1 < p$. Odavde je $2^r \equiv 1 \pmod p$, što je u kontradikciji s činjenicom da je t najmanji takav broj. Dakle, za svako $k > 1$ važi $2^k \not\equiv 1 \pmod k$, pa zaključujemo da ceo broj sa k cifara i zbirom cifara k u binarnom zapisu nikada nije deljiv sa k. Dakle, $a_k > 2^k - 1$, pa a_k mora da ima više od k cifara.
Dalje, pretpostavimo da a_k ima $k+1$ cifru i zbir cifara k u bazi 2. Odavde je $a_k = 2^{k+1} - 1 - 2^j$, za neko $j = 0, \ldots, k-1$. S druge strane,
$2^{k+1} - 1 \equiv x \pmod k$ i postoji neko $j_0 \in \{0, ..., t_k - 1\}$ takvo da je $x = 2^{j_0}$. Da bismo dobili minimalno a_k, moramo da oduzmemo najveći mogući stepen dvojke. To znači da moramo pronaći najveći izložilac $j_1 = j_0 + s \cdot t_k \leq k-1$, pa je odatle $s = \lfloor (k-1-j_0)/t_k \rfloor$. Dakle, $a_k = 2^{k+1} - 2^{j_1} - 1$. □

Primer 5.9. Na osnovu prethodnog tvrđenja, možemo izračunati, na primer, $a_{11} = 3839 = 2^{12} - 2^8 - 1$, zato što je $2^{12} - 1 \equiv 2^8 \pmod{11}$. Istim rezonovanjem dobijamo $a_{29} = 1073741791 = 2^{30} - 2^5 - 1$, jer je
$2^{30} - 1 \equiv 2^5 \pmod{29}$ i $a_{25} = 66584575 = 2^{26} - 2^{19} - 1$, kao što je i $a_{253} = 2^{254} - 2^{242} - 1$.

Teorema 5.10. *Ako $m \in \mathbb{N}$ i $k \in C_{m+1} \setminus C_m$, onda je*
$2^{k+m} - 1 < a_k < 2^{k+m+1} - 1$. *Dalje, $c_k/2^k \to 0$ kada $k \to \infty$ u C_m za svako fiksirano m.*

Dokaz. Neka $k \in C_{m+1} \setminus C_m$. Tada je, po definiciji skupa C_{m+1},
$2^{k+m+1} - 1 \equiv 2^{j_1} + \cdots + 2^{j_{m+1}} \pmod k$, gde su svi izložioci različiti i najviše $k+m-1$ i pritom su najveći mogući. Tada je $a_k = 2^{k+m+1} - 1 - 2^{j_1} - \ldots - 2^{j_{m+1}}$. Odavde je očigledno $a_k < 2^{k+m+1} - 1$. Dalje, pošto je najveći izložilac najviše $k+m-1$, zbir $\sum_{i=1}^{m+1} 2^{j_i}$ je manji od 2^{k+m}, pa je
$a_k > 2^{k+m+1} - 1 - 2^{k+m} = 2^{k+m} - 1$. □

Teorema 5.11. *Za sve cele brojeve $k = 2^i - 1 \geq 3$ važi da je*

$$a^k \leq 2^{k+k^-} + 2^k - 2^{k-i} - 1\,(4),$$

gde je k^- najmanji pozitivni ostatak broja -k po modulu i. Takođe, ova granica je precizna kada je $k = 2^i - 1$ Mersenov prost broj. U tom slučaju, imamo da $c_k/2^k \to 1/2$ kada $k \to \infty$ kroz Mersenove proste brojeve, pod pretpostavkom da je ovaj skup beskonačan.

