УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

1. **Датум и орган који је именовао Комисију**

2. 9. 2021, Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду

2. **Састав Комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:**

- Проф. др Розалија Мадарас-Силађи, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област: алгебра и математичка логика, изабрана у звање 26. 10. 1999. – председник комисије
- Др Борис Шобот, ванредни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област: алгебра и математичка логика, изабран у звање 4. 5. 2017. – члан комисије
- Др Бојан Башић, ванредни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област: дискретна математика, изабран у звање 1. 4. 2018. – ментор

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. **Име, име једног родитеља, презиме:**

Филип (Мирослав) Блашковић

2. **Датум рођења, општина, република:**

2. 7. 1997, Кикинда, Република Србија

3. **Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење:**

2019, математика

III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА

Теорема Борсук–Улама и примене

IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА

Мастер рад заузима 65 страница, садржи 31 библиографску јединицу, започиње предговором а потом је подељен на следеће главе: 1. Основни појмови; 2. Теорема Борсук–Улама и њени еквиваленти; 3. Примена теореме Борсук–Улама; 4. Генерализација теореме Борсук–Улама. Трећа глава је издељена на пет секција.

У предговору се укратко презентује краћи историјат теореме и дају се неке њене научно-популарне интерпретације.

У првој глави се постављају темељи неопходни за наставак рада. Између осталог, дефинишу се појмови политопа, симплекса и геометријског односно апстрактног симплицијалног комплекса. Даје се подсетник на нека тврђења о вези између ових објеката и друга тврђења од значаја за даљи рад.

У другој глави се уводи централни појам предметног мастер рада: теорема Борсук–Улама. У својој основној верзији, теорема гласи: (БУ1) За свако непрекидно пресликавање из n-димензионалне сфере у n-димензионалан еуклидски простор постоје две дијаметрално супротне тачке које имају исту слику. Поред ове основне верзије, теорема се може формулисати на још неколико еквивалентних начина: (БУ2) За свако антиподално пресликавање из n-димензионалне сфере у n-димензионалан еуклидски простор постоји тачка која се слика у нулу. (БУ3) Не постоји антиподално пресликавање из n-димензионалне сфере у $(n–1)$-димензионалну сферу. (БУ4) Не постоји непрекидно пресликавање из n-димензионалне лопте у $(n–1)$-димензионалну сферу које је антиподално на рубу. (ЉШ-з) За сваких $n+1$ затворених скупова који покривају n-димензионалну сферу постоји неки међу њима који садржи две дијаметрално супротне тачке. (ЉШ-о) За сваких $n+1$ отворених скупова који покривају n-димензионалну сферу постоји неки међу њима који садржи две дијаметрално супротне тачке. Показано је да су сва ова тврђења заиста међусобно еквивалентна, а потом је дат доказ и саме теореме у верзији (БУ1). Доказ се изводи комбинаторним методима, и заснован је на тзв. Такеровој леми.

Трећа глава је најобимнија (запрема више од 50% рада). У њој се приказује низ примена теореме Борсук–Улама у тврђењима која припадају веома различитим математичким дисциплинама.

Секција 3.1 је посвећена тзв. теореми о сендвичу са шунком. У популарној формулацији (по којој је теорема и добила име), уколико имамо сендвич са шунком и сиром, ма како ови састојци били распоређени, увек је могуће поделити сендвич једним резом на два дела таква да сваки од њих садржи тачно половину укупне количине хлеба, шунке и сира. Доказује се општа верзија ове теореме (за Борелове мере у d-димензионалном простору), а потом се показују и неке дискретне последице. Ова секција садржи и подсекцију 3.1.1, у којој се разматрају даље генерализације ове теореме: њена (дводимензионална) полиномна верзија, уз неке последице које се баве одређеним проблемима распореда тачака и правих, и пресецајућим бројем разапињујућег стабла; на крају се даје још једно уопштење теореме о сендвичу са шунком, тзв. теорема о хамбургеру, у којој се повећава за 1 број различитих мера од којих се полази у формулацији теореме (у називу теореме рефлектује се чињеница да је хамбургер „богатији састојцима“ од сендвича са шунком).

У секцији 3.2 посматра се проблем поделе огрлице: два лопова желе да поделе огрлицу на којој је нанизано више врста драгог камења, при чему сваки од њих треба да добије једнак број комада од сваке врсте камена, а да укупан број резова буде што је мањи могућ. Даје се комплетно решење ове (основне) верзије проблема, а потом се прелази на непрекидну верзију проблема, и најзад на d-димензионалну.

У секцији 3.3 израчунава се хроматски број тзв. Кнезерових графова. Прецизније, доказује се да је хроматски број Кнезеровог графа над k-точланим подскуповима n-точланог скупа једнак $n–2k+2$ (под условом $n > 2k–2$, иначе проблем нема смисла). Такође се показује доње ограничење хроматског броја уопштења Кнезеровог графа над произвољним коначним системом подскупова задатог скупа.

