Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Stepan Milošević

Ekstremna amenabilnost zatvorenih podgrupa simetrične grupe na prebrojivom skupu

Master rad

Mentor:

dr Boriša Kuzeljević

Novi Sad, 2021

Sadržaj

Predgovor

U ovom radu će biti predstavljeni osnovni pojmovi iz topološke dinamike. Centralni pojam ovog rada je pojam ekstremno amenabilne grupe. Inspiracija za pisanje ovog rada je pronađena u radu [6], koji je objavljen 2005. godine. Pored navedenog rada, najviše smo se oslanjali i na [1], [3] kao i na [5]. Kako bi se rad što bolje razumeo, potrebno je poznavanje osnovnih pojmova iz opšte topologije, funkcionalne analize i teorije grupa, sa akcentom na dejstvo grupe na neprazan skup.

Prva sekcija rada je posvećena osnovnim pojmovima iz oblasti teorije modela. Definisani su pojmovi relacionih struktura, grupe i dejstva grupe na skup. Navedena su osnovna tvrđenja iz linearnih uređenja. U drugom delu prve sekcije je detaljno opisan pojam ultrahomogene strukture i navedene su osobine koje ona može da ima.

Druga sekcija se bavi opštom topologijom, od osnovnih definicija, preko kompaktnih prostora do topoloških proizvoda, gde je ključno razumevanje topologije Tihonova. Kroz primere je navedena grupa S_∞, predstavljena je njena baza kao i topologija koja je na njoj definisana.

U trećoj sekciji se uvodi pojam poljskih prostra. U prvom delu se navode osnovni pojmovi kompletnih metričkih prostora koji su potrebni za ovaj rad, navodi se definicija topološke grupe i prikazuju se primeri nekih poljskih prostra. Drugi deo je posvećen skupovima koji imaju osobinu G_δ i data je njihova veza sa poljskim grupama kao i zatvorenim grupama. Za kraj ovog dela je naveden dokaz da je S_∞ poljski prostor. U trećem delu su navedene, kroz dve leme, činjenice o grupi automorfizama prebrojivog skupa i poljske grupe permutacija na kojoj je definisana topologija Tihonova.

Četvrta sekcija objedinjuje prethodne tri. Naveden je pojam toka, podtoka i definisana je ekstremno amenabilna topološka grupa. Dokazane su teoreme iz sekcije 4, rada [6], gde je prikazana karakterizacija ekstremno amenabilnih grupa automorfizama.

Ovom prilikom se posebno zahvaljujem mentoru dr Boriši Kuzeljeviću na strpljenju, bezuslovno prenetom znanju i motivaciji za pisanje rada. Zahvaljujem se i članovima komisije, dr Borisu Šobotu i dr Draganu Mašuloviću koji su svojim savetima i sugestijama doprineli da ovaj rad izgleda što bolje.

1 Osnovni pojmovi

U ovoj sekciji ćemo se upoznati sa osnovnim pojmovima struktura. Na početku navodimo oznake koje se javljaju u tekstu:

- Skup prirodnih brojeva uvek označavamo $\mathbb{N}$, skup racionalnih brojeva uvek označavamo $\mathbb{Q}$, a skup realnih brojeva uvek označavamo $\mathbb{R}$. Ove tri oznake nikad neće označavati ništa drugo.
- Relaciju biti podskup označavamo $\subset$. Dakle, $A \subset B$ označava da svaki element skupa A pripada i skupu B. Primetimo da u ovom slučaju skupovi A i B mogu biti i jednaki.
- Razliku skupova A i B označavamo $A \setminus B$.
- Partitivni skup skupa A označavamo $P(A)$. Dakle, $P(A)$ je skup svih podskupova skupa A.
- Prazan skup obeležavamo $\emptyset$. Dakle, $\emptyset$ je skup koji nema elemenata.
- Ako je $\mathcal{A}$ familija skupova, $\bigcup \mathcal{A}$ označava uniju te familije. Dakle, x pripada $\bigcup \mathcal{A}$ ako i samo ako postoji neki $X \in \mathcal{A}$ takav da je $x \in X$.
- Ako je $\mathcal{A}$ familija skupova, $\bigcap \mathcal{A}$ označava presek te familije. Dakle, x pripada $\bigcap \mathcal{A}$ ako i samo ako za sve $X \in \mathcal{A}$ imamo $x \in X$.
- Ako su A i B skupovi, f preslikavanje iz A u B, a X podskup domena A, onda $f[X]$ označava direktnu sliku skupa X preslikavanjem f. Dakle, $f[X] = \{f(x) : x \in X\}$.
- Ako su A i B skupovi, f preslikavanje iz A u B, a Y podskup kodomena B, onda $f^{-1}[Y]$ označava inverznu sliku skupa Y pri preslikavanju f. Dakle, $f^{-1}[Y] = \{x \in A : f(x) \in Y\}$.
- Uređeni par označavamo $\langle x, y\rangle$ (ovo je možda nestandardno, ali mnogo pomaže kada imamo u istom kontekstu puno intervala realnih brojeva i puno uređenih parova realnih brojeva).
- Niz elemenata nekog skupa označavamo $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ (ovo je u skladu sa prethodnom stavkom o označavanju uređenog para).

1.1 Aksioma izbora

Aksiomu izbora je 1904. godine formulisao Ernst Zermelo. Aksioma izbora je jedna od aksioma teorije skupova (ZFC aksiome). Neophodna je da bi se dokazala neka tvrđenja iz topologije, apstraktne algebre i različitih grana matematike. Pre nego što formulišemo aksiomu izbora, pokazaćemo kroz jedan primer šta je funkcija izbora.
Neka je data kolekcija $\{X_i : i \in I\}$ nepraznih skupova. Potrebno je iz svakog od njih izabrati po jedan element, ili, drugim rečima formirati "delegaciju" u kojoj će svaki skup X_i biti zastupljen nekim predstavnikom $x_i \in X_i$. Iz aksioma teorije skupova, bez aksiome izbora, može se dokazati da je proizvod svake konačne kolekcije nepraznih skupova neprazan. Ako je kolekcija beskonačna, onda je u nekim slučajevima ponovo moguće formirati "delegaciju", što pokazuje sledeći primer:

Primer 1.1. Ako su skupovi X_i intervali na realnoj pravi, $X_i = (a_i, b_i)$, onda je skup sredina ovih intervala $D = \{\frac{a_i+b_i}{2} : i \in I\}$ jedna delegacija.

Iz aksioma teorije skupova bez aksiome izbora ne može se dokazati da je proizvod proizvoljne familije nepraznih skupova neprazan. Na primer, ako su $X_n, n \in \mathbb{N}$, neprazni skupovi, nije moguće dokazati da je $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ neprazan skup.

Aksioma izbora: Za svaku familiju $\{X_i : i \in I\}$ nepraznih skupova postoji bar jedna funkcija izbora, tj. funkcija $x : I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, takva da za svako $i \in I$ važi $x(i) \in X_i$.

Postoji više ekvivalenata aksiome izbora. Mi ćemo navesti samo neke.

Lema 1.2. (Corn): Ako je $\langle P, \leq\rangle$ parcijalno uređen skup u kome svaki lanac ima gornje ograničenje, onda u P postoji maksimalan element. Za dokaz pogledati [11].

Lema 1.3. (Hauzdorfov princip maksimalnosti): U svakom nepraznom parcijalno uređenom skupu postoji maksimalan lanac. Za dokaz pogledati [11].

Lema 1.4. (Zermelov princip dobrog uređenja): Svaki skup se može dobro urediti. Za dokaz pogledati [11].

Lema 1.5. (Blas): Svaki vektorski prostor ima bazu. Za dokaz pogledati [3].

Jedan od najbitnijih pojmova za ovaj rad je svakako pojam strukture koji uvodimo u narednoj tački.

1.2 Relacione strukture

Posmatrajmo skup oznaka relacija i funkcija, u oznaci $L = \{R_i\}_{i\in I} \cup \{f_j\}_{j\in J}$. Skup L zovemo **jezik**. Kada kažemo da je L skup oznaka, onda mislimo na to da L ne zna koja je relacija i funkcija u pitanju, samo zna njihovu arnost. **Prebrojiv jezik** je prebrojiva kolekcija $L = \{R_i\}_{i\in I} \cup \{f_j\}_{j\in J}$, gde je svakoj relaciji i funkciji pridružen broj, zvani **arnost**. Arnost $n(i)$, relacionog simbola R_i, je pozitivan ceo broj dok je arnost $m(j)$ funkcije f_j, nenegativan ceo broj. Kažemo da je sledeća trojka **struktura** jezika L

$$\mathbf{A} = \langle A, \{R_i^{\mathbf{A}}\}_{i\in I}, \{f_j^{\mathbf{A}}\}_{j\in J}\rangle,$$

gde je A neprazan skup, zvani **domen** od $\mathbf{A}$, $R_i^{\mathbf{A}} \subset A^{n(i)}$, tj. $R_i^{\mathbf{A}}$ je $n(i)$-arna relacija na A i $f_j : A^{m(j)} \to A$, tj $f_j^{\mathbf{A}}$ je $m(j)$-arna funkcija na A.

Za strukturu L kažemo da je **relaciona** ako nema funkcija.

Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dve strukture istog jezika L. Homomorfizam struktura $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je preslikavanje $\pi : A \to B$, takvo da je, za sve $i \in I$ i sve $j \in J$

$$R_i^{\mathbf{A}}\langle a_1, \dots, a_{n(i)}\rangle \iff R_i^{\mathbf{B}}\langle \pi(a_1), \dots, \pi(a_{n(i)})\rangle$$

i

$$\pi\langle f_j^{\mathbf{A}} a_1, \dots, a_{m(j)})\rangle = f_j^{\mathbf{B}}\langle \pi(a_1), \dots, \pi(a_{m(j)})\rangle.$$

Ako je π injektivno preslikavanje, onda kažemo da je to **potapanje**, a ako je π i sirjektivno preslikavanje, onda kažemo da je π **izomorfizam**. Ako postoji izomorfizam struktura $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, onda taj izomorfizam označavamo sa $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. **Automorfizam** od $\mathbf{A}$ je izomorfizam strukture $\mathbf{A}$ u samu sebe.

Podstruktura $\mathbf{B}$ strukture $\mathbf{A}$, ima domen (neprazan) skup $B \subset A$ zatvoren u odnosu na svako $f_j^{\mathbf{A}}$ i $R_i^{\mathbf{B}} = R_i^{\mathbf{A}} \cap B^{n(i)}, f_j^{\mathbf{B}} = f_j^{\mathbf{A}}|B^{m(j)}$. U ovom slučaju pišemo $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

Za svako $X \subset A$, postoji najmanja struktura koja sadrži X, zvana **podstruktura generisana** sa X. Podstruktura je **konačno generisana** ako postoji konačan skup koji je generiše. Struktura je **lokalno konačna** ako su sve njene konačno generisane strukture konačne. Na primer, ako je L relaciona struktura, tj. $J = \emptyset$, podstruktura generisana sa X ima domen X i svaka konačno generisana podstruktura je konačna. Ovo je takođe tačno i ako je J konačan i svako f_j je arnosti 0.

Neka su L^- i L^+ jezici i neka je L^- podskup od L^+. Ako je $\mathbf{A}$ L^+-struktura, onda $\mathbf{A}$ možemo posmatrati i kao L^--strukturu, tako što zanemarimo sve simbole iz L^+ koji se ne pojavljuju u L^-. Tako dobijena L^--struktura se zove **L^--redukcija** od $\mathbf{A}$ ili **redukcija strukture $\mathbf{A}$ na** L^-, u oznaci $A|_{L^-}$.
Kada je $\mathbf{A}$ L^+-struktura i $\mathbf{C}$ njena L^--redukcija, kažemo da je $\mathbf{A}$ **ekspanzija** strukture $\mathbf{C}$ do L^+.

1.3 Grupe i njeni elementi

U ovoj tački navodimo osnovne pojmove o grupama i njihovim dejstvima na neprazan skup, koji su nam potrebni za razumevanje rada. Zainteresovane čitaoce upućujemo na [4], za dodatne informacije.

Definicija 1.6. **Grupa** je monoid (polugrupa sa jedinicom) u kojem je svaki element invertibilan. Zbog toga ćemo grupu posmatrati kao algebarsku strukturu

$$\langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$$

koja zadovoljava identitete $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ i $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.

Radi jednostavnijeg zapisa ubuduće ćemo koristit oznaku $\langle G, \cdot\rangle$ za obeležavanje grupe G.

Definicija 1.7. Neka je $\langle G, \cdot\rangle$ grupa. Za neprazan podskup $H \subset G$ kažemo da je **podgrupa** grupe G, u oznaci $H \leq G$, ako i sam formira grupu u odnosu na restrikciju $\cdot|_{H\times H}$ operacije $\cdot$ grupe G.

Neka je $H \leq G$ i $g \in G$. Skup oblika $Hg = \{hg : h \in H\}$ zovemo **desni koset** podgrupe H. Analogno definišemo i **levi koset** gH podgrupe H u G.

Lema 1.8. Desni (levi) koseti podgrupe H grupe G čine particiju skupa G.

Jedan od najvažnijih primera grupa je pojam **simetrične grupe** S_X date na skupu X. To je grupa svih permutacija skupa X, tj. bijekcija $X \to X$, u odnosu na kompoziciju preslikavanja. Od velikog značaja za ovaj rad je simetrična grupa S_∞ koja predstavlja skup svih bijekcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i njene zatvorene podgrupe. O njima ćemo više pričati u sekciji 3.

1.4 Dejstvo grupe na skup

U sekciji 4 dejstvo će igrati veoma važnu ulogu. U ovoj tački navodimo samo definiciju i nekoliko primera kako bismo čitaocu približili pojam dejstva.

Definicija 1.9. **(Levo) dejstvo grupe** G na neprazan skup X je preslikavanje $\theta : G \times X \to X$ (pri čemu ćemo radi jednostavnosti pisati $g \cdot x$ umesto $\theta(g, x)$) koje zadovoljava uslove

$$\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$$

i

$$\theta(1, x) = x$$

za sve $x \in X, g, h \in G$.

Neka je G grupa i θ njeno dejstvo na skup X. Na skupu X definišemo relaciju $\sim$ na sledeći način:

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists g \in G)\ g \cdot x = y.$$

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na X. Klasu ekvivalencije elementa $x \in X$ zovemo **orbita** elementa x i označavamo sa $G \cdot x$. Dakle,

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Dejstvo θ je **tranzitivno** ako ima tačno jednu orbitu.

Primer 1.10. Neka je $X = \{A, B, C\}$ skup temena jednakostraničnog trougla ABC i neka je $G = \{id, \rho_O^{120^\circ}, \rho_O^{240^\circ}\}$ skup rotacija oko centra opisane kružnice trougla ABC. Lako se proverava da je G grupa. Dejstvo $\theta : G \times X \to X$ deluje tako što svako teme slika u odgovarajuće teme, rotacijom oko tačke O za ugao od 120° ili 240°. Na primer, $\rho_O^{120^\circ} \cdot A = B$, dok je $\rho_O^{240^\circ} \cdot A = C$, što je očigledan primer dejstva grupe na neprazan skup.

Primer 1.11. Posmatrajmo grupu permutacija S_n na skupu $\{1, 2, 3, \dots n\}$. To je skup svih bijekcija $\{1, 2, 3, \dots n\} \to \{1, 2, 3, \dots n\}$, kojih ukupno ima $n!$. Dejstvo grupe S_n na neprazan skup $\{1, 2, \dots, n\}$ je dato na sledeći način:

$$\theta(\pi, x) = \pi(x).$$

Primer 1.12. Klasičan primer dejstva grupe na neprazan skup je dejstvo grupe G na samu sebe. Tj. $\theta : G \times G \longrightarrow G$ je dejstvo. Ovo dejstvo je dato sa: $\theta(g, s) = g \cdot s$, za $g \in G, s \in G$. Neutralni element je neutralni element grupe G a asocijativnost važi po definiciji grupe.

1.5 Osnovne informacije o linearnim uređenjima

Neka je dat skup A i pretpostavimo da su elementi skupa A raspoređeni ili rangirani određenim redosledom u smislu da za bilo koja dva različita elementa a_1, a_2 skupa A, ili je a_1 rangiran niže od a_2 ili je a_2 rangiran niže od a_1.

Najjednostavniji primeri u matematici su oni u kojima je A skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, skup celih brojeva $\mathbb{Z}$, skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ ili skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, pri čemu je element $a_1 \in A$ rangiran niže od elementa $a_2 \in A$, ako je $a_1 < a_2$ u prirodnom uređenju na A.

Definicija 1.13. **Linearno uređenje skupa** A je binarna relacija R na A, za koju važe sledeći uslovi:

(1) Ako $\langle x, y\rangle \in R$ i $\langle y, z\rangle \in R$, onda $\langle x, z\rangle \in R$;

(2) Ako je $x \neq y$, tada je ili $\langle x, y\rangle \in R$ ili $\langle y, x\rangle \in R$;

(3) $\langle x, x\rangle \notin R$.

Uobičajeno linearno uređenje je ono koje se posmatra na skupu $\mathbb{N}$, koje korespondira sa binarnom relacijom $R_{\mathbb{N}} = \{\langle m, n\rangle \mid m < n\}$. Ovakvo uređenje se još zove i prirodno uređenje. Evo još nekih primera linearanih uređenja na $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{\langle m, n\rangle \mid m > n\} \text{ - obrnuto uređenje skupa } \mathbb{N};\\
R_2 &= \{\langle m, n\rangle \mid 0 < m < n \text{ ili } (n = 0 \text{ i } 0 < m)\};\\
R_3 &= \{\langle m, n\rangle \mid (m < n \text{ i } m \text{ i } n \text{ su parni}) \text{ ili}\\
&\qquad (m < n \text{ i } m \text{ i } n \text{ su neparni}) \text{ ili}\\
&\qquad (\, m \text{ je paran i } n \text{ je neparan})\ \}.
\end{aligned}$$

Ove primere možemo zapisati i na sledeći način:

$$\begin{aligned}
R_1 &: \ldots, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\\
R_2 &: 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \quad 0\\
R_3 &: 0, 2, 4, 6, 8, \ldots \quad 1, 3, 5, 7, 9, \ldots
\end{aligned}$$

Vidimo da binarna relacija R_2 rangira sve pozitivne prirodne brojeve u svom prirodnom uređenju ali tako da su svi ispred 0, dok R_3 rangira prvo parne brojeve, počevši od 0, pa onda neparne brojeve.

Definicija 1.14. Ako je R linearno uređenje skupa A, često i za strukturu $\langle A, R\rangle$ kažemo da je linearno uređenje.

Ako je A skup i R linearno uređenje na A, često ćemo pisati $x <_R y$ umesto $\langle x, y\rangle \in R$. Ako je iz konteksta jasno na koje uređenje se misli, pisaćemo $x <_A y$ umesto $x <_R y$ ili prosto samo $x < y$. Notacija $y >_R x$ znači isto što i $x <_R y$. Kada napišemo da je $x \leq_R y$, to znači da je $x <_R y$ ili $x = y$; $y \geq_R x$ je sinonim za $x \leq_R y$. Notacija $x \not<_R y$ znači da ne važi $x <_R y$. Dakle, u linearnim uređenjima $x \not<_R y$ je sinonim za $y \leq_R x$. Notacije $x \not\leq_R y, x \not\geq_R y$ se interpretiraju analogno. Znak R će biti izostavljen iz simbola $<_R$ kad god ne postoji mogućnost od pogrešnog tumačenja teksta.

1.6 Relacije između linearnih uređenja

U ovoj tački bi čitalac trebalo da stekne sliku šta znači da je neko linearno uređenje poduređenje nekog drugog linearnog uređenja.

Definicija 1.15. Neka je R linearno uređenje na A i neka je S linearno uređenje na B i neka je $A \subseteq B$. Kažemo da je $\langle A, R\rangle$ **poduređenje od** $\langle B, S\rangle$ ako, za svako $a_1, a_2 \in A$, $a_1 <_R a_2$ akko je $a_1 <_S a_2$.

Intuitivno, $\langle A, R\rangle$ je poduređenje od $\langle B, S\rangle$ ako bilo koja dva elementa skupa A, koja su uređena relacijom R, su uređena i relacijom S na isti način.

Primer 1.16. (1) Neka je $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ i neka je $\mathbf{Z} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$. Očigledno je $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Kako su bilo koja dva prirodna broja uređena istim prirodnim uređenjem na $\mathbb{N}$ i na $\mathbb{Z}$, onda je $\mathbf{N}$ poduređenje od $\mathbf{Z}$.

(2) Slično, $\mathbb{Z}$ je poduređenje od $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ je poduređenje od $\mathbb{R}$.

Lema 1.17. (1) $\langle A, R \rangle$ je poduređenje od $\langle B, S \rangle$ akko je $A \subset B$ i $R = S \cap (A \times A)$.

(2) Neka je $\langle B, S \rangle$ linearno uređenje i neka je $A \subset B$. Tada postoji **jedinstvena** binarna relacija R na A, takva da je $\langle A, R \rangle$ poduređenje od $\langle B, S \rangle$.

(3) Neka su $\langle B, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ dva linearna uređenja na B i neka je $R \neq S$. Tada nijedna struktura nije poduređenje od druge.

Definicija 1.18. Neka je R linearno uređenje na A i neka je S linearno uređenje na B. Za strukture $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ kažemo da su **izomorfne**, ako postoji bijekcija $f : A \to B$, takva da je

$$f(a_1) <_S f(a_2) \quad \text{akko} \quad a_1 <_R a_2.$$

Definicija 1.19. Neka je R linearno uređenje na A i neka je S linearno uređenje na B. Za strukturu $\langle A, R \rangle$ kažemo da se može potopiti u strukturu $\langle B, S \rangle$ ako postoji injektivno preslikavanje $f : A \to B$, takvo da je

$$f(a_1) <_S f(a_2) \quad \text{akko} \quad a_1 <_R a_2.$$

Primer 1.20. (1) Neka je $\langle A, R \rangle$ poduređenje od $\langle B, S \rangle$ i neka je $f : A \to B$ identičko preslikavanje. Tada je f potapanje iz $\langle A, R \rangle$ u $\langle B, S \rangle$.

(2) Neka je $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ i $\mathbf{Z} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$. Definišimo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, sa $f(x) = x - 4$. Tada je f potapanje iz $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Z}$.

(3) Neka je $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ i neka je $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$. Preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dato sa $f(x) = 2x$, je potapanje struktura $\mathbf{N}$ i $\mathbf{N}$.

(4) Neka je $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ i neka je $\mathbf{Q} = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$. Preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, dato sa $f(n) = \frac{n}{n+1}$, je potapanje $\mathbf{N}$ u $\mathbf{Q}$.

Definicija 1.21. Neka je f izomorfizam strukture $\langle A, R \rangle$ na $\langle B, S \rangle$. Tada kažemo i da su dva linearna uređenja $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ izomorfna, što pišemo $\langle A, R \rangle \cong \langle B, S \rangle$. Ako je f izomorfizam iz $\langle A, R \rangle$ na $\langle A, R \rangle$, kažemo da je f automorfizam strukture $\langle A, R \rangle$.

Primer 1.22. (1) Neka je data struktura $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ i neka je $\langle B, < \rangle$ podstruktura od $\mathbb{Q}$ generisana sa $B = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada je $\langle \mathbb{N}, < \rangle \cong \langle B, < \rangle$.

(2) Neka je data struktura $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ i neka je $\langle B, < \rangle$ podstruktura od $\mathbb{N}$ generisana sa $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada je $\langle \mathbb{N}, < \rangle \cong \langle B, < \rangle$.

Lema 1.23. Neka je f potapanje strukture $\langle A, R \rangle$ u $\langle B, S \rangle$. Tada postoji poduređenje $\langle A', R' \rangle$ strukture $\langle B, S \rangle$, takvo da je $\langle A, R \rangle \cong \langle A', R' \rangle$.

Definicija 1.24. Kažemo da $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ imaju **isti tip uređenja**, ako je $\langle A, R \rangle \cong \langle B, S \rangle$.

Primetimo da je *isti tip uređenja* relacija ekvivalencije na klasi svih linearnih uređenja.

1.7 Prebrojiva gusta linearna uređenja

U ovoj tački ćemo se baviti linearnim uređenjima koja su prebrojiva i gusta.

Definicija 1.25. Za linearno uređenje A kažemo da je **gusto** ako, za bilo koja dva elementa $a_1, a_2 \in A$ takva da je $a_1 < a_2$, postoji element $b \in A$ takav da je $a_1 < b < a_2$.

Lema 1.26. Ako je $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$, tada je $\langle A, R\rangle$ gust akko je $\langle B, S\rangle$ gust.

Definicija 1.27. Neka je $\langle B, S\rangle$ linearno uređenje i neka je $A \subset B$. Skup A je gust podskup u B, ako za svako $x, y \in B$, ako je $x < y$, onda postoji $z \in A$, takvo da je $x \leq z \leq y$.

Primer 1.28. (1) $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$
(2) Intervali $(0, 1), [0, 1), (0, 1]$ i $[0, 1]$ u preseku sa $\mathbb{Q}$ su gusta linearna uređenja
(3) $\mathbb{R}$ je gust u $\mathbb{R}$
(4) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ je gust u $\mathbb{R}$

Definicija 1.29. Neka je X linearno uređenje.
Za element $x \in X$ kažemo da je **prvi element** linearnog uređenja X, ako je $x \leq y$, za sve $y \in X$.
Za element $x \in X$ kažemo da je **poslednji element** linearnog uređenja X, ako je $x \geq y$, za sve $y \in X$.

Primer 1.30. Skup $\mathbb{N}$ ima prvi element, to je 1, ali nema poslednji element.

Teorema 1.31. (Kantor) Neka je $\langle D, R\rangle$ gusto linearno uređenje koje nema ni prvi ni poslednji element. Neka je $\langle B, S\rangle$ proizvoljno prebrojivo linearno uređenje. Tada je $\langle B, S\rangle$ izomorfno podUređenju od $\langle D, R\rangle$.

Dokaz. Pošto je B prebrojiv skup, možemo numerisati njegove elemente kao $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$. Pri tome, položaj bilo koja dva elementa iz B u ovoj numeraciji, nema nikakve veze sa njihovim uređenjem u $\langle B, S\rangle$.

Definišimo funkciju $f : B \to D$ rekurzivno, korak po korak. Na kraju koraka t imaćemo definisanu funkciju $f(b_i)$, koja za svako $i \leq t$ radi na sledeći način: za $i, j \leq t, b_i <_S b_j$ ako i samo ako je $f(b_i) <_R f(b_j)$. Ako ovaj postupak nastavimo dalje, tada f zapravo definiše 1-1 preslikavanje iz B u D, pa će f biti potapanje iz $\langle B, S\rangle$ u $\langle D, R\rangle$.