Dokaz. Pokažimo prvo da zbir cifara gornje granice u (4) u bazi 2 iznosi tačno k i da je taj broj deljiv sa k.
Na osnovu definicije broja k^- vidimo da je $k + k^- = i \cdot \alpha$ za neki prirodan broj α. S obzitrom na to da je
$2^{k+k^-} + 2^k - 2^{k-i} - 1 = 2^{k-1} \cdot (2^i - 1) + 2^{i \cdot \alpha} - 1 =$
$= (2^i - 1) \cdot (2^{k-1} + 2^{i(\alpha-1)} + 2^{i(\alpha-2)} + ... + 1),$
sledi da je $2^{k+k^-} + 2^k - 2^{k-i} - 1$ deljivo sa k. Takođe je $k^- \geq 1$, zato što k nije deljivo sa i (ovo sledi iz dokaza teoreme 5.8), i pritom je
$s(2^{k+k^-} + 2^k - 2^{k-i} - 1) = s(2^{k+k^- -1} + ... + 1 + 2^k - 2^{k-i}) =$
$= s(2^{k+k^- -1} + ... + 2^k + ... + 2^{k-i+1} + 2^{k-i-1} + ... + 1 + 2^k) =$
$= s(2^{k+k^-} + 2^{k-1} + ... + 2^{k-i+1} + 2^{k-i-1} + .. + 1) = k,$
čime je prvi stav dokazan.
Sada posmatramo Mersenov prost broj $k = 2^i - 1$. Prvo pokazujemo da $k \in C_i \setminus C_{i-1}$. S obzirom na to da je $u = \lceil log_x(k)/log_x(2) \rceil = i$, koristeći lemu 5.2, imamo da $k \in C_i$. Pretpostavimo suprotno, da $k \in C_{i-1}$. Sada je
$2^{k+i-1} - 1 \equiv 2^{j_1} + ... + 2^{j_{i-1}}$ (5),
za neke $0 \leq j_1 < j_2 < ... < j_{i-1} \leq k + i - 3$. Iz činjenice da je k prost, sledi da je $2^{k-1} \equiv 1 \pmod{k}$, pa je $2^{k+i-1} - 1 \equiv 2^i - 1 \equiv 0 \pmod{k}$.
Pošto je $2^i \equiv 1 \pmod{k}$, vidimo da sve elemente skupa možemo svesti na stepene manje ili jednake od $i-1$. Na ovaj način imamo najviše $i-1$ izraza. S druge strane, u ovom slučaju, zbir najmanje jednog i najviše $i-1$ različitih članova iz skupa $\{1, 2, ..., 2^{i-1}\}$ je pozitivan i manji od zbira svih elemenata skupa, odnosno k, pa stoga kongruenciju (5) nije moguće rešiti.
Da bi dokaz bio kompletan, potrebno je da nađemo najveće moguće predstavljanje $x = 2^{j_1} + ... + 2^{j_i}$, gde je $0 \leq j_1 < ... < j_i \leq k + i - 2$, i da je $2^{k+i} - 1 \equiv x \pmod{k}$. Međutim, $2^{k+i} - 1 \equiv 2^{i+1} - 1 \equiv 1 \pmod{k}$. Kako su svi izložioci j različiti, uzimamo $j_i = k + i - 2, j_{i-1} = k + i - 3, ..., j_2 = k$, i na kraju za j_1 biramo najveći ceo broj tako da važi $x \equiv 1 \pmod{k}$.
S obzirom na to da važi
$x = 2^{j_1} + 2^k \cdot (1 + 2 + ... + 2^{i-2}) = 2^{j_1} + 2^k \cdot (2^{i-1} - 1) \equiv 2^{j_1} + 2^i - 2 \equiv$
$\equiv 2^{j_1} - 1 \pmod{k},$
mora da bude $2^{j_i} \equiv 2 \pmod{k}$. Znamo da je i red broja 2 po modulu k, pa uzimamo najveće j_1 oblika $j_1 = 1 + si < k$. S druge strane, i je i prost, pa je $2^{i-1} \equiv 1 \pmod{i}$. Odavde sledi da je $k = 2^i - 1 \equiv 1 \pmod{i}$. Dakle, $j_1 = k - i$. Dalje je
$a_k = 2^{k+i} - x - 1 = 2^{k+i} - 1 - 2^{k-i} - 2^{k+i-1} + 2^k = 2^{k+i-1} + 2^k - 2^{k-1} - 1,$
pa pošto je u ovom slučaju $k^- = i - 1$, sada u tvrđenju nejednakost postaje jednakost.