Секција 3.4 бави се Брауверовом теоремом о фиксној тачки: свако непрекидно пресликавање n-димензионалне лопте у саму себе има фиксну тачку (или, у популарном тумачењу: након мешања кафе у шољици, увек постоји бесконачно мали делић кафе који се налази на идентичном месту на ком је био и пре мешања). У раду се дају два доказа ове теореме, која се оба заснивају на теореми Борсук–Улама. Први (и дужи) позива се на основну верзију теореме, док други представља елегантну досетку на основу које се у само неколико редова Брауверова теорема може добити као последица верзије (БУ4).

Секција 3.5 полази од задатка који се 1979. године појавио на познатом студентском такмичењу Патнам: за ма којих $2n$ тачака у равни у општем положају, при чему је n црвених и n плавих, могуће је повући n дисјунктних дужи које спајају по две од ових тачака, таквих да свака од повучених дужи има крајеве различитих боја. Испоставило се да се прикладно уопштење овог задатка на d-димензионалан простор показало у литератури као занимљив истраживачки проблем, који се (како је у раду приказано) може решити врло једноставно користећи теорему Борсук–Улама.

Коначно, у последњој, четвртој глави, садржана је једна генерализација теореме Борсук–Улама, за коју су заслужни Бајмоци и Барањ. Наиме, показано је да, за произвољан компактан, конвексан скуп са непразном унутрашњошћу у $(d+1)$-димензионалном простору, и произвољно непрекидно пресликавање његовог руба у d-димензионалан простор, увек постоје наспрамне тачке које имају исту слику (дакле, уопштење се састоји у томе што домен не мора обавезно бити n-димензионална сфера).

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА

Почетне главе рада представљају квалитетан увод у теорему Борсук–Улама, уз систематско излагање неопходног предзнања. Презентујући чак шест еквивалентних формулација теореме, уз детаљан доказ свих еквиваленција, кандидат је не само поставио чврсте основе за све што је потребно у наставку рада (као што ће се касније испоставити, одређене формулације су за неку сврху знатно погодније од других, а за неку другу сврху обратно), већ је и демонстрирао пажње вредну темељност у приступу изради предметног мастер рада.

Трећа глава представља занимљиву илустрацију честе појаве у математици када две наизглед потпуно неповезане области налазе примену једна у другој. Теорема о сендвичу са шунком можда би се најпре могла сматрати проблемом из теорије мере; проблем поделе огрлице делује као проблем чисто комбинаторног типа; хроматски број Кнезеровог графа припада, као што му и име каже, области теорије графова; Брауверова теорема о фиксној тачки је можда и један од најзначајнијих резултата из топологије; коначно, проблем разнобојних партиција из секције 3.5 типичан је проблем из домена комбинаторне геометрије. Оставља и више него изненађујућ утисак чињеница да теорема Борсук–Улама игра главну ролу у свим овим проблемима! (Напоменимо, као додатно појачање утиска, да је ова веза понекад и „транзитивна“: нпр., колико год неочекивано изгледало, теорема о сендвичу са шунком представља кључан састојак у разрешавању проблема поделе огрлице.) Уврштавајући резултате из свих ових различитих области у свој мастер рад (наравно, детаљно изложене и доказане), кандидат је демонстрирао поседовање изразите математичке ширине.

Коначно, у четвртој, последњој глави показује се да, колико год теорема Борсук–Улама изгледала „моћно“, ипак и од тога може боље. Генерализација изложена у овој глави знатно се ређе среће у литератури, па њено уврштавање представља извесно „освежење“ и на упечатљив начин заокружује рад.

Кроз читав рад разни апстрактни концепти илустровани су обиљем примера и слика (кандидат је самостално припремио чак 27 слика), што у великој мери разбија сувопарност и рад чини знатно приступачнијим.

VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Када је 1933. године пољски математичар Карол Борсук доказао теорему која се данас назива по њему (и по Станиславу Уламу, такође Пољаку, коме се приписује формулација тврђења), вероватно није одмах било јасно какав ће траг та теорема оставити у врло шареноликом спектру математичких области. Не само што је теорема у будућности нашла низ најразличитијих примена, него се испоставило да је остварила и „ретроактивне“ везе с неким ранијим тврђењима (нпр., еквивалентне формулације (ЉШ-з) и (ЉШ-о) заправо су Љустерник и Шнирељман доказали још нешто раније, 1930. год., али је еквиваленција уочена тек накнадно; можда још занимљивији пример, Брауверова теорема о фиксној тачки првобитно је доказана неколико деценија раније, а као што се може видети у предметном мастер раду, она се може у неколико редова текста извести као последица теореме Борсук–Улама). У раду је сакупљена компилација одабраних резултата који демонстрирају ширину ове теореме и подстичу заинтересоване читаоце на додатна истраживања.

VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА
Мастер рад је у потпуности урађен у складу са одобреном темом. Коришћене библиографске јединице датирају од 1876. год. па све до 2018. год., што сведочи о практично ванвременском карактеру одабране теме, чија популарност не јењава.
VIII ПРЕДЛОГ
Имајући у виду све претходно речено, Комисија предлаже да се мастер рад прихвати, а кандидату Филипу Блашковићу одобри одбрана.

Нови Сад,

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

Др Розалија Мадарас-Силађи,
редовни професор ПМФ-а, председник

Др Борис Шобот,
ванредни професор ПМФ-а, члан

Др Бојан Башић,
ванредни професор ПМФ-а, ментор