Za indeks 0 definišemo $f(b_0) = d_0$, gde je d_0 proizvoljan element iz D. Pretpostavimo da smo sada kod indeksa $t + 1$ i da su svi $f(b_0), f(b_1), \ldots, f(b_t)$ definisani i da za svako $i, j \leq t, f(b_i) <_R f(b_j)$ ako i samo ako je $b_i <_S b_j$. Sada kada se elementi $\{b_0, b_1, \ldots, b_t\}$ urede u njihovom S-uređenju, to postaje

$$b_{i_0} <_S b_{i_1} <_S \ldots <_S b_{i_t}$$

gde $\{i_0, i_1, i_2, \ldots, i_t\} = \{0, 1, 2, \ldots, t\}$. Dakle, takođe je i

$$f(b_{i_0}) <_R f(b_{i_1}) <_R \ldots <_R f(b_{i_t}).$$

Sada b_{t+1} je lociran u jednom od $t + 2$ mesta uz postojeće S-uređenje elemenata $b_0, b_1, \ldots, b_t$; imenujmo,
ili (0) $b_{t+1} <_S b_{i_0}$
ili (n) $b_{i_{n-1}} <_S b_{t+1} <_S b_{i_n}$ za neko n, $1 \leq n \leq t$,

ili $\qquad (t+1) \qquad b_{i_t} <_S b_{t+1}$.
U slučaju (0) biramo $f(b_{t+1})$ da bude neki element iz D koji je R-manji od $f(b_{i_0})$. Takav element postoji jer je u D pretpostavljeno da nema prvi element.
U slučaju $(t+1)$ biramo $f(b_{t+1})$ da bude neki element iz D koji je R-veći od $f(b_{i_t})$. Takav element postoji jer smo pretpostavili da D nema poslednji element.
U slučaju (n), gde $1 \leq n \leq t$, biramo $f(b_{t+1})$ da bude neki element iz D koji je R-između $f(b_{i_{n-1}})$ i $f(b_{i_n})$. Ovakav element postoji jer smo pretpostavili da je D gust.

Očigledno je sada da na kraju koraka $t+1$, imamo definisan $f(b_i)$ za svako $i \leq t+1$ za koji važi da za $i, j \leq t+1$

$$b_i <_S b_j \qquad \text{ako i samo ako} \qquad f(b_i) <_R f(b_j).$$

Odatle induktivna hipoteza nastavlja da važi i mi možemo da nastavimo da proširujemo našu funkciju f tako da će njen domen vremenom uključiti svaki element iz B. $\square$

Teorema 1.32. (Kantor) Neka su $\langle D, R\rangle$ i $\langle B, S\rangle$ prebrojiva gusta linearna uređenja bez prvog i poslednjeg elementa. Tada je $\langle D, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$.

Dokaz. U prethodnoj teoremi se linearno uređenje $\langle B, S\rangle$ potapalo izomorfno u $\langle D, R\rangle$. Nije bilo moguće garantovati da će se u svaki element iz D preslikavanjem f slikati neki element iz B. Ovo nije ni bilo moguće jer na primer ako je $b_{i_{n-1}}$ bio neposredni S-prethodnik od b_{i_n}, tada nijedan element iz D, koji se nalazi između $f(b_{i_{n-1}})$ i $f(b_{i_n})$ u R relaciji, ne bi mogao slikati baš u njega preslikavanjem f.

Ovde je situacija malo drugačija $-$ $\langle B, S\rangle$ je gust i nema ni prvi ni poslednji element. Tako pokušaj da se napravi element iz D koji je slika u odnosu na f elementa iz B, ovaj put neće propasti.

Numerišimo $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ kao u dokazu prethodne teoreme i na isti način numerišimo elemente $D = \{d_0, d_1, d_2, \ldots\}$. U parnim koracima, kao što je $t = 2n$, definisaćemo sliku elementa b_n preslikavanjem f, dok u nepranim koracima, kao na primer za $t = 2n+1$ naći ćemo inverznu sliku od d_n.

Induktivna hipoteza je ta da na kraju koraka $t = 2n$ (respektivno $t = 2n+1$) imamo definisano f za konačan broj elemenata od B uključujući najmanje $b_0, b_1, \ldots, b_n$ i to za svako $j < n$ (respektivno, $j \leq n$) postoji $b_{t(j)}$ takvo da je $f(b_{t(j)})$ definisano i jednako d_j. Nadalje, za svako b_i, b_j definisane preslikavanjem f imamo

$$b_i <_S b_j \qquad \text{akko} \qquad f(b_i) <_R f(b_j).$$

Ako možemo da pređemo sa koraka t na korak $t+1$, tako da induktivna hipoteza važi, tada možemo nastaviti sa proširivanjem naše funkcije tako da njen domen definicije na kraju uključuje svaki element iz B i njen opseg na kraju uključuje svaki element iz D. Pošto induktivna hipoteza važi, konstruišemo preslikavanje f koje čuva uređenje iz $\langle B, S\rangle$ u $\langle D, R\rangle$ a takođe i izomorfizam iz $\langle B, S\rangle$ u $\langle D, R\rangle$.

U koraku (0) definišimo $f(b_0) = d_0$.
Pretpostavimo da smo u koraku $t+1$ i neka je $t+1 = 2n$. Ako je $f(b_n)$ već definisan, prelazimo na sledeći korak. U suprotnom, proces nastavljamo kao u dokazu prethodne teoreme. Neka su

$$b_{i_0} <_S b_{i_1} <_S \ldots <_S b_{i_t}$$

elementi koji su f-om definisani, tj. važi

$$f(b_{i_0}) <_R f(b_{i_1}) <_R \ldots f(b_{i_t}).$$

Sada b_n je lociran u jednom od $t+2$ mesta uz postojeće S-uređenje elemenata $b_0, b_1, \ldots, b_t$; imenujmo,

ili (0) $b_n <_S b_{i_0}$

ili (k) $b_{i_{n-1}} <_S b_n <_S b_{i_n}$ za neko k, $1 \leq k \leq t$,

ili $(t+1)$ $b_{i_t} <_S b_n$.

U slučaju (0) biramo $f(b_n)$ da bude neki element iz D koji je R-manji od $f(b_{i_0})$. Takav element postoji jer je u D pretpostavljeno da nema prvi element.

U slučaju $(t+1)$ biramo $f(b_n)$ da bude neki element iz D koji je R-veći od $f(b_{i_t})$. Takav element postoji jer smo pretpostavili da D nema poslednji element.

U slučaju (n), gde $1 \leq n \leq k$, biramo $f(b_n)$ da bude neki element iz D koji je R-između $f(b_{i_{n-1}})$ i $f(b_{i_n})$. Ovakav element postoji jer smo pretpostavili da je D gust.

Očigledno je sada da na kraju koraka $t+1$, imamo definisan $f(b_i)$ za svako $i \leq t+1$ za koji važi da za $i, j \leq t+1$

$$b_i <_S b_j \quad \text{ako i samo ako} \quad f(b_i) <_R f(b_j).$$

Odatle induktivna hipoteza nastavlja da važi i mi možemo da nastavimo da proširujemo našu funkciju f tako da će njen domen vremenom uključiti svaki element iz B.

Kao i malo pre, d_n je lociran u jednom od $k+2$ mesta uz postojeće R-uređenje elemenata $d_0, d_1, \ldots, d_t$

ili (0) $d_n <_R f(b_{i_0})$

ili (n) $f(b_{i_{n-1}}) <_R d_n <_S f(b_{i_n})$ za neko n, $1 \leq n \leq t$,

ili $(t+1)$ $f(b_{i_t}) <_R d_n$.

U zavisnosti od toga gde se nalazi $d_n \in D$, biramo element $b \in B$, takav da je $d_n = f(b)$, na sledeći način:

U slučaju (0) biramo b da bude neki element iz B koji je S-manji od b_{i_0}. Takav element postoji jer je u B pretpostavljeno da nema prvi element.

U slučaju $(t+1)$ biramo b da bude neki element iz B koji je S-veći od b_{i_t}. Takav element postoji jer smo pretpostavili da B nema poslednji element.

U slučaju (n), gde $1 \leq n \leq k$, biramo b da bude neki element iz B koji je S-između $fb_{i_{n-1}}$ i b_{i_n}. Ovakav element postoji jer smo pretpostavili da je B gust. Ovo kompletira opis šta radimo u koraku $t+1$.

Očigledno je da induktivna hipoteza nastavlja da radi kao i da je f izomorfizam između $\langle B, S\rangle$ i $\langle D, R\rangle$. $\square$

1.8 Fraiseova teorija

Za strukturu $\mathbf{A}$ kažemo da je **ultrahomogena** ako se svaki izomorfizam između konačno generisanih podstruktura $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ od $\mathbf{A}$, može proširiti do automorfizma od $\mathbf{A}$.

Primer 1.33. Struktura $\mathbf{Q} = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ je ultrahomogena

Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dva konačna linearna poduređenja strukture $\mathbf{Q}$, koja su međusobno izomorfna. Svaki takav izomorfizam se može proširiti do automorfizma strukture $\mathbf{Q}$. To se radi na isti način kao što je to rađeno u dokazu teoreme 1.32. Dakle, $\mathbf{Q}$ je ultrahomogena struktura.

Neka je $\mathbf{A}$ struktura jezika L. **Starost** od A, u oznaci $Age(\mathbf{A})$ je kolekcija svih konačno generisanih struktura za L, koje mogu biti potopljene u $\mathbf{A}$. Dokazaćemo da je klasa $K = Age(\mathbf{A})$ neprazna i ispunjava sledeća tri uslova:

(i) $Nasledno\ svojstvo$ ($HP - Hereditary\ property$): Ako $\mathbf{B} \in K$ i $\mathbf{C}$ je konačno generisana struktura koja se može potopiti u $\mathbf{B}$, onda $\mathbf{C} \in K$.

(ii) $Svojstvo\ zajedničkog\ utapanja$ ($JEP - Joint\ embedding\ property$): Ako $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in K$, postoji $\mathbf{D} \in K$ takvo da se $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ mogu potopiti u $\mathbf{D}$.

(iii) $Svojstvo\ amalgamacije$ ($AP - amalgamation\ property$): Ako $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in K$ i $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}, g : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ su potapanja, tada postoji $\mathbf{E} \in K$ i potapanja $r : \mathbf{C} \to \mathbf{E}, s : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$, tako da je $r \circ f = s \circ g$.

Lema 1.34. Neka je $\mathbf{A}$ ultrahomogena struktura. Tada je $K = Age(\mathbf{A})$ neprazan i ispunjava uslove HP, JEP i AP.

Dokaz. **Nasledno svojstvo:** Neka $\mathbf{B} \in K$ i neka je $\mathbf{C}$ konačno generisana struktura koja se može potopiti u $\mathbf{B}$. Neka je $\varphi : C \to B$ potapanje strukture $\mathbf{C}$ u strukturu $\mathbf{B}$. Znamo da je $C \cong \varphi[C]$. Pošto $\mathbf{B} \in K$, onda postoji potapanje $\psi : B \to A$. No, tada je $\psi|_{\varphi[C]} \circ \varphi : C \to A$ potapanje strukture $\mathbf{C}$ u strukturu $\mathbf{A}$. Dakle, $\mathbf{C} \in K$.
Svojstvo zajedničkog utapanja: Neka $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in K$. To znači da postoje potapanja $\varphi_1 : B \to A$ i $\varphi_2 : C \to A$, takva da je $B \cong \varphi_1[B]$ i $C \cong \varphi_2[C]$.
Pošto su $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ konačno generisane strukture, postoje konačni skupovi $X \subset B$ i $Y \subset C$, takvi da X generiše $\mathbf{B}$ a Y generiše $\mathbf{C}$. Neka je $|X| = m$ i $|Y| = n$. No, tada je i $|\varphi_1[X]| = m$ i $|\varphi_2[Y]| = n$.
Posmatrajmo strukturu $\mathbf{D}$ generisanu sa $\varphi_1[X] \cup \varphi_2[Y]$.
Prvo primetimo da je

$$|\varphi_1[X] \cup \varphi_2[Y]| \leq |\varphi_1[X]| + |\varphi_2[Y]| = m + n,$$

pa postoji konačan skup koji generiše strukturu $\mathbf{D}$.
Pošto je $\varphi_1[X] \cup \varphi_2[Y] \subset A$, to znači da je $\mathbf{D}$ podstruktura od strukture $\mathbf{A}$, pa se $\mathbf{D}$ može potopiti u $\mathbf{A}$. Zbog toga $\mathbf{D} \in K$.
Ostaje još da pokažemo zašto se $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ mogu potopiti u $\mathbf{D}$.
Pošto je B generisana sa X i $\varphi_1[X] \subset D$, onda je $\varphi_1[B] \subset D$.
Pošto je C generisana sa Y i $\varphi_2[Y] \subset D$, onda je $\varphi_2[C] \subset D$.
Dakle, strukture $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ se mogu potopiti u $\mathbf{D}$.
Svojstvo amalgamacije: Neka su $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in K$ i neka su $f : B \to C$ i $g : B \to D$ potapanja.
Treba nam $\mathbf{E} \in K$ i potapanja $r : C \to E$ i $s : D \to E$ takva da je $r \circ f = s \circ g$.
Pošto $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in Age(\mathbf{A})$, postoje potapanja

$$\varphi : C \to A \quad \text{i} \quad \psi : D \to A.$$

Pošto su f i g potapanja, onda je $\varphi[f[B]] \cong \psi[g[B]]$.
Neka je $X = \varphi[f[B]]$.
Tada je $\psi \circ g \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}$ izomorfizam između X i $\psi[g[B]]$.
Kako je $\mathbf{A}$ ultrahomogena struktura, a $\mathbf{B}$ konačno generisana struktura, sledi da postoji $\phi \in Aut(\mathbf{A})$ takav da je $\phi|_X = \psi \circ g \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

Pošto je $\mathbf{D}$ konačno generisana struktura, postoji skup $D_1 \subset D, |D_1| < \infty$, koji generiše strukturu $\mathbf{D}$. Kako je ψ potapanje strukture $\mathbf{D}$ u strukturu $\mathbf{A}$, onda je i $|\psi[D_1]| < \infty$.
Struktura $\mathbf{C}$ je konačno generisana struktura, pa postoji skup $C_1 \subset C, |C_1| < \infty$, koji generiše strukturu $\mathbf{C}$. Kako je φ potapanje strukture $\mathbf{C}$ u strukturu $\mathbf{A}$, onda je i $|\varphi[D_1]| < \infty$.

Pošto $\phi \in Aut(\mathbf{A})$, onda je ϕ injektivno i sirjektivno preslikavanje, pa iz injektivnosti, sledi da je $|\phi[\varphi[C_1]]| < \infty$.
Dakle, struktura E, generisana sa $\psi[D_1] \cup \phi[\varphi[C_1]]$, je konačno generisana struktura.
Označimo: $s = \psi$ i $r = \phi \circ \varphi$.

Primetimo da $\psi : D \to E$ i $\phi \circ \varphi : C \to E$ i da je za $x \in \mathbf{B}$ ispunjeno:

$$(r \circ f)(x) = r(f(x)) = \phi(\varphi(f(x))) = \psi(g(f^{-1}(\varphi^{-1}(\varphi(f(x)))))) =$$

$$\psi(g(f^{-1}(f(x)))) = \psi(g(x)) = s(g(x)) = (s \circ g)(x).$$

Dakle, važi svojstvo amalgamacije. $\square$

Ako je $\mathbf{A}$ prebrojiva struktura u prebrojivom jeziku L, tada je jasno da $Age(\mathbf{A})$ sadrži samo prebrojivo mnogo neizomorfnih struktura. Za dati jezik L, kažemo da je klasa struktura K, u jeziku L, **prebrojiva**, do na izomorfizam, ako sadrži samo prebrojivo mnogo izomorfnih tipova. Pre nego što damo dokaz Fraiseove teoreme, uvešćemo nekoliko bitnih pojmova i pomoćnih lema.
Za strukturu $\mathbf{D}$ kažemo da je **slabo ultrahomogena** ako ispunjava sledeće svojstvo:

> Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ konačno generisane podstrukture od $\mathbf{D}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ i $f : A \to D$ je potapanje, onda postoji potapanje $g : B \to D$ koje proširuje f:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\subset"'] & D \\ B \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Lema 1.35. Ako je struktura $\mathbf{D}$ ultrahomogena onda je ona i slabo ultrahomogena struktura.

Dokaz. Neka je $\mathbf{D}$ ultrahomogena struktura i neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ konačno generisane strukture takve da je $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ i postoji potapanje $f : A \to D$. Preslikavanje $f : A \to f[A]$ je sirjektivno, pa je onda f izomorfizam između A i $f[A]$. Pošto je $\mathbf{D}$ ultrahomogena struktura, postoji $\psi \in Aut(D)$, tako da je $\psi|_A = f$. No, tada je $\psi|_B$ potapanje strukture $\mathbf{B}$ u strukturu $\mathbf{D}$. $\square$

Lema 1.36. Neka su $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ L-strukture. Neka je $\mathbf{C}$ prebrojiva. Pretpostavimo da je $Age(\mathbf{C}) \subset Age(\mathbf{D})$ i da je $\mathbf{D}$ slabo ultrahomogena. Tada se $\mathbf{C}$ može potopiti u $\mathbf{D}$. Zapravo, svako potapanje iz konačno generisane podstrukture od $\mathbf{C}$ u $\mathbf{D}$ se može proširiti do potapanja $\mathbf{C}$ u $\mathbf{D}$.

Dokaz. Neka je $f_0 : A_0 \to D$ potapanje konačno generisane podstrukture A_0 od C u strukturu D. Proširićemo f_0 do potapanja $f_\omega : C \to D$ na sledeći način. Kako je C najviše prebrojiva struktura, onda se ona može napisati kao unija $\bigcup_{n<\omega} A_n$ lanca konačno generisanih podstruktura, počevši sa A_0 (A_m je podstruktura od A_n, za $m < n$). Za ovakav lanac podrazumevamo da je A_m podstruktura od A_n, za $m < n$. Indukcijom po n, definisaćemo rastući lanac potapanja $f_n : A_n \to D$.
Baza: Prvo potapanje f_0 je dato.
Induktivna hipoteza: Pretpostavimo da je f_n definisano.
Dijagram koraka indukcije:

$$\begin{tikzcd} g(A_n) \arrow[r, "f_n \circ g^{-1}"] \arrow[d, "\subset"'] & D \\ B \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Induktivni korak: Tražimo potapanje f_{n+1} sa gore navedenom osobinom. Pošto je $Age(\mathbf{C}) \subset Age(\mathbf{D})$, postoji izomorfizam $g : A_{n+1} \to B$, gde je B podstruktura od D. Pošto je $A_n \subset A_{n+1}$, onda je $g(A_n) \subset B$. To dalje znači da $f_n \circ g^{-1}$ potapa $g(A_n)$ u D. Sada primenom slabe ultrahomogenosti ($g(A_n) \subset B, f_n \circ g^{-1} : g(A_n) \to D$) na potapanje $f_n \circ g^{-1}$, postoji proširenje potapanjem $h : B \to D$. Neka je $f_{n+1} : A_{n+1} \to D$, tj. $f_{n+1} = h \circ g$. Sada je $f_n \subset f_{n+1}$. Ovo definiše lanac preslikavanja f_n. Na kraju, neka je f_ω unija f_n-ova, za $n < \omega$. □

Ova lema je izuzetno korisna iz više razloga. Kao prvo, ako su $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ obe slabo ultrahomogene strukture takve da je $Age(\mathbf{C}) = Age(\mathbf{D})$, onda argumente navedene u lemi možemo da iskoristimo da dokažemo izomorfizam struktura $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$.

Drugo, ova lema uvodi novi pojam. Kažemo da je prebrojiva struktura $\mathbf{D} = Age(\mathbf{K})$ **univerzalna** ako se svaka konačna ili prebrojiva struktura čija je starost podskup od $Age(\mathbf{K})$ može potopiti u $\mathbf{D}$. Prethodna lema zapravo kaže da je prebrojiva slabo ultrahomogena struktura univerzalna za svoju starost.

Primetimo da je lema 1.36 uopštenje teoreme 1.31, sa slučaja gustog linearnog uređenja na slučaj slabo ultrahomogene strukture. To je zato što je starost svakog prebrojivog linearnog uređenja klasa svih konačnih linearnih uređenja. A svako gusto linearno uređenje, bez prvog i poslednjeg elementa, je slabo ultrahomogeno.

Sledeća lema igra izuzetnu ulogu u samom dokazu Fraiseove teoreme.

Lema 1.37. (a) Neka su $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ L-strukture sa istom starošću. Pretpostavimo da su obe najviše prebrojive i obe slabo ultrahomogene. Tada je $\mathbf{C}$ izomorfno sa $\mathbf{D}$. Zapravo, ako je $\mathbf{A}$ konačno generisana podstruktura od $\mathbf{C}$ i $f : A \to D$ je potapanje, tada se f može proširiti do izomorfizma struktura $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$.
(b) Konačna ili prebrojiva struktura je ultrahomogena akko je slabo ultrahomogena.

Dokaz. (a) Neka je $\langle C_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ lanac konačno generisanih podstruktura strukture $\mathbf{C}$ takav da je $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ i da je $C_0 = A$ (ako nam struktura $\mathbf{A}$ nije unapred data, onda $\mathbf{C}_0$ može biti proizvoljna konačno generisana struktura iz $\mathbf{C}$).
Neka je $\langle D_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ lanac konačno generisanih podstruktura strukture $\mathbf{D}$ takav da je $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
Ovi lanci postoje jer su $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ prebrojive strukture.
Indukcijom definišemo lanac utapanja $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ ($f_n \subset f_{n+1} : n \in \mathbb{N}$) iz elemenata lanca $\langle C_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ u $\mathbf{D}$, tj. za svako $n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{dom}(f_n) = C_m$, za neko $m \in \mathbb{N}$, takav da:

$$\text{Ako je } n = 2k \text{ onda je } C_n \subset \mathrm{dom}(f_n), \text{ a ako je } n = 2k+1 \text{ onda je } D_n \subset \mathrm{ran}(f_n). \quad (*)$$

Baza indukcije: Pošto je $C_0 \in Age(\mathbf{C}) = Age(\mathbf{D})$, znamo da postoji potapanje $f_0 : C_0 \to D$.
Induktivni korak: Neka je sada $f_0, \ldots, f_n$ dato da zadovoljava uslov $(*)$.
Konstruišemo f_{n+1}.

I slučaj: $n + 1 = 2k$.
Neka je $C_m = \mathrm{dom}(f_n)$. Ako je $C_{n+1} \subset C_m$, dokaz je završen. Ako nije, pošto je $\langle C_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ lanac imamo da je $C_m \subset C_{n+1}$ i $f_n : C_m \to D$ potapanje. Pošto $C_{n+1} \in Age(\mathbf{C}) = Age(\mathbf{D})$, onda postoji potapanje $g : C_{n+1} \to D$. Sada je $f_n \circ g^{-1} : g[C_n] \to D$ potapanje i $g[C_m] \subset D$ i $g[C_m] \subset g[C_{n+1}] \subset D$.
Na osnovu slabe ultrahomogenosti postoji $\phi : g[C_{n+1}] \to D$ takvo da je $f_n \circ g^{-1} \subset \phi$.
Označimo $f_{n+1} = \phi \circ g$.
Jasno je da je $\phi \circ g = f_{n+1} : C_{n+1} \to D$ i da je $C_{n+1} = \mathrm{dom}(f_{n+1}) = \mathrm{dom}(\phi \circ g)$.
Za $x \in C_m$ je $f_{n+1}(x) = (\phi \circ g)(x) = \phi(g(x)) = f_n(g^{-1}(g(x))) = f_n(x)$, što smo i hteli.

II slučaj: $n+1=2k+1$.
Neka je C_m =dom(f_n). Ako je $D_{n+1} \subset f_n[C_m]$ dokaz je završen, pa pretpostavimo da $D_{n+1} \not\subset f_n[C_m]$.
Pošto je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = D$, to znači da postoji D_s takvo da je $D_{n+1} \cup f_n[C_m] \subset D_s$.
Kako $D_s \in Age(\mathbf{D}) = Age(\mathbf{C})$, postoji potapanje $g : D_s \to C$. Sada je $f_n^{-1} \circ g^{-1} : g[f_n[C_m]] \to C$ potapanje i $g[f_n[C_m]] \subset g[D_s] \subset C$.
Pošto je $\mathbf{C}$ slabo ultrahomogena, postoji potapanje $\psi : g[D_s] \to C$ takvo da je $f_n^{-1} \circ g^{-1} = \psi$.
Pošto je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = C$, postoji C_l takvo da je $\psi[g[D_s]] \subset C_l$.
Na isti način kao i I slučaju, postoji potapanje $\phi : C_l \to D$ takvo da je $g^{-1} \circ \psi^{-1} \subset \phi$.
Označimo $f_{n+1} = \phi$.
Tada je dom$(f_{n+1}) = C_l$ i $f_{n+1} : C_l \to D$ potapanje. Takođe, pošto je $C_l \supset \psi[g[D_s]]$ znamo da je $\psi^{-1}[C_l] \supset g[D_s]$, pa je

$$\phi[C_l] \supset g^{-1} \circ \psi^{-1}[C_l] \supset D_s \supset D_{n+1}.$$

Za $x \in C_m$ je $\phi(x) = g^{-1}(\psi^{-1}(x)) = g^{-1}(g \circ f_n(x)) = f_n(x)$, kao što smo i hteli.

Dakle, $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ zadovoljava uslov $(*)$.
Pošto je unija lanca potapanja potapanje, znamo da je $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ potapanje iz $\mathbf{C}$ u $\mathbf{D}$, pa treba još pokazati da je f bijekcija, tj. da je "na".
Neka je $y \in D$ proizvoljno.
Pošto je $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takvo da $y \in D_{2k+1}$. Tada $y \in$ ran(f_{2k+1}) pa i $y \in$ ran(f).
(b) Pre formulacije leme smo rekli da je svaka ultrahomogena struktura i slabo ultrahomogena. Drugi smer sledi iz (a) za $\mathbf{C} = \mathbf{D}$. □

Ova lema obezbeđuje jedinstvenost ultrahomogene strukture, što je jedan od zahteva Fraiseove teoreme.

Takođe primetimo da je lema 1.37 uopštenje teoreme 1.32. To je zato što su svaka dva prebrojiva gusta linearna uređenja, koja nemaju prvi i poslednji element, slabo ultrahomogena i imaju istu starost.

Lema 1.38. Neka je $\mathbf{J}$ skup konačno generisanih L-struktura i neka je $\langle D_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ lanac L-struktura. Ako je za svako $n \in \mathbb{N}$, $Age(\mathbf{D_n})$ sadržan u $\mathbf{J}$, onda je takođe i $Age(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{D_n})$ sadržan u $\mathbf{J}$. Ako je $Age(\mathbf{D_n}) = \mathbf{J}$, za svako $n \in \mathbb{N}$, onda je i $Age(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{D_n}) = \mathbf{J}$.