Na kraju vidimo da je $\frac{c_k}{2^k} = \frac{k+1}{2k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k \cdot 2^i} - \frac{1}{k \cdot 2^k} \to \frac{1}{2}$ kada i i k teže beskonačnosti. $\square$

6 Monojedinični haršad brojevi i jednačina $10^n \equiv 1 \pmod{n}$

U ovom delu se bavimo problemom monojediničnih haršad brojeva. To su haršad (Nivenovi) brojevi koji se u dekadnom zapisu sastoje samo od cifre 1. Na primer, 1, 111, 111111111 i 1_{27} (broj sa 27 jedinica) su prva 4 monojedinična haršad broja. Brojevi 11, 1111, ... su takođe monojedinični, ali nisu haršad brojevi. U ovoj glavi ćemo dati kompletnu karakterizaciju monojediničnih haršad brojeva. Takođe, pokazaćemo kako se ovi brojevi mogu konstruisati uz pomoć određene liste prostih brojeva. Uvodimo oznaku $R(n)$, koja predstavlja broj sačinjen od n jedinica, da bismo pojednostavili diskusiju koja sledi. Dakle, $R(n) = \frac{10^n-1}{9}$. Naš dalji cilj je da vidimo pod kojim uslovima važi
$R(n) \equiv 0 \pmod{n}$. (1)
Naredna lema će nam biti korisna za dokazivanje glavne teoreme o monojediničnim haršad brojevima.

Lema 6.1. *Neka su a, b, m i n prirodni brojevi. Ako je $a \equiv b \pmod{m^n}$, onda je $a^{m^k} \equiv b^{m^k} \pmod{m^{n+k}}$.*

Dokaz. Dokaz radimo indukcijom po k. Za $k = 0$ imamo $a^1 \equiv b^1 \pmod{m^{n+0}}$, odnosno $a \equiv b \pmod{m^n}$. Sada posmatrajmo faktorizaciju
$a^{m^{k+1}} - b^{m^{k+1}} = (a^{m^k} - b^{m^k}) \cdot ((a^{m^k})^{m-1} + (a^{m^k})^{m-2} b^{m^k} + ... + (b^{m^k})^{m-1})$.
Prema hipotezi, $a^{m^k} \equiv b^{m^k} \pmod{m^{n+k}}$, pa su svi sabirci u drugoj zagradi međusobno kongruentni po modulu m, pa pošto ih ima baš m, njihov zbir je deljiv sa m. Dakle, $a^{m^{k+1}} \equiv b^{m^{k+1}} \pmod{m^{n+k+1}}$, čime je pokazan indukcijski korak. □

Sada navodimo sledeću lemu kao specijalni slučaj prethodne.

Lema 6.2. *Neka su m, n i t prirodni brojevi. Tada iz $10^t \equiv 1 \pmod{m^n}$ sledi da je $(10^t)^{m^k} \equiv 1 \pmod{m^{n+k}}$ za svaki nenegativan broj k.*

Dokaz. Direktna posledica prethodne leme. Stavimo $a = 10^t$ i $b = 1$. □

Primenom prethodne leme možemo dokazati narednu teoremu koja nam daje potrebne i dovoljne uslove da jednačina (1) bude zadovoljena. Uvedimo prvo sledeću oznaku: Sa $e_n(10)$ označavamo red broja 10 po modulu n. Dakle, $10^{e_n(10)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Teorema 6.3. *Neka je broj n uzajamno prost sa 10, tj.* $NZD(n, 10) = 1$. *Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(a) $R(n)$ *je haršad monojedinični broj.*
(b) $10^n \equiv 1$ *(mod n).*
(c) $n \equiv 0 \pmod{e_n(10)}$.
(d) $n \equiv 0 \pmod{e_p(10)}$ *za svaki prost faktor p broja n.*

