

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ
<p>1. Датум и орган који је именовao Комисију 22.6.2021. Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду</p> <p>2. Састав Комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:</p> <ul style="list-style-type: none">• др Драган Машуловић, редовни професор ПМФ-а у Новом саду, ужа н.о. дискретна математика, изабран 1.12.2009. године - председник• др Бориша Кузељевић, доцент ПМФ-а у Новом саду, ужа н.о. алгебра и математичка логика, изабран 1.9.2018. године - ментор• др Борис Шобот, ванредни професор ПМФ-а у Новом саду, ужа н.о. алгебра и математичка логика, изабран 4.5.2017. године - члан
II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ
<p>1. Име, име једног родитеља, презиме: Степан (Драган) Милошевић</p> <p>2. Датум рођења, општина, република: 25.11.1993. Лозница, Србија</p> <p>3. Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење: 2019. године, Интегрисане академске студије – Мастер професор математике</p>
III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА
Екстремна аменабилност затворених подгрупа симетричне групе на пребројивом скупу
IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА
<p>Рад је подељен у 4 главе. Прва од њих представља преглед предзнања неопходног за даље читање, и покрива резултате из теорије скупова, опште алгебре, релационих структура, као и Фраисеове теорије. Један од основних резултата ове теорије изолује услове (НР), (ЈЕР), (АР) које треба да задовољава класа коначно генерисаних структура неког језика да би она била старост $\text{Age}(A)$ неке ултрахомогене пребројиве структуре; класа с тим особинама се назива Фраисеова а та структура је њен Фраисеов лимит. Посебна пажња посвећена је линеарним уређењима, јер теореме о њима, као специјални случајеви општих теорема Фраисеове теорије, значајно помажу у њиховом бољем разумевању. У другој глави су уведени сви неопходни појмови из топологије.</p> <p>Трећа глава уводи пољске просторе (сепарабилне комплетно метризабилне тополошке просторе) и даје мноштво примера и резултата везаних за ове структуре, које чине полазну тачку проучавања дескриптивне теорије скупова. Затим се уводе пољске групе: тополошке</p>

групе чија је тополошка структура пољска. Посебна пажња посвећена је пољској групи S_A пермутација пребројивог скупа A , као и њеној подгрупи $\text{Aut}(A)$, групи аутоморфизама (у случају да је на скупу A дефинисана нека релациона структура). Овим је припремљен терен за проучавање дејстава група на тополошке просторе, централне теме последње и главне главе у раду.

G -ток је уређена тројка (X, G, π) , где је X тополошки простор, G тополошка група а $\pi: G \times X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање са неким додатним особинама. Уместо $\pi(g, x)$ обично се пише само $g \cdot x$. Орбита елемента $x \in X$ је $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$, а x је фиксна тачка ако је $G \cdot x = \{x\}$. Тополошка група G је екстремно аменабилна ако сваки G -ток има фиксну тачку.

Структурна Ремзијева теорија бави се бојењима скупова облика $\binom{A}{B} = \{A_0 : A_0 \text{ је подструктура од } A \text{ изоморфна са } B\}$. Основно питање је: под којим условима за бојење $c: \binom{A}{B} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ постоји хомогена подструктура структуре A изоморфна датој структури C чије су све подструктуре изоморфне са B једнако обојене (пресликавају се у исти елемент). Класа K коначних структура неког језика има својство Ремзија ако има својство (НР) и за све $B, C \in K$ постоји $A \in K$ такво да за свако бојење постоји таква хомогена подструктура од A .

КПТ теорија повезује ове две наизглед независне области математике: тополошку динамику, која проучава дејства група на просторе, и структурну Ремзијеву теорију. У раду је приказано неколико резултата који дају еквивалентне услове за екстремну аменабилност. Финална теорема тврди да је затворена подгрупа групе S_N екстремно аменабилна ако и само ако је облика $\text{Aut}(A)$, где је A Фраисеов лимит неке Фраисеове уређене класе која има Ремзијево својство.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА

У првој глави дати су основни појмови који ће бити потребни за даље разумевање рада. Између осталог на примеру линеарних уређења доказане су Канторове теореме као специјалан случај Фраисеове теореме, а онда је развијена Фраисеова теорија. Друга глава практично представља пресек скоро читавог курса опште топологије на основним студијама. Разноврсност резултата приказаних у овим, уводним главама, који потичу из неколико различитих математичких области, сведоче о ширини знања и разумевања неопходног за писање оваквог рада. У трећој глави је уведен појам пољске групе, и овде се већ могу наћи комплекснији докази које је кандидат доказао са више детаља него што пружа тренутно доступна литература. Између осталог, у овој глави је детаљније обрађена симетрична група на пребројивом скупу као пољска група и доказано је да је њена подгрупа затворена ако и само ако је група аутоморфизама пребројиве релационе ултрахомогене структуре.

У последњој глави доказана је централна теорема која даје комплетну карактеризацију када је затворена подгрупа симетричне групе на пребројивом скупу екстремно аменабилна, тј. када њено дејство на произвољан компактан простор има фиксну тачку. Докази у овој глави су такође дати са више детаља него у до сада доступној литератури, на било ком језику, и то даје посебну вредност овом раду.

VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Овај мастер рад представља неке од првих теорема које су успоставиле везу између тополошке динамике и Ремзијеве теорије. Једно од питања којима се бави тополошка динамика је да ли је група екстремно аменабилна, тј. да ли свако њено дејство на компактан простор има фиксну тачку. Врло рано се знало да ниједна дискретна група није екстремно аменабилна, а касније је доказано да ниједна локално компактна група није екстремно аменабилна. У овом раду су прво описане све затворене подгрупе симетричне групе на пребројивом скупу, и то језиком теорије модела, или чак прецизније језиком Фраисеове теорије која се налази негде на граници теорије модела и комбинаторике. Након тога, представљен је метод који примењује структурну Ремзијеву теорију и који за сваку такву затворену групу показује да ли је екстремно аменабилна. Ово је посебно значајно јер је дало велики број примера екстремно аменабилних група. Пре увођења овог метода у раду [1], једини природан пример екстремно аменабилне групе била је унитарна група сепарабилног Хилбертовог простора као што је показано у [2].

1. A. Kechris, V. Pestov, S. Todorčević, Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups. *Geom. Funct. Anal.* 15 (2005) no. 1, 106-189.
2. M. Gromov, V. Milman, A topological application of the isoperimetric inequality, *Amer. J. Math.* 105 (1983) no. 4, 843-854.

VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА

Мастер рад је у потпуности урађен у складу са одобреном темом. Сва централна тврђења су доказана, и рад представља одличан експозиторан материјал за све које занима ова област математике која се колоквијално назива КПТ теорија, а истражује везе између тополошке динамике и Ремзијеве теорије.

VIII ПРЕДЛОГ

Имајући у виду све претходно речено, Комисија предлаже да се мастер рад прихвати, а кандидату Степану Милошевићу одобри одбрана.

Нови Сад, 6.9.2021.

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

др Драган Машуловић, редовни професор

др Бориша Кузељевић, доцент

др Борис Шобот, ванредни професор