Dokaz. Neka je $\mathbf{J}$ skup konačno generisanih L-struktura i neka $\langle D_n : n < \omega\rangle$ lanac L-struktura. Dokažimo prvo da, ako je $Age(\mathbf{D_n}) \subset \mathbf{J}$, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda je i $Age(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{D_n}) \subset \mathbf{J}$.
Neka je $Age(\mathbf{D_n}) \subset \mathbf{J}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada je i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Age(\mathbf{D_n}) \subset \mathbf{J}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Age(\mathbf{D_n}) = Age(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{D_n}).$$

$(\subset)$ Pretpostavimo da $\mathbf{A} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Age(\mathbf{D_n})$. To znači da postoji neko $n \in \mathbb{N}$, takvo da $\mathbf{A} \in Age(\mathbf{D_n})$. Iz definicije starosti sledi da postoji potapanje $\varphi : A \to D_n$. Ali to onda znači da je $\varphi : A \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, pa po definiciji starosti, ali ovaj put za $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, sledi da $\mathbf{A} \in Age(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{D_n})$.
$(\supset)$ Neka sada $\mathbf{A} \in Age(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{D_n})$. To znači da postoji potapanje $\varphi : A \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
Kako je struktura $\mathbf{A}$ konačno generisana, postoji konačan skup $X \subset A$. No, tada postoji i

$n \in \mathbb{N}$, takvo da se X može potopiti u neko D_n. Tada se mora i A potopiti u isto to D_n, jer X generiše strukturu $\mathbf{A}$. Dakle, $\mathbf{A} \in Age(\mathbf{D_n}), n \in \mathbb{N}$, iz čega sledi da $\mathbf{A} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Age(\mathbf{D_n})$.

Dakle, $Age(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{D_n}) \subset \mathbf{J}$.
Ako je $Age(\mathbf{D_n}) = \mathbf{J}$, onda zbog jednakosti

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Age(\mathbf{D_n}) = Age(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{D_n}),$$

sledi da je $Age(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{D_n}) = \mathbf{J}$. □

Teorema 1.39. **(Fraise)** Neka je L prebrojiv jezik i neka je K konačan ili prebrojiv skup konačno generisanih struktura koji ispunjava uslove HP, JEP i AP. Tada postoji jedinstvena, do na izomorfizam, prebrojiva struktura $\mathbf{D}$ koja je ultrahomogena i $K = Age(\mathbf{D})$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je K neprazna, da ima svojstva HP, JEP i AP. Iz HP sledi da je K zatvoren u odnosu na izomorfne kopije.

Konstruisaćemo lanac $\langle D_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ struktura iz K, koji ispunjava sledeći uslov:

($*$) Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ strukture u K i $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ i postoji potapanje $f : A \to D_i$ za neko $i < \omega$, tada postoji $j > i$ i potapanje $g : B \to D_j$, koje proširuje f.

Neka je $\mathbf{P}$ prebrojiv skup parova struktura $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle$ takvih da $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K$ i $A \subset B$. Možemo izabrati $\mathbf{P}$ tako da uključuje predstavnika svakog tipa izomorfizma takvih parova. Neka je data bijekcija $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takva da je $\pi(i,j) \geq i$ za svako i i za svako j. Dokaz sprovodimo indukcijom:
Baza: Neka je $\mathbf{D_0}$ proizvoljna struktura u K.
Induktivna hipoteza: Neka je $\mathbf{D_k}$ izabrano. Posmatrajmo $\langle\langle f_{k,j}, A_{k,j}, B_{k,j}\rangle : j \in \mathbb{N}\rangle$ trojke $\langle f, A, B\rangle$, gde $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle \in \mathbf{P}$ i $f : A \to D_k$.

Induktivni korak: $\mathbf{D_{k+1}}$ konstruišemo pomoću AP. Za $k = \pi(i,j)$, posmatramo $\mathbf{A_{i,j}}, \mathbf{B_{i,j}}$ i $\mathbf{D_k}$. Znamo da je $A_{i,j} \subset B_{i,j}$, pa postoji potapanje $\varphi : A_{i,j} \to B_{i,j}$. Dakle:

$$\varphi : A_{i,j} \to B_{i,j}, \qquad f_{i,j} : A_{i,j} \to D_k.$$

Iz AP, sledi da postoji $D_{k+1} \in K$ takvo da:

$$\exists g_{i,j} : B_{i,j} \to D_{k+1} \quad \text{i} \quad \exists e_k : D_k \to D_{k+1}$$

tako da je $g_{i,j} \circ \varphi = e_k \circ f_{i,j}$. Ovim je završena konstrukcija lanca $\langle D_i : i \in \mathbb{N}\rangle$.

Sada ćemo pokazati da ovaj lanac zadovoljava uslov ($*$). Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ strukture u K i $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ i neka postoji potapanje $f : A \to D_i$ za neko $i \in \mathbb{N}$. Posmatrajmo opet niz trojki $\langle\langle f_{i,j}, A_{i,j}, B_{i,j}\rangle : j \in \mathbb{N}\rangle$. Neka je j takav da je $f_{i,j} = f, A_{i,j} \cong A, B_{i,j} \cong B$. Bez umanjenja opštosti, neka je $A_{i,j} = A, B_{i,j} = B$. Neka je $\pi(i,j) = k$. Pošto znamo da je $k \geq i$ i pošto je $D_i \subset D_k$, onda to znači da je f utapanje iz A u D_k. Znamo da je $k+1 > k \geq i$ i da postoje utapanja $g_{i,j} : B_{i,j} \to D_{k+1}$ i $e_k : D_k \to D_{k+1}$, takva da je $g_{i,j} = e_k \circ f$. Ovim je ($*$) dokazana.

Neka je sada $\mathbf{D}$ unija lanca $\langle D_i : i \in \mathbb{N}\rangle$. Pošto je $\langle D_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ prebrojiv lanac konačno generisanih struktura, onda je i $\mathbf{D}$ prebrojiva struktura. Tada je $Age(\mathbf{D}) \subset K$. Lako se dokazuje da je $Age(\mathbf{D}) = K$.
Dokažimo da je $\mathbf{D}$ slabo ultrahomogena struktura.

Neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Age(\mathbf{D})$, takve da je $A \subset B$ i $\varphi_1 : A \to D$ je potapanje. Prema ($*$), sledi da postoji potapanje $\varphi_2 : B \to D$, koje je proširenje potapanje φ_1. Na osnovu toga, struktura $\mathbf{D}$ je slabo ultrahomogena. Prema lemi 1.37(b), ona je i ultrahomogena struktura starosti K.

Dijagram teoreme:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{B_{i,j}} \arrow[dr, "g_{i,j}"] & \\
\mathbf{A_{i,j}} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "f_{i,j}"'] & & \mathbf{D_{k+1}} \\
& \mathbf{D_k} \arrow[ur, "e"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Ovakve strukture zovemo **Fraiseov limit** od K, u oznaci

$$\mathbf{A} = \text{Flim}(K).$$

Ono što je bitno da se ovde primeti jeste da je prebrojiva ultrahomogena struktura $\mathbf{A}$ Fraiseov limit Age$(\mathbf{A})$. Na primer, Age$(\langle \mathbb{Q}, < \rangle)$ = klasa konačnih linearnih uređenja = LO i $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ = Flim(LO). Primetimo da je Age$(\langle \mathbb{Z}, < \rangle)$ = klasa konačnih linearnih uređenja, ali nije Fraiseov limit jer nije ultrahomogena. $\mathbb{Z}$ nije ultrahomogena, jer ako bismo slikali 1 u 3 a 2 u 5, onda ne postoji broj između 2 i 3 koji se može slikati u 4, time ne možemo to preslikavanje produžiti do automorfizma.

2 Topološki prostori

Topološki prostori su matematičke strukture koje omogućavaju formalnu definiciju pojmova kao što su konvergencija, neprekidnost i kompaktnost. Oni se javljaju u praktično svim granama moderne matematike.

2.1 Otvoreni i zatvoreni skupovi

Pojam otvoreni skupovi se prvi put sreće u matematičkoj analizi. Tada smo rekli da je $O \subset \mathbb{R}$ otvoren ako za svako $x \in O$ postoji realan broj $r > 0$, takav da je $(x - r, x + r) \subset O$.

U tom smislu imamo sledeću definiciju:

Definicija 2.1. Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je **kolekcija otvorenih skupova** ako i samo ako važe sledeća tri uslova:

(O1) Prazan skup i skup X su otvoreni, tj. $\emptyset$, X $\in \mathcal{O}$;

(O2) Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, tj. za $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ važi $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;

(O3) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, tj. za svaku kolekciju $\{O_i : i \in I\} \subset \mathcal{O}$ važi $\bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Za kolekciju $\mathcal{O}$ kažemo da je **topologija** na skupu X, a za uređenu dvojku $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ kažemo da je **topološki prostor**.
Za skup $F \subset X$ kažemo da je **zatvoren** ako i samo ako je njegov komplement $X \backslash F$ otvoren skup.

Teorema 2.2. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor i $A \subset X$ neprazan skup. Tada je kolekcija $\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ topologija na skupu A.

Primer 2.3. Diskretna topologija
Za proizvoljan neprazan skup X, partitivni skup $P(X)$ je topologija na X jer ispunjava uslove (O1)-(O3) iz gore navedene definicije. Ovu topologiju nazivamo *diskretna topologija* na skupu X.

Pojam baze topologije je, na određen način, sličan pojmu baze vektorskog prostora u sledećem smislu. Ako je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$ onda svaki otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ može da se prikaže kao unija (konačno ili beskonačno mnogo) skupova iz $\mathcal{B}$.

Definicija 2.4. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subset P(X)$ je **baza topologije** $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(B1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}$ su otvoreni skupovi, to jest $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$;

(B2) Svaki otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ može da se prikaže kao unija neke podfamilije familije $\mathcal{B}$ (tj. postoji kolekcija $\{B_j : j \in J\} \subset \mathcal{B}$, tako da je $O = \bigcup\limits_{j \in J} B_j$).

Primer 2.5. Baza diskretne topologije
Baza diskretne topologije iz primera 2.3 je familija $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Zaista, uslov (B1) je očigledno zadovoljen, a s obzirom da za svaki (otvoren) skup $O \subset X$ važi: $O = \bigcup\limits_{x \in O} \{x\}$, zadovoljen je i uslov (B2).

Definicija 2.6. Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{B} \subset P(X)$ je **baza neke topologije** na skupu X akko je kolekcija $\{\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ topologija na skupu X (tj. zatvorenje familije $\mathcal{B}$ u odnosu na proizvoljne unije predstavlja topologiju na skupu X).

Teorema 2.7. Kolekcija $\mathcal{B} \subset P(X)$ je baza neke topologije na skupu X akko važe sledeći uslovi:

(BN1) $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(BN2) $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})(\exists\{B_i : i \in I\} \subset \mathcal{B})(B_1 \cap B_2 = \bigcup\limits_{i \in I} B_i)$.

Dokaz. Pogledati [8], strana 58. □

Posledica 2.8. Neka familija podskupova $\mathcal{B} \subset P(X)$ zadovoljava uslove:

(BN1) $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X$,

(BN2') $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ (B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \cup \{\emptyset\})$.

Tada je familija $\mathcal{B}$ baza neke topologije na skupu X.

Primer 2.9. Prostor $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob} \rangle$
Primenom prethodnog tvrđenja ćemo dokazati da je familija

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$$

svih otvorenih intervala - baza neke topologije na skupu $\mathbb{R}$.

Uslov (BN1) važi, jer je

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathbb{R}.$$

Dalje, neka $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathcal{B}$ i neka je $a = \max\{a_1, a_2\}$ i $b = \min\{b_1, b_2\}$. Tada je

$$(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = \begin{cases} \emptyset, & a \geq b \\ (a, b), & a < b \end{cases}$$

pa je i uslov (BN2') zadovoljen.

Topologiju određenu bazom $\mathcal{B}$ zovemo *uobičajena topologija* na $\mathbb{R}$ i označavamo je sa $\mathcal{O}_{uob}$. U prostoru $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob} \rangle$ skup O je otvoren ako i samo ako je unija neke (konačne ili beskonačne) familije otvorenih intervala. Takvi su, na primer, skupovi: $(1, 2) \cup (3, 4), \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$.

Definicija 2.10. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor. Kolekcija $\mathcal{P} \subset P(X)$ je **podbaza topologije** $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(PB1) Elementi kolekcije $\mathcal{P}$ su otvoreni skupovi, tj. $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$;

(PB2) Familija svih konačnih preseka elemenata $\mathcal{P}$ predstavlja neku bazu topologije $\mathcal{O}$.

Teorema 2.11. Neka je X neki neprazan skup i kolekcija $S \subset P(X)$ takva da je $\bigcup S = X$. Tada važi:

a) Familija $\mathcal{B}$ svih konačnih preseka elemenata kolekcije S je baza neke topologije $\mathcal{O}$ a S je njena podbaza.

b) $\mathcal{O}$ je najmanja topologija na skupu X koja sadrži kolekciju S.

Dokaz. Pogledati [8], strana 63. □

2.2 Topologija metričkog prostora

Sledećom definicijom uvodimo metriku i osnovne pojmove u metričkim prostorima.

Definicija 2.12. Neka je X neprazan skup. Svaka funkcija $d : X^2 \to [0, +\infty)$ takva da za svako $x, y, z \in X$ važi:

(M1) $d(x, y) = 0$ akko je $x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

je **metrika** na skupu X. Uređen par $\langle X, d\rangle$ je **metrički prostor**. Broj $d(x, y)$ nazivamo **rastojanje** tačaka x i y. Ako je $x \in X$ i $r > 0$, onda skup

$$L(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

zovemo **otvorena lopta** sa centrom u tački x poluprečnika r.

Teorema 2.13. Neka je $\langle X, d\rangle$ metrički prostor. Tada je familija svih otvorenih lopti, $\mathcal{B}_d = \{L(x, r) : x \in X \wedge r > 0\}$, baza neke topologije $\mathcal{O}_d$ na skupu X.

Dokaz. Pogledati u [8], strana 68. □

Definicija 2.14. Za topologiju $\mathcal{O}_d$ definisanu u prethodnoj teoremi kažemo da je **određena** (ili **indukovana**) **metrikom** d.
Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ je **metrizabilan** ako i samo ako postoji neka metrika d na skupu X tako da je $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}$.

Primer 2.15. Trivijalna metrika indukuje diskretnu topologiju
Neka je X neprazan skup. Funkcija $d_{01} : X^2 \to [0, \infty)$ definisana sa:

$$d_{01} = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

zadovoljava uslove (M1)-(M3) iz definicije 2.12, što se trivijalno proverava, pa je reč o metrici. Ovu metriku zovemo *01-metrika*.
Za proizvoljno $x \in X$, lopta $L(x, \frac{1}{2}) = \{y \in X : d_{01}(x, y) < \frac{1}{2}\} = \{x\}$. Dakle, $\{\{x\} : x \in X\} \subset B_d$, pa na osnovu primera 2.5, važi $\mathcal{O}_d = X$. Dakle, prostor sa diskretnom topologijom je metrizabilan.

Teorema 2.16. U proizvoljnom metričkom prostoru $\langle X, d\rangle$ važi: $O \subset X$ je otvoren ako i samo ako za svaku tačku $x \in O$ postoji broj $r > 0$ takav da je $L(x, r) \subset O$.

Dokaz. Pogledati u [8], strana 69. □

Definicija 2.17. Za metriku d na skupu X kažemo da je **ograničena** ako i samo ako postoji realan broj $M > 0$ takav da za sve $x, y \in X$ važi $d(x, y) < M$.

Kada se govori o metrikama, neizbežno je napomenuti pojam ekvivalentnih metrika. U tom smislu navodimo sledeću definiciju:

Definicija 2.18. Neka je X neprazan skup i neka je $\mathcal{D}_X$ kolekcija svih metrika na skupu X. Za metrike $d_1, d_2 \in \mathcal{D}_X$ kažemo da su **topološki ekvivalentne**, u oznaci $d_1 \overset{t}{\sim} d_2$, ako i samo ako je $\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_{d_2}$.
Metrike d_1 i d_2 su **uniformno ekvivalentne**, u oznaci $d_1 \sim d_2$ ako i samo ako postoje brojevi $k, h > 0$ takvi da za sve $x, y \in X$ važi

$$d_1(x,y) \leq kd_2(x,y) \qquad \text{i} \qquad d_2(x,y) \leq hd_1(x,y).$$

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza. Dokaz se može pronaći u [8], na strani 71.

Teorema 2.19. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Tada važi:

a) Relacija $\overset{t}{\sim}$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{D}_X$.

b) Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na $\mathcal{D}_X$.

c) Ako je $d_1 \leq kd_2$ onda je $L_{d_2}(x,r) \subset L_{d_1}(x,kr)$ za sve $x \in X$ i $r > 0$ i važi $\mathcal{O}_{d_1} \subset \mathcal{O}_{d_2}$.

d) Uniformno ekvivalentne metrike su topološki ekvivalentne, tj. daju istu topologiju.

Teorema 2.20. Neka je $\langle X, d\rangle$ metrički prostor. Tada važi:

(1) Funkcija $d_1 : X^2 \to \mathbb{R}$ data sa $d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ je ograničena metrika na skupu X.

(2) Metrike d i d_1 na skupu X određuju istu topologoju.

Dokaz. (1) Očigledno, za svako $x, y \in \mathbb{R}$ važi $d_1(x,y) \geq 0$ i važe uslovi $(M1)$ i $(M2)$. Dokažimo da je i uslov $(M3)$ zadovoljen. Koristimo činjenicu da je funkcija $f(t) = \frac{t}{1+t}$ monotono rastuća (jer je $f'(t) = \frac{1}{t^2+1} > 0, t \neq -1$). Za proizvoljne tačke $x, y, z \in X$ imamo:

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

tj. $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$, pa je d_1 metrika na skupu X. Ova metrika je ograničena, jer za svako $x, y \in X$ važi $d(x,y) < 1$.
(2) Kako je $d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq d(x,y)$ za sve $x, y \in X$, to jest $d_1 \leq d$, na osnovu prethodne teoreme sledi $\mathcal{O}_{d_1} \subset \mathcal{O}_d$. Dokažimo da je i $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{d_1}$. Neka je $O \in \mathcal{O}_d$ i $x \in O$. Tada postoji $r > 0$ tako da je $L_d(x,r) \subset O$. Pokazaćemo da je

$$L_{d_1}(x, \frac{r}{1+r}) \subset L_d(x,r).$$

Neka $y \in L_{d_1}(x, \frac{r}{1+r})$. Tada je

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \frac{r}{1+r},$$

to jest $d(x,y) < r$ i $y \in L_d(x,r)$. Dakle, za svako $x \in O$ postoji $L_x \in O_{d_1}$, tako da $x \in L_x \subset O$, pa imamo $O = \bigcup_{x \in O} L_x \in O_{d_1}$. $\square$

2.3 Definicija topologije pomoću okolina

Koristeći pojam otvorenog skupa, uvodimo pojam okoline tačke. Jedan od razloga je mogućnost definisanja prve aksiome prebrojivosti, kao osobine koju mogu da imaju topološki prostori.

Definicija 2.21. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor. Skup $A \subset X$ je **okolina tačke** $x \in X$ akko postoji otvoren skup $O \in \mathcal{O}$, takav da $x \in O \subset A$. Familiju svih okolina tačke x označavamo sa $\mathcal{U}(x)$.

Teorema 2.22. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor. Tada važi: skup $A \subset X$ je otvoren akko je okolina svake svoje tačke.

Dokaz. Pogledati u [8], strana 76. □

Definicija 2.23. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor i $x \in X$. Familija skupova $\mathcal{B}(x)$ je **baza okolina** tačke x akko su ispunjeni sledeći uslovi:
(BO1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x, tj. $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$;
(BO2) $(\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists B \in \mathcal{B}(x))\ B \subset U$.

Umesto termina **baza okolina** koristi se i termin **lokalna baza**. Familija $\mathcal{U}(x)$ svih okolina tačke x je jedna baza okolina tačke x. Takođe, familija svih **otvorenih** okolina tačke x je jedna baza okolina te tačke.

U metričkom prostoru okoline mogu da se definišu na jednostavan način $-$ posredstvom otvorenih lopti. Preciznije, važi sledeća teorema:

Teorema 2.24. Neka je $\langle X, d \rangle$ metrički prostor i $x \in X$. Tada važi:

(a) Skup $A \subset X$ je okolina tačke x akko postoji $r > 0$ takvo da je $L(x, r) \subset A$.

(b) Familija otvorenih lopti sa centrom u tački x, $\mathcal{B}(x) = \{L(x, r) : r > 0\}$, je baza okolina tačke x.

Dokaz. Pogledati u [8], strana 77. □

Definicija 2.25. Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ zadovoljava **prvu aksiomu prebrojivosti** akko u svakoj tački $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina.

Teorema 2.26. Svaki metrički prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.

Dokaz. Pogledati u [8], strana 78. □

2.4 Topološki operatori

U ovoj tački, proizvoljnom podskupu A topološkog prostora X pridružujemo pet skupova: unutrašnjost, spoljašnjost, rub, adherenciju i izvod.

Definicija 2.27. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor i $A \subset X$. Tačka $x \in X$ je **unutrašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da $x \in O \subset A$.
Tačka x je **spoljašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da je $x \in O \subset X \backslash A$.
Tačka x je **rubna tačka** skupa A ako i samo ako svaki otvoren skup O koji je sadrži seče i skup A i njegov komplement.

Definicija 2.28. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor i $A \subset X$.
Tačka $x \in X$ je **adherentna tačka** skupa A ako i samo ako svaka okolina U tačke x seče skup A.
Tačka $x \in X$ je **tačka nagomilavanja** skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče skup $A \backslash \{x\}$.
Skup svih adherentnih tačaka skupa A zovemo **adherencija** (ili **zatvorenje**) skupa A, u oznaci $\overline{A}$, dok skup svih tačaka nagomilavanja skupa A zovemo **izvod** skupa A, u oznaci A'.

Definicija 2.29. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor. Skup $D \subset X$ je **gust** (u X) akko je $\overline{D} = X$. Prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ je **separabilan** akko postoji gust i prebrojiv skup $D \subset X$.

Teorema 2.30. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}$. Tada važi: skup $D \subset X$ je gust ako i samo je $B \cap D \neq \emptyset$, za svaki neprazan skup $B \in \mathcal{B}$. Specijalno, skup D je gust ako i samo ako seče svaki neprazan otvoren skup $O \in \mathcal{O}$.

Dokaz. Pogledati u [8], strana 86. □

Primer 2.31. Prostor $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob} \rangle$ je separabilan
U prostoru $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob} \rangle$ važi $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ i $\overline{\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Dakle, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ su gusti skupovi. Kako je $\mathbb{Q}$ i prebrojiv skup, $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob} \rangle$ je separabilan prostor.

2.5 Aksiome separacije

U ovoj tački izdvajamo neke osobine razdvajanja (separacije). Među osobinama koje izdvajamo postoji linearna hijerarhija - ide se od manjih ka većim zahtevima. Metrički prostori i specijalno, prostori brojeva, imaju sve ove osobine pa, na izvestan način, aksiome separacije izražavaju stepen sličnosti topoloških prostora metričkim. Takođe, zahvaljujući ovoj hijerarhiji, možemo da izvršimo određenu klasifikaciju topoloških prostora.

Definicija 2.32. Za topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ kažemo da je

- T_0**-prostor** ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoren skup O koji sadrži tačno jednu od njih.

- T_1**-prostor** ako i samo ako za svaki par različitih tačaka $x, y \in X$ postoji otvoren skup O takav da $x \in O$ i $y \notin O$. Primetimo da tada postoji i otvoren skup V takav da $y \in V$ i $x \notin V$.

- T_2**-prostor** ili Hauzdorfov prostor ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 tako da $x \in O_1$ i $y \in O_2$.

Potreban i dovoljan uslov da prostor bude T_1 daje sledeća teorema.

Teorema 2.33. Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ je T_1**- prostor** ako i samo ako su svi jednoelementni podskupovi skupa X zatvoreni skupovi.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 91. □

Definicija 2.34. Za topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ kažemo da je

- **Regularan** ako i samo ako za svaki zatvoren skup F i svaku tačku x koja mu ne pripada, postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2, takvi da $x \in O_1$ i $F \subset O_2$.

- **Normalan** ako i samo ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2 postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2, takvi da je $F_1 \subset O_1$ i $F_2 \subset O_2$.

- T_3**-prostor** ako i samo ako je regularan T_1-prostor.

- T_4**-prostor** ako i samo ako je normalan T_1-prostor.

Teorema 2.35. $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Dokaz. Pogledati u [8], na stranama 91 i 92. □

Teorema 2.36. Svaki metrički prostor je T_4 prostor.

Dokaz. Pogledati u [8], strana 96. □

2.6 Neprekidna preslikavanja

Neprekidnost i granična vrednost funkcije su osnovni pojmovi matematičke analize. Ovde dajemo opštu definiciju neprekidnosti koja se odnosi na preslikavanja proizvoljnih topoloških prostora.

Definicija 2.37. Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ topološki prostori i $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Funkcija $f : X \to Y$ je

- **Neprekidna u tački** x_0 ako i samo ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 tako da je $f[U] \subset V$.

- **Neprekidna** ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački $x \in X$.

Teorema 2.38. Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ topološki prostori i $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) Preslikavanje f je neprekidno.

b) Za svaki otvoren skup $O \subset Y$, skup $f^{-1}[O] \subset X$ je otvoren.

c) Za svaki zatvoren skup $F \subset Y$, skup $f^{-1}[F] \subset X$ je zatvoren.

d) Za svaki skup $A \subset X$ važi $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.

e) Ako je $\mathcal{B}_Y$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}_Y$, onda je za svaki skup $B \in \mathcal{B}_Y$ skup $f^{-1}[B] \subset X$ otvoren.

f) Ako je $\mathcal{P}_Y$ proizvoljna podbaza topologije $\mathcal{O}_Y$, onda je za svaki skup $P \in \mathcal{P}_Y$ skup $f^{-1}[P] \subset X$ otvoren.

Dokaz. Dokazaćemo da $(a) \Rightarrow (d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$.

$((a) \Rightarrow (d))$: Neka je f neprekidna funkcija i $A \subset X$. Ako je $A = \emptyset$, onda inkluzija iz (d) trivijalno važi. Neka je A neprazan skup i neka $x \in \overline{A}$. Tada, na osnovu uslova (a), za proizvoljnu okolinu V tačke $f(x)$ postoji okolina U tačke x tako da je $f[U] \subset V$. Kako je $x \in \overline{A}$, postoji $t \in U \cap A$, pa je $f(t) \in f[U] \subset V$ i $f(t) \in f[A]$, odakle je $V \cap f[A] \neq \emptyset$. Dakle skup $f[A]$ seče svaku okolinu V tačke $f(x)$, pa je $f(x) \in \overline{f[A]}$. Zato imamo $f[\overline{A}] = \{f(x) : x \in \overline{A}\} \subset \overline{f[A]}$.