Dokaz. Smerovi $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ su direktne posledice pravila o kongruenciji i Male Fermaove teoreme. Ostaje nam još da pokažemo smer $(d) \Rightarrow (a)$, čime ćemo kompletirati dokaz.
Pretpostavimo da važi (d), tj. $n \equiv 0 \, (mod \, e_p(10))$ za svaki prost faktor p broja n. Neka je m najmanji prost delilac broja n. Sada, s obzirom na to da je $e_m(10) < m$ i, prema pretpostavci, $e_m(10)$ je delilac od n, sledi da je $e_m(10) = 1$. To je moguće samo za $m = 3$. Sada neparan broj n možemo zapisati u obliku $n = 3^k \cdot \prod_{i=1}^{t} p_i^{k_i}$, gde je $3 < p_1 < p_2 < ... < p_t$. Odavde je $n \equiv 0 \, (mod \, e_{p_i}(10))$, za $i = 1, 2, ..., t$ i kako je prema definiciji $10^{e_{p_i}(10)} \equiv 1 \, (mod \, p_i)$, sledi da je $10^n \equiv 1 \, (mod \, p_i)$ za svako i. S druge strane, koristeći Malu Fermaovu teoremu, vidimo da je za svako i $10^{p_i - 1} \equiv 1 \, (mod \, p_i)$, pa odatle $e_{p_i}(10) | (p_i - 1)$ za sve i. Odavde za svako i sledi $10^{NZD(n, p_i - 1)} \equiv 1 \, (mod \, p_i)$. Međutim, iz činjenice da je $NZD(n, p_i - 1)$ delilac od $n/p_i^{k_i}$, sledi da je $10^{n/p_i^{k_i}} \equiv 1 \, (mod \, p_i)$. Dalje, primetimo da je $10^{n/3^k} \equiv 1 \pmod 9$. Sada primenom leme 6.2 dobijamo da je $10^n = (10^{n/p_i^{k_i}})^{p_i^{k_i}} \equiv 1 \pmod{p_i^{k_i+1}}$ i $(10^{n/3^k})^{3^k} \equiv 1 \pmod{3^{k+2}}$, za sve i. Dakle, $10^n \equiv 1 \pmod{p_i^{k_i}}$ i $10^n \equiv 1 \pmod{3^{k+2}}$. Odavde sledi da je $10^n \equiv 1 \pmod{9n}$, pa je $R(n) = \frac{10^n - 1}{9} \equiv 0 \pmod n$. To znači da je $R(n)$ monojedinični haršad broj. □

Posledica teoreme je da je $R(3^t)$ haršad monojediničan broj za svaki ceo broj $t \geq 0$. Ovo sledi na osnovu tvrđenja (d) prethodne teoreme i pošto je $e_3(10) = 1$. U suštini, tvrđenje (d) nam daje najvažniju i najprimenjeniju karakterizaciju haršad monojediničnih brojeva.

6.1 Generisanje monojediničnih haršad brojeva

Koristeći tvrđenje (d) prethodne teoreme, možemo konstruisati sve brojeve n takve da je $R(n)$ haršad broj tako što određujemo koji prosti brojevi p su takvi da svaki prost faktor od $e_p(10)$ takođe zadovoljava uslov (d).

Na primer, kako je $e_3(10) = 1$, sledi da je svaki monojedinični broj kome je zbir cifara neki stepen trojke haršad broj. S druge strane, vidimo da nijedan umnožak od 7 ne može da zadovolji (d), pošto je $e_7(10) = 6$ deljivo sa 2. Dakle, $R(7m)$ nikada ne može biti haršad monojedinica. Zapravo, prvi sledeći prost broj veći od 3 koji može biti delilac od n koji pritom zadovoljava tvrđenje (d) je 37. Ovo dobijamo iz $e_{37}(10) = 3$ i, kao što znamo, svaki broj n koji zadovoljava stav (d) mora biti deljiv sa 3.
Istim rezonovanjem je dobijeno da su 163 i 757 sledeća dva prosta broja veća od 37 koji mogu biti delioci od n tako da je $R(n)$ haršad broj, s obzirom na to da je $e_{163}(10) = 81 = 3^4$ i $e_{757}(10) = 27 = 3^3$. Prva kolona u tabeli 2 daje sve proste brojeve manje od 50000, koji mogu biti delioci broja n koji zadovoljava uslov (d). Druga kolona nam daje vrednosti za $e_p(10)$.

p	$e_p(10)$
3	1
37	3
163	$81 = 3^4$
757	$27 = 3^3$
1999	$999 = 3^3 \cdot 37$
5477	$1369 = 37^2$
8803	$1467 = 3^2 \cdot 163$
9397	$81 = 3^4$
13627	$6813 = 3^2 \cdot 757$
15649	$489 = 3 \cdot 163$
36187	$18093 = 3 \cdot 37 \cdot 163$
40879	757

Tabela 2.