$((d) \Rightarrow (c))$: Neka važi uslov (d) i neka je skup $F \subset Y$ zatvoren. Tada, na osnovu (d) i pošto je $f[f^{-1}[F]] \subset F$, imamo $f[\overline{f^{-1}[F]}] \subset \overline{f[f^{-1}[F]]} \subset \overline{F} = F$. Sada je $\overline{f^{-1}[F]} \subset f^{-1}[f[\overline{f^{-1}[F]}]] \subset f^{-1}[F]$, pa je skup $f^{-1}[F]$ zatvoren.

$((c) \Rightarrow (b))$: Neka važi usov (c). Ako je $O \subset Y$ otvoren skup, onda je skup $Y \backslash O$ zatvoren pa je, prema (c) i skup $f^{-1}[Y \backslash O] = X \backslash f^{-1}[O]$ zatvoren, odakle sledi da je $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$.

$((b) \Rightarrow (a))$: Neka važi uslov (b) i neka je $x \in X$ proizvoljna tačka, a V proizvoljna okolina tačke $f(x)$. Tada postoji otvoren skup O takav da $f(x) \in O \subset V$, odakle sledi da $x \in f^{-1}[O] \subset f^{-1}[V]$. Prema (b) skup $f^{-1}[O]$ je otvoren, pa je skup $U = f^{-1}[O]$ okolina tačke x i važi $f[U] = f[f^{-1}[O]] \subset O \subset V$, čime je dokazana neprekidnost funkcije f u proizvoljnoj tački $x \in X$.

Za ovaj rad, dokaz osobina e) i f) nisu neophodne. Njihov dokaz možete pronaći u [8]. $\square$

Teorema 2.39. Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$, $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ i $\langle Z, \mathcal{O}_Z \rangle$ proizvoljni topološki prostori a $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidno preslikavanje.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 100. $\square$

Lema 2.40. (**Urison**) Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ normalan prostor i neka su A i B neprazni, zatvoreni i disjunktni skupovi. Tada postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$ takva da važi $f[A] = \{0\}$ i $f[B] = \{1\}$.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 102. $\square$

Definicija 2.41. Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ topološki prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je:

- **otvoreno** akko za svaki otvoren skup $O \subset X$ skup $f[O] \subset Y$ je otvoren.
- **zatvoreno** akko za svaki zatvoren skup $F \subset X$ skup $f[F] \subset Y$ je zatvoren.

Definicija 2.42. Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **homeomorfizam** ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. f je bijekcija
2. f je neprekidno
3. f^{-1} je neprekidno.

Prostori $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ su **homeomorfni** ako i samo ako postoji homeomorfizam $f : X \to Y$. To označavamo sa $X \cong Y$.

Teorema 2.43. Neka su $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ proizvoljni topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:

1. f je homeomorfizam;
2. f je otvoreno;
3. f je zatvoreno.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 106. $\square$

2.7 Granica niza

Podsetimo se, **niz** u skupu X je svako preslikavanje $x : \mathbb{N} \to X$. Obično umesto $x(n)$ pišemo x_n, a niz označavamo sa $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, ili kraće, sa $\langle x_n \rangle$. Sledi definicija granice niza u proizvoljnom topološkom prostoru.

Definicija 2.44. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor. Tačka $a \in X$ je **granica niza** $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a postoji prirodan broj n_0, takav da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Za niz koji ima bar jednu granicu kažemo da je **konvergentan**.

U opštem slučaju, granica niza ne mora da bude jedinstvena. Sledeća teorema daje više informacija o jedinstvenosti granice niza.

Teorema 2.45. U Hauzdorfovom prostoru niz može da ima najviše jednu granicu.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 114. □

Ako niz $\langle x_n \rangle$ ima jedinstvenu granicu, a, onda pišemo $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Teorema 2.46. Ako je tačka x granica nekog niza tačaka skupa A, onda je $x \in \overline{A}$.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 114. □

Za niz $\langle x_n \rangle$ u prostoru X reći ćemo da je **stacionaran** ako i samo ako postoji tačka a i broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $x_n = a$, za sve $n \geq n_0$. Očigledno u proizvoljnom prostoru, stacionaran niz oblika $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, a, a, a, a, \ldots \rangle$ ima granicu a. Drugim rečima, u svakom topološkom prostoru svi stacionarni nizovi obavezno konvergiraju.

Teorema 2.47. Neka je $\langle X, O \rangle$ prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti i $A \subset X$ proizvoljan podskup. Tada važi:

$a)$ $x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji niz $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u skupu A čija je granica tačka x.

$b)$ Skup A je zatvoren ako i samo ako je granica svakog konvergentnog niza tačaka skupa A, element skupa A.

$c)$ Skup $D \subset X$ je gust ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ postoji niz $\langle d_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u skupu D, čija je granica tačka x.

Dokaz. $a)$ Neka je prvo $x \in \overline{A}$ i neka je $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva opadajuća baza okolina tačke x. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $B_n \cap A \neq \emptyset$, pa, prema aksiomi izbora, postoji niz $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, takav da je $a_n \in B_n \cap A$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljnu okolinu U tačke x postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $B_{n_0} \subset U$, pa je $a_n \in U$, za sve $n \geq n_0$. Dakle, tačka x je granica niza $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$.

Obratna inkluzija je tačna u svakom topološkom prostoru (teorema 2.46).

$b)$ Neka je A zatvoren skup i $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ niz u skupu A, čija je granica tačka x. Iz $a)$ imamo da $x \in \overline{A} = A$.

S druge strane, neka važi dati uslov i neka $x \in \overline{A}$. Prema tvrđenju $a)$ postoji niz $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u skupu A čija je granica tačka x, a prema datom uslovu imamo $x \in A$. Dakle $\overline{A} \subset A$, pa je $A = \overline{A}$, tj. A je zatvoren skup.

$c)$ Kako je skup $D \subset X$ gust ako i samo ako za svako $x \in X$ važi $x \in \overline{D}$, tvrđenje sledi primenom tvrđenja $a)$ ove teoreme. □

2.8 Filteri i ultrafilteri

Generalno, ultrafilteri igraju jako bitnu ulogu u različitim matematičkim konstrukcijama. Za potrebe ovog rada, njihova primena će se videti u sekciji 4, gde će značajno olakšati dokaz da je grupa sa Remzijevim svojstvom ekstremno amenabilna grupa.

Definicija 2.48. Neka je X neprazan skup. Neprazna kolekcija $\Phi \subset P(X)$ podskupova skupa X je **filter** ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(FI1) Prazan skup nije element kolekcije Φ;

(FI2) Presek proizvoljna dva elementa kolekcije Φ je element Φ, tj. za sve $F_1, F_2 \in \Phi$ važi $F_1 \cap F_2 \in \Phi$;

(FI3) Svaki nadskup proizvoljnog elementa kolekcije Φ je u Φ, tj. ako $F \in \Phi$ i ako je $F \subset A \subset X$, onda $A \in \Phi$.

Filter Φ je **glavni** ako i samo ako je $\bigcap\limits_{F\in\Phi} F \neq \emptyset$; inače je **neglavni**.

Može se indukcijom pokazati, na osnovu uslova (FI2), da je presek konačno mnogo elemenata filtera takođe element filtera.

Primer 2.49. (a) Neka je X neprazan skup. Ako je $A \subset X$ neprazan podskup skupa X, onda je kolekcija $\Phi_A = \{F \subset X \mid A \subset F\}$ filter, i to glavni, jer je $\bigcap\limits_{F\in\Phi} F = A$.

(b) **Frešeov filter na beskonačnom skupu**

Ako je X beskonačan skup, onda je kolekcija komplemenata konačnih podskupova skupa X, to jest kolekcija

$$\Phi_{Fr} = \{X \backslash K \mid K \subset X \text{ je konačan skup}\}$$

filter, što se lako pokazuje. Ovaj filter je neglavni, jer je

$$\bigcap_{F\in\Phi} F = X \backslash \bigcup \{K \mid K \subset X \text{ je konačan skup}\} = X \backslash X = \emptyset$$

i zovemo ga Frešeov filter.

Definicija 2.50. Neprazna kolekcija $\mathcal{A}$ podskupova skupa X ima **svojstvo konačnog preseka**, skraćeno s.k.p, ako i samo ako svaka konačna potkolekcija kolekcije $\mathcal{A}$ ima neprazan presek.

Za familiju sa s.k.p kaže se još i da je **centrirana**. Iz uslova FI1 i FI2 vidimo da svaki filter ima s.k.p. S druge strane, svaka familija sa s.k.p. može da se dopuni do filtera, što pokazujemo u sledećoj teoremi.

Teorema 2.51. Svaka kolekcija $\mathcal{A}$ podskupova nepraznog skupa X koja ima s.k.p. je sadržana u nekom filteru.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}^*$ kolekcija podskupova skupa X koji sadrže presek neke konačne potkolekcije kolekcije $\mathcal{A}$. Dokažimo da je $\mathcal{A}^*$ filter koji sadrži $\mathcal{A}$.
Prvo, kako za svako $A \in \mathcal{A}$ važi $\cap\{A\} = A \subset A$, imamo da je $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$.
Dokažimo da je kolekcija $\mathcal{A}^*$ filter. Svaki element F kolekcije $\mathcal{A}^*$ ima podskup oblika $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ gde $n \in \mathbb{N}$ i $A_i \in \mathcal{A}$, koji je neprazan (jer $\mathcal{A}$ ima s.k.p.), te je $F \neq \emptyset$, odnosno uslov FI1 je zadovoljen. No, i svaki nadskup A skupa F sadrži isti presek, pa pripada kolekciji $\mathcal{A}^*$, te je i uslov FI3 ispunjen. Konačno, ako $F' \in \mathcal{A}^*$ i ako je $A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots \cap A'_m \subset F'$, gde $m \in \mathbb{N}$ i $A'_i \in \mathcal{A}$, onda imamo $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots A'_m \subset F \cap F'$, pa $F \cap F' \in \mathcal{A}^*$, što dokazuje FI2. □

Definicija 2.52. Filter $\mathcal{U} \subset P(X)$ je **maksimalan filter** ili **ultrafilter** ako i samo ako za svaki filter $\Phi \subset P(X)$ iz $\mathcal{U} \subset \Phi$ sledi $\mathcal{U} = \Phi$.

Može se pokazati da je svaki glavni ultrafilter $\mathcal{U}$ na nepraznom skupu X oblika $\mathcal{U} = \Phi_{\{x\}} = \{A \subset X : x \in A\}$, za neko $x \in X$, pa za svaki podskup $A \subset X$ važi da $A \in \mathcal{U}$ (ako je $x \in A$) ili $X \setminus A \in \mathcal{U}$ (inače). No ovo je još jedna karakteristika ultrafiltera. Na ovo ćemo se vratiti u sekciji 4.

Teorema 2.53. Filter $\mathcal{U} \subset P(X)$ je ultrafilter ako i samo ako za svaki podskup $A \subset X$ važi: $A \in \mathcal{U}$ ili $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\mathcal{U} \subset P(X)$ ultrafilter. Pretpostavimo da $\mathcal{U}$ ne sadrži ni A ni $X \setminus A$. Dokazujemo da kolekcija $\mathcal{U} \cup \{A\}$ ima s.k.p. Presek konačno mnogo elemenata kolekcije $\mathcal{U}$ je neprazan, jer je $\mathcal{U}$ filter. Ako $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, onda je $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \cap A \neq \emptyset$, jer bismo inače imali $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \subset X \setminus A \in \mathcal{U}$. Dakle, kolekcija $\mathcal{U} \cup \{A\}$ ima s.k.p. pa je, prema teoremi 2.51, kolekcija $(\mathcal{U} \cup \{A\})^*$ filter (operacija $*$ ima isto značenje kao i u teoremi 2.51). To je istrovremeno i pravi nadskup skupa $\mathcal{U}$ (jer sadrži A), što je nemoguće zbog maksimalnosti $\mathcal{U}$.
($\Leftarrow$) Neka je $\mathcal{U}$ filter, takav da za svaki podskup $A \subset X$ važi $A \in \mathcal{U}$ ili $X \setminus A \in \mathcal{U}$. Neka je $\Phi \subset P(X)$ filter takav da je $\mathcal{U} \subset \Phi$. Pretpostavimo da postoji $F \in \Phi \setminus \mathcal{U}$. Tada bismo imali $X \setminus F \in \mathcal{U} \subset \Phi$, odakle $F \cap X \setminus F = \emptyset \in \Phi$, što je nemoguće.

Dakle $\Phi = \mathcal{U}$, pa je $\mathcal{U}$ ultrafilter. □

Sledi najbitnija teorema za ovaj rad koja se odnosi na ultrafiltere.

Teorema 2.54. Svaka kolekcija $\mathcal{A}$ podskupova nepraznog skupa X koja ima s.k.p. sadržana je u nekom ultrafilteru.

Dokaz. Neka je X neprazan skup i neka kolekcija $\mathcal{A} \subset P(X)$ ima s.k.p. Prema teoremi 2.51, skup

$$\mathbf{P} = \{\Phi \subset P(X) : \mathcal{A} \subset \Phi \wedge \Phi \text{ filter }\} \subset P(P(X))$$

je neprazan. Posmatramo parcijalno uređen skup $\langle \mathbf{P}, \subset \rangle$. Neka je $\mathcal{L} \subset \mathbf{P}$ proizvoljan lanac (podskup totalno uređen relacijom $\subset$). Dokažimo da je $\Psi = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{L}} \Phi$ element skupa $\mathbf{P}$. Kako je $\mathcal{A} \subset \Psi \subset P(X)$, ostaje da se pokaže da je kolekcija Ψ filter.

Proizvoljan element F skupa Ψ pripada nekom filteru $\Phi \in \mathcal{L}$, pa je $F \neq \emptyset$, odakle sledi FI1. Takođe, za svaki skup $A \subset X$, takav da je $F \subset A$, imamo $A \in \Phi \subset \Psi$, te je i uslov FI3 zadovoljen. Konačno, ako je i $F' \in \Psi$ i $\Phi' \in \mathcal{L}$ takvo da je $F' \in \Phi'$, onda važi $\Phi \subset \Phi'$ ili

$\Phi' \subset \Phi$, jer je $\mathcal{L}$ lanac. U prvom slučaju imamo da $F, F' \in \Phi'$, pa kako je Φ' filter, sledi da $F \cap F' \in \Phi' \subset \Psi$. Analogno, $F \cap F' \in \Psi$ i u drugom slučaju.

Dakle imamo $\Psi \in \mathbf{P}$, a kako za svako $\Phi \in \mathcal{L}$ važi $\Phi \subset \Psi$, filter Ψ je gornje ograničenje lanca $\mathcal{L}$.

Prema lemi Corna, postoji maksimalni element $\mathcal{U} \in \mathbf{P}$. Jasno, $\mathcal{U}$ je filter i $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$. Pokažimo da je $\mathcal{U}$ i ultrafilter. Ako je $\Phi \subset P(X)$ filter koji sadrži $\mathcal{U}$, onda sadrži i kolekciju $\mathcal{A}$ pa $\Phi \in \mathbf{P}$. Pošto je $\mathcal{U}$ maksimalan element $\mathbf{P}$, iz $\mathcal{U} \subset \Phi$ sledi da je $\Phi = \mathcal{U}$. $\square$

Posledica 2.55. Na svakom beskonačnom skupu postoji neglavni ultrafilter.

Dokaz. Neka je X beskonačan skup a $\Phi_{Fr} \subset P(X)$ Frešeov filter (primer $2.49(b)$). Prema prethodnoj teoremi postoji ultrafilter $\mathcal{U} \subset P(X)$, takav da je $\Phi_{Fr} \subset \mathcal{U}$. Kako je

$$\bigcap_{F \in \mathcal{U}} F \subset \bigcap_{F \in \Phi_{Fr}} F = \emptyset,$$

ultrafilter $\mathcal{U}$ je neglavni. $\square$

Lema 2.56. Neka su X i Y neprazni skupovi a $f : X \to Y$ sirjekcija. Tada, ako je $\mathcal{U} \subset P(X)$ ultrafilter na X, onda je $\mathcal{V} = \{f[U] : U \in \mathcal{U}\}$ ultrafilter na Y.

Dokaz. Za dokaz pogledati [8], strana 24. $\square$

Ova lema će igrati bitnu ulogu u dokazu teoreme Tihonova, koju navodimo u narednoj tački.

2.9 Kompaktnost. Kompaktnost u Hauzdorfovim prostorima

U ovoj tački ideju o kompaktnosti razvijamo apstraktno: govorimo o kompaktnom topološkom prostoru. Prvo uvodimo pojam pokrivača.

Definicija 2.57. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor i $A \subset X$. Familija $\{O_i : i \in I\}$ podskupova skupa X je **pokrivač skupa** A ako i samo ako je $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} O_i$.

Ako su pritom skupovi $O_i, i \in I$, otvoreni, onda za pokrivač kažemo da je **otvoren**. Za potkolekciju pokrivača koja i sama predstavlja pokrivač kažemo da je **potpokrivač** datog pokrivača.

Definicija 2.58. Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ je **kompaktan** ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač.

Koristeći pojam kompaktnog prostora definišemo kompaktan podskup topološkog prostora.

Definicija 2.59. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ topološki prostor. Skup $A \subset X$ je **kompaktan skup** ako i samo ako je potprostor $\langle A, \mathcal{O}_A \rangle$ kompaktan topološki prostor.

Teorema 2.60. (Hajne-Borel) Podskup A prostora $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob} \rangle$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.

Dokaz. Pogledati [8], strana 144. $\square$

Definicija 2.61. Osobina P topoloških prostora je **invarijanta neprekidnih preslikavanja** ako i samo ako za svaka dva topološka prostora $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ i $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ i svaku neprekidnu sirjekciju $f : X \to Y$ važi:

Ako prostor X ima osobinu P, onda i prostor Y ima osobinu P.

Teorema 2.62. Kompaktnost je invarijanta neprekidnih preslikavanja.

Dokaz. Neka je $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$ kompaktan, a $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ proizvoljan topološki prostor i neka je $f : X \to Y$ neprekidna sirjekcija. Neka je $Y = \bigcup_{i \in I} O_i$, gde $O_i \in O_Y$, za sve $i \in I$. Tada je $X = f^{-1}[Y] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[O_i]$, a kako su, zbog neprekidnosti funkcije f, skupovi $f^{-1}[O_i]$ otvoreni, postoje $i_1, \ldots, i_k \in I$, takvi da je $X = \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}[O_{i_j}]$. No tada, kako je f sirjekcija pa važi $f[f^{-1}[O_{i_j}]] = O_{i_j}$, imamo $Y = f[X] = \bigcup_{j=1}^{k} f[f^{-1}[O_{i_j}]] = \bigcup_{j=1}^{k} O_{i_j}$, pa je $\{O_{i_j} : j \leq k\}$ konačan potpokrivač polaznog pokrivača. Prostor $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ je kompaktan. □

Definicija 2.63. Topološka osobina P je **nasledna** ako i samo ako za svaki topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ važi: ako prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ ima osobinu P, onda svaki njegov potprostor ima tu osobinu.

Teorema 2.64. Kompaktnost je nasledna osobina prema zatvorenim podskupovima.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 143. □

Prethodna teorema zapravo kaže da, ako je prostor kompaktan, onda su svi njegovi zatvoreni podskupovi kompaktni.

Teorema 2.65. Neka je $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ Hauzdorfov prostor i $A \subset X$ kompaktan skup.

a) Ako $x \notin A$, onda postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V, takvi da $x \in V$ i $A \subset U$

b) Skup A je zatvoren.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 144. □

Teorema 2.66. Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ je kompaktan ako i samo ako svaka kolekcija zatvorenih skupova koja ima s.k.p. ima neprazan presek.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ kompaktan i neka kolekcija zatvorenih skupova $\{F_i : i \in I\}$ ima s.k.p. Pretpostavimo da je $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Tada je $\bigcup_{i \in I} X \backslash F_i = X$, pa kako su skupovi $X \backslash F_i$ otvoreni, postoji konačan podskup $\{i_1 \ldots, i_k\} \subset I$ takav da je $X = \bigcup_{j=1}^{k} X \backslash F_{i_j}$. Prelaskom na komplement dobijamo $\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j} = \emptyset$, što je nemoguće jer posmatrana kolekcija ima s.k.p. Dakle, važi $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.
($\Leftarrow$) Neka važi dati uslov i neka je $X = \bigcup_{i \in I} O_i$, gde su skupovi $O_i \in \mathcal{O}, i \in I$ otvoreni. Tada je $\bigcap_{i \in I} X \backslash O_i = \emptyset$, pa kako su skupovi $X \backslash O_i$ zatvoreni, ova kolekcija nema s.k.p. Zato postoji konačan skup $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$, takav da je $\bigcap_{j=1}^{k} X \backslash O_{i_j} = \emptyset$, tj. $\bigcup_{j=1}^{k} O_{i_j} = X$. Dakle, $\{O_{i_1}, \ldots, O_{i_k}\}$ je konačan potpokrivač pokrivača $\{O_i : i \in I\}$. Ovakvo rezonovanje važi za svaki otvoren pokrivač skupa X, pa je prostor $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ kompaktan. □

Teorema 2.67. Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ je kompaktan ako i samo ako za svaki ultrafilter $\mathcal{U} \subset P(X)$ postoji tačka $x \in X$ čija svaka okolina pripada $\mathcal{U}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je prostor $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ kompaktan i neka je $\mathcal{U} \subset P(X)$ ultrafilter. Pretpostavimo da za svaku tačku $x \in X$ postoji okolina U_x te tačke tako da $U_x \notin \mathcal{U}$. Koristeći aksiomu izbora biramo otvorene skupove $O_x, x \in X$, takve da $x \in O_x \subset U_x$. Tada $O_x \notin \mathcal{U}$ pa, prema teoremi 2.53, imamo $X \backslash O_x \in \mathcal{U}$. Pritom važi $X = \bigcup\limits_{x \in X} O_x$ pa, zbog kompaktnosti prostora X, postoji konačan potpokrivač $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i}$. No, tada je $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X \backslash O_{x_i}) = X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i} = \emptyset$, što je nemoguće, jer $X \backslash O_{x_i} \in \mathcal{U}$, a ultrafilter $\mathcal{U}$ ima svojstvo konačnog preseka.

($\Leftarrow$) Neka važi dati uslov. Neka je $\mathcal{Z}$ familija zatvorenih skupova koja ima s.k.p. Prema teoremi 2.54, postoji ultrafilter $\mathcal{U} \subset P(X)$ takav da je $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$. Neka je $x \in X$ tačka čije su sve okoline elementi ultrafiltera $\mathcal{U}$ i neka $F \in \mathcal{Z}$. Tada za proizvoljnu okolinu U tačke x imamo $F, U \in \mathcal{U}$, pa je $U \cap F \neq \emptyset$. Zato $x \in \overline{F} = F$. Dakle, $x \in F$ za sve $F \in \mathcal{Z}$, pa je $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{Z}} F \neq \emptyset$. Prema prethodnoj teoremi, prostor $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ je kompaktan. □

Ako je prostor $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ iz prethodne teoreme Hauzdorfov, onda je tačka $x \in X$, čiju egzistenciju smo dokazali u prethodnoj teoremi, jedinstvena.

Teorema 2.68. Svaki kompaktan Hauzdorfov prostor je T_4-prostor.

Dokaz. Neka je $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ kompaktan Hauzdorfov prostor i neka su A i B disjunktni skupovi. Prema teoremi 2.64, skupovi A i B su zatvoreni, pa prema teoremi 2.65, za proizvoljno $b \in B$ postoje otvoreni disjunktni skupovi U_b i V_b takvi da je $A \subset U_b$ i $b \in V_b$. Sada je $B \subset \bigcup\limits_{b \in B} V_b$, pa zbog kompaktnosti skupa B, postoje $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B$ tako da je $B \subset V_{b_1} \cup V_{b_2} \cup \ldots \cup V_{b_k} = V$. Pritom je $A \subset U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap \ldots \cap U_{b_k} = U$ i skupovi U i V su otvoreni. Kako za svako $j \leq k$ iz $U \subset U_{b_j}$ sledi $U \cap V_{b_j} = \emptyset$, imamo $U \cap V = \emptyset$. □

Teorema 2.69. Neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup na kompaktan skup.

Dokaz. Direktno sledi iz teoreme 2.62. □

Teorema 2.70. Neka je f neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora $\langle X, \mathcal{O}_X\rangle$ u Hauzdorfov prostor $\langle Y, \mathcal{O}_Y\rangle$. Tada važi:

$a)$ f je zatvoreno preslikavanje.

$b)$ Ako je preslikavanje f bijekcija, onda je i homeomorfizam.

$c)$ Ako je preslikavanje f injekcija, onda je potapanje.

Dokaz. Dokaz pogledati u [8], na strani 146. □

2.10 Topološki proizvodi

U ovoj tački ćemo navesti osnovne pojmove i činjenice iz topoloških proizvoda potrebnih za ovaj rad. Za više informacija, čitaoce upućujemo na [8].
Prvo navodimo osnovne definicije i činjenice vezane za direktan proizvod skupova.
Direktan proizvod familije skupova $\{X_i : i \in I\}$ definisan je kao skup svih funkcija $x : I \to \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, takvih da $x(i) \in X_i$, $i \in I$, ili, ako umesto x pišemo $\langle x_i : i \in I\rangle$,

$$\prod_{i\in I} X_i = \{\langle x_i : i \in I\rangle : \forall i \in I(x_i \in X_i)\}.$$

Za $j \in I$, preslikavanje $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ dato sa $\pi_j(\langle x_i : i \in I\rangle) = x_j$ je **projekcija** proizvoda $\prod_{i\in I} X_i$ na prostor X_j.

Lema 2.71. Neka su $X_i, i \in I$ skupovi i $\emptyset \neq A_i, B_i \subset X_i, i \in I$. Tada važi:

$a)$ Ako je $A_i \subset B_i$ za sve $i \in I$, onda je $\prod\limits_{i\in I} A_i \subset \prod\limits_{i\in I} B_i$.

$b)$ $(\prod\limits_{i\in I} A_i) \cap (\prod\limits_{i\in I} B_i) = \prod\limits_{i\in I}(A_i \cap B_i)$.

$c)$ $(\prod\limits_{i\in I} A_i) \cap (\prod\limits_{i\in I} B_i) = \emptyset$ akko postoji $i \in I$ tako da je $A_i \cap B_i = \emptyset$.

$d)$ $\pi_j[\prod\limits_{i\in I} A_i] = A_j$.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 21. □

Teorema 2.72. Neka je I neprazan skup, a $\{\langle X_i, \mathcal{O}_i\rangle : i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada važi:

$a)$ Kolekcija $\mathcal{P}$ svih podskupova skupa $\prod X_i$ oblika $\pi_i^{-1}[O_i]$, gde je $i \in I$ proizvoljan indeks, a $O_i \in \mathcal{O}_i$ otvoren skup u prostoru X_i, je podbaza neke topologije na skupu $\prod X_i$. Označimo tu topologiju sa $\mathcal{O}$.

$b)$ Familija svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i] : K \subset I \wedge |K| < \aleph_0 \wedge \forall i \in K(O_i \in \mathcal{O}_i)\}$$

je baza topologije $\mathcal{O}$.

Dokaz. $a)$ Neka je $j \in I$. Kako je $X_j \in \mathcal{O}_j$, imamo $\pi_j^{-1}[X_j] = \prod X_i \in \mathcal{P}$, zbog uslova teoreme. Odavde sledi da je $\bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P = \prod X_i$, pa primenom teoreme 2.11 privodimo dokaz kraju.

$b)$ U $a)$ smo dokazali da je kolekcija $\mathcal{P}$ podbaza neke topologije. Iz definicije 2.10 sledi da familija svih konačnih preseka elemenata $\mathcal{P}$, koju smo označavali sa $\mathcal{B}$, predstavlja neku bazu topologije $\mathcal{O}$.

□

Lema 2.73. Uz pretpostavku i oznake uvedene u prethodnoj teoremi važi:

$$\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i] = \prod\nolimits_{i\in I} V_i, \quad \text{gde je } V_i = X_i, i \in I\backslash K \text{ i } V_i = O_i, i \in K.$$

Definicija 2.74. Topologiju $\mathcal{O}$ na skupu $\prod_{i\in I} X_i$, uvedenu u prethodnoj teoremi, zovemo **topologija Tihonova**. Za prostor $\langle\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{O}\rangle$ kažemo da je **(Tihonovski) proizvod** familije prostora $\{\langle X_i, \mathcal{O}_i\rangle : i \in I\}$.

Svaki element baze topologije Tihonova, skup oblika $\bigcap\limits_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i]$, je u stvari proizvod jedne familije skupova.

Primer 2.75. Prostor S_∞ sa topologijom Tihonova
Prostor $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ je prostor svih preslikavanja iz skupa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$. Kako je S_∞ skup svih bijekcija iz $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$, onda je $S_\infty \subset \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Na prostoru $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ je definisana topologija Tihonova, pa je i na prostoru S_∞, kao potprostoru od $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, definisana topologija Tihonova.
Označimo sa $\mathcal{O}$ topologiju Tihonova na $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Prema teoremi 2.2

$$\mathcal{O}_{S_\infty} = \{O \cap S_\infty : O \in \mathcal{O}\}$$

je topologija na S_∞.
Za $g \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, jedna bazna okolina elementa g je oblika

$$B_{x_1,x_2,\dots,x_n} = \{h \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : h(x_i) = g(x_i),\ i \leq n\},$$

za neke $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}$. S toga, baza okolina elementa $g \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ je familija

$$\mathcal{B}_g = \{B_{x_1,x_2,\dots,x_n} : n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}\}.$$

Primer 2.76. Baza prostora S_∞ sa topologijom Tihonova
Prema teoremi 2.22, skup je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje tačke. Neka je $\mathcal{O}$ topologija Tihonova na $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ i neka je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}_{S_\infty}$.
Neka je

$$\mathcal{B}' = \{N_h : h \text{ je bijekcija konačnih podskupova skupa } \mathbb{N}\},$$

pri čemu je $N_h = \{g \in S_\infty : g \text{ proširuje } h\}$.
Hoćemo da pokažemo da je $\mathcal{B}'$ baza za topologiju $\mathcal{O}_{S_\infty}$ iz prethodnog primera.
Prvo pokazujemo da je svaki element iz $\mathcal{B}'$ otvoren u $\mathcal{O}_{S_\infty}$.

Neka je $U \in \mathcal{B}'$. Dovoljno je dokazati da je okolina svake svoje tačke. Neka je $x \in U$. Pošto je $U \in \mathcal{B}'$, znamo da je $U = N_h$, za neku bijekciju konačnih podskupova skupa prirodnih brojeva. Neka su to A i B (h je bijekcija između A i B).
Pošto je $x \in U$, znamo da je $x(n) = h(n)$, za sve $n \in A$. Neka je

$$W = \bigcap_{n \in A} \pi_n^{-1}[h(n)] \subset \mathbb{N}^\mathbb{N}$$

jedan bazni skup u $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Tada je

$$V = S_\infty \cap W \in \mathcal{B}.$$

Sada je $x \in V = U$, pa je U otvoren skup u topologiji Tihonova na S_∞.
Dakle, svi elementi familije $\mathcal{B}'$ su otvoreni u S_∞.
Treba još dokazati da je svaki element baze $\mathcal{B}$ unija nekih elemenata familije $\mathcal{B}'$.

Neka je V proizvoljan element baze $\mathcal{B}$. To znači da je

$$V = \bigcap_{n \in K} \pi_n^{-1}[O_n]$$

za neke otvorene skupove $O_n \subset \mathbb{N}$ i K konačan podskup skupa $\mathbb{N}$. Neka je $x \in V$ proizvoljna tačka. Označimo

$$U_x = \{g \in S_\infty : g|_K = x|_K\}.$$

Pošto je x bijekcija između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$, onda je i $x|_K$ bijekcija između K i $x[K]$. Zbog toga $U_x \in \mathcal{B}'$.
Sada je

$$V = \bigcup_{x \in V} U_x,$$

jer je $x \in U_x \subset V$ ($x(n) \in O_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$).
Dakle, $\mathcal{B}'$ jeste baza za topologiju $\mathcal{O}_{S_\infty}$.
Ovo je prebrojiva baza jer postoji prebrojivo mnogo parova konačnih podskupova skupa prirodnih brojeva, a između elemenata svakog para samo konačno mnogo bijekcija.

Definicija 2.77. Neka je S konačan podskup skupa prirodnih brojeva. Skup

$$N_{(S)} = \{g \in S_\infty : (\forall a \in S)\ g \cdot a = a\}$$

se zove tačkasti stabilizator skupa S.

Primetimo da je $N_{(S)} = N_{id_S}$. Tada je $\{N_{(S)} : S \subset \mathbb{N},\ |S| < \infty\}$ prebrojiva baza okolina jedinice od S_∞, koja se sastoji od otvorenih podgrupa.

Teorema 2.78. Uz pretpostavke i oznake uvedene u teoremi sa početka ove sekcije važi:

$a)$ Projekcije $\pi_j : \prod X_i \to X_j$ su neprekidne otvorene sirjekcije.

$b)$ Ako je $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ topološki prostor, onda je preslikavanje $f : Y \to \prod X_i$ neprekidno ako i samo ako je za svako $i \in I$ kompozicija $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ neprekina.

Dokaz. $a)$ Neka je $j \in J$ proizvoljan indeks. Prema lemi 2.71(d) imamo $\pi_j[\prod X_i] = X_j$, pa je π_j sirjekcija. Dalje, za proizvoljan otvoren skup $O \in \mathcal{O}_j$, skup $\pi_j^{-1}[O]$ je otvoren u prostoru $\prod X_i$, pa je π_j neprekidno preslikavanje.

Dokažimo otvorenost preslikavanja π_j. Ako je $B = \bigcap\limits_{i \in K} \pi_i^{-1}[O_i]$ proizvoljan element baze $\mathcal{B}$ topologije Tihonova, onda, na osnovu lema 2.71 i 2.73, zaključujemo da za $j \in K$ imamo $\pi_j[B] = O_j$, dok za $j \in I \backslash K$ važi $\pi_j[B] = X_j$, pa je skup $\pi_j[B]$ u oba slučaja otvoren. Uopšte, ako je $O \subset \prod X_i$ proizvoljan otvoren skup, onda je $O = \bigcup\limits_{s \in S} B_s$, gde su B_s skupovi iz baze $\mathcal{B}$, pa je $\pi_j[O] = \pi_j[\bigcup\limits_{s \in S} B_s] = \bigcup\limits_{s \in S} \pi_j[B_s]$ otvoren skup u prostoru X_j, odakle sledi otvorenost preslikavanja π_j.

$b)$ Smer ($\Rightarrow$) sledi iz (a), jer je kompozicija neprekidnih funkcija neprekidna funkcija. S druge strane, ako su kompozicije $\pi_i \circ f, i \in I$, neprekidne, onda za proizvoljan element $\pi_i^{-1}[O_i]$ podbaze topologije Tihonova imamo $f^{-1}[\pi_i^{-1}[O_i]] = (\pi_i \circ f)^{-1}[O_i]$, a ovaj skup je otvoren zbog neprekidnosti preslikavanja $\pi_i \circ f$. Neprekidnost preslikavanja f sledi iz teoreme 2.38(f).

□

Definicija 2.79. Neka je I neprazan skup.

- *Kub Tihonova* je stepen $[0,1]^I$, gde je prostor $[0,1]$ sa uobičajenom topologijom. Specijalno, za $I = \mathbb{N}$, stepen $[0,1]^{\mathbb{N}}$ je *kub Hilberta*.

- *Kub Kantora* je stepen $\{0,1\}^I$, gde je na skupu $\{0,1\}$ diskretna topologija.

- *Kub Aleksandrova* je prstor $\mathbf{A}^I$, gde je $\mathbf{A}$ prostor $\{0,1\}$ sa topologijom $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$.

Definicija 2.80. Topološka osobina $\mathcal{P}$ je **multiplikativna** (prebrojivo multiplikativna, konačno multiplikativna) ako i samo ako je proizvod svake familije (respektivno: prebrojive, konačne familije) topoloških prostora $\{\langle X_i, \mathcal{O}_i \rangle : i \in I\}$, od kojih svaki ima osobinu $\mathcal{P}$, sa osobinom $\mathcal{P}$.

Teorema 2.81. **(Tihonov)** Proizvod proizvoljne kolekcije kompaktnih prostora je kompaktan prostor.

Dokaz. Neka su $\langle X_i, \mathcal{O}_i\rangle, i \in I$ kompaktni prostori, $X = \prod X_i$ i $\mathcal{U} \subset P(X)$ ultrafilter. Za proizvoljno $i \in I$, po svojoj definiciji projekcija π_i je sirjekcija, pa je prema lemi 2.56, kolekcija $\mathcal{U}_i = \{\pi_i[U] : U \in \mathcal{U}\}$ ultrafilter na skupu X_i. Zbog kompaktnosti prostora X_i, prema teoremi 2.67, postoji tačka $x_i \in X_i$, čija je svaka okolina element ultrafiltera $\mathcal{U}_i$, tj. takva da važi

$$(\forall V \in \mathcal{U}(x_i))(\exists U \in \mathcal{U})(V = \pi_i[U]) \tag{1}$$

Pomoću aksiome izbora biramo takve tačke $x_i \in X_i, i \in I$, tj. dobijamo tačku $x = \langle x_i : i \in I\rangle$ prostora $\prod X_i$. U skladu sa teoremom 2.67, ostaje da se pokaže da svaka okolina W tačke x pripada ultrafilteru $\mathcal{U}$.

Neka je $W \in \mathcal{U}(x)$. Tada postoji element baze topologije $B = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i]$, gde je $K \subset I$ konačan skup, a $O_i \in \mathcal{O}_i$, takav da $x \in B \subset W$. No, tada je $x_i \in O_i$ za sve $i \in K$, pa, prema (1), postoji $U_i \in \mathcal{U}, i \in K$, tako da je $O_i = \pi_i[U_i]$. Sada imamo

$$W \supset B = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i] = \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[\pi_i[U_i]] \supset \bigcap_{i\in K} U_i \in \mathcal{U},$$

pa $W \in \mathcal{U}$. Prema teoremi 2.67, prostor $\prod X_i$ je kompaktan. $\square$

Primer 2.82. Sa X_L označimo prostor svih struktura jezika L sa domenom $\mathbb{N}$. Primetimo da postoji prirodna bijekcija

$$f : X_L \to \prod_i 2^{(\mathbb{N}^{n_i})} \times \prod_j \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^{m_j})}.$$

Neka je topologija na X_L data tako da je U otvoren u X_L ako i samo ako je $f[U]$ otvoren u $\prod_i 2^{(\mathbb{N}^{n_i})} \times \prod_j \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^{m_j})}$. Tada je X_L homeomorfan sa $2^{\mathbb{N}}$.

Ako je jezik L relacioni, tj. ako je $J = \emptyset$, onda je prostor X_L kompaktan. Jer prema teoremi Tihonova, direktan proizvod skupova $2^{\mathbb{N}^{n_i}}$ je kompaktan, za svako $n_i \in \mathbb{N}$. Pa opet primenjujući teoremu Tihonova, ovaj put na direktan proizvod skupova $2^{\mathbb{N}^{n_i}}$, za svako $n_i \in \mathbb{N}$, dobijemo da je $\prod_i 2^{(\mathbb{N}^{n_i})} = X_L$ kompaktan.

Sa druge strane, prostor $\prod_j \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^{m_j})}$ nije kompaktan.

3 Osnovni pojmovi o poljskim grupama

U ovoj sekciji razmatramo bitnu metričku osobinu - kompletnost. Počinjemo od definicije Košijevog niza.

Definicija 3.1. Neka je $\langle X, d\rangle$ metrički prostor. Za niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, u prostoru X, kažemo da je **Košijev niz** ako i samo ako važi sledeći uslov

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)\ d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Za metrički prostor $\langle X, d\rangle$ kažemo da je **kompletan** ako svaki Košijev niz ima granicu u X. Takođe, za dati metrički prostor $\langle X, d\rangle$ postoji kompletan metrički prostor $\langle \bar{X}, \bar{d}\rangle$ takav da je $\langle X, d\rangle$ potprostor od $\langle \bar{X}, \bar{d}\rangle$ i X je gust u $\bar{X}$. Za ovakav prostor kažemo da je kompletiranje prostora $\langle X, d\rangle$.

Primer 3.2. Prostor sa 01-metrikom je kompletan
Neka je $\langle X, d_{01}\rangle$ diskretan topološki prostor i neka je $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev niz u ovom prostoru. Shodno definiciji Košijevog niza, odredimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za sve $m, n \geq n_0$ ispunjeno $d_{01}(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$. Tada, s obzirom na način na koji je $01-metrika$ definisana, za sve $m, n \geq n_0$ važi $x_m = x_n = x_{n_0}$, pa je niz stacionaran a kao takav i konvergentan.

Primer 3.3. Metrika Bera
Neka je X skup svih nizova elemenata skupa A. Za nizove $x = \langle x_\nu\rangle$ i $y = \langle y_\nu\rangle$ iz X definišemo

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \frac{1}{k}, & x \neq y,\ k = \min\{\nu \in \mathbb{N} : x_\nu \neq y_\nu\}. \end{cases}$$

Tada je prostor $\langle X, d\rangle$ kompletan.

Dokaz. Neka je $\langle x^{(m)}\rangle, x^{(m)} = \langle x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots\rangle$, proizvoljan Košijev niz u X. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$, tj. za svako $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ postoji $k(n) \in \mathbb{N}$ tako da za sve $p, q \geq k(n)$ važi $d(x^{(p)}, x^{(q)}) < \frac{1}{n}$. Odavde sledi da za $p \geq k(n)$ važi $x_n^p = x_n^{k(n)}$, pa su u nizu n-tih koordinata niza $\langle x^{(m)}\rangle$, počevši od $k(n)$-tog člana, svi elementi jednaki i obeležićemo ih sa y_n. Dakle, svaki koordinatni niz je konvergentan, tj. za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $y_n \in A$ tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(m)} = y_n$.

Obeležimo uočeni niz $\langle y_n\rangle$ sa y i dokažimo da $x^{(m)} \to y,\ m \to +\infty$ (videti sliku).

$$\begin{array}{cccccc}
x^{(1)}: & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & \ldots \\
x^{(2)}: & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\downarrow ? & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
y: & y_1 & y_2 & \ldots & y_n & \ldots
\end{array}$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno izabrano i neka je $n \in \mathbb{N}$ takvo da važi $\frac{1}{n} < \epsilon$. Tada postoje $m_\nu \in \mathbb{N},\ \nu = 1, 2, \ldots, n$, tako da niz ν-tih koordinata postaje y_ν za $m \geq m_\nu$. Neka je $m_0 =$max $\{m_\nu : 1 \leq \nu \leq n\}$. Tada za $m \geq m_0$ važi $x_\nu^{(m)} = y_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, n$, pa je

$$d(x^{(m)}, y) < \tfrac{1}{n} < \epsilon \qquad \text{i} \qquad x^{(m)} \to y,\ n \to +\infty.$$

Kako je svaki Košijev niz konvergentan u X, to je prostor X kompletan. □

Teorema 3.4. Metrički prostor $\langle X, d\rangle$ je separabilan akko ima najviše prebrojivu bazu.

Dokaz. Videti u [8], strane $87 - 88$. □

Teorema 3.5. U metričkom prostoru $\langle X, d\rangle$ važi:

a) Svaki konvergentan niz je Košijev.

b) Ako Košijev niz ima konvergentan podniz, onda je i sam konvergentan.

c) Svaki Košijev niz je ograničen.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 196. □

Definicija 3.6. Topološki prostor $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ je

- **nizovno kompaktan** ako i samo ako svaki niz u skupu X ima konvergentan podniz
- **prebrojivo kompaktan** ako i samo ako svaki beskonačan podskup skupa X ima tačku nagomilavanja.

Teorema 3.7. Neka je $\langle X, d\rangle$ metrički prostor. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) Prostor $\langle X, d\rangle$ je kompaktan.

b) Prostor $\langle X, d\rangle$ je nizovno kompaktan.

c) Prostor $\langle X, d\rangle$ je prebrojivo kompaktan.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 147. □

Teorema 3.8. (Teorema Bera) Neka je $\langle X, d\rangle$ kompletan metrički prostor i neka je $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva familija otvorenih, gustih podskupova skupa X. Tada je skup $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ gust.

Dokaz. Pogledati u [8], na strani 210. □

Definicija 3.9. Topološki prostor je **kompletno metrizabilan** ako postoji odgovarajuća metrika d takva da je $\langle X, d\rangle$ kompletan prostor. Separabilan, kompletno metrizabilan topološki prostor se zove **poljski prostor**.

Primer 3.10. Prebrojiv skup sa diskretnom topologijom je poljski
Neka je $\langle X, \mathcal{P}(X)\rangle$ prostor sa diskretnom topologijom i neka je X prebrojiv skup. Od ranije znamo da je diskretna topologija indukovana 01 metrikom (primer 2.15), tj. trivijalnom metrikom. Ovo je i kompletna metrika na osnovu primera 3.2. Ovaj prostor je i separabilan jer je merizabilan i ima prebrojivu bazu, pa je i poljski.

Primer 3.11. Prostor $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob}\rangle$ je poljski
Prvo ćemo dokazati da je prostor $\mathbb{R}$ sa uobičajenom metrikom kompletan.
Neka je $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev realan niz. On je, na osnovu teoreme 3.5 (c), ograničen, pa postoji interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ koji sadrži sve članove ovog niza. Skup $[a, b]$ je zatvoren i ograničen u uobičajenoj topologiji pa je kompaktan, na osnovu Hajne-Borelove teoreme. On je, s obzirom na teoremu 3.7 i nizovno kompaktan pa dati Košijev niz ima konvergentan podniz a na osnovu teoreme 3.5, on je i sam konvergentan.
Sada ćemo dokazati da je $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob}\rangle$ separabilan.
Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv i gust u $\mathbb{R}$ pa je prostor $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob}\rangle$ separabilan prostor.
Dakle, prostor $\langle \mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob}\rangle$ je poljski.

Definicija 3.12. Topološka grupa je grupa $\langle G, \cdot\rangle$ sa topologijom na G, tako da je preslikavanje $(x, y) \to xy^{-1}$ neprekidno (iz $G \times G$ u G).

Definicija 3.13. Poljska grupa je topološka grupa koja je ujedno i poljski prostor.

Teorema 3.14. [14, Primer 1.3] Proizvod prebrojivo mnogo poljskih prostora je poljski prostor.

Primer 3.15. Kantorov skup $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ je poljski prostor
Prostor $\mathbf{2} = \langle\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\})\rangle$ je poljski na osnovu primera 3.10, pa je i prostor $2^{\mathbb{N}}$ poljski prema teoremi 3.14. Zovemo ga Kantorov prostor.

3.1 Ekstenzija neprekidnih preslikavanja i homeomorfizama

Neka je X topološki prostor, $\langle Y, d\rangle$ metrički prostor, $A \subset X$ i $f : A \to Y$. Za svaki skup $B \subset Y$, neka je

$$\text{diam}(B) = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$$

(po konvenciji se uzima da je $\text{diam}(\emptyset) = 0$). Definišimo **oscilaciju** funkcije f u tački $x \in X$ na sledeći način

$$osc_f(x) = \inf\{\ \text{diam}(f[A \cap U]) : U \text{ je otvorena okolina tačke } x\ \}$$

Lema 3.16. Neka $x \in A$. Funkcija f je neprekidna u tački x akko je $osc_f(x) = 0$.

Dokaz. ($\subset$) Neka je $x \in A$ i neka je funkcija f neprekidna u tački x. Pretpostavimo da je $osc_f(x) \neq 0$. Neka je $osc_f(x) = \epsilon > 0$.
Znamo da je $L(f(x), \frac{\epsilon}{3}) \subset L(f(x), \epsilon)$.
Pošto je funkcija f neprekidna u tački $x \in A$, prema definiciji neprekidnosti u tački, sledi

$$(\forall V \in \mathcal{V}(f(x)))(\exists U \in \mathcal{U}(x))\ f[U] \subset V.$$

Kako $L(f(x), \frac{\epsilon}{3}) \in \mathcal{V}(f(x))$, onda mora postojati okolina U tačke x, takva da je $f[U] \subset L(f(x), \frac{\epsilon}{3})$. (1)
Sa druge strane, $osc_f(x) = \epsilon > 0$. Iz definicije oscilacije funkcije f u tački $x \in A$, sledi

$$\begin{array}{ll} & \text{inf}(\text{diam}(f[A \cap U])) = \epsilon \\ (\forall U \in \mathcal{U}(x)) & \text{diam}(f[A \cap U]) \geq \epsilon \\ (\forall U \in \mathcal{U}(x)) & \sup\{d(x', y') : x', y' \in f[A \cap U]\} \geq \epsilon \\ (\forall U \in \mathcal{U}(x)) & (\forall x', y' \in f[A \cap U])\ d(x', y') \geq \epsilon. \end{array}$$

To znači da je rastojanje svake dve tačke $x', y' \in f[A \cap U], U \in \mathcal{U}(x)$, veće ili jednako sa ϵ.
S druge strane, rastojanje svake dve tačke $x, y \in L(f(x), \frac{\epsilon}{3})$ je najviše $\frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$.
Dakle, ne postoji okolina U tačke $x \in A$, takva da je $f[U] \subset L(f(x), \frac{\epsilon}{3})$. Kontradikcija sa (1).
($\supset$) Za $x \in A$, neka je $osc_f(x) = 0$ tako da funkcija f nije neprekidna u tački x. To znači da postoji okolina tačke $f(x)$, takva, da se nijedna okolina tačke x ne slika u nju. To znači da ne postoji okolina tačke x za koju je $osc_f(x) \neq 0$. Kontradikcija. □

Za $\epsilon > 0$ definišimo sledeći skup:

$$A_\epsilon = \{x \in X : osc_f(x) < \epsilon\}.$$

Lema 3.17. Skup A_ϵ je otvoren.

Dokaz. Dokazaćemo da je A_ϵ okolina svake svoje tačke. Neka je $x \in A_\epsilon$ i neka je U okolina tačke x takva da je $\mathrm{diam}(f[A \cap U]) < \epsilon$. Tada za svaku tačku $y \in A \cap U$ važi $osc_f(y) < \epsilon$ (jer postoji otvorena okolina y, baš U, za koju je $\mathrm{diam}(f[A \cap U]) < \epsilon$ pa je i infimum ovih dijametara manji od ϵ). Dakle, $U \cap A \subset A_\epsilon$, pa je dokaz završen. □

Definicija 3.18. Za skup X kažemo da ima osobinu G_δ ako se može napisati kao presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova.

Lema 3.19. [7, Propozicija 3.6] Skup $\{x \in X : osc_f(x) = 0\}$, odnosno skup tačaka u kojima je f neprekidna, ima osobinu G_δ.

Dokaz. Očigledna je sledeća jednakost:

$$\{x \in X : osc_f(x) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}.$$

Ovim smo pokazali (imajući u vidu prethodnu lemu) da je skup $\{x \in X : osc_f(x) = 0\}$, odnosno skup tačaka u kojima je f neprekidna, presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova, dakle G_δ skup. □

Teorema 3.20. [7, Propozicija 3.7] Neka je X metrizabilan prostor. Svaki zatvoren podskup od X ima osobinu G_δ.

Dokaz. Neka je d kompatibilna metrika na X. Za $x \in X, \emptyset \neq A \subset X$ definišimo

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

Primetimo da, iz nejednakosti trougla, važi

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Definišimo sada otvorenu loptu poluprečnika $\epsilon > 0$, oko A, sa $L(A, \epsilon) = \{x : d(x, A) < \epsilon\}$. Dokazaćemo da, ako je $F \subset X$ zatvoren (b.u.o. pretpostavimo da je neprazan), onda je

$$F = \bigcap_n L(F, \frac{1}{n}).$$

($\subset$) Pretpostavimo da $x \in F$. Tada je:

$$\begin{aligned} &d(x, F) = d(x, x) = 0 \Rightarrow \\ &d(x, F) < \tfrac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &x \in L(F, \tfrac{1}{n}),\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &x \in \textstyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L(F, \frac{1}{n}). \end{aligned}$$

($\supset$) Pretpostavimo sada da $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L(F, \frac{1}{n})$. Tada:

$$\begin{aligned} &(\forall n \in \mathbb{N})\ x \in L(F, \tfrac{1}{n}) \Rightarrow \\ &(\forall n \in \mathbb{N})\ \inf d(x, F) < \tfrac{1}{n} \Rightarrow \\ &(\forall n \in \mathbb{N})\ \inf\{d(x, y) : y \in F\} < \tfrac{1}{n} \Rightarrow \\ &(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y_n \in F)\ d(x, y_n) < \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dakle, x je granica niza $\langle y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ čiji su svi elementi u F. Kako je F zatvoren, onda $x \in \overline{F} = F$.
Pošto je

$$F = \bigcap_n L(F, \frac{1}{n}),$$

onda F ima osobinu G_δ. □

Teorema 3.21. **(Kuratovski)**[7, Teorema 3.8] Neka je X metrizabilan prostor, Y kompletan metrizabilan prostor, $A \subset X$ i $f : A \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji G_δ podskup G od X, takav da je $A \subset G \subset \overline{A}$ i $g : G \to Y$ neprekidno proširenje preslikavanja f.