Može se primetiti da ovakvih brojeva ima beskonačno mnogo, zato što $e_p(10)$ može biti stepen trojke beskonačno mnogo puta. Na primer, pretpostavimo da je 757 najveći prost faktor broja n. Sada, da bi $R(n)$ mogao biti haršad monojediničan broj, n mora da bude oblika
$n = 3^{n_1} \cdot 37^{n_2} \cdot 163^{n_3} \cdot 757^{n_4}$, gde su izložioci obavezno međusobno zavisni. Recimo, ako je $n_3 \neq 0$, onda u desnoj koloni tabele vidimo da mora biti $n_1 \geq 4$. Dakle, lista generatora haršad monojedinica se može neprekidno konstruisati po ugledu na prethodnu tabelu. U narednom nizu navodimo prvih nekoliko brojeva.

3, $111 = 3 \cdot 37$, $13203 = 3^4 \cdot 163$, $20439 = 3^3 \cdot 757$, $1997001 = 3^3 \cdot 37 \cdot 1999$, $3 \cdot 37^2 \cdot 5437$, $3^4 \cdot 163 \cdot 8803$, $761157 = 3^4 \cdot 9397$, $287522253 = 3^3 \cdot 757 \cdot 13627$, $7652361 = 3 \cdot 163 \cdot 15649$.

Na primer, proizvod $3^4 \cdot 163 \cdot 8803$ je u ovom nizu zato što je $e_{8803}(10) = 1467 = 3^2 \cdot 163$ i svi njegovi prosti činioci se nalaze u tabeli. Dakle, ako je 8803 najveći dozvoljeni prost činilac broja n, 163 takođe mora da bude činilac, što dalje iznuđuje da je i 3^4 delilac od n. Izraz "generatori haršad monojedinica..." se koristi iz razloga što, povećavanjem izložioca bilo kog prostog faktora od najmanjeg zajedničkog sadržaoca bilo kojeg podskupa liste brojeva iz prethodnog niza, dobijamo n takvo da je $R(n)$ haršad monojedinica. Na primer,

$NZS\,(3^4 \cdot 163, 3^3 \cdot 757, 3^3 \cdot 757 \cdot 13627) = 3^4 \cdot 163 \cdot 757 \cdot 13627$, pa će sada $R(3^{n_1} \cdot 163^{n_2} \cdot 757^{n_3} \cdot 13627^{n_4})$ biti monojediničan haršad broj, gde je $n_1 \geq 4$, $n_2 \geq 1$, $n_3 \geq 1$ i $n_4 \geq 1$.

Lista prostih brojeva data u tabeli 2 se može proširiti određivanjem vrednosti $e_p(10)$ za proste brojeve p. Jejts je u [9] objavio koristan postupak za pronalaženje takvih brojeva. Na primer, on je izračunao da je, za prost broj 333667, $e_{333667}(10) = 9 = 3^2$. Dakle, s obzirom na to da je 3 u tabeli, možemo dodati i broj 333667 u tabelu.

Na kraju, možemo spomenuti i to da, za bilo koju dekadnu cifru $d \neq 0$ važi: $\frac{d \cdot (10^n - 1)}{9} \equiv 0 \pmod{dn}$ ako i samo ako je $R(n) \equiv 0 \pmod{n}$. Dakle, teorema o karakterizaciji za monojedinične brojeve daje i potpunu karakterizaciju za sve monocifrene haršad brojeve.

Literatura

[1] C. Cooper, R. E. Kennedy. On consecutive Niven numbers, *Fibonacci Quart.* 31.2 (1993), 146-51.

[2] H. Fredricksen, et al. Minimal Niven numbers, *Acta Arith.* 132.2 (2008), 135-159.

[3] H. G. Grundman, Sequences of consecutive n-Niven numbers, *Fibonacci Quart.* 32.2 (1994), 174-75.

[4] Harshad number, *Wikipedia*, https://en.wikipedia.org/wiki/Harshad number

[5] R. E. Kennedy, C. Cooper, Niven repunits and $10^n \equiv 1 \pmod{n}$, *Fibonacci Quart.* 27.2 (1989), 139-43.

[6] V. Mićić, Z. Kadelburg, D. Đukić, *Uvod u teoriju brojeva*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2013.

[7] B. Wilson, Construction of small consecutive Niven numbers, *Fibonacci Quart.* 34.3 (1996), 240-43.

[8] B. Wilson, Construction of $2 * n$ consecutive Niven numbers, *Fibonacci Quart.* 35.2 (1997), 122-28.

[9] S. Yates, *Prime period lengths*, Samuel Yates, New Yersey, 1975.

Biografija

Milan Bogić je rođen 15. avgusta 1995. godine u Somboru. Živeo je i odrastao u Apatinu, gde je 2010. završio Osnovnu školu "Žarko Zrenjanin" kao vukovac i đak generacije. Iste godine upisao je Gimnaziju "Nikola Tesla" u Apatinu, koju je završio 2014. godine, takođe kao vukovac. Iste godine upisao se na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Matematika, modul Teorijska matematika. 2017. godine završio je osnovne studije i iste godine upisao je master studije na istom fakultetu, smer Master teorijska matematika. Položio je sve predmete predviđene Planom i programom i sakupio dovoljno ESPB bodova da bi stekao uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, oktobar 2021.

Milan Bogić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:	
RBR	
Identifikacioni broj:	
IBR	
Tip dokumentacije:	monografska dokumentacija
TD	
Tip zapisa:	tekstualni štampani materijal
TZ	
Vrsta rada:	master rad
VR	
Autor:	Milan Bogić
AU	
Mentor:	dr Anna Slivková
MN	
Naslov rada:	Haršad brojevi
NR	
Jezik publikacije:	srpski (latinica)
JP	
Jezik izvoda:	s/en
JI	
Zemlja publikovanja:	Republika Srbija
ZP	
Uže geografsko područje:	Vojvodina
UGP	
Godina:	2021.
GO	
Izdavač:	autorski reprint
IZ	
Mesto i adresa:	Novi Sad, Trg D. Obradovića 3
MA	

Fizički opis rada
(broj poglavlja/strana/lit.citata/
tabela/slika/grafika/priloga): (11/44/9/2/0/0/0)
FO
Naučna oblast: matematika
NO
Naučna disciplina: teorija brojeva
ND
Predmetne odrednice, ključne reči: haršad brojevi (Nivenovi brojevi)
n-haršad brojevi (n-Nivenovi brojevi)
monojedinični brojevi
PO
UDK
Čuva se:
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Predmet ovog rada su haršad brojevi: brojevi koji su deljivi zbirom svojih cifara. Proučavane su neke osobine ovih brojeva, kao i nizova uzastopnih prirodnih brojeva koji su haršad brojevi. Dati su metodi za konstruisanje ovakvih nizova kao i primeri takvih nizova. Razmatrano je postojanje haršad brojeva za unapred zadat zbir cifara kao i ograničenja za najmanje takve brojeve. Takođe su posmatrani monojedinični haršad brojevi i data je njihova karakterizacija.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane
NN veća: 2. septembar 2021.
DP
Datum odbrane: oktobar 2021.
DO
Članovi komisije: Predsednik: dr Bojan Bašić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Petar Đapić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Anna Slivková, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
KO

UNIVESITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Acession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	monograph type
Type of record: **TR**	printed text
Contents code: **CC**	master thesis
Author: **AU**	Milan Bogić
Mentor: **MN**	Dr Anna Slivková
Title: **TI**	Harshad numbers
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	s/en
Country of publication: **CP**	Republic of Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2021.
Publisher: **PU**	author's reprint
Publication place: **PP**	Novi Sad, Trg D. Obradovića 3

Physical description
(chapters/pages/references/tables/
pictures/charts/supplements): (11/44/9/2/0/0/0)
PD
Scientific field: mathematics
SF
Scientific discipline: number theory
SD
Subject, key words: harshad numbers (Niven numbers)
n-harshad numbers (n/Niven numbers)
repunits
SKW
UC
Holding data:
HD
Note:
N
Abstract: The subject of this thesis are harshad numbers: numbers divisible by the sum of their digits. We study some of their properties, as well as sequences of consecutive natural numbers which are harshad numbers. Some methods for constructing such sequences as well as some examples of such sequences are given. We prove the existence of harshad numbers with a predetermined sum of digits and we give bounds for the smallest such numbers. We observe repunits which are harshad numbers and we give a characterization of such numbers.
AB
Accepted on Scientific board on: September 2^{nd} 2021
AS
Defended: October 2021
DE
Thesis Defend board: President: Dr. Bojan Bašić, associate professor, Faculty of Science, Novi Sad
Member: Dr. Petar Đapić, associate professor, Faculty of Science, Novi Sad
Mentor: Dr. Anna Slivková, assistant professor, Faculty of Science, Novi Sad
DB