Dokaz. Zbog prethodnog zapisa, neka je $G = \overline{A} \cap \{x : osc_f(x) = 0\}$. Ovaj presek je G_δ skup jer iz leme 3.19 sledi da je $\{x : osc_f(x) = 0\}$ takođe G_δ skup. Očigledno je da je $G \subset \overline{A}$. Pošto je f neprekidno, gore smo naveli da ako je f neprekidno u tački x, onda je $osc_f(x) = 0$. No, funkcija f je neprekidna na celom skupu A pa mora biti neprekidna u svakoj njenoj tački, pa je $osc_f(x) = 0$, za sve $x \in A$. Odatle sledi da je $A \subset G \subset \overline{A}$.

Sada, neka $x \in G$. Pošto $x \in \overline{A}$, a svaki metrički prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti, prema teoremi 2.47, postoji niz $\langle x_n \rangle \in A$, takav da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tada je $\lim_{n\to\infty}(\text{diam}(f[\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}])) = 0$ (Za proizvoljno $\epsilon > 0$ odaberemo otvorenu okolinu tačke x za koju je diam$(f[A \cap U]) < \epsilon$. Tada za $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za $n \geq n_0$ bude ispunjeno $x_n \in A \cap U$, važi i diam$(f[\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}]) \leq$ diam$(f[A \cap U]) < \epsilon$) . Zbog toga je niz $\langle f(x_n) \rangle$ Košijev, što znači da je konvergentan u prostoru Y koji je kompletan.
Neka je

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Prvo pokazujemo da je g dobro definisano, odnosno da ne zavisi od izbora niza $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$. Neka je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Pretpostavimo da postoji i niz $\langle y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, koji konvergira ka $x \in X$, takav da je $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = b, a \neq b$. Znamo da je Y Hauzdorfov prostor (iz teoreme 2.36), pa postoje disjunktne okoline U i V takve da $a \in U$ i $b \in V$. Tada, ako izaberemo dovoljno veliko $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$ za $m \geq m_0$ i $k \geq k_0$ imaćemo da $f(x_m) \in U$ i $f(y_k) \in V$. Tada postoji $r > 0$ tako da je $d(f(x_m), f(y_k)) > r$. Znamo da je f neprekidna, odnosno da je $osc_f(x) = 0$, za $x \in A$. To znači da postoji okolina W tačke x takva da je diam$f[A \cap W] < \frac{r}{2}$. Za dovoljno veliko m, k biće $f(x_m), f(y_k) \in f[A \cap W]$, odnosno $d(f(x_m), f(y_k)) < \frac{r}{2}$. Kontradikcija. Prema tome, pokazali smo da je definicija dobra.

Pokažimo da je preslikavanje g neprekidno tako što ćemo dokazati da je $osc_g(x) = 0$, za $x \in G$. Neka je $x \in G$ proizvoljno. Tada, za okolinu U u G tačke x važi $g[U] \subset \overline{f[U]}$ (jer za $x \in A$ je $g(x) = f(x)$, a za $x \in G \backslash A$, zbog dobre definisanosti $g(x)$, ono se može izabrati kao $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, gde svi $x_n \in U$) , pa

$$\text{diam}(g[U]) \leq \text{diam}(\overline{f[U]}) = \text{diam } f[U],$$

pa je $osc_g(x) \leq osc_f(x) = 0$. Da je funkcija g zaista proširenje funkcije f je očigledno, jer za $x \in A$ je $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

□

Teorema 3.22. [7, Teorema 3.11]

(i) Neka je X metrizabilan prostor i $Y \subset X$ kompletno metrizabilan. Tada Y ima osobinu G_δ u X.

(ii) Ako je prostor X kompletno metrizabilan i $Y \subset X$ ima osobinu G_δ, onda je Y kompletno metrizabilan.

Dokaz. (i) Neka je X metrizabilan i Y njegov kompletno metrizabilan potprostor. Posmatrajmo identičko preslikavanje $id_Y : Y \to Y$. Ono je neprekidno, pa iz teoreme Kuratovskog sledi da postoji G_δ skup G, takav da je $Y \subset G \subset \overline{Y}$ i neprekidno proširenje preslikavanja id_Y, funkcija $g : G \to Y$. Za tačku $x \in G$ važi da je granica nekog niza $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ iz Y (ovo sledi direktno iz teoreme 2.47, jer je $Y \subset G \subset \overline{Y} \Rightarrow \overline{Y} \subset \overline{G} \wedge \overline{G} \subset \overline{Y}$). Dalje je $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} id_Y(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. Kako $g(x) \in Y$ sledi da $x \in Y$, pa je $Y = G$ i $g = id_Y$.

(ii) Ako Y ima osobinu G_δ, onda se Y može napisati kao presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova U_n. Dakle, $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Definišimo $F_n = X \backslash U_n$. Neka je sa d označena kompletna metrika prostora X. Pokažimo da je sa

$$d'(x,y) = d(x,y) + \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\min\{2^{-1-n}, |\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)}|\}$$

definisana kompletna metrika na Y.

Bitno je prvo uočiti da red u gornjem izrazu konvergira (jer red $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-1-n}$ konvergira), pa je metrika d' dobro definisana.

Prvo pokazujemo da je d' metrika.
$(M1)$ $d'(x,y) \geq d(x,y) \geq 0$
$(M2)$ $x \neq y \;\Rightarrow\; d'(x,y) \geq d(x,y) > 0$
$x = y \;\Rightarrow\; d'(x,y) = 0 + 0 = 0$
$(M3)$ Kako je $\left|\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(x,F_n)}\right| = \left|\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)}\right|$, onda je

$$\begin{aligned} d'(x,y) &= d(x,y) + \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\min\{\frac{1}{2^{n+1}}, |\frac{1}{d(y,F_n)} - \frac{1}{d(x,F_n)}|\} \\ &= d(y,x) \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\min\{\frac{1}{2^{n+1}}, |\frac{1}{d(y,F_n)} - \frac{1}{d(x,F_n)}|\} \\ &= d'(y,x). \end{aligned}$$

$(M4)$

$$\begin{aligned} d'(x,z) &= d(x,z) + \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\min\{\frac{1}{2^{n+1}}, |\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(z,F_n)}|\} \\ &\leq d(x,y) + d(y,z) + \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\min\{\frac{1}{2^{n+1}}, |\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(y,F_n)} + \frac{1}{d(y,F_n)} - \frac{1}{d(z,F_n)}|\} \\ &\leq d'(x,y) + d'(y,z). \end{aligned}$$

Dakle, d' je metrika.

Sada pokazujemo da d' generiše istu topologiju na Y kao i d.
Neka je $\epsilon > 0$ i $y \in L^d(x,\epsilon)$, za neko $x \in Y$.
To znači da $y \in Y$ i da je $d(x,y) < \epsilon$.
Neka je δ realan broj takav da je $0 < \delta < \epsilon - d(x,y)$.
Pokazaćemo da je $L^{d'}(y,\delta) \subset L^d(x,\epsilon)$, što će pokazati da je topologija na Y generisana sa d ista kao i topologija na Y generisana sa d'.

Neka je $z \in L^{d'}(y,\delta)$ proizvoljno.
Tada je $d'(z,y) < \delta$, pa je $\delta > d(y,z) + \sum_{n=0}^{\infty}\min\{\frac{1}{2^{n+1}}, |\frac{1}{d(y,F_n)} - \frac{1}{d(z,F_n)}|\}$.
Odatle imamo da je $\epsilon - d(x,y) > d(y,z) + \sum_{n=0}^{\infty}\min\{\frac{1}{2^{n+1}}, |\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(z,F_n)}|\}$,
pa je $\epsilon > d(x,y) + d(y,z) + \sum_{n=0}^{\infty}\min\{\frac{1}{2^{n+1}}, |\frac{1}{d(x,F_n)} - \frac{1}{d(z,F_n)}|\} \geq d(x,z)$, tj. $z \in L^d(x,\epsilon)$.
Dakle, topologije su iste.

Sada pokazujemo da je $\langle Y, d'\rangle$ kompletan.
Neka je $\langle y_n : n \in \mathbb{N}$ Košijev niz u $\langle Y, d'\rangle$.

Pošto je $d(x,y) \leq d'(x,y)$, za sve $x,y \in Y$ znamo da je $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev i u $\langle X,d\rangle$.
Pošto je $\langle X,d\rangle$ kompletan postoji $y \in X$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.
Treba još pokazati da $y \in Y$.

Pošto je $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev a $|\frac{1}{d(y_m,F_n)} - \frac{1}{d(y_k,F_n)}| \leq d'(y_m,y_k)$, za sve $m,k,n \in \mathbb{N}$ i niz $\langle \frac{1}{d(y_m,F_n)} : m \in \mathbb{N}\rangle$ je Košijev za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je konvergentan i ograničen. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Pošto je $\langle \frac{1}{d(y_m,F_n)} : m \in \mathbb{N}\rangle$ ograničen sledi da je $d(y_m,F_n) \geq a > 0$, za fiksirano a i za svako $n \in \mathbb{N}$. Dakle, pošto je $y = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$ i $d(y,F_n) \geq a > 0$, onda $y \notin F_n$. Pošto je bilo proizvoljno $y \notin F_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$, sledi da $y \in Y$. Dakle, $\langle Y,d'\rangle$ je kompletan prostor. $\square$

Teorema 3.23. [3, Propozicija 1.2.1] Podgrupa H poljske grupe G je poljska akko H ima osobinu G_δ akko je H zatvorena.

Dokaz. Prva ekvivalencija sledi iz teoreme 3.22.
Dokazujemo drugu ekvivalenciju: H ima osobinu G_δ akko je H zatvorena.
($\Leftarrow$) Iz teoreme 3.20 sledi direktno.
($\Rightarrow$) Pretpostavimo da H ima osobinu G_δ. Posmatrajmo $\overline{H}$. Znamo da je $\overline{H}$ zatvorena podgrupa grupe G , a kako svaka zatvorena podgrupa ima osobinu G_δ, onda je $\overline{H}$ i poljska grupa.
Prvo ćemo dokazati da ako H ima osobinu G_δ u $\overline{H}$, onda to ima i svaki koset kH, za sve $k \in \overline{H}$.

Pošto H ima osobinu G_δ, prema definiciji 3.18

$$H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n,$$

gde je G_n otvoren skup u $\overline{H}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $k \in \overline{H}$,

$$kH = k(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} kG_n.$$

Preslikavanje $f(x) = kx$ je homeomorfizam topoloških grupa (dokaz pogledati u [12]). Tada, ako je G_n otvoren, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda je i kG_n otvoren skup za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, kH ima osobinu G_δ.
Sada dokazujemo da ako je H gust u $\overline{H}$, onda je i svaki koset kH gust u $\overline{H}$, za sve $k \in \overline{H}$.

Neka je H gust u $\overline{H}$. To znači da za svaki otvoren skup $U \subset \overline{H}$, $U \cap H \neq \emptyset$. Preslikavanje $f(x) = k^{-1}x$ je homeomorfizam (dokaz pogledati u [12]). Tada je $k^{-1}U$ otvoren skup, pa je $k^{-1}U \cap H \neq \emptyset$. No, tada je i

$$\begin{gathered} k(k^{-1}U \cap H) \neq \emptyset \iff \\ kk^{-1}U \cap kH \neq \emptyset \iff \\ U \cap kH \neq \emptyset. \end{gathered}$$

Sa druge strane, znamo da je $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Skup G_n, za sve $n \in \mathbb{N}$ je otvoren jer H ima osobinu G_δ, a gust je jer je $H \subset G_n$.
Rekli smo da je kG_n, za sve $n \in \mathbb{N},\ k \in \overline{H}$, otvoren. Skup kG_n je gust jer je $kH \subset kG_n$, za sve $n \in \mathbb{N},\ k \in \overline{H}$, a kH je gust za sve $k \in \overline{H}$.
Iz teoreme Bera sledi da je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} kG_n \neq \emptyset.$$

A to znači da je

$$H \cap kH \neq \emptyset,$$

za sve $k \in \overline{H}$.
Ako se dva koseta seku onda oni moraju biti isti. A pošto H seče kH, za sve $k \in \overline{H}$, onda je $H = kH$, za sve $k \in \overline{H}$. Ako su svi koseti isti onda postoji samo jedan koset. Zbog toga je $H = \overline{H}$. □

Teorema 3.24. Neka G poljska grupa i $H \subset G$ zatvorena podgrupa. Tada je G/H poljski prostor i ako je H normalna podgrupa, onda je G/H poljska grupa.

Dokaz. Pogledati u [12]. □

Teorema 3.25. (Uspenskii) Svaka poljska grupa je izomorfna podgrupi od $H(I^{\mathbb{N}})$, grupi homeomorfizama Hilbertovog kuba $I^{\mathbb{N}}$, $I = [0, 1]$.

Dokaz. Pogledati u [7], teorema 9.18. □

Primer 3.26. Prostor S_∞ sa topologijom Tihonova je poljski prostor
Skup $\mathbb{N}$ sa diskretnom topologijom je poljski prostor na osnovu primera 3.10. Na osnovu teoreme 3.14, sledi da je $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, sa topologijom Tihnova, poljski prostor.
Dokazujemo da S_∞, kao podskup od $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ima osobinu G_δ .

Neka je $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \text{ je injekcija}\}$ i neka je $B = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \text{ je sirjekcija}\}$. Jasno je da je $S_\infty = A \cap B$.
Prvo pokazujemo da je A zatvoren u $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Posmatrajmo komplement $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus A$.

Neka je $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus A$. To znači da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $m < n$ a $g(m) = g(n)$.
Neka je $U = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(m) = f(n) = g(n)\}$.
Po definiciji topologije Tihonova na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, skup U je otvoren u $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Po definiciji skupa U važi da $g \in U \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus A$. Dakle komplement skupa A je otvoren pa je A zatvoren. Prema teoremi 3.20 skup A ima osobinu G_δ.

Sada pokazujemo da i B ima osobinu G_δ u $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$.
Prvo primetimo da je $U_n = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\exists m \in N)\ f(m) = n\}$ otvoren u $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ovo je tačno zato što je $U_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}}\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(m) = n\}$ unija baznih.
Sada je $B = \bigcap_{n \in N} U_n$, pa je B prebrojiv presek otvorenih skupova, a to znači da B ima osobinu G_δ.
Dakle, S_∞, kao presek dva skupa koja imaju osobiu G_δ, ima osobinu G_δ.
Prema teoremi 3.22(ii), S_∞ sa topologijom Tihonova, je poljski prostor.

3.2 Neke činjenice o simetričnoj grupi S_∞

Sledeća teorema je jedna od karakterizacija poljskih grupa.

Teorema 3.27. Neka je G poljska grupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(1) G je izomorfno zatvorenoj podgrupi od S_∞;

(2) G sadrži prebrojivu bazu okolina jedinice 1_G sastavljene od otvorenih podgrupa;

(3) G sadrži prebrojivu bazu zatvorenu u odnosu na levo (desno) množenje.

Dokaz. Pogledati u [2], na strani 9. □

Ono što će nas interesovati u ovom radu su prebrojive strukture $\mathbf{A}$ (strukture čiji je domen A prebrojiv skup).
Za prebrojivu strukturu $\mathbf{A}$, skup $Aut(\mathbf{A})$ je skup svih automorfizama iz A u A koji u odnosu na kompoziciju obrazuje grupu:

- Neutralni element je idetičko preslikavanje.

- Kompozicija je asocijativna operacija.

- Svaki automorfizam je i bijekcija a svaka bijekcija ima inverzno preslikavanje koje je takođe izomorfizam, onda je svaki element iz $Aut(\mathbf{A})$ invertibilan.

Dakle, $\langle Aut(\mathbf{A}), \circ\rangle$ je grupa.
Umesto $\langle Aut(\mathbf{A}), \circ\rangle$, pisaćemo kraće samo $Aut(\mathbf{A})$.
Grupa $Aut(\mathbf{A})$ je podgrupa od S_A. Kako je na S_A definisana topologija Tihonova, onda je i na $Aut(\mathbf{A})$, kao potprostoru od S_A, definisana topologija Tihonova.

Lema 3.28. Za prebrojivu relacionu strukturu $\mathbf{A}$, grupa $Aut(\mathbf{A})$, je zatvorena podgrupa od S_A, poljske grupe permutacija od A sa topologijom Tihonova.

Dokaz. Neka je $\mathbf{A}$ relaciona struktura u jeziku L i neka je $g \in S_A \backslash Aut(\mathbf{A})$. To znači da postoji relacioni simbol R^A iz L arnosti n i neki $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ takvi da je $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^A$ a $(g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)) \notin R^A$, pri čemu je $g|_{\{x_1,\ldots,x_n\}}$ bijekcija između $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i skupa $\{g(x_1), \ldots, g(x_n)\}$.
Označimo $h = g|_{\{x_1,\ldots,x_n\}}$.
Sada je $N_h = \{f \in S_A : f \text{ proširuje } h\}$ bazni skup u S_A i važi

$$g \in N_h \subset S_A \backslash Aut(\mathbf{A}).$$

Pošto je g proizvoljna tačka u $S_A \backslash Aut(\mathbf{A})$, to znači da je $S_A \backslash Aut(\mathbf{A})$ otvoren skup, pa je $Aut(\mathbf{A})$ zatvoren skup u S_A. $\square$

Lema 3.29. Neka je A prebrojiv skup. Za svaku zatvorenu podgrupu $G \leq S_A$, postoji jezik L i ultrahomogena prebrojiva relaciona struktura $\mathbf{A}_G$, sa domenom A, takva da je $Aut(\mathbf{A}_G) = G$.

Dokaz. Dejstvo G na A^n definišimo na sledeći način: $g \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (g(a_1), \ldots, g(a_n))$.
Neka su za svako $n \geq 1, \mathcal{O}_1^n, \mathcal{O}_2^n \ldots$ orbite dejstva G na A^n.
Neka je $L = \{R_{n,i}\}_{n\geq 1, i\geq 1}$, gde svako $R_{n,i}$ predstavlja n-arni relacioni simbol.
Definišimo $\mathbf{A}_G$ na sledeći način: $\mathbf{A}_G = \langle A, R_{n,i}^{\mathbf{A}_G}\rangle$, pri čemu je $R_{n,i}^{\mathbf{A}_G} = \mathcal{O}_i^n$.

Dokažimo prvo da je $\mathbf{A}_G$ ultrahomogena.

Neka su $\mathbf{B}, \mathbf{C} \subset \mathbf{A}_G$ i neka su A i B konačni skupovi. Tada je $\mathbf{B} = \langle B, \{R_{n,i}^B\rangle$ i $\mathbf{C} = \langle C, \{R_{n,i}^C\rangle$. Jasno je da je $R_{n,i}^B = R_{n,i}^{\mathbf{A}_G} \cap B^n$ i $R_{n,i}^C = R_{n,i}^{\mathbf{A}_G} \cap C^n$.
Neka je $\psi : B \to C$ izomorfizam i neka je $|B| = m$. Pošto je ψ izomorfizam, onda je ψ i bijekcija pa je $|C| = m$.
Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Torka $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ pripada orbiti $G \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_m) = R_{m,j}^{\mathbf{A}_G}$, za neko j, pa je $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \in R_{m,j}^B = R_{m,j}^{\mathbf{A}_G} \cap B^m$. Pošto je ψ izomorfizam, mora biti $(\psi(b_1), \psi(b_2), \ldots, \psi(b_m)) \in R_{m,j}^C = R_{m,j}^{\mathbf{A}_G} \cap C^m$, što znači da $(\psi(b_1), \psi(b_2), \ldots, \psi(b_m)) \in R_{m,j}^{\mathbf{A}_G}$. Dakle, $(b_1, \ldots, b_m)$ i $(\psi(b_1), \ldots, \psi(b_m))$ leže u istoj orbiti $\mathcal{O}_j^m$, odakle sledi da postoji

$g \in G$, tako da je $g \cdot (b_1, \ldots, b_m) = (\psi(b_1), \ldots, \psi(b_m))$.
Drugim rečima: $g|_{\{b_1,\ldots,b_m\}} = \psi$, odakle sledi da je $\mathbf{A}_G$ ultrahomogena.

Sada ćemo dokazati da je $Aut(\mathbf{A}_G) = G$.

($\supset$) Neka $g \in G$ i neka je $n \geq 1$ i $i \geq 1$ fiksirano. Tada je $(a_1, \ldots, a_n)$ u relaciji $R_{n,i}$ ako i samo ako je $(a_1, \ldots, a_n)$ u $\mathcal{O}_i^n$ ako i samo ako je $(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ u $\mathcal{O}_i^n$ ako i samo ako je $(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ u relaciji $R_{n,i}$. Dakle, g je automorfizam.

Komentar: Primetimo da je ovo tačno jer smo relacije definisali preko orbita.

($\subset$) Pretpostavimo da $g \in Aut(\mathbf{A}_G)$. Na S_A imamo topologiju Tihonova, pa posmatramo baznu okolinu elementa g. Ta bazna okolina je oblika

$$U = \{g' \in S_A : g'(x) = g(x), x \in B\}.$$

Tada je $\mathbf{B}$ konačna podstruktura od $\mathbf{A}_G$.
Neka je $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Pošto je $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{O}_i^n$, za neku orbitu $\mathcal{O}_i^n$, onda je i $g \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (g(a_1), \ldots, g(a_n)) \in \mathcal{O}_i^n$, jer je g automorfizam, a automorfizmi čuvaju sve n-arne relacije. Pošto je $\mathcal{O}_i^n$ orbita grupe G, to znači da postoji $h \in G$ takav da je $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = (g(a_1), \ldots, g(a_n))$. A to dalje znači da $h \in U$, što znači da svaka okolina elementa g seče grupu G, a to znači da $g \in \overline{G}$, a kako je G zatvorena, onda je $G = \overline{G}$. To nam daje da $g \in G$. $\square$

4 Ekstremno amenabilne zatvorene podgrupe grupe S_∞

U ovoj glavi ćemo pažnju posvetiti Fraiseovoj teoriji, tačnije nekim vezama između klasa struktura sa svojstvom amalgamacije i ultrahomogenih struktura, Remzijevoj teoriji, kao i topološkoj dinamici grupe automorfizama prebrojivih struktura.

4.1 Osnovni pojmovi

Glavna tema izučavanja topološke dinamike je izučavanje neprekidnih dejstava (Hauzdorfovih) topoloških grupa G na (Hauzdorfov) kompaktan prostor X. Oni se obično nazivaju G-tokovi.

Definicija 4.1. **Tok** je uređena trojka $\langle X, G, \pi\rangle$ gde je X topološki prostor, G topološka grupa i π neprekidno preslikavanje iz $G \times X$ u X, koje ima sledeće osobine:

(1) $\pi(1_G, x) = 1_G \cdot x = x \quad (x \in X,\ 1_G$ je identitet na $G)$

(2) $\pi(h, \pi(g, x)) = \pi(hg, x) \quad (x \in X,\ h, g \in G)$.

Prostor X se još zove i **fazni prostor** a G **fazna grupa** ili **grupa dejstava**.

U nastavku, umesto $\langle X, G, \pi\rangle$, ćemo kraće reći: *X je G-tok*.

Svako $g \in G$ definiše neprekidno preslikavanje π^g iz X u X dato sa $\pi^g(x) = \pi(g, x) = g \cdot x$. Umesto $\pi(g, x)$ u nastavku ćemo pisati $g \cdot x$.
Ako $h, g \in G$, onda je

$$\pi^h(x) \circ \pi^g(x) = \pi^h(\pi^g(x)) = \pi^h(g \cdot x) = \pi(h, g \cdot x) = h \cdot (g \cdot x) = \pi(hg, x) = \pi^{hg}(x).$$

G je grupa, pa iz $h, g \in G$ sledi da $hg \in G$. Dalje,

$$\pi^g \circ \pi^{g^{-1}} = \pi^{1_G},$$

identičko preslikavanje na X, pa je svaki $\pi^g(x) = \pi(g, x), x \in X$, homeomorfizam skupa X na samog sebe, pri čemu je $(\pi^g)^{-1} = \pi^{g^{-1}}$.

Za element $g \in G$ kažemo da deluje na element $x \in X$ tako što ga preslikava u tačku $g \cdot x$.

U topološkoj dinamici se ispituju dejstva topološke grupa na Hauzdorfov prostor X. Ne mora nužno prostor X da bude Hauzdorfov, ali ta pretpostavka nosi sa sobom dosta korisnih osobina. Nas će još zanimati i ako je X kompaktan, tj. kada je X kompaktan Hauzdorfov prostor. Ovo nam dosta sužava pogled na topološke prostore, pa nam je lakše da radimo sa manjom klasom prostora, koja ima karakteristike kao što to ima kompaktan Hauzdorfov prostor.

Neka je X G-tok i neka $x \in X$. **Orbita** elementa x je skup

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$$

i **zatvorenje orbite** elementa x, je skup

$$\overline{G \cdot x}.$$

Definicija 4.2. Neka je G grupa i X neprazan skup. Tada je $G \cdot X = \bigcup\{G \cdot x : x \in X\}$.

Definicija 4.3. Skup $K \subset X$ je **invarijantan** ako je $G \cdot K = K$

Lema 4.4. Neka je G grupa i $K \subset X$ skup. Tada je

$$G \cdot K = K \quad \Longleftrightarrow \quad G \cdot K \subset K.$$

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Ako je $G \cdot K = K$, onda je to ekvivalentno sa

$$G \cdot K \subset K \quad \wedge \quad K \subset G \cdot K,$$

pa je dokaz završen.
$(\Leftarrow)$ Pretpostavimo da je $G \cdot K \subset K$.
Pokazujemo da je $K \subset G \cdot K$.
Neka je $k \in K$. Tada je $G \cdot k \subset K$, tj za sve $g \in G$

$$g \cdot k \in K,$$

pa postoji neko $k' \in K$, takvo da je $g \cdot k = k'$.
Pošto je G grupa, onda je svaki element invertibilan, pa za $g \in G$ postoji $g^{-1} \in G$, takvo da je $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1_G$. Pomnožimo jednakost $g \cdot k = k'$ sa g^{-1} sa leve strane, tj.

$$g^{-1} \cdot (g \cdot k) = g^{-1} \cdot k' \iff$$
$$(g^{-1} \cdot g) \cdot k = g^{-1} \cdot k' \iff$$
$$k = g^{-1} \cdot k' \in G \cdot K.$$

Dakle, $K \subset G \cdot K$. □

Primetimo da je $\overline{G \cdot x}$ kompaktan i invarijantan skup.

Definicija 4.5. Neka je Y neprazan, kompaktan, G-invarijantan podskup skupa X. Kažemo da je Y **podtok** ako se posmatra restrikcija G-dejstva sa X na Y.

Definicija 4.6. G-tok X je **minimalan** ako nema pravih podtokova.

Primetimo da je tok M minimalan tok toka X akko je M zatvorenje orbite svake svoje tačke. Jer, ako je M minimalan i $x \in M$, zatvorenje orbite $\overline{G \cdot x}$ je zatvoren, invarijantan i neprazan skup, pa je $\overline{G \cdot x} = M$. Sa druge strane, ako M nije minimalan, neka je $\emptyset \neq N \subsetneq M$, gde je N zatvoren i invarijantan skup. Tada, ako $x \in N$, $\overline{G \cdot x} \subset N$, pa je $\overline{G \cdot x} \neq M$.

Prethodna definicija nam kaže i da je X minimalan akko je svaka orbita gusta. Može se pokazati, primenom Zornove leme, da svaki G-tok X sadrži minimalan podtok $Y \subset X$.

Primer 4.7. (1) Trivijalan primer minimalnog skupa nekog toka je $\{x_0\}$, gde je x_0 fiksna tačka, tj. $g \cdot x_0 = x_0$, za svako $g \in G$, ako takva tačka postoji.

(2) $\theta : \mathbb{Z} \times 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}, \langle n, f(x) \rangle \to f^n(x)$
Na skupu $\mathbb{Z}$ je definisana diskretna topologija.
Prostor $2 = \{0, 1\}$, sa diskretnom topologijom, je kompaktan Hauzdorfov prostor. Kako je T_2 multiplikativna osobina, onda je i $2^{\mathbb{Z}}$ Hauzdorfov prostor, a prema teoremi 2.81 je $2^{\mathbb{Z}}$ i kompaktan prostor.
Ostalo je da pokažemo da je preslikavanje $\theta : \mathbb{Z} \times 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$, dato sa $\theta(\langle n, f(x) \rangle) = f^n(x)$

neprekidno. Na prostoru $2^{\mathbb{Z}}$ je definisana topologija Tihonova. Prema tome, jedan bazni skup iz $2^{\mathbb{Z}}$, koji sadrži f^n, je oblika:

$$U = \{h \in 2^{\mathbb{Z}} : h(x_1) = f^n(x_1), \dots, h(x_k) = f^n(x_k)\}.$$

Da bismo dokazali neprekidnost, treba da pronađemo otvorenu okolinu tačke $\langle n, f\rangle$, koja se cela slika u U. Ta otvorena okolina mora biti oblika $V_1 \times V_2$, gde je V_1 okolina n a V_2 okolina od f. Te okoline izgledaju:

$$V_1 = \{n\}$$

$$V_2 = \{g \in 2^{\mathbb{Z}} : g(x_1) = f(x_1), \dots, g(x_k) = f(x_k)\}.$$

Dakle, V_1 je okolina tačke n. Ovo je otvoren skup jer je na $\mathbb{Z}$ definisana diskretna topologija. Dok su u V_2 svi g-ovi, koji rade na konačno mnogo mesta, isto što i f, po topologiji Tihonova.
Ono sto hoćemo da dokažemo je da $\{n\} \cdot g \in U$, za svako $g \in V_2$. Ako dokažemo da je $n \cdot g(x_l) = g^n(x_l) = f^n(x_l)$, za svako $l \in \{1, 2, \dots, k\}$, završili smo dokaz.
V_1 je okolina broja n, dok iz V_2 znamo da je $g(x_l) = f(x_l)$, za svako $l \in \{1, 2, \dots, k\}$. Pa ako uzmemo baš $n \in \{n\}$, dobićemo da je:

$$n \cdot g(x_l) = g^n(x_l) = f^n(x_l) \in U$$

za svako $l \in \{1, 2, \dots, k\}$.
Dakle, dejstvo θ je neprekidno, pa je $2^{\mathbb{Z}}$ jedan $\mathbb{Z}$-tok.

Primer 4.8. Grupa S_∞ deluje (u nekim literaturama se ovakvo dejstvo zove kanoničko) na X_L, prostor iz primera 2.82, na sledeći način: Za datu strukturu $\mathbf{A} = \langle \mathbb{N}, \{R_i^{\mathbf{A}}\}, \{f_j^{\mathbf{A}}\}\rangle$ neka je $g \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} = \langle \mathbb{N}, \{R_i^{\mathbf{B}}\}, \{f_j^{\mathbf{B}}\}\rangle$, gde

$$R_i^{\mathbf{B}}(a_1, \dots, a_{n(i)}) \iff R_i^{\mathbf{A}}(g^{-1}(a_1), \dots, g^{-1}(a_{n(i)}))$$

$$f_j^{\mathbf{B}}(a_1, \dots, a_{m(j)}) = f_j^{\mathbf{A}}(g^{-1}(a_1), \dots, g^{-1}(a_{m(j)})),$$

pa g predstavlja izomorfizam iz $\mathbf{A}$ u $\mathbf{B}$. Ovo sledi iz definicije izomorfizma. Jer ako su neki elementi u relaciju u originalu, onda i njihove slike moraju da budu u relaciji, primenom datog izomorfizma. Dakle, dejstvo g, koje deluje na elemente koji su u relaciji koje je gore definisano, zaista predstavlja izomorfizam struktura.

Da bismo lakše shvatili koncept dejstva grupe S_∞ na X_L, posmatrajmo primer strukture $(\mathbb{Q}, <)$. Ovde imamo samo jednu i to binarnu relaciju. Dakle, $i = 1$, pa ga možemo zanemariti u zapisu. Označimo $R^{\mathbf{B}} =<^{\mathbf{B}}=<^{g\cdot\mathbf{A}}$ i $R^{\mathbf{A}} =<^{\mathbf{A}}$. Pri čemu je domen struktura $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ skup $\mathbb{Q}$. Sada koristeći gore definisano dejstvo elemenata u relaciji, kažemo da je, za $x, y \in \mathbb{Q}$

$$\langle x, y\rangle \in <^{g\cdot\mathbf{A}} \iff \langle g^{-1}(x), g^{-1}(y)\rangle \in <^{\mathbf{A}}$$

što je ekvivalentno sa

$$\langle g(x), g(y)\rangle \in <^{g\cdot\mathbf{A}} \iff \langle x, y\rangle \in <^{\mathbf{A}} .$$

Ovako definisano dejstvo se zove **logičko dejstvo**. Dokazaćemo sada da je ono i neprekidno.

Dokaz sprovodimo direktno, koristeći definiciju 2.37. Posmatrajmo preslikavanje $\varphi : S_\infty \times X_L \to X_L$, dato sa $\varphi(g, A) = g \cdot A = B$.

Za svaku okolinu $B \in U$ treba nam okolina $\langle g, A \rangle \in V$ tako da $f \cdot C \in U$ za sve $\langle f, C \rangle \in V$.

$$U = \{D : r_1 <^D q_1, \ldots, r_k <^D q_k\}$$

za neke $r_1, \ldots, r_k, q_1, \ldots, q_k$ fiksirane iz $\mathbb{Q}$, za koje je $r_1 <^B q_1, \ldots, r_k <^B q_k$.

$$V_1 = \{f \in S_\infty : (\forall i \leq k)(f^{-1}(r_i) = g^{-1}(r_i) \ i \ f^{-1}(q_i) = g^{-1}(q_i))\}$$

$$V_2 = \{C \in X_L : (\forall i \leq k) \ g^{-1}(r_i) <^C g^{-1}(q_i)\}$$

Za $f \in V_1, C \in V_2$ važi

$$g^{-1}(r_i) <^C g^{-1}(q_i), \quad \text{za sve} \ \ i \leq k \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(r_i) <^C f^{-1}(q_i), \text{za sve} \ \ i \leq k \Leftrightarrow$$

$$r_1 <^{f \cdot C} q_1, \ldots, r_k <^{f \cdot C} q_k \Leftrightarrow$$

$$f \cdot C \in U.$$

Odavde direktno sledi da $f \cdot C = f(C) \in U$. Dakle, dejstvo je neprekidno.

Konačno, znamo da je X_L kompaktan Hauzdorfov prostor ako je jezik L relacioni. Znamo i da je grupa $G \leq S_\infty$ topološka grupa, a sad smo objasnili i da je dejstvo neprekidno. Prema definiciji 4.1, X_L je G-tok.

Posmatrajmo sada jezik $L = \{<\}$, gde je $<$ jedna binarna relacija. Sa LO označimo kompaktan S_∞-invarijantan podskup od X_L, koji sadrži sva linearna uređenja $\mathbf{A} = \langle \mathbb{N}, <^{\mathbf{A}} \rangle$ na $\mathbb{N}$. Ovako definisano LO je podtok od G-toka X_L, jer su domeni isti ali LO posmatra samo linearna uređenja, dok X_L posmatra i šire, ne samo uređenja koja ne moraju da budu linerna, nego i relacije koje ne moraju da budu uređenja. Kažemo da G **čuva neko uređenje** ako ovaj podtok ima fiksnu tačku, tj. ako postoji uređenje $\prec$ na $\mathbb{N}$ takvo da je, za sve $g \in G$

$$a \prec b \iff g(a) \prec g(b).$$

Među minimalnim tokovima date grupe G, postoji najveći (univerzalni), zvani **univerzalan minimalan tok**. Da bismo definisali njega, potreban nam je prvo koncept homomorfizama G-toka. Neka su X i Y dva G-toka. **Homomorfizam** G-toka X u G-tok Y je neprekidno preslikavanje $\pi : X \to Y$, takvo da je

$$\pi(g \cdot x) = g \cdot \pi(x), \quad x \in X, g \in G.$$

Primetimo da ako je Y minimalan, onda je bilo koji homomorfizam iz X u Y sirjektivan. Kao i ranije, **izomorfizam** iz X u Y je bijektivni homomorfizam $\pi : X \to Y$, takvo da je i π^{-1} homomorfizam.

Teorema 4.9. [6, Teorema 1.1] Neka je data topološka grupa G. Tada postoji minimalan G-tok $M(G)$ sa sledećim svojstvima: za bilo koji minimalan G-tok X postoji homomorfizam $\pi : M(G) \to X$. Šta više, $M(G)$ je jedinstveno određen do na izomorfizam ovim svojstvom.

Prostor $M(G)$ se zove **univerzalan minimalan tok** od G. Za ovaj rad nam neće biti potrebna dalja analiza ove strukture.

Definicija 4.10. Topološka grupa G je **ekstremno amenabilna** ako svaki G-tok ima fiksnu tačku, tj. za svaki G- tok X, postoji tačka $x \in X$ takva da je, za svako $g \in G$ ispunjeno $g \cdot x = x$.

Sada ćemo navesti bitne karakteristike ekstremno amenabilnih grupa.

Lema 4.11. [6, Lema 4.1] Neka je G topološka grupa i X G-tok. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(1) G-tok X ima fiksnu tačku.

(2) Za svako $n = 1, 2, \dots$ i neprekidno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}^n, \epsilon > 0, F \subset G$ konačan, postoji $x \in X$, takvo da je $|f(x) - f(g \cdot x)| \leq \epsilon$, za svako $g \in F$, gde $|\cdot|$ predstavlja Euklidsku normu.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Po uslovu (1) i definiciji G-toka, postoji $x \in X$, takvo da je $g \cdot x = x$, za svako $g \in G$. Tada je:

$$|f(x) - f(g \cdot x)| = |f(x) - f(x)| = 0 \leq \epsilon$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Za $f : X \to \mathbb{R}^n$ neprekidno, $\epsilon > 0, F \subseteq G$ konačan, neka je

$$A_{f,\epsilon,F} = \{x \in X : \forall g \in F \ (\ |f(x) - f(g \cdot x)| \leq \epsilon \ )\}.$$

Dokaz ćemo sprovesti iz tri dela.
Prvi deo. Pokazujemo da je $A_{f,\epsilon,F}$ zatvoren.

Posmatrajmo preslikavanje $\psi : X \to X \times X$, dato sa $\psi(x) = \langle x, g \cdot x\rangle$. S obzirom da je G grupa, postoji g^{-1} pa je $\varphi_g(x) = g \cdot x$ homeomorfizam. To znači da je preslikavanje ψ neprekidno.

Takođe je i preslikavanje $\phi : X \times X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dato sa $\phi(\langle x, y\rangle) = \langle f(x), f(y)\rangle$, neprekidno jer je i preslikavanje f neprekidno.

Posmatrajmo sada skup $Z = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \epsilon\}$. Ovaj skup je zatvoren jer mu je komplement otvoren. Ako bi $|x - y| > \epsilon$, na primer neka je $|x - y| = d = const.$, onda je $L(\langle x, y\rangle, \frac{d-\epsilon}{3}) \cap Z = \emptyset$.

Kako su ϕ i ψ neprekidne funkcije, onda je i njihova kompozicija neprekidna funkcija, pa je inverzna slika zatvorenog skupa zatvoren skup. Dakle,

$$A_{f,\epsilon,\{g\}} = \psi^{-1}[\phi^{-1}[Z]]$$

je zatvoren.
Drugi deo.
Sada ćemo pokazati da je

$$\bigcap\{A_{f,\epsilon,F} \mid f : X \to \mathbb{R}^n \text{ neprekidna}, \ \epsilon > 0, \ F \subset G, \ |F| < \infty\} \neq \emptyset.$$

Dovoljno je dokazati da je $\bigcap_{j=1}^{m} A_{f_j,\epsilon_j,F_j} \neq \emptyset$, za svaku konačnu kolekciju $\langle f_j, \epsilon_j, F_j\rangle, j = 1, \dots, m$. Jer će na osnovu definicije 2.50 familija $\{A_{f,\epsilon,F} \mid f : X \to \mathbb{R}^n$ neprekidna, $\epsilon > 0, \ F \subset G, \ |F| < \infty\}$ imati svojstvo konačnog preseka, pa će iz teoreme 2.66, pošto je X kompaktan, slediti da je

$$\bigcap\{A_{f,\epsilon,F} \mid f : X \to \mathbb{R}^n \text{ neprekidna}, \ \epsilon > 0, \ F \subset G, \ |F| < \infty\} \neq \emptyset.$$

Neka je

$$\bar{F} = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m, \quad \bar{\epsilon} = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_m\}$$
$$\bar{f} = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \mathbb{R}^{n_1+n_2+\cdots+n_m},$$

gde $f_i : X \to \mathbb{R}^{n_i}$.

Kako je F_i konačan skup za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$, onda je i $\bar{F}$ konačan skup kao konačna unija konačnih skupova.

Prema teoremi 2.78 b), funkcija $\bar{f}$ je neprekidna akko je $\bar{f} \circ \pi_j$ neprekidno preslikavanje za svako $j \leq n_1 + \cdots + n_m$, pri čemu je π_j projekcija proizvoda $\mathbb{R}^{n_1+n_2+\cdots+n_m}$ na prostor $\mathbb{R}^{n_j}$. No, $\bar{f} \circ \pi_j = f_i \circ \pi_j$ jeste neprekidno, za i za koje je $n_1 + \cdots + n_{i-1} < j \leq n_1 + \cdots + n_i$, jer je f_i neprekidno preslikavanje po uslovu teoreme a kako su i projekcije neprekidne, onda je i njihova kompozicija neprekidno preslikavanje.

Ostaje još da pokažemo da je $A_{\bar{f},\bar{\epsilon},\bar{F}} \subset \bigcap_{j=1}^{m} A_{f_j,\epsilon_j,F_j}$. Neka $x \in A_{\bar{f},\bar{\epsilon},\bar{F}}$. Dovoljno je pokazati da $x \in A_{f_j,\epsilon_j,F_j}$, za svako $j \leq m$. To znači da, za svako $g \in F_j,\ j \leq m$, važi $|f_j(x) - f_j(g \cdot x)| \leq \epsilon_j$. Neka je $\bar{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) = (x_1, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_m})$ i $\bar{f}(g \cdot x) = (f_1(g \cdot x), \ldots, f_m(g \cdot x)) = (y_1, \ldots, y_{n_1+\ldots+n_m})$. Tada:

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(g \cdot x)| = |(x_1, \ldots, x_{n_1+\ldots+n_m}) - (y_1, \ldots, y_{n_1+\ldots+n_m})|$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_{n_1+\ldots+n_m} - y_{n_1+\ldots+n_m})^2} \leq \bar{\epsilon} \leq \epsilon_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Pošto je

$$|f_j(x) - f_j(g \cdot x)| = \sqrt{\sum_{i > n_1+\ldots+n_{j-1}}^{n_1+\ldots+n_j} (x_{n_i} - y_{n_i})^2} \leq$$

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_{n_j} - y_{n_j})^2 + \ldots + (x_{n_1+\ldots+n_m} - y_{n_1+\ldots+n_m})^2} \leq \bar{\epsilon} \leq \epsilon_j,$$

za svako j iz skupa $\{1, 2, \ldots, m\}$, onda $x \in \bigcap_{j=1}^{m} A_{f_j,\epsilon_j,F_j}$, pa je $A_{\bar{f},\bar{\epsilon},\bar{F}} \subset \bigcap_{j=1}^{m} A_{f_j,\epsilon_j,F_j}$. Ali, po uslovu leme, $A_{\bar{f},\bar{\epsilon},\bar{F}}$ je neprazan skup, pa je i $\bigcap_{j=1}^{m} A_{f_j,\epsilon_j,F_j}$ neprazan.

Treći deo. Svaka tačka iz $\bigcap\{A_{f,\epsilon,F} \mid f : X \to \mathbb{R}^n$ neprekidna$, \epsilon > 0, F \subset G, |F| < \infty\}$ je fiksna tačka.

Pretpostavimo suprotno. Neka $x \in \bigcap A_{f,\epsilon,F}$ tako da je $g \cdot x \neq x$, za neko $g \in G$. Kako je X kompaktan, Hauzdorfov prostor, onda je prema teoremi 2.66, X normalan T_1 prostor. Prema teoremi 2.33, $\{x\}$ i $\{g \cdot x\}$ su zatvoreni skupovi. Sada prema lemi Urisona, postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$, takva da je $f[\{x\}] = 0$ i $f[\{g \cdot x\}] = 1$. No, tada za $\epsilon = \frac{1}{2}$, sledi

$$|f(x) - f(g \cdot x)| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon.$$

Pa, $x \notin A_{f,\epsilon,\{g\}}$. Kontradikcija sa pretpostavkom da $x \in \bigcap A_{f,\epsilon,F}$. □

Ovu lemu koristimo da dokažemo sledeću jako bitnu teoremu.
Za funkcija $f : X \to \{1, 2, \ldots, k\}$ kažemo da je bojenje skupa X (u k boja).

Teorema 4.12. [6, Propozicija 4.2] Neka je S_∞ grupa permutacija na skupu $\mathbb{N}$ sa topologijom Tihonova. Ako je $G \leq S_\infty$ zatvorena podgrupa, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(1) G je ekstremno amenabilna.

(2) Za svaku otvorenu podgrupu V iz G, svako bojenje $c : G/V \to \{1, \ldots, k\}$, skupova levih koseta hV iz V i svaki konačan $A \subset G/V$, postoji $g \in G$ i $1 \leq i \leq k$, takvo da je $c(g \cdot a) = i$, za svako $a \in A$, gde G deluje na G/V na uobičajen način $g \cdot hV = ghV$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Neka su V, k, c fiksirani kao u (2). Neka je dato prirodno dejstvo grupe G na $Y = \{1, 2, \ldots, k\}^{G/V}$, definisano sa $g \cdot p(x) = p(g^{-1} \cdot x)$, za $p \in Y, x \in G/V$.

Grupa S_∞ je poljska grupa a G je zatvorena podgrupa od S_∞, pa je po teoremi 3.23 i G poljska grupa. Po definiciji poljske grupe, G mora biti topološka grupa.

Konačan skup $\{1, 2, \ldots, k\}$ je kompaktan. A prema teoremi Tihonova, sledi da je Y kompaktan prostor kao proizvod kompaktnih prostora.

Prostor $Y = \{1, 2, \ldots, k\}^{G/V}$ je i Hauzdorfov prostor. Konačan diskretan prostor je Hauzdorfov. No, kako je T_2 multiplikativna osobina, onda je i $\{1, 2, \ldots, k\}^{G/V}$ Hauzdorfov, tj. Y je Hauzdorfov prostor.
Dakle, Y jeste G-tok.
Neka je $X = \overline{G \cdot c}$. Iz (1) znamo da postoji fiksna tačka $\gamma \in X$ (γ je funkcija (bojenje) čija je promenljiva koset). Primetimo da grupa G deluje tranzitivno na G/V:

Po uslovu teoreme, G deluje na G/V na uobičajen način: $g \cdot hV = ghV, g, h \in G$. No kako je G grupa, $gh \in G$. Neka je $k = gh$. To znači da za svako $hV, kV \in G/V$, postoji $g \in G$, takvo da je $g \cdot hV = kV$. Dakle, G deluje tranzitivno na G/V.
Pošto je $\gamma \in X$ fiksna tačka, za svako $g \in G$ i svako $x \in G/V$, važi:

$$g \cdot \gamma(x) = \gamma(x).$$

Sa druge strane, za $\gamma \in X$ i svako $g \in G$ i svako $x \in G/V$, po definiciji dejstva sa početka dokaza:

$$g \cdot \gamma(x) = \gamma(g^{-1} \cdot x),$$

tj.

$$\gamma(x) = \gamma(g^{-1} \cdot x).$$

Pošto G deluje tranzitivno na G/V, za svaki koset $y \in G/V$, postoji $g \in G$ takvo da je $g \cdot y = x$. Tada je:

$$\gamma(x) = \gamma(y).$$

Dakle, γ je konstantna funkcija. Neka je $\gamma(a) = i$, za svako $a \in G/V$. Očigledno je da $\gamma \in \{1, 2, \ldots, k\}^{G/V}$, tj. γ je bojenje. Pretpostavili smo da $\gamma \in \overline{G \cdot c}$. Prema definiciji zatvorenja, to znači da svaka okolina γ seče skup $G \cdot c$. Ali okolina tačke γ je oblika $B_A = \{f \mid f|_A = \gamma|_A\}$, za neko $A \subset G/V, |A| < \infty$. Uzmimo proizvoljno takvo A. Ovo možemo da uradimo jer je na Y definisana topologija Tihonova. Drugim rečima, okolina tačke γ je skup svih bojenja koje se na konačno mnogo tačaka poklapaju sa γ. Dakle:

$$\begin{array}{rcl} \gamma \in \overline{G \cdot c} & \Rightarrow & \exists h \in B \cap G \cdot c \\ h \in B & \Rightarrow & h|_A = \gamma|_A \\ h \in G \cdot c & \Rightarrow & h = h' \cdot c, \ h' \in G \end{array}$$

Pošto je G grupa, postoji $g^{-1} \in G$, tako da je $h' = g^{-1}$. Zamenom u gore dokazano dobijamo da je $g^{-1} \cdot c|_A = \gamma|_A$, iz čega sledi da je $i = \gamma(a) = c(g \cdot a)$, za svako $a \in A$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Radi jednostavnosti dokaza, koristićemo uslov ekvivalentan sa (2), koji se dobija zamenom levih koseta desnim. Sa V/G označimo skup desnih koseta Vh od V na koje grupa

G deluje na sledeći način: $g \cdot Vh = Vhg^{-1}$. Koristeći lemu 4.11, dovoljno je pokazati da ako je X G-tok i $f : X \to \mathbb{R}^n$ je neprekidna, $\epsilon > 0$, $F \subset G$ konačan, tada postoji $x \in X$, tako da je $|f(x) - f(h \cdot x)| \leq \epsilon$, za svako $h \in F$.

Prvo ćemo pokazati da za 1_G postoji otvorena okolina V, takva da za svako $h \in V$ i svako $x \in X$, važi

$$|f(x) - f(h \cdot x)| \leq \frac{\epsilon}{3}. \qquad (*)$$

Znamo da je dejstvo $\varphi : G \times X \to X$, dato sa $\varphi(\langle g, x \rangle) = g \cdot x$, neprekidno, kao i da je preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}^n$ neprekidno. Posmatrajmo sada preslikavanje $\psi : G \times X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dato sa $\psi(\langle g, x \rangle) = \langle f(x), f(g \cdot x) \rangle$. Tačke $\langle f(x), f(x) \rangle \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, za svako $x \in X$. Neka je $L(\langle f(x), f(x) \rangle, \frac{\epsilon}{6})$ otvorena lopta sa centrom u tački $\langle f(x), f(x) \rangle$, poluprečnika $\frac{\epsilon}{6}$. Kako je G grupa, postoji jedinica 1_G, takav da je:

$$\psi(\langle 1_G, x \rangle) = \langle f(x), f(x) \rangle.$$

Pošto je ψ neprekidno, postoji okolina V_x tačke 1_G i okolina U_x tačke x, tako da je:

$$\psi[V_x \times U_x] \subset L(\langle f(x), f(x) \rangle, \frac{\epsilon}{6}).$$

Kako smo za svaku tačku $x \in X$ birali okolinu U_x, onda mora važiti $X = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$. No, kako je X kompaktan, postoje tačke $x_1, x_2, \ldots, x_n$, takve da je $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Dalje, neka je $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Skup V je otvoren jer je presek konačno mnogo otvorenih skupova, pa je zato i okolina tačke 1_G. Ovo znači da za proizvoljne $g \in V, x \in X$, postoji $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tako da $x \in U_{x_j}, g \in V_{x_j}$. Ali ovo ne znači ništa drugo do:

$$\psi(\langle g, x \rangle) \in L(\langle f(x_j), f(x_j) \rangle, \frac{\epsilon}{6}).$$

Dakle, centar date lopte L se nalazi na dijagonali u $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. To znači da za proizvoljnu tačku iz lopte L, njene koordinate moraju da budu na rastojanju ne većem od $2 \cdot \frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{3}$.

Iz uslova teoreme znamo da je G zatvorena podgrupa od S_∞. Iz teoreme 3.27 V je otvorena podgrupa od G. Ovim smo dokazali da postoji tražena otvorena okolina V.

Skup X je kompaktan a funkcija f je neprekidna, pa je iz teoreme 2.62 i $f[X]$ kompaktan podskup od $\mathbb{R}^n$. Pošto je $f[X]$ kompaktan, možemo naći particiju skupa $f[X]$ na delove $A_1, \ldots, A_k$ dijametra manjeg ili jednakog od $\frac{\epsilon}{3}$. To znači da je rastojanje svake dve različite tačke iz istog dela particije najviše $\frac{\epsilon}{3}$.

Fiksirajmo $x_0 \in X$. Neka je za $1 \leq i \leq k$

$$U_i = \{g \in G : f(g \cdot x_0) \in A_i\}.$$

Pošto skupovi $A_i, 1 \leq i \leq k$ čine particiju skupa $f[X]$, to znači da je $U_i, 1 \leq i \leq k$ particija grupe G.

Stavimo da je $VU_i = V_i$. Primetimo da je svaki $V_i = \bigcup_{u \in U_i} Vu$ i da je V_i podgrupa od V, pa V_i možemo predstaviti kao podskup od V/G. Jasno je da je $V/G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$. Odavde sledi da postoji $c : V/G \to \{1, 2, \ldots, k\}$, takvo da je $c^{-1}[\{i\}] \subset V_i$.

Označimo sa $A = V(F \cup \{1_G\})$. Iz uslova (2), date teoreme, postoji $g \in G, 1 \leq i \leq k$, tako da je $c(g \cdot a) = i$, za svako $a \in A$. Pošto je $c^{-1}[\{i\}] \subseteq V_i$, odatle sledi da je $(F \cup \{1_G\})g \subseteq V_i$.

Pokazujemo da je $x = g \cdot x_0$ tražena fiksna tačka.

Koristeći rezultate dobijene u drugom delu, pronaćićemo još dve tačke za koje važi uslov (*).

Iz uslova $(F \cup \{1_G\})g \subset V_i = VU_i$, sledi da za $h \in F$, $hg \in VU_i$. To znači da postoje $v' \in V, u \in U_i$, tako da je $hg = v'u$. Neka je $v \in V$ takvo da je $vv' = 1_G$. Ovakvo v' postoji jer je V podgrupa, a jedinica u grupi je jedinstvena. Sada je $vhg = vv'u = u \in U_i$. Po definiciji skupa U_i, $f(vh\cdot(g\cdot x_0)) \in A_i$ i $f(vh\cdot(g\cdot x_0)) = f(vh\cdot x)$. Primenjujući uslov (*) na $h\cdot x \in X$, dobijamo:

$$|f(h\cdot x) - f(vh\cdot x)| \leq \frac{\epsilon}{3}. \qquad (**)$$

Preostaje još da odredimo i treću tačku za koju važi uslov (*). Ponovo posmatrajući uslov $(F \cup \{1_G\})g \subseteq VU_i$, samo ovaj put za 1_G, dobijamo da $g = 1_G \cdot g \in VU_i$, tj. postoje $k \in V, u' \in U_i$. tako da je $g = ku'$. Odavde je $k^{-1}g = u' \in U_i$. Označimo sa $m = k^{-1}$. Pošto je $k \in V$ a V je podgrupa, onda i $m = k^{-1} \in V$. Sada je $mg = u' \in U_i$, odakle sledi da $f(mg\cdot x_0) \in A_i$ i $f(mg\cdot x_0) = f(m\cdot x)$. Primenjujući uslov $(*)$ za $m \in V$ i $x \in X$, dobijamo :

$$|f(x) - f(m\cdot x)| \leq \frac{\epsilon}{3}. \qquad (***)$$

Iz $(*)$, $(**)$, $(***)$ sledi:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(h\cdot x)| &= |f(x) - f(m\cdot x) + f(m\cdot x) - f(vh\cdot x) + f(vh\cdot x) - f(h\cdot x)|\\ &\leq |f(x) - f(m\cdot x)| + |f(m\cdot x) - f(vh\cdot x)| + |f(vh\cdot x) - f(h\cdot x)|\\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Nejednakost $|f(m\cdot x) - f(vh\cdot x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ važi jer $m\cdot x, vh\cdot x \in A_i$, koji je dijametra $\frac{\epsilon}{3}$. $\square$

Komentar 4.13. Prema dokazu teoreme 4.12, da bismo proverili da li je zatvorena podgrupa $G \leq S_\infty$ ekstremno amenabilna, dovoljno je pronaći fiksnu tačku za svaki kompaktan invarijantan podskup $\{1, 2, \dots, k\}^{G/V}$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i svaku podgrupu $V \leq G$, koja je otvorena. Podsećanja radi, $\{1, 2, \dots, k\}^{G/V}$ je G-tok.
Dovoljno je posmatrati slučaj $V = G_{(F)}$, po svim konačnim skupovima $\emptyset \neq F \subset \mathbb{N}$ ([6], strana 131).

Za dokaze narednih tvrđenja, potrebni su nam dodatni pojmovi.
Grupa $G \leq S_\infty$ deluje na konačan podskup skupa $\mathbb{N}$ na uobičajen način

$$g\cdot F = \{g\cdot i : i \in F\}.$$

Definicija 4.14. Neka je $\emptyset \neq F \subseteq \mathbb{N}$. Definišimo sa

$$G_F = \{g \in G : g\cdot F = F\}$$

skupovni stabilizator od F, u kome je dejstvo na skup definisano na uobičajen način.

Primetimo odmah da je $G_{(F)} \leq G_F$, gde je $G_{(F)}$ tačkasti stabilizator skupa $\emptyset \neq F \subset \mathbb{N}$.

Lema 4.15. Neka je $G \leq S_\infty$ i $\emptyset \neq F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty$. Tada je

$$[G_F : G_{(F)}] < \infty.$$

Dokaz. Da bismo dokazali lemu, treba odrediti broj koseta tačkastog stabilizatora u odnosu na skupovni stabilizator i dokazati da je to konačan broj.
Posmatrajmo skupovni stabilizator $G_F = \{g \in G : g \cdot F = F\}$ i njenu podgrupu, tačkasti stabilizator, $G_{(F)} = \{g \in G : (\forall i \in F)\ g \cdot i = i\}$. Neka je $|F| = n$.
Permutacija skupa F ima $n!$, jer je F konačan. Dokažimo da koseta ima najviše $n!$.

Neka je $S_F = \{f_1, f_2, \ldots, f_{n!}\}$.
Za $i \leq n!$, neka je $\varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija data sa

$$\varphi_i(k) = \begin{cases} f_i(k), & k \in F \\ k, & k \notin F. \end{cases}$$

Tvrdim da je svako $g \in G_F$ u nekom $\varphi_i G_{(F)}$, za $i \leq n!$.
Neka je $g \in G_F$ proizvoljno. Posmatrajmo $g|_F$.
Pošto je $g \in G_F$, postoji $j \leq n!$, takvo da je $g|_F = \varphi_j|_F = f_j$.
Neka je $\psi \in G_{(F)}$ data sa

$$\psi(k) = \begin{cases} g(k), & k \notin F \\ k, & k \in F. \end{cases}$$

Tada je $g = \varphi_j \circ \psi \in \varphi_j G_{(F)}$, pa je svaka bijekcija $g \in G_F$ u nekom kosetu.
Pa koseta ima najviše $n!$. Tačno $n!$ će ih biti za $G = S_\infty$.

Dakle,

$$[G_F : G_{(F)}] \leq n! < \infty.$$

□

Definicija 4.16. Neka je $\emptyset \neq F \subset \mathbb{N}, |F| < \infty$. Tada $G - tip$ skupa F, definišemo kao orbitu $G \cdot F$ skupa F.
G-tip σ je zapravo G-tip nekog konačnog, nepraznog podskupa skupa $\mathbb{N}$.
Ako su ρ i σ G-tipovi, onda pišemo

$$\begin{aligned} \rho \leq \sigma \Leftrightarrow & \quad (\exists F \in \sigma)(\exists F' \in \rho) F' \subseteq F \\ \Leftrightarrow & \quad (\forall F \in \sigma)(\exists F' \in \rho) F' \subseteq F \\ \Leftrightarrow & \quad (\forall F' \in \rho)(\exists F \in \sigma) F' \subseteq F \end{aligned}$$

Ekvivalentcije gore navedene će imati primenu u tački 4.3.

4.2 Strukturna Remzijeva teorija

Neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ strukture u jeziku L. Kažemo da je

$$\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$$

ako se $\mathbf{A}$ može potopiti u $\mathbf{B}$. Ako je $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, neka je

$$\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = \{\ \mathbf{A}_0 : \mathbf{A}_0 \text{ je podstruktura od } \mathbf{B} \text{ izomorfna sa } \mathbf{A}\ \}.$$

Za $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \leq \mathbf{C}, k = 2, 3, \ldots$, pišemo, koristeći Erdoš-Rado notaciju

$$\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$$

ako za bilo koje bojenje $c : \binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ sa k boja, postoji $\mathbf{B}_0 \in \binom{\mathbf{C}}{\mathbf{B}}$ koji je **homogen** skup, u smislu da za neko $1 \leq i \leq k$, i svako $\mathbf{A}_0 \in \binom{\mathbf{B}_0}{\mathbf{A}}$, $c(\mathbf{A}_0) = i$, tj. $\binom{\mathbf{B}_0}{\mathbf{A}}$ je monohromatsko.

Neka je K klasa konačnih struktura u jeziku L. Kažemo da K ima Remzijevo svojstvo ako K zadovoljava nasledno svojstvo (HP) i za svako $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ u K, $k = 2, 3, \ldots$, postoji $\mathbf{C} \in K$ i $\mathbf{B} \leq \mathbf{C}$ takvo da

$$\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k.$$

Navedimo neke primere klasa sa Remzijevim svojstvom:

(i) **(Remzi)** Neka je $L = \{<\}$ i LO_{fin} klasa konačnih linearnih uređenja. Tada LO_{fin} ima Remzijevo svojstvo. [6]

(ii) **(Nešetril-Rodl)** Neka je $L = \{<, E\}$, $<, E$ binarni relacioni simboli i neka je OG klasa svih konačnih uređenih grafova $\mathbf{A} = \langle A, <^{\mathbf{A}}, E^{\mathbf{A}} \rangle$ ($<^{\mathbf{A}}$ je linearno uređenje na A, $E^{\mathbf{A}}$ je simetrična, irefleksivna relacija). Tada OG ima Remzijevo svojstvo. [6]

(iii) **(Grejam-Lib-Rotčajld)** Neka je F konačno polje i neka je $L = \{+\} \cup \{f_\alpha\}_{\alpha \in F}$ (svi simboli funkcija), gde $+$ ima arnost 2 i svako f_α je unarno. Svaki vektorski prostor nad F se može posmatrati u ovoj strukturi pri čemu je $+$ aditivna operacija a f_α je množenje skalarom α, za $\alpha \in F$. Podstruktura vektorskog prostora je podprostor. Neka je $\mathcal{V}_F$ klasa svih konačno-dimenzionalnih vektorskih prostora nad F. Jasno je da je $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \iff dim(\mathbf{A}) \leq dim(\mathbf{B})$. Tada $\mathcal{V}_F$ ima Remzijevo svojstvo. [6]

4.3 Karakterizacija ekstremno amenabilnih grupa automorfizama

U nastavku rada, koristeći prethodno dobijene rezultate, dokazaćemo dodatne osobine ekstremno amenabilnih grupa.

Teorema 4.17. [6, Propozicija 4.3] Neka je $G \leq S_\infty$ zatvorena podgrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) G je ekstremno amenabilna.

(ii) (a) Za svaki konačan skup $\emptyset \neq F \subset \mathbb{N}$, $G_{(F)} = G_F$ i (b) Za svaka dva G-tipa ρ i σ, gde je $\rho \leq \sigma$ i svako konačno bojenje $c : \rho \to \{1, 2, \ldots, k\}$, postoji $1 \leq i \leq k$ i $F \in \sigma$, takvo da je $c(F') = i$, za svako $F' \in \rho$ i $F' \subset F$.

(iii) (a)' G čuva uređenje i (b) kao pod (ii).

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (iii): Dokažimo prvo uslov (a)'. Znamo iz (i) da je G ekstremno amenabilna i da je LO G-tok iz gore dokazanog. To znači da postoji tačka iz prostora LO koja će ostati fiksna primenom bilo kog neprekidnog dejstva grupe G. Pa po gore dokazanom, G čuva uređenje.

(b) Fiksirajmo sada $\rho \leq \sigma$, $c : \rho \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Neka je $G \cdot F' = \rho$ (orbita). Prema (a)', G čuva uređenje, pa postoji linearno uređenje, koje fiksira $g \in G$.

Jedini automorfizam koji čuva uređenje na konačnom skupu je identičko preslikavanje. To uređenje se čuva element po element, ali to onda za sobom povlači da svaki element skupovnog stabilizatora mora pripadati i tačkastom stabilizatoru. Od ranije znamo još i da je $G_{(F')} \leq G_{F'}$, pa je $G_{F'} = G_{(F')}$.

Označimo, $V = G_{F'} = G_{(F')}$, pa možemo desne kosete iz G/V posmatrati kao elemente $G \cdot F' = \rho$. Fiksirajmo $F_0 \in \sigma$. Neka je $A = \{F_0' \subset F_0 : F_0' \in \rho\}$. Sada primenjujemo teoremu

4.12 (ii) na V, c, A, gde $F_0 \in \sigma$. Neka je $1 \leq i \leq k$ i $g \in G$, takvo da je $c(g \cdot F_0') = i$, za svako $F_0' \in A$. Neka je $F = g \cdot F_0 \in \sigma$. Ovo možemo da uradimo jer je σ orbita i njeni elementi su baš oblika $g \cdot F_0$. Ako je $F_1 \subset F$ i $F_1 \in \rho$, onda je $g^{-1} \cdot F_1 = F_1' \subset F_0$ i $g^{-1} \cdot F_1 = F_1' \in \rho$, pa je

$$c(g \cdot F_1') = c(F_1) = i.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Trivijalno. Već smo dokazali da jedino identičko preslikavanje čuva uređenje na konačnom skupu.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Opet primenjujemo teoremu 4.12 (ii) na skup V, pri čemu je $G_{(F)} = G_F, \emptyset \neq F \subset \mathbb{N}$, konačan. Ako je $V = G_F$, tada G/V možemo identifikovati sa $\rho = G \cdot F$. Fiksirajmo bojenje $c : \rho \to \{1, 2, \ldots, k\}$ i $A_i \in \rho$, za svako $i \in I$ i $|I| < \infty$. Pošto σ može da bude proizvoljno, onda ćemo izabrati $\bigcup_{i \in I} A_i$. Ovo je neki tip σ i $\rho \leq \sigma$, jer $\bigcup_{i \in I} A_i$ sadrži $A_i \in \rho$, za svako $i \in I$. Primenjujući teoremu 4.12 (ii) na ovako izabrano σ, postoji $1 \leq i \leq k$ i $g \in G$, takvo da za svako $F' \subset g \cdot \bigcup_{i \in I} A_i, F' \in \rho$, imamo da je $c(F') = i$. Tada je $c(g \cdot F) = i$, za svako $F \in A_i, i \in I$. □

Definicija 4.18. Neka je $G \leq S_\infty$ i neka su $\rho \leq \sigma$ G-tipovi. Ako $F \in \sigma$, pišemo

$$\binom{F}{\rho} = \{F' \subset F : F' \in \rho\}.$$

Ako su $\rho \leq \sigma \leq \tau$ G-tipovi , pišemo

$$\tau \to (\sigma)^\rho_k,$$

gde je $k = 2, 3, \ldots$, i ako za svako $F \in \tau$ i bojenje $c : \binom{F}{\rho} \to \{1, \ldots, k\}$, postoji skup $F_0 \in \binom{F}{\sigma}$, koji je homogen, tj. c je monohromatsko bojenje na $\binom{F}{\rho}$: za neko $1 \leq i \leq k$ i svako $F' \in \binom{F_0}{\rho}, c(F') = i$.

Kažemo da G ima Remzijevo svojstvo ako za sve G-tipove $\rho \leq \sigma$ i svako $k =, 2, 3, \ldots$, postoji G-tip $\tau \geq \sigma$, takav da $\tau \to (\sigma)^\rho_k$.

U nastavku ćemo sve dokaze koji koriste prethodu defnciiju, posmatrati za slučaj kada imamo dve boje, tj. kada je $k = 2$. Induktivno se može dokaz uopštiti i za veće k.

Teorema 4.19. [6, Teorema 4.5] Neka je $G \leq S_\infty$ zatvorena podgrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) G je ekstremno amenabilna.

(ii) (a) G čuva uređenje i (b) G ima Remzijevo svojstvo.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Pod (a) smo već dokazali u teoremi 4.17. Da bismo dokazali (b) dovoljno je izvršiti restrikciju na slučaj kada je $k = 2$ i onda primeniti definiciju 4.18. Pretpostavimo suprotno, da za neke G-tipove, $\rho \leq \sigma$, ne postoji $\tau \geq \sigma$, takvo da je $\tau \to (\sigma)^\rho_2$. Neka je $F_0 \in \sigma$ fiksirano. Tada za svaki konačan skup $E \supset F_0$ postoji bojenje $c_E : \binom{E}{\rho} \to \{1, 2\}$, koje nema homogen skup $F \in \binom{E}{\sigma}$. Posmatrajmo ultrafilter $\mathcal{U}$ na skupu I konačnih nepraznih podskupova skupa $\mathbb{N}$, takvih da za svako $F \subset \mathbb{N}$, $|F| < \infty$, $\{E : F \subset E\} \in \mathcal{U}$. Ultrafilter $\mathcal{U}$ postoji jer familija $\{E : F \subset E\}$ ima s.k.p. Tada za svako $D \in \rho, \{E \supset D \cup F_0 : c_E(D) = 1\} \in \mathcal{U}$ ili $\{E \supset D \cup F_0 : c_E(D) = 2\} \in \mathcal{U}$. Neka je $c(D) = i$ akko $\{E \supset D \cup F_0 : c_E(D) = i\} \in \mathcal{U}$. Ovo nam daje bojenje $c : \rho \to \{1, 2\}$. Tada, koristeći teoremu 4.17, (ii) (b), postoji $F \in \sigma$ i

$i \in \{1,2\}$ takvo da je $c(D) = i$ za sve $D \in \binom{F}{\rho}$. Za $D \in \binom{F}{\rho}$ znamo da $A_D = \{E \supset D \cup F_0 : c_E(D) = c(D) = i\} \in \mathcal{U}$. Po definiciji $\mathcal{U}$ znamo i da $\{E : E \supset F \cup F_0\} \in \mathcal{U}$. Pošto je presek dva elementa ultrafiltera u $\mathcal{U}$, onda $\{E \supset F \cup F_0 : (\forall D \in \binom{F}{\rho})\ c_E(D) = i\} \in \mathcal{U}$.
Stavimo da $E \in \bigcap_{D \in \binom{F}{\rho}} A_D$. Moramo imati na umu da ultrafilter ima svojstvo konačnog preseka i $\binom{F}{\rho}$ je konačan jer je F konačan. Tada je $E \supseteq F_0$ i svako $D \in \binom{F}{\rho}, c_E(D) = i$, pa je $F \in \binom{E}{\sigma}$ homogen skup za c_E. Kontradikcija.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Prema prethodnoj definiciji, znamo da za G-tipove, $\rho \leq \sigma$ i svako $k = 2, 3, \ldots$, postoji G-tip $\tau \geq \sigma$, takav da važi relacija $\tau \to (\sigma)^{\rho}_{k}$. To znači da za svako $F \in \tau$ i bojenje $c : \binom{F}{\rho} \to \{1, 2, \ldots, k\}$, postoji skup $F_0 \in \binom{F}{\sigma}$ i neko $1 \leq i \leq k$, tako da za svako $F' \in \binom{F_0}{\rho}, c(F') = i$. No, ovo je ekvivalentno sa: za neko $1 \leq i \leq k$ i svako $F' \subset F_0, F' \in \rho, F_0 \in \sigma, c(F') = i$. Prema teoremi 4.17 (iii), sledi da je G ekstremno amenabilna. $\square$

Definicija 4.20. Neka je $G \leq S_\infty$. Neka je T skup G-tipova. Za T kažemo da je **kofinalan**, ako za svaki G-tip ρ, postoji G-tip σ, takav da je $\rho \leq \sigma$.

Konačno, povežimo ekstremno amenabilne grupe automorfizama sa strukturama koje imaju Remzijevo svojstvo.

Neka je L jezik sa binarnim relacionim simbolom $<$ (i sa možda još nekim simbolima). **Uređena struktura** za L je struktura $\mathbf{A}$ u kojoj je $<^{\mathbf{A}}$ linearno uređenje. Ako je K klasa struktura nad L, kažemo da je K **uređena klasa**, ako je svako $\mathbf{A} \in K$ uređena struktura.

Podsetimo se da su, do na izomorfizam, zatvorene podgrupe (topološke grupe) grupe S_∞, zapravo isto što i grupe automorfizama prebrojvih struktura i da su to takođe poljske grupe koje sadrže prebrojivu bazu okolina jedinice, sastavljene od otvorenih podgrupa (pogledati [4], 1.5). Naredni rezultati obezbeđuju karakterizaciju ekstremno amenabilnih grupa u odnosu na poslednju klasu.

Teorema 4.21. [6, Teorema 4.7] Neka je $G \leq S_\infty$ zatvorena podgrupa. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) G je ekstremno amenabilna.

(ii) $G = Aut(\mathbf{A})$, gde je $\mathbf{A}$ Fraiseov limit Fraiseove uređene klase koja ima Remzijevo svojstvo.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Neka je $\mathbf{A}_G = \langle \mathbb{N}, \ldots \rangle$ indukovana struktura za G.
Takođe, pošto je G ekstremno amenabilna, G čuva neko uređenje $\prec$ na $\mathbb{N}$. Neka je L jezik koji sadrži jezik od $\mathbf{A}_G$ i novi binarni relacioni simbol $<$. Neka je $\mathbf{A}$ ekspanzija strukture $\mathbf{A}_G$ na kojoj je $<^{\mathbf{A}} = \prec$. I dalje će važiti $Aut(\mathbf{A}) \leq G$. Jer teže je čuvati više relacija, nego manje, pa samim tim kao rezultat možemo dobiti manje ili u najbolju ruku, isto automorfizama. Sa druge strane, mi smo birali $\prec$ tako da grupa G čuva $\prec$, pa je $Aut(\mathbf{A}) = G$. Jedino šta se možda smanjilo je broj izomorfnih struktura. Jer ako je $\mathbf{A}$ bilo izomorfno sa $\mathbf{B}$, pre dodavanja linearnog uređenja, pitanje je da li će ostati očuvan taj izomorfizam dodavanjem nove relacije (lin. uređenja). Primetimo da je jezik strukture $\mathbf{A}_G$, pa samim tim i strukture $\mathbf{A}$, relacioni; dakle $\mathbf{A}$ je lokalno konačna struktura. Prema lemi 1.34 $K = Age(\mathbf{A})$, koja je uređena struktura jer je $<^{\mathbf{A}}$ linearno uređenje i Fraiseove je klase. Primetimo da, zbog ultrahomogenosti, G-tip je konačnog skupa $\mathbf{A}_0 \in Age(\mathbf{A})$ je baš kolekcija svih podstruktura iz $\mathbf{A}$ izomorfnih sa $\mathbf{A}_0$, zato što se svaki izomorfizam može produžiti do automorfizma. Konačno, ako G ima Remzijevo

svojstvo, pošto G-tipove posmatramo kao konačne strukture, onda i $Age(\mathbf{A})$ ima Remzijevo svojstvo. Sada iz teoreme 4.19 sledi traženi rezultat.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Pošto je $\mathbf{A}$ Fraiseov limit Fraiseove uređene klase, po teoremi 1.39, struktura $\mathbf{A}$ je prebrojiva, jedinstvena do na izomorfizam i ultrahomogena struktura. Kako je $G = Aut(\mathbf{A})$ i $\mathbf{A}$ je uređena klasa, mora postojati neko linearno uređenje na $\mathbf{A}$, koje će G da čuva. Kako je $\mathbf{A}$ ultrahomogena struktura, onda je G-tip svake konačne podstrukture $\mathbf{B}$ jednak klasi svih konačnih podstruktura koje su izomorfne sa $\mathbf{B}$. Sa druge strane, $\mathbf{A}$ je Fraiseov limit uređene klase, pa je $\mathbf{A}$ lokalno konačna podstruktura. Zbog toga su G-tipovi konačnih podstruktura kofinalni u skupu svih G-tipova. Iz definicije 4.20 sledi da G ima Remzijevo svojstvo, a iz posledice 4.19, sledi da je G ekstremno amenabilna. $\square$

Biografija

Stepan Milošević je rođen 25.11.1993. u Loznici. Osnovnu školu " Kadinjača ", u Loznici, je završio 2008. godine sa odličnim uspehom. Iste godine je upisao srednju školu " Sveti Sava ". Godine 2015. se upisuje na studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Od 2019. godine se vodi kao student integrisanih studija matematike, smer M5. Položio je sve ispite predviđene planom i programom.

Literatura

[1] Joseph Auslander. *Minimal flows and their extensions*, volume 153 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 122.

[2] Howard Becker and Alexander S. Kechris. *The descriptive set theory of Polish group actions*, volume 232 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] Andreas Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. In *Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983)*, volume 31 of *Contemp. Math.*, pages 31–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[4] Igor Dolinka. *Teorija grupa*. skripta, 2018.

[5] Wilfrid Hodges. *Model theory*, volume 42 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[6] A. S. Kechris, V. G. Pestov, and S. Todorcevic. Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups. *Geom. Funct. Anal.*, 15(1):106–189, 2005.

[7] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[8] Miloš S. Kurilić. *Osnovi opšte topologije*. Univerzitet u Novom Sadu, 1998.

[9] Joseph G. Rosenstein. *Linear orderings*, volume 98 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1982.

[10] Stevo Todorčević. *Introduction to Ramsey spaces*, volume 174 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010.

[11] Boris Šobot. *Uvod u teoriju skupova*. skripta, 2020.

[12] M. Tkachenko, A. Arhangel'skii. *Topological groups and related structures* Atlantis Press, Paris; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.

[13] Su Gao. *Introduction Descriptive Set Theory*. Taylor & Francis Group , 2009.

[14] David Marker. *Descriptive Set Theory*. Lecture notes , 2002.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: monografska dokumentacija
BF
Tip zapisa: teksutalni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Stepan Milošević
AU
Mentor: dr Boriša Kuzeljević
MN
Naslov rada: Ekstremna amenabilnost zatvorenih podgrupa simetrične grupe na prebrojivom skupu
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2021.
GO
Izdavač: autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: tekst
FO
Naučna oblast: matematika
NO
Naučna disciplina: Topološka dinamika
ND
Ključne reči: teorija modela, opšta topologija, poljski prostori, ekstremna amenabilnost
PO
UDK:
Čuva se: biblioteka Departmana za matematiku i informatiku,
Prirodno-matematički fakultet,

Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Tema ovog master rada su ekstremno amenabilne grupe. Nakon definisanja i navodjenja osnovnih primera toka, uvodi se pojam ekstremno amenabilne grupe. Zatim se navode ekvivalentni uslovi ekstremno amenabilnih grupa i uvodi se pojam strukturne Remzijeve teorije. Vrši se karakterizacija ekstremno amenabilnih grupa i daju se dokazi ključnih teorema.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 22.6.2021.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Dragan Mašulović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Boriša Kuzeljević, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: monograph type
DT
Type of record: printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Stepan Milošević
AU
Mentor: Boriša Kuzeljević, Ph.D.
MN
Title: Extreme amenability of closed subgroups of the symmetric group on a countable set
XI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: s/e
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2021.
PY
Publisher: author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: text
PD
Scientific field: mathematics
SF
Scientific discipline: topological dynamics
SD
Key words: model theory, general topology, polish spaces, extreme amenability
UC
Holding data: Department of Mathematics and Informatics' Library,
Faculty of Sciences,
Novi Sad
HD

Note:
N
Abstract: The topic of this master thesis is extremely amenable groups. After defining and stating the basic concepts of flow, the notion of an extremely amenable groups is introduced. The equivalent conditions of extremely amenable groups are given and the notion of structural Ramsey theory is introduced. The characterization of extremely amenable groups is performed and the proofs of key theorems are given.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 22.6.2021
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: dr Dragan Mašulović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: dr Boriša Kuzeljević, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: dr Boris Šobot, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad