УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ
ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ
И ИНФОРМАТИКУ

Стефан Тутић

Карактеризација елиптичних функција

Мастер рад

Ментор:
др Милица Жигић

Нови Сад, 2021

Садржај

Предговор

> *„Установили смо да се аритметичко - геометријска средина бројева 1 и $\sqrt{2}$, и број π/ϖ поклапају на првих једанаест децимала. Доказ ове чињенице, сигурно ће отворити ново поље у анализи за истраживање."* - К.Ф. Гаус (30. мај 1799.)

Корени елиптичних функција могу се пратити још од педесетих година XVII века. У почетку су се математичари бавили елиптичним интегралима из којих су настале ове функције. Наиме, елиптични интеграли су настали тако што су математичари хтели да израчунају дужину лука елипсе. Касније се испоставило да се одговарајући интеграли не могу решити у коначном броју елементарних функција. Један од првих математичара који је открио елиптичне функције, био је Гаус[1]. Гаус је дошао на идеју, уместо да посматра елиптични интеграл као функцију, посматраће њену инверзну функцију. Убрзо се испоставило да је та инверзна функција периодична. Такође је приметио да ако ту функцију посматра на скупу комплексних бројева, додатно има и један комплексни период. Уз Гауса, ту су били и математичари Јакоби[2] и Абел[3] који су се нешто више бавили теоријом елиптичних функција. Они су својим истраживањем дали велики допринос за њен даљи развој. Абел је објавио свој први рад на ову тему 1827, а две године касније Јакоби је издао прву књигу, под називом *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Абел и Јакоби су дали један (уједно и први) приступ теорији елиптичних функција. Наиме, они су посматрали једну специјалну елиптичну функцију (тета ред) и на основу ње су изградили целу теорију елиптичних функција. Ми ћемо у овом раду дати други приступ, односно Вајерштрасов[4] приступ. Разлог за ово је што неки докази постају лакши и елегантнији.

[1] Johann Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) немачки математичар и физичар
[2] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851) немачки математичар
[3] Niels Henrik Abel (1802 - 1829) норвешки математичар
[4] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 - 1897) немачки математичар

Рад се састоји из три главе. У првој глави подсећамо се основних појмова и тврђења из комплексне анализе, као што су аналитичке функције, комплексна интеграција, развој аналитичке функције у степени ред, нуле, сингуларитети и остатак функције. На крају, дали смо тврђење везано за замену редоследа сумирања код двоструких сума.

Друга глава садржи историјски развитак теорије елиптичних функција, као и њихово формално увођење. На почетку ове главе упознајемо се са историјским догађајима који су довели до откривања теорије елиптичних функција. Ту ћемо видети како су од елиптичних интеграла настале елиптичне функције. Такође, издвојићемо и поједине истакнуте математичаре који су се бавили овом облашћу, као што су Гаус, Абел, Јакоби и Вајерштрас. На крају историјског излагања навешћемо неке примене ове теорије. Потом прелазимо на дефинисање елиптичне функције и ту се, пре свега, упознајемо са појмом мероморфне функције, која представља основу за изградњу овог појма. Појмови као што су решетка и фундаментални паралелограм омогућавају нам да извршимо партицију комплексне равни $\mathbb{C}$ и да лакше анализирамо особине елиптичних функција. Након тога долазимо до Лиувилових[5] теорема која представљају основна тврђења везана за ове функције, и нарочито су корисна.

У трећој глави прелазимо на приказивање првог конкретног примера елиптичне функције, а то је Вајерштрасова ρ функција. Вајерштрасова функција је, уједно, и једна од најважнијих елиптичних функција, јер свака друга елиптична функција може да се прикаже помоћу ње. Потом ћемо видети неке корисне формуле за ρ функцију, које подсећају на неке добро познате тригонометријске идентитете. На крају ове главе, навели смо и доказали Абелову теорему. Помоћу ње можемо да вршимо конструкцију елиптичних функција.

Већина слика које користимо у овом раду, урађени су од стране аутора у програмском пакету Geogebra.

Велику захвалност упућујем др Милици Жигић што је прихватила да буде ментор мог мастер рада. Својим стручним саветима и предлозима омогућила ми је лакше разумевање и писање мастер рада.

Такође се захваљујем и члановима комисије др Ненаду Теофанову и др Ивани Војновић на издвојеном времену за одбрану мог мастера.

На крају, захваљујем се свима који су допринели мом успешном студирању и били увек уз мене свих ових година.

Нови Сад, 2021. Стефан Тутић

[5]Joseph Liouville (1809 - 1882) француски математичар

Глава 1

Увод

У овој глави навешћемо основна тврђења која су нам неопходна за рад са елиптичним функцијама. Глава се састоји из пет делова. У првом делу увешћемо појам аналитичке функције који представља централни појам у комплексној анализи. Други део односи се на комплексну интеграцију, односно интеграљење комплексне функције. На крају овог дела навешћемо пар теорема које додатно описују одређене комплексне функције. Трећи део односи се на развој аналитичке функције у степени ред. У том делу видећемо како се комплексна функција развија у Тејлоров[1] и Лоранов[2] степени ред. Четврти део се односи на нуле и сингуларитете комплексне функције. Последњи, пети део односи се на двоструке суме и њихову конвергенцију. Углавном, сва тврђења која су у овој глави наведена биће без доказа. Литература која је коришћена за израду ове главе је [1] и [3]. За све доказе и додатна објашњења читалац се упућује на ове референце.

1.1 Аналитичке функције

На почетку претпостављамо да је читалац упознат са основним појмовима комплексне анализе, као што су: комплексни бројеви, функције комплексне променљиве и елементарне комплексне функције, као и појмовима гранична вредност и непрекидност комплексне функције (видети [3]).

Дефиниција 1.1. *Нека је f комплексна функција која је дефинисана у некој околини тачке $z_0 \in \mathbb{C}$. Тада је* ***извод финкције f у тачки*** z_0

[1] Brook Taylor (1685 - 1731) енглески математичар

[2] Pierre Alphonse Laurent (1813 - 1854) француски математичар, инжењер и војни официр

дат са

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Кажемо још да је комплексна функција f ***диференцијабилна у тачки*** *z_0.*

Пример 1.1. *Функција $f(z) = z^2$ има извод у свакој тачки $z \in \mathbb{C}$.*

Решење: Нека је $z_0 \in \mathbb{C}$ произвољно.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^2 + 2z_0\Delta z + (\Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = 2z_0$$

Дакле, $f'(z) = 2z$.

Пример 1.2. *Функција $f(z) = \overline{z}$ нема извод ни у једној тачки $z \in \mathbb{C}$.*

Решење: Нека је $z_0 \in \mathbb{C}$ произвољно.

$$\frac{\overline{(z_0 + \Delta z)} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \frac{\overline{z_0} + \overline{\Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Сада ћемо да гледамо два лимеса овог диференцијалног количника. Један када реални део $\Delta x \to 0$, други када имагинарни део $\Delta y \to 0$.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta iy \to 0} \frac{-\Delta z}{\Delta z} = -1$$

Дакле, гранична вредност овог лимеса не постоји.

Теорема 1.3. *Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки z_0. Тада су диференцијабилне и следеће функције у тачки z_0 и важи:*

1. $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$,
2. $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$,

   Специјално, $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$ за било које $c = const$,
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$, *ако је $g(z_0) \neq 0$.*

Додатно, ако је f диференцијабилна у z_0 и g диференцијабилна у $f(z_0)$ онда важи

$$\frac{d}{dz}g(f(z_0)) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Дефиниција 1.2. 1. *Комплексна функција f је* ***аналитичка на отвореном скупу*** *$O \subseteq \mathbb{C}$ ако је диференцијабилна у свакој тачки скупа O.*

2. *Комплексна функција f је* ***аналитичка у тачки*** *$z_0 \in \mathbb{C}$ ако постоји околина тачке z_0 тако да је f аналитичка у тој околини.*

У случају да је функција f аналитичка на целој комплексној равни $\mathbb{C}$, онда кажемо да је функција f ***цела****.*

Дефиниција 1.3. *Нека је z_0 тачка нагомилавања домена комплексне функције f. Ако f није аналитичка у z_0 и постоји низ тачака који конвергира ка z_0 тако да је f аналитичка у свакој тачки низа онда кажемо да је тачка z_0* ***сингуларитет*** *(или* ***сингуларна тачка****) функције f.*

Коши[3] - Риманове[4] парцијалне диференцијалне једначине нам дају потребан и довољан услов када је нека функција аналитичка.

Теорема 1.4. ***(Коши - Риманове једначине)***

1. *(Потребан услов) Нека је комплексна функција $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ диференцијабилна у тачки z_0. Тада за функцију f у тачки z_0 постоје парцијални изводи и важе Коши - Риманове једначине*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

   Додатно, ако је функција аналитичка на неком отвореном скупу онда Коши - Риманове једначине важе у свакој тачки тога скупа.

2. *(Довољан услов) Нека је комплексна функција $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дефинисана на неком отвореном скупу O. Ако су први парцијални изводи функција u и v непрекидни у тачки z_0 и задовољавају Коши - Риманове једначине онда је f диференцијабилна у тачки z_0.*
   Додатно, ако су претпоставке за функцију f задовољене на целом отвореном скупу O онда је f аналитичка на O.

[3]Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) француски математичар
[4]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) немачки математичар

Теорема 1.5. *Нека је f аналитичка функција на домену D_f таква да је $f'(z) = 0$, $z \in D_f$. Тада је f константна функција, тј. $f(z) = const$ за све $z \in D_f$.*

Последица 1.6. *Нека су f и g аналитичке функције на заједничком домену D где важи да је $f'(z) = g'(z)$, $z \in D$. Тада је $f(z) = g(z)+const$, за све $z \in D$.*

На даље ће нам требати Лапласова[5] парцијална диференцијлна једначина, да би могли да увемо хармонијске функције. Хармонијске функције нам помажу за конструкције аналитичких функција.

Лапласова парцијална диференцијална једначина је дата са

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

где оператор Δ зовемо Лапласијан, а оператор ∇ означава градијент скаларне функције f.

Дефиниција 1.4. *Нека је $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и $f : D \to \mathbb{R}$. За функцију f рећи ћемо да је **хармонијска** ако су сви њени парцијални изводи другог реда непрекидни над D и функција f задовољава Лапласову парцијалну диференцијалну једначину у свакој тачки из D.*

Теорема 1.7. *Нека је $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитичка функција на домену D_f. Тада су реални део u и имагинарни део v функције f хармонијске функције.*

У неку руку важи и обратно тврђење.

Теорема 1.8. *Нека је $u(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ хармонијска функција на домену D. Тада постоји хармонијска функција $v(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ тако да је $f = u + iv$ аналтичка функција на домену D.*

1.2 Комплексна интеграција

У овом делу претпостављамо да је читалац упознат са појмовима као што су дужина лука криве, (затворена) глатка крива, проста крива, оријентисана крива и контура (видети [3]).

Дефиниција 1.5. *Нека је дата комплексна функција f дефинисана дуж просте оријентисане криве γ.*

[5] Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749 - 1827) француски математичар

1. ***Риманова сума*** *функције* $f : \gamma \to \mathbb{C}$ *је дата са:*

$$S(P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k - z_{k-1}),$$

где P_n *одговара партицији криве* γ *на* n *делова,* $z_i \in \gamma$, $1 \leq i \leq n$.

2. ***Функција*** f ***је интеграбилна дуж криве*** γ *ако постоји* $I = \lim_{n\to\infty} S(P_n)$ *за произвољну фамилију партиција* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *таквих да* $\lim_{n\to\infty} max\{l(z_{k-1}, z_k) | 1 \leq k \leq n\} = 0$, *где* l *означава дужину лука криве.*
Комплексан број I *зове се* ***интеграл функције*** f ***дуж криве*** γ *и означвамо га са*

$$I = \int_\gamma f(z)dz.$$

У случају да се интеграција врши дуж затворене криве онда се пише још и

$$I = \oint_\gamma f(z)dz.$$

Слично као у реалној анализи показују се и следећа тврђења.

Теорема 1.9. *Нека су* f *и* g *интеграбилне дуж криве* γ. *Тада су функције* $f + g$ *и* cf *интеграбилне дуж криве* γ *и важи*

1. $\displaystyle\int_\gamma (f(z) + g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz,$

2. $\displaystyle\int_\gamma cf(z)dz = c\int_\gamma f(z)dz,$

3. $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$

Теорема 1.10. *Ако је функција* f *непрекидна дуж криве* γ *онда је и интеграбилна дуж криве* γ.

Напомена 1.11. За $\gamma = [a, b] = \{t = z(t) \mid a \leq t \leq b\}$ и комплексну функцију $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ можемо њен интеграл записати на следећи начин:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b (u(t) + iv(t))dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

Теорема 1.12. *Нека су f и F две комплексне функције такве да је f непрекидна на $[a,b]$ и $F'(t) = f(t)$ за све $t \in [a,b]$. Тада важи*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Наредна теорема нам говори да је комплексан интеграл независтан од допустиве параметризације.

Теорема 1.13. *Нека је f непрекидна функција на просто оријентисаној глаткој криви γ и $z = z(t), t \in [a,b]$ допустива параметризација криве γ. Тада је испуњено*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))dt.$$

Дефиниција 1.6. *Нека је $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ контура и f комплексна функција непрекидна на контури Γ. Тада се* ***интеграл по контури*** *Γ функције f израчунава на следећи начин:*

$$\int_\Gamma f(z)dz \overset{\text{деф.}}{=} \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

У случају да је контура Γ једна тачка онда је $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

Теорема 1.14. *За комплексну функцију f која је непрекидна на контури Γ и задовољава $\mid f(z) \mid \leq M$ за све $z \in \Gamma$, важи*

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| = Ml(\Gamma),$$

где је $l(\Gamma)$ дужина контуре Γ.
Специјално, важи $\displaystyle\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| = \max_{z\in\Gamma} f(z) \cdot l(\Gamma)$.

Наредна теорема нам говори за коју класу функција интеграл не зависи од путање, тј. контуре. У суштини та теорема је уопштење фундаменталне теореме калкулуса из реалне анализе. За комплексну функцију F рећи ћемо да је *примитивна функција* за комплексну функцију f на домену D, ако важи $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$ за $z \in D$.

Теорема 1.15. *Нека је f непрекидна комплексна функција на домену D и F примитивна функција за f. Тада за сваку контуру $\Gamma \subseteq D$ чија је почетна и крајња тачка, редом, z_p и z_k, важи*

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(z_k) - F(z_p).$$

Последица 1.16. *Нека је f непрекидна комплексна функција на домену D и има примитивну функцију на домену D. Тада за сваку затворену контуру $\Gamma \subseteq D$ важи $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

Теорема 1.17. *Нека је комплексна функција f непрекидна на домену D. Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *Функција f има примитивну функцију на домену D.*
2. $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$*, за било коју контуру Γ.*
3. *Интеграл функције f по контури Γ не зависи од путање, већ зависи само од вредности функције f у почетној и крајњој тачки контуре.*

Подсетимо се шта је просто повезана област.

Дефиниција 1.7. *За област D рећи ћемо да је* ***просто повезана област*** *ако задовољава следећи услов:*
„За сваку просту оријентисану контуру $\Gamma \subseteq D$ важи да је унутрашњост контуре Γ садржана у D."

Теорема 1.18. ***(Кошијева интегрална теорема)*** *За сваку аналитичку комплексну функцију f на простој повезаној области D важи*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0,$$

где је Γ затворена контура у D.

Специјалан случај Кошијеве интегралне теореме је Гурсаова[6] теорема која за контуру Γ има троугаону линију.

Теорема 1.19. ***(Кошијева интегрална формула)*** *Нека је Γ проста затворена позитивно оријентисана контура, f аналитичка функција на простој повезаној области D која садржи Γ и тачка z_0 у унутрашњости Γ. Тада је*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Напомена 1.20. Може се показати да вижи и општије тврђење, односно *уопштена Кошијева интегрална формула*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}dw.$$

---

[6]Édouard Goursat (1858 - 1936) француски математичар

Последица 1.21. *Ако је функција f аналитичка на домену D онда постоји $f^{(n)}$ за све $n \in \mathbb{N}$ и аналитичка је на D.*

За даљи рад биће нам неопходна и следећа тврђења, која су последица претходних разматрања.

Теорема 1.22. ***(Лиувилова теорема)*** *Свака цела комплексна функција која је ограничена мора бити константна функција.*

Теорема 1.23. ***(Основни став алгебре)*** *Сваки неконстантни полином који има комплексне бројеве за коефицијентима, има барем једну нулу.*

1.3 Развој аналитичке функције у степени ред

У овом делу показаћемо како се аналитичка функција може развити у степени ред. Ту ћемо видети Тејлоров и Лоранов развој аналитичке функције. Први пример који будемо дали за елиптичне функције биће Вајерштрасова ρ функција која је дефинисана помоћу степеног реда.

Дефиниција 1.8.

1. ***Ред*** *представља формални запис бесконачног збира комплексних бројева $c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, односно*

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

2. *Са $S_n, n \in \mathbb{N}$ означавамо* n***-ту парцијалну суму реда*** *која представља збир првих $n+1$ чланова реда, тј.*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

3. *Ако низ парцијалних сума $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ има граничну вредност, означено са S, онда ћемо рећи да је* ***ред конвергентан*** *и писаћемо*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

У супротном кажемо да је ред ***дивергентан****. Чињеница да је ред конвергентан обележаваћемо и са $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$*

Лема 1.24. *Геометријски ред* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *конвергира ако је* $|c| < 1$ *и при томе важи*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-z}.$$

Лема 1.25. ***(Упоредни критеријум)*** *Нека су дати ред* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *са комплексним коефицијентима и ред* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *са ненегативним реалним коефицијентима. Ако постоји* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *тако да за све* $n \geq n_0$ *важи* $|a_n| \leq b_n$, *и* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, *онда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *конвергира.*

Дефиниција 1.9. *За низ комплексних функција* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *кажемо да* ***униформно конвергира*** *ка функцији* f *на скупу* $A \subseteq \mathbb{C}$ *ако је задовољено*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon).$$

Додатно, рећи ћемо да ред комплексних функција $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *униформно конвергира ка функцији* f *на скупу* $A \subseteq \mathbb{C}$ *ако низ парцијалних сума униформно конвергира ка функцији* f *на* $A \subseteq \mathbb{C}$.

Лема 1.26. *Ако низ непрекидних функција* $f_n, n \in \mathbb{N}$ *униформно конвергира ка функцији* f *на скупу* A *онда је гранична функција* f *непрекидна на* A.

Теорема 1.27. *За низ непрекидних функција* $f_n, n \in \mathbb{N}$ *који униформно конвергира ка функцији* f *на скупу* A, *при чему скуп* A *садржи контуру* Γ, *важи*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz.$$

Теорема 1.28. *Ако низ аналитичких функција* $f_n, n \in \mathbb{N}$ *униформно конвергира ка функцији* f *на простој повезаној области* D *онда је гранична функција* f *аналитичка на* D.

На основу претходног тврђења добијамо следећу теорему, која нам говори да је граница степеног реда аналитичка функција.

Теорема 1.29. *Граница степеног реда је аналитичка функција у свим тачкама унутар области конвергенције овог реда.*

Јасно је да из униформне конвергенција следи обична конвергенција. Сада ћемо увести појам Тејлоров ред и навести његову везу са аналитичким функцијама.

Дефиниција 1.10. *Нека је комплексна функција f аналитичка у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$. Тада ред*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \dots$$

*називамо **Тејлоров ред** функције f у околини тачке $z_0 \in \mathbb{C}$. Специјално, за $z = 0$ Тејлоров ред још ћемо звати и **Маклоренов**[7] **ред**.*

Наредна теорема нам говори да се аналитичка функција и одговарајућа функција добијена помоћу Тејлоровог реда аналитичке функције, морају поклопити.

Теорема 1.30. *Нека је $z_0 \in \mathbb{C}$ и f аналитичка функција на отвореном диску $|z - z_0| < R$. Тада Тејлоров ред функције f у тачки z_0 конвергира ка функцији f, тј.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

за све z за које је испуњено $|z-z_0| < R$. Шта више, конвергенција је и униформна на сваком затвореном диску $|z - z_0| \le R_1 < R$.

Подсетимо се да ако је функција аналитичка у тачки онда су сви њени изводи, такође, аналитичке функције у тој тачки.

Теорема 1.31. *Нека је f аналитичка функција у $z_0 \in \mathbb{C}$. Тада Тејлоров ред аналитичке функције f' у тачки z_0 можемо добити диференцирајући члан по члан Тејлор ред функције f у тачки z_0 и при томе конвергира на истом диску као и за Тејлоров ред функције f.*

Теорема 1.32. *Нека су f и g аналитичке функције и њихови Тејлорови редови дати са $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ у тачки z_0, где су $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$ за све $n \in \mathbb{N}_0$. Тада у тачки z_0 важи да је Тејлоров ред функције*

1. *cf дат са $cf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} ca_j(z-z_0)^n$, где је $c = const$;*
2. *$f + g$ дат са $f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(z-z_0)^n$.*

Дефиниција 1.11. *Нека су дата два Тејлорова реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$. **Кошијев производ** ова два реда је дато са*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \text{ где је } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k, n \in \mathbb{N}_0.$$

[7] Colin Maclaurin (1698 - 1746) шкотски математичар

Теорема 1.33. *За две аналитичке функције f и g, заједно са њиховим Тејлоровим редовима у околини тачке z_0, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, важи да је Тејлоров ред функције $f \cdot g$ дат Кошијевим производом ова два реда.*

Дефиниција 1.12. *Функционални ред облика $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ зове се **степени ред**, а комплексни бројеви a_n зову се **коефицијенти** степеног реда.*

Теорема 1.34. *Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ произвољан степени ред. Тада постоји реалан број $0 < R < \infty$ који искључиво зависи само од коефицијената степеног реда a_n и при томе важи да:*

1. *степени ред ковергира на отвореном диску $|z - z_0| < R$,*
2. *степени ред униформно ковергира на сваком затвореном диску $|z - z_0| \leq R_1 < R$,*
3. *степени ред дивергира на $|z - z_0| > R$.*

*Овакав број R зовемо **полупречник конвергенције** степеног реда.*

Теорема 1.35. *Нека степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ конвергира ка функцији $f(z)$ у некој околини тачке z_0. Тада је $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
Дакле, овај ред је управо Тејлоров ред за функцију f у околини тачке z_0.*

Сада се упознајемо са Лорановим редом.

Теорема 1.36. *Нека је комплексна функција f аналитичка на прстену $0 \leq r < |z - z_0| < R$. Тада функцију f можемо записати као збир два реда:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

Оба реда конвергирају на поменутом прстену, чак и униформно ковергирају на сваком затвореном прстену $r < \alpha \leq |z - z_0| \leq \beta < R$. Коефицијенти a_n се рачунају на следећи начин:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \text{ за } n \in \mathbb{N},$$

где је Γ произвољна позитивно оријентисана проста затворена контура која је садржана у датом прстену и тачка z_0 се налази у њеној унутрашњости.

Напомена 1.37. Развијање функције f у збир два степена реда, које се спомиње у претходној теореми, зовемо **Лоранов ред** и скраћено пишемо:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \overset{\text{деф.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ зовемо Тејлоров ред или *аналитички део Лорановог реда*, док ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ зовемо *главни део Лорановог реда.*

Теорема 1.38. *Нека су $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ два степена реда са следећим особинама:*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *конвергира на* $|z-z_0| < R$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ *конвергира на* $|z-z_0| > r$,
3. $r < R$.

Тада постоји функција $f(z)$ која је аналитичка на прстену $r < |z-z_0| < R$ тако да је Лоранов развој функције f на поменутом прстену баш $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

1.4 Нула, сингуларитет и остатак функције

У овом делу описаћемо шта су појмови нула функције и сингуларитет функције. Видећемо да се сингуларитети могу класификовати у четири категорије, од којих ће за нас најважнија бити пол. Појмови као што су пол и нула функције биће нам од изузетног значаја за елиптичне функције, јер свака елиптична функција има и нулу и пол. Већ смо се на почетку упознали са појмом сингуларитета, дефиниција 2.3. На крају осврнућемо се на теорију остатака (резидуума).

Дефиниција 1.13.

1. *Тачка $z_0 \in \mathbb{C}$ је* ***нула*** *комплексне функције f ако важи $f(z_0) = 0$.*
2. *Тачка $z_0 \in \mathbb{C}$ је* ***изоловани сингуларитет*** *функције f ако постоји $R > 0$ тако да је f аналитичка функција на пробушеном диску у тачки z_0, тј. на $0 < |z-z_0| < R$, и није аналитичка у тачки z_0.*

Околине тачке z_0 облика $0 < |z - z_0| < R$ зваћемо још и *пробушена околина* тачке z_0.

Дефиниција 1.14. *За комплексну функцију f тачка z_0 је* ***нула реда*** *m ако је f аналитичка у z_0 и испуњени су услови $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0)$ и $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.*

Уместо нула реда m говорићемо и *нула вишеструкости* m.

Теорема 1.39. *За аналитичку функцију f у тачки z_0 важи да је тачка z_0 нула реда m <u>акко</u> је $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, где је g аналитичка функција у тачки z_0 и $g(z_0) \neq 0$.*

Последица 1.40. *Нека је комплексна функција f аналитичка у тачки z_0 и $f(z_0) = 0$. Тада је, или функција f идентички једнака нули у околини тачке z_0 или постоји пробушена околина тачке z_0 тако да на њој функција f нема нула, односно постоји $R > 0$ тако да на $0 < |z - z_0| < R$ функција f нема нула.*

На даље разматрамо изоловане сингуларитете. Ако је z_0 изоловани сингуларитет функције f онда је Лоранов развој фунцкије f на $0 < |z - z_0| < R$ облика $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Сада ћемо да класификујемо изоловане сингуларитете у зависности од главног дела Лорановог реда.

Дефиниција 1.15. *Нека функција f има изоловани сингуларитет у тачки z_0 и нека је $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ њен Лоранов развој на $0 < |z - z_0| < R$.*

1. *Ако је $a_n = 0$ за све $n < 0$ онда ћемо рећи да је тачка z_0* ***отклоњиви сингуларитет*** *фунцкије f, односно*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2. *Ако је $a_{-m} \neq 0$ за неко $m \in \mathbb{N}$ и $a_n = 0$ за све $n < -m$ онда ћемо рећи да је тачка z_0* ***пол реда*** *m функције f, тј.*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

3. *Ако је $a_n \neq 0$ за бесконачно много негативних целих бројева n онда кажемо да је тачка z_0* ***есенцијални сингуларитет*** *функције f, односно*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Лема 1.41. *Нека функција f има отклоњиви сингуларитет у тачки z_0.*

1. *Тада је $f(z)$ ограничена у некој пробушеној околини тачке z_0.*
2. *Тада постоји лимес $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.*
3. *Фунцкија f може се додефинисати у тачки z_0 тако да новодобијена функција буде аналитичка у тачки z_0.*

Користећи Лоранов развој функције f и формулу како се рачунају коефицијенти Лорановог развоја може се показати да важи и обратно тврђење ове леме. Сада ћемо се осврнути на тврђења везана за полове функције.

Лема 1.42. *Нека функција f има пол реда m у тачки z_0. Тада функција $(z-z_0)^m f(z)$ има отклоњив сингуларитет у тачки z_0 и важи*

$$\lim_{z \to z_0} |(z-z_0)^k f(z)| = \infty,$$

за све $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Дакле, $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Лема 1.43. *Тачка $z_0 \in \mathbb{C}$ је пол реда m функције f <u>акко</u> постоји пробушена околина тачке z_0 тако да је*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m},$$

где је g аналитичка функција у тачки z_0 и $g(z_0) \neq 0$.

Следеће тврђење нам повезује нуле и полове функције.

Лема 1.44. *Нека функција f има нулу реда m у тачки z_0. Тада функција $1/f$ има пол реда m у тачки z_0.*
Обратно, ако f има пол реда m у тачки z_0 онда функција $1/f$ има отклоњив сингуларитет у тачки z_0 и при томе, ако додефинишемо да је $(1/f)(z_0) = 0$ тада $1/f$ има нулу реда m у тачки z_0.

Сада ћемо се осврнути на теорију остатака односно теорију резидуума.

Дефиниција 1.16. *Нека је z_0 изоловани сингуларитет функције f. Тада се коефицијент a_{-1}, који се налази уз члан $1/(z-z_0)$ у Лорановом развоју функције f око тачке z_0, назива* ***остатак (резидуум) функције*** *f у тачки z_0. Означавамо га са $Res(f, z_0)$ или скраћено $Res(z_0)$.*

Јасно је да ако је тачка z_0 отклоњив сингуларитет функције f онда је $Res(f, z_0) = 0$. Ако је тачка z_0 пол реда m функције f онда имамо формулу за рачуање остатка функције f у тачки z_0.

Теорема 1.45. *Ако је тачка z_0 пол реда m функције f онда важи*

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0) f(z)].$$

Теорема 1.46. ***(Кошијева теорема о остатку)*** *Нека је функција f аналитичка унутар контуре и на контури Γ сем у коначно много тачака $z_1, z_2, \ldots, z_n$, где је Γ проста затворена позитивно оријентисана контура. Тада важи:*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

1.5 Додатак

Да би могли да проучавамо елиптичне функције неопходно је да још изучимо двоструке редове. Циљ овог дела је да видимо под којим условом можемо да мењамо редослед сумирања два реда, тј.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \stackrel{?}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}.$$

Дефиниција 1.17. *За ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_k$ кажемо да* ***апсолутно конвергира*** *ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} |c_k|$ конвергира.*

Слично као у реалној анализи може се показати да из апсолутне конвергенције следи и обична конвергенција.

Теорема 1.47. *Нека $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < \infty$. Тада важи:*

1. *Ред $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \right)$ сабран у овом редоследу, конвергира и при томе смемо мењати редослед сумирања, тј.*

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \right).$$

2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k, l \in \mathbb{N})(k, l > n_0 \Rightarrow |A - \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{l} a_{nm}| < \varepsilon)$.

3. Ако је $k \mapsto (n(k), m(k))$ *бијекција из* $\mathbb{N}$ *на* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *и ако означимо са* $c_k = a_{n(k)m(k)}$ *онда је* $A = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$.

Доказ. На основу претпоставке теореме важи да редови $\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}$ апсолутно ковергирају за све n. Означимо са $b_n = \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}|, n \in \mathbb{N}_0$.

1. Како важи $|\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}| \leq b_n$ за све $n \in \mathbb{N}_0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ онда важи

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} = \lim_{k \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_{nm} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}.$$

2. Прво приметимо да је

$$\left| A - \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{l} a_{nm} \right| \leq \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=l+1}^{\infty} |a_{nm}| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}|.$$

Прво ћемо други сабирак да мајорирамо са $\varepsilon/2$. Знамо да важи $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$. Како тај ред ковергира онда постоји $k_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $k > k_0$ важи

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} b_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сада ћемо да мајорирамо први сабирак исто са $\varepsilon/2$. Слично као у претходном случају добијамо да постоји $l_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $l > l_0$ важи

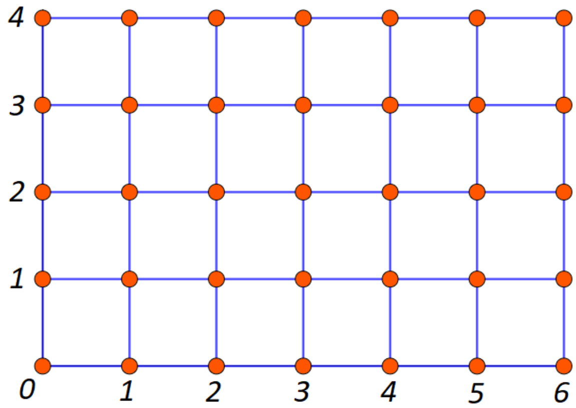
$$\sum_{n=0}^{k} \sum_{m=l+1}^{\infty} |a_{nm}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=l+1}^{\infty} |a_{nm}| \overset{1.}{=} \sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nm}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Бирајући $n_0 = \max\{k_0, l_0\}$ добијамо да важи овај део тврђења.

3. Посматрамо следећи правоугаоник сачињен од парова природних бројева са нулом.

$$P(k, l) = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq n \leq k,\ 0 \leq m \leq l\}.$$

Означимо са $g(k) = (n(k), m(k))$ поменуту бијекцију из теореме. Тада постоји M тако да је $P(k, l) \subseteq g\big[[0, M]\big]$, где је $[0, M] =$



Слика 1.1. Тачке означене са наранџастом бојом представљају елементе правоугаоника $P(6,4)$.

$\{0,1,2,\ldots,M\}$. Нека је $U \subseteq \mathbb{R}^2$ произвољан отворен скуп који садржи координатни почетак. За такав скуп и $r > 0$ дефинишемо

$$U(r) \overset{\text{деф.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = r(a,b) \text{ за неко } (a,b) \in U\}.$$

На основу ставке 2. следи да је $A = \lim\limits_{r\to\infty} \sum\limits_{(n,m)\in U(r)} a_{nm}$.

$\square$

Глава 2

Елиптичне функције

На почетку ове главе осврнућемо се на историјске догађаје које су довеле до открића елиптичних функција. Након тога, упознаћемо се са појмом елиптичне функције и уочићемо неке њихове особине. У делу Лиувилове теореме 2.3 издвојили смо неке значајне теореме поменутог математичара које додатно описују елиптичне функције. За ову главу користили смо литературу [1], [2], [3] и [5]. На даље користимо ознаку $\overline{\mathbb{C}} \overset{\text{деф.}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

2.1 Историја о елиптичним функција

Елиптичне функције су уско повезане са елиптичним интегралима. Зато ћемо нашу причу почети од њих. Лајбницово[1] и Њутново[2] откриће диференцијалног и интегралног рачуна отворило је многа поља за истраживање у математичкој анализи. Математичари су још педесетих година XVII века хтели да израчунају дужину лука елипсе. Иако није било помака на његовом решавању, математичари су успели да открију разне идентитете које су они задовољавали, као што су адиционе формуле и периодичност. Елиптични интеграли су интеграли облика

$$\int R(t, \sqrt{p(t)})dt,$$

где је R рационална функција, а p полином степена 3 или 4 и који нема вишеструке нуле. Један од првих математичара који се бавио

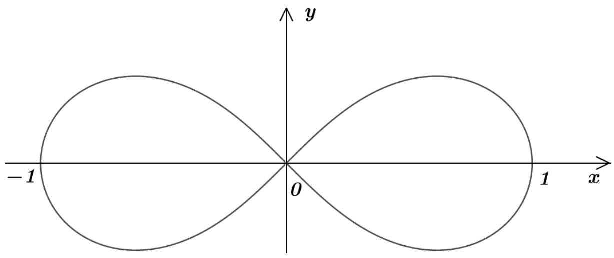
[1]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) немачки математичар, научник, филозоф и дипломата

[2]Sir Isaac Newton (1642 - 1727) енглески математичар, физичар, астроном и филозоф

елиптичним интегралима је био Фањано[3], који је 1718. године успео да покаже

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Овај интеграл је настао као потреба да се израчуна дужина лука Бернулијеве лемнискате $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.



Слика 2.1. Бернулијева лемниската $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Овај идентитет је био незапажен у математичкој јавности, све док копија Фањановог рада није стигло у руке Ојлера[4] и то датума 23. децембра 1751. Убрзо, Ојлер уопштава ову формулу

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

и показује да овај идентитет важи и уопштено за специјалне елиптичне интеграле облика $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{p(t)}}$, где је $p(t)$ полином степена 4. Овај идентитет је, у литератури, познат као *Ојлерова адициона формула.* Напоменимо да ова формула не важи за све елиптичне интеграле.

Први помак, ка откривању елиптичних функција направио је Гаус око 1800. године, када је за функцију

$$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

нашао њену инверзну функцију, коју је означио са $sl(u)$. Назива се још и *синусна функција лемнискате*, јер има сличне особине као тригонометријска синусна функција. Прво што је одмах приметио је да је она

[3]Giulio Fagnano dei Toschi (1682 - 1766) италијански математичар

[4]Leonhard Euler (1707 - 1783) швајцарски математичар, физичар, астроном

периодична са периодом 2ϖ, где је

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Шта више, ако би функцију $sl(u)$ посматрали у комплексном подручју онда она има други период, а то је $2i\varpi$. Тако је Гаус открио прву дупло периодичну функцију. Додатно, везано за број ϖ, Гаус је успео још да покаже да је аритметичко - геометријска средина бројева 1 и $\sqrt{2}$, број π/ϖ. Подсетимо се шта је аритметичко - геометријска средина. За два дата позитивна реална броја a и b дефинишемо следећа два низа:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Може се показати да два низа $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ имају исту граничну вредност, која се означава са $M(a,b)$ или $agM(a,b)$. Дакле, $agM(1,\sqrt{2}) = \pi/\varpi$. Навешћемо још две интересантне особине функције sl, које подсећају на особине тригонометријских функција.

1. $sl'(u) = \sqrt{1 - sl^4(u)}$
2. Последица Ојлерове адиционе формуле је и

$$sl(u+v) = \frac{sl(u)sl'(v) + sl(v)sl'(u)}{1 + sl^2(u)sl^2(v)}.$$

Двадесетак година касније, Абел и Јакоби долазе до исте идеје (да се посматра инверзна функција), независно од Гауса, јер Гаус није објављивао своје радове о елиптичним функцијама. Тако септембра 1827. Абел објављује свој први рад о елиптичним функцијама у часопису *Crelle's journal.* На жалост, рана смрт је омела младог Абела да се даље бави математиком. Гаус и Јакоби су били упознати са Абеловим радом. Две године касније, 1829. Јакоби објављује прву књигу о елиптичним функцијама, под називом *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum.* Занимљиво је да су Абел и Јакоби посматрали исту елиптичну функцију, тзв. *(Јакобијев) тета ред*

$$\theta(\tau, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n^2\tau + nz)},$$

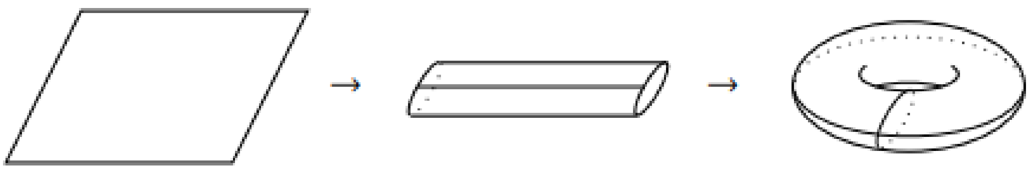
на основу које су изградили теорију елиптичних функција. У овом раду, под насловом Абелова теорема, осврнућемо се и на овај ред. Тиме су

Абел и Јакоби дали први приступ за даљи развој теорије о елиптичним функцијама.

Још један знаменити математичар који је дао велики допринос за развој теорије елиптичних функција, био је Вајерштрас. Он је био први математичар, који је дао чист теоријски увод у теорију елиптичних функција. Увео је једну специјалну ρ функцију која је била у средишту његових предавања. Помоћу ње је показао како се може изградити целокупна теорија. Тако је Вајерштрас дао и други приступ за изучавање елиптичних функција. Може се показати да Вајерштрасова ρ функција настаје као инверзна функција следећег елиптичног интеграла

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}.$$

За крај овог историјског излагања, поменућемо још два математичара који су, такође, допринела развоју ове теорије. Риман[5] је педесетих година XIX века, развио теорију елиптичних функција са геометријске тачке гледишта, где је довео у везу њихову дуплу периодичност са торусом. Другог немачког математичара којег ћемо споменути је Ајзенштајн[6]. Његов допринос се огледа у томе што их је развијао у ред и тако их аналитички представљао. То је омогућило лакши рад са елиптичним функцијама.



Слика 2.2. Риманов поглед на елиптичне функције.[7]

Ми ћемо у овом раду приказати Вајерштрасов приступ. Разлог томе је што нека тврђења постају елегантнија за доказивање.

На крају се осврнимо на примене ове теорије. Јасно је да када проучавамо елиптичне функције, онда су елиптични интеграли само нуспроизвод ове теорије. Вајерштрасова ρ функција има велику примену у механици. Поред механике, елиптичне функције се примењују и у

[5] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) немачки математичар

[6] Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823 - 1852) немачки математичар

[7] Слика је преузета из референце [5, стр. 326].

другим пољима физике. У другој половини XX века, физичари и математичира су користили елиптичне функције да би одредили кретање планета у уопштеној теорији релативности. Можда највећа примена ових функција је у теорији бројева. У теорији бројева можемо их наћи код тврђења везани за представљање броја n као збира квадрата целих бројева. Затим за Вајлсов[8] доказ Велике Фермаове[9] теореме су коришћени неки аспекти елиптичних функција, прецизније, особине елиптичних кривих. Елиптичне криве имају облик

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

и Јакоби је приметио да се оне могу параметризовати на следећи начин

$$x = f(z), \qquad y = f'(z),$$

где је f елиптична функција. На пример, за Вајерштрасову ρ функцију је испуњено да тачка $(\rho(z), \rho'(z))$ припада кривој

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

За детаљнији преглед о поменутим применама елиптичних функција, читаоца упућујемо на референце [4], [6] и [7].

2.2 Дефиниција и основне особине елиптичних функција

У овом делу уводимо појам елиптичне функције, као и појмове као што су мероморфне функције, решетка и фундаментални/периодични паралелограм. Потом ћемо показати тврђење да је елиптична функција у потпуности одређена својим вредностима над оваквим паралелограмима.

Дефиниција 2.1. *Нека је $O \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп. Фунцкија $f : O \to \overline{\mathbb{C}}$ која задовољава следеће услове:*

1. *Скуп $S(f) \overset{\text{деф.}}{=} f^{-1}(\infty)$ нема тачку нагомилавања у O,*
2. *Функција $g = f|_{O \setminus S(f)}$ је аналитичка функција,*
3. *Тачке из $S(f)$ су полови функције g,*

[8]Sir Andrew John Wiles (1953 -) енглески математичар
[9]Pierre de Fermat (1607 - 1665) француски правник и математичар

назива се ***мероморфна функција****.*

Показаћемо да је збир/производ/количник две мероморфне функције поново мероморфна функција. Такође, и извод мероморфне функције је поново мероморфна функција.

Теорема 2.1. *Нека су f и g две мероморфне функције, које су дефинисане на истом домену O. Тада су следеће функције, такође, мероморфне:*

1. $f+g$, *2.* $f \cdot g$, *3.* $\dfrac{f}{g}$, *4.* f'.

Доказ. Показаћемо само за збир две мероморфне функције, а за остале функције доказује се на сличан начин. Означимо са $S = f^{-1}(\infty)$ и $T = g^{-1}(\infty)$.

1. Тада је функција $f+g$ аналитичка на домену $O\backslash(S\cup T)$, при чему неки сингуларитети из $S \cup T$ могу бити отклоњиви.

$$(f+g)(z) = \begin{cases} \lim\limits_{z\to a}(f(z)+g(z)) & \text{ако постоји лимес у тачки } a \\ \infty & \text{ако је } a \text{ пол функције } f+g \end{cases}$$

Тиме смо показали да је функција $f+g : O \to \overline{\mathbb{C}}$ мероморфна функција. $\square$

Претходну теорему можемо исказати и другим речима:
Скуп свих мероморфних функција на датом домену $O \subseteq \mathbb{C}$, са овако уведеним операцијама, образује алгебарску структуру поље.

Наредну теорему која је везана за мероморфне функције дајемо без доказа. За доказ ове теореме читаоца упућујемо на [3, стр. 358].

Теорема 2.2. ***(Принцип аргумента)*** *Нека је Γ проста затворена и оријентисана контура. За функцију f која је аналитичка и различита од нуле у свакој тачки контуре Γ, као и мероморфна унутар контуре Γ важи да је*

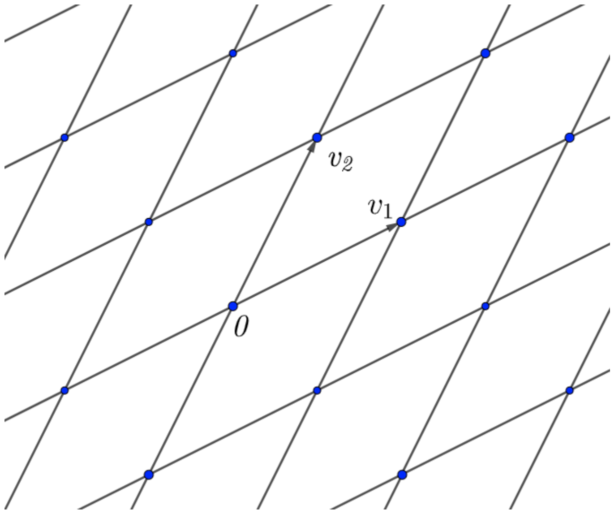
$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(\mathcal{N}_{\Gamma}(f) - \mathcal{P}_{\Gamma}(f)),$$

где смо са $\mathcal{N}_{\Gamma}(f)$ и $\mathcal{P}_{\Gamma}(f)$ означили, редом, број нула и број полова функције f, и при томе смо бројали и њихову вишеструкост.

Дефиниција 2.2. *Скуп $L \subseteq \mathbb{C}$ се назива* ***решетка****, ако постоје вектори v_1 и v_2 који су линеарно независни над $\mathbb{R}$ тако да је*

$$L = \{av_1 + bv_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Векторе v_1 и v_2 зовемо генераторима решетке L.



Слика 2.3. Тачке означене са љубичастом бојом представљају елементе решетке L.

Подсетимо се да се комплексни бројеви могу посматрати и као вектори. Сваки комплексан број записан у алгебарском облику $z = a + ib$ можемо посматрати и као уређени пар (a, b) у комплексној равни. Дакле, да су вектори v_1 и v_2 линерано независни над $\mathbb{R}$ значи да из $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$ следи да је $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, односно овде смо посматрали векторски простор $\mathbb{C}$ над пољем $\mathbb{R}$.

Дефиниција 2.3. *Нека је L решетка. Мероморфна функција $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ која задовољава идентитет*

$$f(z + v) = f(z)$$

за све $z \in \mathbb{C}$ и $v \in L$, назива се ***елиптична функција****.*

Напомена 2.3. На основу теореме 2.1 важи да ако је функција f елиптична, онда су f' и $\frac{f'}{f}$ елиптичне функције.

Приметимо да важи следеће. Нека је L решетка са генераторима v_1 и v_2. Тада важи

$$f(z + v_1) = f(z + v_2) = f(z), \text{ за све } z \in \mathbb{C}.$$

Због ове особине елиптичне функције се зову још и *дупло периодичне функције*. Такође, директна последица дефиниције је да је скуп нула $\mathcal{N}$, као и скуп полова $\mathcal{P}$ елиптичне функције је периодичан, тј.

$$\mathcal{N} + v = \{z + v \mid z \in \mathcal{N}\} = \mathcal{N} \text{ и } \mathcal{P} + v = \{z + v \mid z \in \mathcal{P}\} = \mathcal{P}.$$

Може се показати да ако су генератори v_1 и v_2 решетке L линеарно зависни над $\mathbb{R}$, тј. $v_2/v_1 \in \mathbb{R}$ онда је елиптична функција f или периодична са једним периодом или је константна функција. У првом случају претпостави се да је $v_2/v_1 \in \mathbb{Q}$, а другом $v_2/v_1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. За детаљнији доказ овога погледати у [1, стр. 262].

Да би олакшали даљи рад показаћемо како се врши нормализација два периода елиптичне функције. Означимо са $w = v_2/v_1$. Претпоставимо да је $Im(w) > 0$. Сада примећујемо да важи следеће:

1. f има периоде v_1 и v_2 <u>акко</u> $F(z) \overset{\text{деф.}}{=} f(v_1 z), z \in \mathbb{C}$ има периоде 1 и w;

2. f је мероморфна <u>акко</u> F је мероморфна.

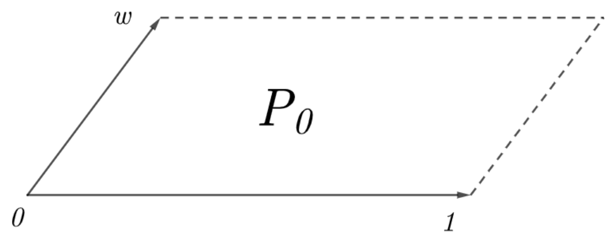
Дакле, у даљем раду без умањења на општост можемо претпоставити да елиптична функција f има периоде 1 и w где је $Im(w) > 0$, као и да је решетка L генерисана одговарајућим векторима.

Последица 2.4. *Нека је f елиптична функција са периодима 1 и w, $Im(w) > 0$. Тада за произвољне целе бројеве n, m и произвољно $z \in \mathbb{C}$ важи $f(z + n + mw) = f(z)$.*

Дефиниција 2.4. *Нека је $L \subseteq \mathbb{C}$ решетка са генераторима 1 и w, $Im(w) > 0$. Тада скуп*

$$P_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + wb, \text{ где } 0 \leq a < 1,\ 0 \leq b < 1\}$$

назива се ***фундаментални паралелограм. Периодични паралелограм*** *P је $P = P_0 + h$ за фиксирано $h \in \mathbb{C}$.*



Слика 2.4. Фундаментални паралелограм

Даље ћемо показати да је функција f у потпуности одређена са њеним вредностима на фундаменталном паралелограму.

Дефиниција 2.5. *Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ два комплексна броја и $L \subseteq \mathbb{C}$ решетка са генераторима 1 и w, $Im(w) > 0$. Кажемо да су z_1 и z_2* ***конгруентни по модулу L****, у ознаци $z_1 \sim z_2$, ако важи*

$$z_1 - z_2 = a + bw \in L, \text{ за неке } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Јасно је да је ова релација, релација еквиваленције. Напоменимо да неки аутори уместо $z_1 \sim z_2$ пишу и $z_1 \equiv z_2 \ (mod\ L)$.

Теорема 2.5. *Нека је f елиптична функција чији су периоди 1 и w, који генеришу решетку L. Тада важи следеће:*

1. *За свако $z \in \mathbb{C}$ постоји јединствено $v \in P_0$ тако да је $z \sim v$.*
2. *За свако $z \in \mathbb{C}$ постоји јединствено $v \in P$ тако да је $z \sim v$.*
3. *Помоћу решетке L може се дисјунктно покрити цела комплексна раван, тј.*
$$\mathbb{C} = \bigcup_{a,b \in \mathbb{Z}} (a + bw + P_0).$$
4. *Функција f је у потпуности одређена њеним вредностима над било којим периодичним паралелограмом.*

Доказ. 1. • *егзистенција:*
Нека је $z = x + iy \in \mathbb{C}$ произвољно. Како вектори 1 и w чине базу векторског простора $\mathbb{C}$ онда можемо записати $z = a + bw$. Уочимо комплексан број $v = z - n - mw$, где је n највећи цео број такав да је мање или једнако од a, и m највећи цео број такав да је мањи или једнако од b. Тада је $z \sim v$ по дефиницији, и

$$v = z - n - mw = a + bw - n - mw = (a - n) + (b - m)w \in P_0.$$

• *јединственост:*
Нека су $v, v_1 \in P_0$ такви да је $v \sim z \sim v_1$. . Знамо да 1 и w чине базу векторског простора $\mathbb{C}$ па запишимо $v = a + bw$ и $v_1 = a_1 + b_1 w$. Покажимо да су $a = a_1$ и $b = b_1$. Тада из дефиниција фундаменталног паралелограма и конгруентно по модулу L добијамо

$$v - v_1 = (a - a_1) + (b - b_1)w \in L$$

Дакле, $a - a_1$ и $b - b_1$ су цели бројеви. Како су $0 \leq a, a_1 < 1$ и $0 \leq b, b_1 < 1$ онда су $-1 < a - a_1 < 1$ и $-1 < b - b_1 < 1$ те су $a - a_1 = 0$ и $b - b_1 = 0$. Тиме смо показали јединственост.

2. Следи директно из *1.* примењујући доказ на тачку $z - h$, где је $P = P_0 + h$.

3. На основу *1.* за произвољно $z \in \mathbb{C}$ постоји јединствено $v \in P_0$ тако да је $z \sim v$.

$$\begin{aligned} z \sim v &\Rightarrow z - v = n + mw \\ &\Rightarrow z = n + mw + v \in n + mw + P_0 \subseteq \bigcup_{a,b\in\mathbb{Z}} (a + bw + P_0) \end{aligned}$$

   Преостаје да се покаже да је унија дисјунктна.
   Нека је $z \in (a_1 + b_1 w + P_0) \cap (a_2 + b_2 w + P_0)$ за неке $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$.

$$z \in a_1 + b_1 w + P_0 \Rightarrow z - v_1 = a_1 + b_1 w \text{ за неко } v_1 \in P_0 \Rightarrow z \sim v_1,$$

$$z \in a_2 + b_2 w + P_0 \Rightarrow z - v_2 = a_2 + b_2 w \text{ за неко } v_2 \in P_0 \Rightarrow z \sim v_2$$

   Дакле, $v_1 \sim z \sim v_2$ па из јединствености коју смо показали у 1. следи да је $v_1 = v_2$ што даје $n_1 + m_1 w = z = n_2 + m_2 w$. Међутим, вектори 1 и w чине базу па из јединствености представљања вектора следи да је $n_1 = n_2$ и $m_1 = m_2$.

4. Директна последица претходних ставки. □

2.3 Лиувилове теореме

У овом делу даћемо три Лиувилове теореме које додатно описују елиптичне функције уз још неке претпоставке. Те теореме представљају основни резултат у теорији елиптичних функција.

Теорема 2.6. ***(Прва Лиувилова теорема, 1847)*** *Нека је f елиптична функција која нема полова. Тада је она константна функција.*

Доказ. Показали смо у теореми 2.5 да је функција f у потпуности одређена њеним вредностима у фундаменталном паралелограму P_0. Како је затворење скупа P_0 компактан скуп и f је непрекидна над њим онда је она и ограничена. Тада према Лиувиловој теореми 1.22 важи да је она и константна функција на P_0, а тиме и над $\mathbb{C}$. □

Пре него што формулишемо дургу Лиувилову теорему приметимо следеће. Нека је z_0 пол елиптичне функције f. Тада сви елементи који се налазе у класи еквиваленције (релације бити конгруентан по модулу L) чији је представник z_0 су полови функције f, тј. ако је $z_0 \sim v$ онда је v пол функције f. Додатно важи $Res(f, z_0) = Res(f, z_0 + w)$ за све $w \in L$.

Теорема 2.7. ***(Друга Лиувилова теорема)*** *Нека је f елиптична функција.*

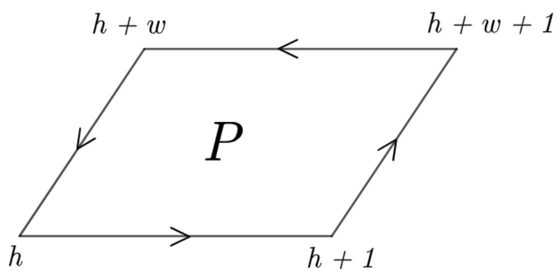
1. *Тада функција f има коначно много полова по модулу L.*

2. *Означимо са $z_1, z_2, \dots z_n$ представнике класа еквиваленција за поменуте полове функције f. Тада је $\sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i) = 0$.*

Доказ. 1. Из дефиниције елиптиче функције знамо да скуп полова функције f нема тачку нагомилавања на свом домену. Када направимо пресек фундаменталног паралелограма (који је ограничен) са скупом полова функције f добијамо коначан скуп. Због теореме 2.5 добијамо да функција f има коначно много полова по модулу L.

2. Сада знамо да је скуп полова функције f коначан на фундаменталном паралелограму, а тиме и на сваком периодичном паралелограму, због теореме 2.5. Изаберимо $h \in \mathbb{C}$ тако да елиптична функција f нема полова на рубу периодичног паралелограма $P = P_0 + h = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + wb + h,$ где $0 \leq a < 1,\ 0 \leq b < 1\}$. Због Кошијеве теореме о остатку важи $\int_{\partial P} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i)$. Довољно је показати да је $\int_{\partial P} f(z)dz = 0$.

$$\int_{\partial P} f(z)dz = \left(\int_{h}^{h+1} + \int_{h+1}^{h+1+w} + \int_{h+1+w}^{h+w} + \int_{h+w}^{h} \right) f(z)dz$$



Слика 2.5

Приметимо да се следећи интеграли потиру:

$$\int_{h}^{h+1} f(z)dz + \int_{h+1+w}^{h+w} f(z)dz = \int_{h}^{h+1} f(z)dz + \int_{h+1}^{h} f(z+w)dz$$

$$= \int_{h}^{h+1} f(z)dz + \int_{h+1}^{h} f(z)dz = \int_{h}^{h+1} f(z)dz - \int_{h}^{h+1} f(z)dz = 0$$

Слично и за други пар, и тиме смо показали тврђење. □

Последица 2.8. *Неконстантна елиптична функција на фундаменталном паралелограму има бар два пола или један пол вишеструкости барем 2.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји елиптична функција f која има тачно један пол у тачки $z_0 \in P_0$ и вишеструкости је један. Тада би Лоранов развој функције f у околини тачке $z_0 \in P_0$ изгледао $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, где је $a_{-1} \neq 0$. Међутим, на основу претходне теореме важи да је $a_{-1} = Res(f, z_0) = 0$, што нас доводи у контрадикцију. □

Дефиниција 2.6. ***Ред елиптичне функције*** *је укупан број полова (бројећи и њихову вишеструкост) на фундаменталном паралелограму.*

Сада претходну пропозицију 2.8 можемо исказати и на следећи начин: *Не постоји елиптична функција реда 1.*

Теорема 2.9. ***(Трећа Лиувилова теорема)*** *Нека је f елиптична функција реда n. Тада функција f има n нула.*
Другим речима, елиптична функција f има једнак број полова и нула.

Доказ. Разликујемо два случаја:

1. Функција f нема ни нулу ни пол на рубу P_0.
   Тада по теореми 2.2 важи $\int_{\partial P_0} f'(z)/f(z)dz = 2\pi i(B_N - B_P)$, где B_N означава број нула функције f у P_0 и B_P означава број полова функције f у P_0. Као у доказу друге Лиувилове теореме 2.7 на сличан начин се показује се $\int_{\partial P_0} f'(z)/f(z)dz = 0$, па тиме добијамо и тврђење.

2. Функција f има нулу или пол на рубу P_0.
   Бирајући оговарајуће $h \in \mathbb{C}$ тако да функција f нема пол на рубу периодичног паралелограма $P = P_0 + h$ и примењујући претходни случај на P завршавамо доказ ове теореме. □

Последица 2.10. *Нека је f елиптична функција и $c \in \mathbb{C}$. Тада једначина $f(z) = c$ има онолико решења по модулу L, колики је и ред функције f.*

Доказ. Функција $f - c$ је елиптична и има исти број полова као и f, и означимо тај број са n. Због треће Лиувилове теореме 2.9 функција $f - c$ има n нула, тј. једначина $f(z) = c$ има n решења. □

Глава 3

Карактеризација елиптичних функција

Главни пример елиптичне функције је свакако Вајерштрасова ρ функција. Њен значај огледа се у томе, што се свака елиптична функција може представити помоћу Вајерштрасове ρ функције. На крају смо издвојили Абелову теорему која нам даје одговор на питање: Под којим условом постоји елиптична функција са унапред датим нулама и половима? Литературе коришћене за израду ове главе су [1], [2] и [4].

3.1 Вајерштрасова ρ функција

У овом делу видећемо један конкретан пример елиптичне функције, а то је Вајерштрасова ρ функција. Она представља основну функцију за елиптичне функције, јер свака друга елиптична функција може да се представи помоћу Вајерштрасове функције.

Дефиниција 3.1. ***(К. Вајерштрас,1862/63)*** *Нека је L решетка. Тада се функција дефинисана са*

$$\rho(z, L) = \rho(z) \stackrel{\text{деф.}}{=} \frac{1}{z^2} + \sum_{v \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z+v)^2} - \frac{1}{v^2} \right) \text{ за } z \in \mathbb{C} \setminus L,$$

*назива **Вајерштрасова ρ функција**.*

Најпре објаснимо шта значи $\sum_{v \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z+v)^2} - \frac{1}{v^2} \right)$. Нека је $L = \{z \in \mathbb{C} \mid z = n + mw$, где $n, m \in \mathbb{Z}\}$ решетка са генераторима 1 и w. Важи:

$$\sum_{v \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z+v)^2} - \frac{1}{v^2} \right) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z+n+mw)^2} - \frac{1}{(n+mw)^2} \right)$$

Напомена 3.1. 1. Вајерштрасова ρ функција из дефиниције 2.7 је добро дефинисана.

2. Сменом бројача $v \mapsto -v$ Вајерштрасову функцију можемо записати и у следећем облику:

$$\rho(z) = \sum_{v \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-v)^2} - \frac{1}{v^2} \right)$$

Показаћемо да је Вајерштрасова функција добро дефинисана кроз наредне две леме.

Лема 3.2. *За $r > 2$ важи да следећи редови* $\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(|n|+|m|)^r}$ *и* $\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|n+mw|^r}$ *конвертирају, где $w \in \mathbb{C}$ и $Im(w) > 0$.*

Доказ. Прво показујемо да ред $\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(|n|+|m|)^r}$ конвергира. Приметимо да за $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ важи

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} &= \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} + \frac{1}{|n|^r} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} \\
&= \frac{1}{|n|^r} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(|n|+m)^r} = \frac{1}{|n|^r} + 2 \sum_{k=|n|+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \\
&\leq \frac{1}{|n|^r} + \int_{|n|}^{\infty} \frac{dx}{x^r} \leq \frac{1}{|n|^r} + C\frac{1}{|n|^{r-1}}.
\end{aligned}$$

За $r > 2$ имамо

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} &= \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|m|^r} + \sum_{n \neq 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(|n|+|m|)^r} \\
&\leq \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|m|^r} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{|n|^r} + C\frac{1}{|n|^{r-1}} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Конвергенција другог реда из леме следи из конвергенције управо показаног реда и упоредног критеријума. Доказ ове чињенице спроводи се кроз следећи низ неједнакости, при чему проверу свих наведених корака остављамо читаоцу да уради. Циљ нам је да покажемо

$|n| + |m| \leq C|n + mw|$ за неку константу $C > 0$ и за све $n, m \in \mathbb{Z}$. Запишимо $w = a + ib$, где је $b > 0$.

$$\begin{aligned} |n + mw| &= \sqrt{(n + ma)^2 + (mb)^2} \leq |n + ma| + |mb| \leq C_0(|n + ma| + |m|) \\ &\leq C(|n| + |m|). \end{aligned}$$

□

Лема 3.3. *Вајерштрасова ρ функција је добро дефинисана.*

Доказ. Приметимо да је

$$\left|\frac{1}{(z+v)^2} - \frac{1}{v^2}\right| = \frac{|z^2 + 2zw|}{|z+v|^2|v|^2}$$

Нека је $r > 0$ произвољно и $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ компактан скуп. Тада за $|z| \leq r$ и $|v| \geq 2r$ важи

$$\left|\frac{1}{(z+v)^2} - \frac{1}{v^2}\right| \leq 6r\frac{1}{|v|^3}.$$

Сада запишимо функцију ρ на следећи начин:

$$\rho(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{|v| \leq 2r}\left(\frac{1}{(z+v)^2} - \frac{1}{v^2}\right) + \sum_{|v| > 2r}\left(\frac{1}{(z+v)^2} - \frac{1}{v^2}\right)$$

Први ред је коначан, а други ред конвергира по претходној леми уз примену показане претходне неједнакости. □

Теорема 3.4. *Нека је L решетка са генераторима 1 и w. Тада је Вајерштрасова ρ функција парна елиптична функција са периодима 1 и w. Додатно, полови функције ρ су тачке које се налазе на решетки L и имају вишеструкост 2.*

Доказ. Да је функција парна $\big(\rho(z) = \rho(-z)\big)$ непосредно се проверава. По дефиницији проверавамо елиптичност ρ функције.

1. $S(\rho)$ нема тачку нагомилавања у $\mathbb{C}$.
   Јасно је да су сингуларне тачке функције ρ управо тачке са решетке L, тј. $S(\rho) = L$. По дефиницији решетке L следи да овај скуп нема тачку нагомилавања у $\mathbb{C}$.

2. $\rho|_{\mathbb{C}\setminus L}$ је аналитичка функција.
   Функција ρ је диференцијабилна у свакој тачки $z_0 \in \mathbb{C}\setminus L$ па је тиме и аналитичка на $\mathbb{C}\setminus L$.

3. L је скуп полова функције ρ и додатно они су реда 2.
   Ради једноставности показаћемо, специјално, да је тачка $z_0 = 0$ пол реда 2. Аналогно се ради за преостале тачке са решетке. У тачки 0 важи следећи Тејлоров развој
   $$\frac{1}{(z+v)^2} - \frac{1}{v^2} = \frac{1}{v^2}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\left(-\frac{z}{v}\right)^k.$$
   Замењујући ово у функцију ρ добијамо да важи
   $$\begin{aligned}\rho(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{v\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{v^2}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\left(-\frac{z}{v}\right)^k \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v\in L\setminus\{0\}} \frac{(-1)^k(k+1)}{v^{k+2}} z^k \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k,\end{aligned}$$
   где је
   $$c_k = (-1)^k(k+1) \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(n+mw)^{k+2}},\ k\in\mathbb{N}.$$
   Тиме смо добили да је тачка 0 пол реда 2 функције ρ.

4. Функција ρ је дупло периодична са периодима 1 и w.
   Прво приметимо да је
   $$\rho'(z) = -2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n+mw)^3},\ \text{за}\ z\in\mathbb{C}\setminus L.$$
   Приметимо да $\rho'(z)$ апсолутно конвергира када $z\notin L$. Примећујемо да је $\rho'(z+1) = \rho'(z)$ и $\rho'(z+w) = \rho'(z)$, па је $\rho(z+1) = \rho(z) + a$ и $\rho(z+w) = \rho(z) + b$ за неке $a, b\in\mathbb{C}$. Са друге стране, како је функција ρ парна, онда је $\rho(-\frac{1}{2}) = \rho(\frac{1}{2})$ и $\rho(-\frac{w}{2}) = \rho(\frac{w}{2})$. Закључујемо да је $a = b = 0$. □

Напомена 3.5. У претходном доказу развили смо функцију ρ у Лоранов ред у околини тачке 0. За $z\in\mathbb{C}\setminus L$ важи:
$$\begin{aligned}&\rho(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k,\ \text{где је} \\ &c_k = (-1)^k(k+1) \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \frac{1}{(n+mw)^{k+2}},\ k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Како је функција ρ парна добијамо да за Лоранове коефицијенте c_k важи:

$$c_{2k-1} = 0,$$
$$c_{2k} = (2k+1) \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(n+mw)^{2k+2}}.$$

У наставку ћемо показати неке особине Вајерштрасове функције, које су генерално битне за елиптичне функције. Као што смо на почетку навели, једна од особина је да се све елиптичне функције могу приказати помоћу Вајерштрасове ρ функције.

Последица 3.6. *Изводна функција Вајерштрасове ρ функције*

$$\rho'(z) = -2\sum_{v\in L} \frac{1}{(z+v)^3}$$

је непарна елиптична функција која има полове реда 3 у тачкама решетке.

Теорема 3.7. ***(Инваријантна карактеризација нула функције ρ')*** *Нека је L решетка. Тачка $a \in \mathbb{C}$ је нула функције ρ' акко $a \notin L$ и $2a \in L$. Додатно, постоје тачно три нуле по модулу L и све су вишеструкости 1.*

Доказ. ($\Rightarrow$) Како је $0 = \rho'(a) = -2\sum_{v\in L} \frac{1}{(a+v)^3}$ онда $a \notin L$. Преостаје да се покаже да је $2a \in L$. Директном провером се добија да су $\frac{1}{2}$, $\frac{w}{2}$ и $\frac{1+w}{2}$ нуле функције $\rho'(z)$. Како се те тачке налазе у фундаменталном паралелограму оне су међусобно различите по модулу L. Јасно је да због треће Лиувилове теореме 2.9 и последице 3.6 других нула и нема, као и да су све вишеструкости 1. Ако је a произвољна нула функције ρ' онда је она конгруентна са неком од ове три нуле из фундаменталног паралелограма. Претпоставимо да важи $a \sim \frac{1}{2}$. У свим осталим случајевима ради се на сличан начин.

$$a \sim \frac{1}{2} \Rightarrow a - \frac{1}{2} = n + mw \Rightarrow 2a = 1 + 2n + 2mw \in L.$$

($\Leftarrow$) Нека је $a \in \mathbb{C}$ за које важи $a \notin L$ и $2a \in L$. Тада због периодичности и непарности функције ρ' важи следеће:

$$\rho'(a) = \rho'(a-2a) = \rho'(-a) = -\rho'(a) \quad \Rightarrow \quad \rho'(a) = 0. \qquad \square$$

Сада уведимо следеће ознаке:

$$e_1 = \rho\left(\frac{1}{2}\right),\ e_2 = \rho\left(\frac{w}{2}\right),\ e_3 = \rho\left(\frac{1+w}{2}\right).$$

Ове вредности се још зову и *полупериоди*. На основу последице 2.10 и чињенице да је фунцкија ρ реда 2 закључујемо да једначина $\rho(z) = e_i$, где $1 \le i \le 3$ има два решења.

Последица 3.8. *Комплексни бројеви e_1, e_2 и e_3 су међусобно различити и до на пермутацију фактора не зависе од избора базе за решетку L.*

Доказ. Претпоставимо супротно да су нека два броја једнака. Тада ρ има бар четири корена у фундаменталном паралелограму, што не може бити јер је ρ реда 2. Да не зависе од избора базе за L, следи из претходне теореме 3.7. □

Теорема 3.9. *Функција $(\rho')^2$ може се представити као кубни полином по променљивој ρ, тј.*

$$(\rho')^2 = 4(\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3).$$

Доказ. Посматрамо полином $p(z) = 4(\rho(z) - e_1)(\rho(z) - e_2)(\rho(z) - e_3)$ у фундаменталном паралелограму. Приметимо да овај полином p, као и функција $(\rho')^2$ има нуле у тачкама $\frac{1}{2}$, $\frac{w}{2}$ и $\frac{1+w}{2}$ које су вишеструкости 2. Даље полином p и функција $(\rho')^2$ имају полове реда 6 у тачкама решетке. Дакле, количник $\frac{(\rho')^2}{p}$ је елиптична функција без полова, па је она константна функција због прве Лиувилове теореме, тј. $(\rho'(z))^2 = cp(z)$ за неко $c \in \mathbb{C}$. Преостаје да се покаже да је $c = 4$. Како у околини 0 важи да је $\rho(z) = \frac{1}{z^2} + \dots$ и $\rho'(z) = -\frac{2}{z^3} + \dots$, добијамо да је $c = 4$. □

Напомена 3.10. Рачунањем можемо извести и следећи облик за ρ':

$$\begin{aligned}
&(\rho'(z))^2 = 4\rho^3(z) - g_2\rho(z) - g_3, \text{ где су}\\
&g_2 = 60G_4 = 60 \sum_{v \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{v^4},\\
&g_3 = 140G_6 = 140 \sum_{v \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{v^6}.
\end{aligned}$$

Ово је у литератури познато под именом *Вајерштрасова диференцијална једначина* или *алгебарска диференцијална једначина*. Помоћу ње можемо све веће изводе изразити као полиноме по ρ и ρ'. Додатно, може се показати да је функција ρ опште решење комплексне диференцијалне једначине

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

Сада долазимо до најављиване теореме, да се свака елиптична функција може приказати помоћу Вајерштрасове функције.

Теорема 3.11. *Нека је L решетка са генераторима 1 и w. Свака елиптична функција може се приказати као рационална функција по променљивама ρ и ρ', где је ρ Вајерштрасова функција.*

За доказ ове теореме треба ће нам следеће две леме.

Лема 3.12. *Нека је L решетка са генераторима 1 и w. Свака парна елиптична функција са периодима 1 и w, чији су полови садржани у решетки, може се приказати као полином са променљивом ρ, где је ρ Вајерштрасова функција.*

Доказ. Ако је f константна елиптична функција онда тврђење директно следи. Нека је f неконстантна елиптична функција. Тада функција f има барем један пол у решетки L и због периодичности функције f сви полови се налазе у решетки L, као и тачка 0. Сада ћемо да посматрамо Лоранов развој функција f и ρ у околини тачке 0. Пре свега како је функција f парна онда ћемо у њеном Лорановом развоју имати само парне коефицијенте.

$$f(z) = a_{-2n} z^{-2n} + a_{-2(n-1)} z^{-2(n-1)} + \dots$$
$$\rho(z) = z^{-2} + \dots$$

Како је $\rho^n(z) = z^{-2n} + \dots$, онда посматрамо функцију

$$g(z) = f(z) - a_{-2n}\rho^n(z).$$

За функцију g важи да је парна елиптична функција чији се полови налазе у решетки g. Додатно, ред елиптичне функције g је строго мањи од реда елиптичне функције f. Настављајући овај поступак, индуктивно, можемо избацити све негативне степене из Лорановог развоја функције f. Тако ћемо добити да је функција ($f -$„полином по ρ”) елиптична која нема више полова. Према првој Лиувилој теореми она је константна функција и тиме смо представили функцију f као полином по променљивој ρ, тј.

$$f(z) = b_n\rho^n(z) + \dots + b_1\rho(z) + b_0. \qquad \square$$

У наредној леми нећемо захтевати да се полови парне елиптичне функције налазе на решетки L.

Лема 3.13. *Нека је L решетка са генераторима 1 и w. Свака парна елиптична функција са периодима 1 и w може се приказати као рационална функција са променљивом ρ, где је ρ Вајерштрасова функција.*

Доказ. Нека је f неконстантна парна елиптична функција. На основу тврђења 1.39 и 1.43, можемо приметити да за сваки пол $a \notin L$ функције f, можемо наћи довољно велико $n \in \mathbb{N}$ тако да функција $g_a(z) = (\rho(z) - \rho(a))^n f(z)$ има отклоњив сингуларитет у тачки a. Означимо са $a_1, \ldots, a_n$ све полове функције f по модулу L који се налазе ван решетке, односно за које не важи $a_k \sim 0, 1 \leq k \leq n$. Тада елиптична функција

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^{m} (\rho(z) - \rho(a_k))^{n_k}$$

има отклоњиве сингуларитете ван решетке L, па се њени полови могу налазати само на решетки. Према претходној леми 3.12 важи да се функција g може приказати као полином по променљивој ρ, а тиме је функција f рационална функција по променљивој ρ. $\square$

Сада када смо показали ова два помоћна тврђења можемо показати полазну теорему 3.11.

Доказ. Нека је f произвољна елиптична функција. Записаћемо функцију f као збир парне и непарне елиптичне функције, и искористићемо чињеницу да је ρ' непарна функција.

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2\rho'(z)} \rho'(z).$$

Први савирак је парна функција, а другом сабирку, први чинилац је парна функција, па према претходној леми 3.13 њих можемо представити као рационалне функције по променљивој ρ. Тиме смо показали и ово тврђење. $\square$

За крај овог дела навешћемо још неке корисне особине Вајерштрасове функције.

Теорема 3.14. ***(Адициона формула за функцију ρ)*** *Нека су дати $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ такви да z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2 \notin L$. Тада важи*

$$\rho(z_1 + z_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\rho'(z_1) - \rho'(z_2)}{\rho(z_1) - \rho(z_2)} \right)^2 - \rho(z_1) - \rho(z_2).$$

Доказ. Директном провером може се видети да за $z_1, z_2 \notin L$ важи

$$\rho'(z_1) = c_1(z_1, z_2)\rho(z_1) + c_2(z_1, z_2),$$
$$\rho'(z_2) = c_1(z_1, z_2)\rho(z_2) + c_2(z_1, z_2),$$

где су

$$c_1(z_1, z_2) = \frac{\rho'(z_1) - \rho'(z_2)}{\rho(z_1) - \rho(z_2)},$$
$$c_2(z_1, z_2) = \frac{\rho(z_1)\rho'(z_2) - \rho'(z_1)\rho(z_2)}{\rho(z_1) - \rho(z_2)}.$$

За фиксиране $z_1, z_2 \notin L$ дефинишемо функцију f на следећи начин

$$f(x) \stackrel{\text{деф.}}{=} \rho'(x) - c_1(z_1, z_2)\rho(x) - c_2(z_1, z_2), \text{ за } x \in \mathbb{C} \backslash L.$$

На основу показаних особина Вајерштрасове ρ функције, важи да функција f по модулу L има један пол реда 3 у тачки 0. Са друге стране, провером се добија да једначина $f(x) = 0$ има решења за $x = z_1$ и $x = z_2$. На основу последице 2.10 важи да ова једначина има још једно решење, гледано по модулу L. Да би одредили ту трећу нулу, користићемо Абелову теорему 3.16 коју ћемо доказати у наредном делу. Наиме, ако обележимо са x трећу нулу, из Абелове теореме добијамо да је испуњено

$$z_1 + z_2 + x \sim 0.$$

Што значи, трећа нула функције f је $x = -z_1 - z_2$ по модулу L, тј. $f(-z_1 - z_2) = 0$. Напоменимо да $z_1 + z_2 \notin L$, због претпоставке теореме. Дефинишемо нову комплексну функцију g са

$$g(x) \stackrel{\text{деф.}}{=} (\rho'(x))^2 - (c_1(z_1, z_2)\rho(x) + c_2(z_1, z_2))^2, \text{ за } x \in \mathbb{C} \backslash L, z_1, z_2 \notin L.$$

Јасно је да су нуле функције f, уједно и нуле функције g, тј. $g(z_1) = g(z_2) = g(-z_1 - z_2) = 0$. Користећи Вајерштрасову диференцијалну једначину можемо функцију g записати у следећем облику

$$g(x) = 4\rho^3(x) - c_1^2(z_1, z_2)\rho^2(x) - (2c_1(z_1, z_2)c_2(z_1, z_2) + g_2)\rho(x) - (c_2^2(z_1, z_2) + g_3).$$

Како функција g има поменуте три нуле, онда комплексни полином

$$Q(P) = 4P^3 - c_1^2(z_1, z_2)P^2 - (2c_1(z_1, z_2)c_2(z_1, z_2) + g_2)P - (c_2^2(z_1, z_2) + g_3),$$

има корене у тачкама $P_1 = \rho(z_1), P_2 = \rho(z_2)$ и $P_3 = \rho(-z_1 - z_2)$. Тиме полином Q можемо записати у следећем облику

$$Q(P) = 4(P - \rho(z_1))(P - \rho(z_2))(P - \rho(-z_1 - z_2)).$$

Сада поредећи два записа полинома Q и изједначавајући коефицијенте који стоје уз квадратни члан, имамо следећу једнакост

$$c_1^2(z_1, z_2) = 4(\rho(z_1) + \rho(z_2) + \rho(-z_1 - z_2)).$$

На крају, замењујући шта је c_1 и користећи чињеницу да је ρ парна функција добијамо тврђење. $\square$

Последица 3.15. ***(Формула удвостручења)***

$$\rho(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\rho''(z)}{\rho'(z)}\right)^2 - 2\rho(z)$$

3.2 Абелова теорема

Абелова теорема говори под којим условом можемо конструисати елиптичну функцију, ако су унапред дате нуле и полови елиптичне функције. На основу треће Лиувилове теореме јасно је да се укупан број нула мора поклопити са укупним бројем полова. Рационална функција је пример функције која се може конструисати са унапред датим нулама и половима. Међутим те функције нису елиптичне.

Пре него што наведемо Абелову теорему, прво ћемо навести њене претпоставке. *Листа* је коначан скуп комплексних бројева у којима је дозвољено понављање елемената. Помоћу листа ћемо описати унапред дате нуле и полове. У Абеловој теореми претпоставићемо да су дате листа нула $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и листа полова $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тако да је пресек те две листе празан скуп. Додатно претпостављамо:

1. $f(z) = 0 \Leftrightarrow z \sim a_j$ за неко $1 \leq j \leq n$,

2. $f(z) = \infty \Leftrightarrow z \sim b_j$ за неко $1 \leq j \leq n$.

Како се елементи у листи могу понављати или да буду конгруентни по модулу L, онда ћемо ред и нуле функције тумачити на следећи начин:

1. Ред нуле a_j функције f једнак је броју свих k тако да је $a_k \sim a_j$.

2. Ред пола b_j функције f једнак је броју свих k тако да је $b_k \sim b_j$.

Дакле, под овим претпоставкама формулишемо Абелову теорему.

Теорема 3.16. ***(Абелова теорема, 1826)*** *Елиптична функција са унапред датим нулама $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и половима $b_1, b_2, \ldots, b_n$ постоји <u>акко</u> важи*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \sim b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Доказ. ($\Rightarrow$) У овом смеру претпостављамо да постоји елиптична функција f чије су нуле $a_1, a_2, \dots, a_n$ и полови $b_1, b_2, \dots, b_n$. Треба показати да важи $a_1 + a_2 + \dots + a_n \sim b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Уочимо периодични паралелограм $P = P_0 + h$, за неко $h \in \mathbb{C}$, тако да P не садржи координатни почетак и ∂P не садржи ни нуле ни полове функције f. Додатно, претпоставићемо да се нуле и полови функције f налазе у унутрашњости периодичног паралелограма P, тј. $a_k, b_k \in \mathring{P}, 1 \leq k \leq n$.

Функција $g(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)}$ има полове реда 1 у тачкама $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, на основу тврђења 1.39 и 1.43. Користећи Кошијеву теорему о остацима важи да је

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{2n} Res(g, z_k),$$

где је

$$z_k = \begin{cases} a_k & \text{ако је } 1 \leq k \leq n \\ b_{k-n} & \text{ако је } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}.$$

Сада ћемо израчунати ову суму, при чему ћемо морати да посматрамо два случаја. Прво претпоставимо да је $z_k = a_k, 1 \leq k \leq n$, тј. прво гледамо ако је тачка a_k нула елиптичне функције f. Тада у некој околини тачке z_k можемо функцију f записати у облику $f(z) = (z-a_k)^l F(z)$, где је l вишеструкост нуле a_k функције f, а F је аналитичка функција са особином $F(a) \neq 0$. Тиме извод функције f можемо записати у облику $f'(z) = l(z-a_k)^{l-1}F(z) + (z-a_k)^l F'(z)$. Убацивајући ове једнакости за функције f и f' у функцију g добијамо да важи:

$$g(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = l\frac{z}{z-a} + \frac{zF'(z)}{F(z)}.$$

Сада резидуум функције g у тачки z_k је:

$$Res(g, z_k) = \lim_{z \to z_k}(z - z_k)g(z) = lz_k.$$

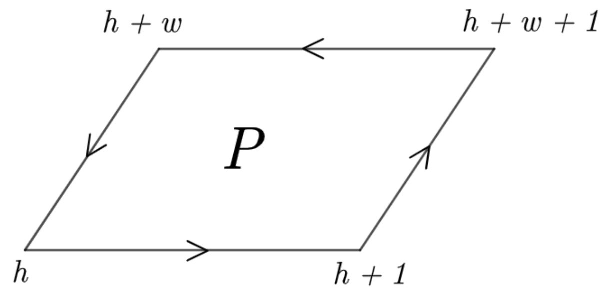
За други случај претпоставимо да је $z_k = b_{k-n}, n+1 \leq k \leq 2n$, тј. тачка b_{k-n} је пол функције f. На сличан начин може се показати да је

$$Res(g, z_k) = -lz_k,$$

где је сада l вишеструкост пола b_{k-n} функције f.
Тиме смо добили да је

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = a_1 + \dots a_n - b_1 - \dots - b_n.$$

Циљ нам је да покажемо да $I \in L$. Сада ћемо расписати интеграл I, при чему ћемо користити и чињеницу да су функције f и f' дупло периодичне.



Слика 3.1

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_h^{h+1} + \int_{h+1}^{h+w+1} + \int_{h+w+1}^{h+w} + \int_{h+w}^{h} \right) z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_h^{h+1} + \int_{h+1}^{h+w+1} - \int_{h+w}^{h+w+1} - \int_{h}^{h+w} \right) z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_h^{h+1} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} - (z+w) \frac{f'(z+w)}{f(z+w)} \right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_h^{h+w} \left((z+1) \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} - z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz \\
&= -\frac{w}{2\pi i} \int_h^{h+1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_h^{h+w} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.
\end{aligned}$$

Приметимо да смо I изразили као линеарну комбинацију вектора 1 и w. Да би $I \in L$ неопходно је још показати да

$$\frac{1}{2\pi i} \int_h^{h+a} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z} \quad \text{за } a \in \{1, w\}.$$

Како функција f на домену интеграције нема ни полова ни нула онда важи

$$\int_h^{h+a} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \ln(h+a) - \ln(h) = 2m\pi i, \text{ за неко } m \in \mathbb{Z}.$$

Тиме смо показали овај смер Абелове теореме.
($\Leftarrow$) Други смер Абелове теореме представља тежи део доказа. За то ће нам прво бити неопходна мала припрема. $\square$

Лема 3.17. *Нека су комплексан број z_0 и решетка L (са генераторима 1 и w) унапред дати. Тада постоји аналитичка функција $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ која испуњава следеће особине:*

1. *$\sigma(z+v) = e^{az+b}\sigma(z), v \in L$, где су a и b неки комплексни бројеви који могу да зависе од v, али су независни од z.*

2. *σ има нулу реда 1 у тачки z_0, и за сваку другу нулу v_0 функције σ важи да је реда 1 и $v_0 \sim z_0$.*

Доказ. Посматрамо следећу функцију, тзв. *тета ред*

$$\theta(w,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2 w + 2nz)},$$

где је је z независна променљива, а w је фиксирано и то је један од генератора решетке L. Пре свега показаћемо да овај ред конвергира. За комплексне бројеве $z = x + iy$ и $w = s + it, t > 0$ важи

$$|e^{\pi i(n^2 w + 2ny)}| = e^{-\pi(n^2 t + 2ny)} \leq e^{-\pi \frac{t}{2} n^2}.$$

Приметимо да ред

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$$

конвергира за $q = e^{-\frac{\pi}{2}t} < 1$, јер геометријски ред са овим општим чланом конвергира. Тиме смо показали конвергенцију тета реда. Сада ћемо показати да тета ред задовољава особине из леме.

1. Довољно је показати да је формула задовољена само за генераторе 1 и w, јер сваки други елемент из решетке је њихова линеарна комбинација. Из чињенице да је $e^{2n\pi i} = 1$ следи да је

   $$\theta(w, z+1) = \theta(w,z).$$

   Са друге стране,

   $$\begin{aligned}\theta(w, z+w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2 w + 2nw + 2nz)} &= e^{-\pi w i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i((n+1)^2 w + 2nz)} \\ &= e^{-\pi i(w+2z)}\theta(w,z).\end{aligned}$$

   На сличан начин може се показати да је $\theta'(w, z+1) = \theta'(w,z)$.

2. Уочимо $h \in \mathbb{C}$ тако да функција $\theta(w,z)$ нема ни нулу ни пол на рубу периодичног паралелограма $P = P_0 + h$. Довољно је показати да је

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P}\frac{\theta'(w,z)}{\theta(w,z)}dz = 1.$$

Приметимо да је

$$\int_{a+1}^{a+w+1}\frac{\theta'(w,z)}{\theta(w,z)}dz + \int_{a+w}^{a}\frac{\theta'(w,z)}{\theta(w,z)}dz = 0$$

што значи да је

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P}\frac{\theta'(w,z)}{\theta(w,z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{a}^{a+1}\frac{\theta'(w,z)}{\theta(w,z)}dz + \int_{a+w+1}^{a+w}\frac{\theta'(w,z)}{\theta(w,z)}dz\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{a+1}\left(\frac{\theta'(w,z)}{\theta(w,z)} - \frac{\theta'(w,z+w)}{\theta(w,z+w)}\right)dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}2\pi i = 1.\end{aligned}$$

Тиме смо показали да је тета ред тражена функција. Може се показати да је

$$\theta\left(w, \frac{1+w}{2}\right) = 0. \qquad \square$$

На крају ове леме, напоменимо да ово није једина функција која задовољава особине из леме. На пример, Вајерштрас је конструисао другу функцију за коју је показао да су задовољене исте те особине.

$$\sigma(z) = z\prod_{v\in L\setminus\{0\}}\left(1-\frac{z}{v}\right)e^{\frac{z}{w}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2}}$$

Ова функција има додатну занимљиву особину, а то је

$$\left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right)' = -\rho(z),$$

односно знамо која је примитивна функција за Вајерштрасову ρ функцију.

Када смо показали ову лему можемо се вратити на доказ Абелове теореме 3.16 у обратном смеру.

Доказ. ($\Leftarrow$) Нека за комплексне бројеве $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ важи $a_1 + \cdots + a_n \sim b_1 + \cdots + b_n$. Бирајући одговарајућег представника за a_1 по модулу L можемо претпоставити да је

$$a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n.$$

Функцију из претходне леме 3.17 означимо са σ и њену нулу са z_0. Тражена функција је облика

$$f(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n} \sigma(z_0 + z - a_k)}{\prod_{k=1}^{n} \sigma(z_0 + z - b_k)}.$$

На основу претходне леме 3.17 директно следи да функција f има тражене нуле и полове, као и да је елиптична. $\square$

На основу прве Лиувилове теореме 2.6 можемо у Абеловој теореми 3.16 тврдити и јединственост такве функције до на множење константе.

Закључак

У овом раду бавили смо се елиптичним функцијама и показали смо како се оне могу окарактерисати. У првој глави смо се подсетили основних појмова из комплексне анализе. Прво смо увели појам аналитичке функције, који нам је један од централних појмова у комплексној анализи. Затим смо дефинисали интеграљење комплексне функције, као и развој функције у ред. На крају смо се бавили нулама и сингуларитетима функције, као и о остацима функције.

У другој глави видели смо историјски развој теорије елиптичних функција. У почетку су математичари изучавали елиптичне интеграле, који не могу да се реше, са циљем да се открије што више њихових особина. Фањано и Ојлер су се бавили тим интегралима, где смо приказали неке њихове резултате. Касније, Гаус долази на идеју да потражи инверзну функцију за елиптичне интеграле и тако открива елиптичне функције. Абел и Јакоби су дали основне резултате у теорији елиптичних функција. Наиме, они су увели једну специјалну функцију, звану тета ред, на основу које су изградили целу теорију. Вајерштрас је дао други приступ за изучавање елиптичних функција. Овај приступ смо и ми користили у овом раду. Касније, математичари налазе разне примене ове теорије у теорији бројева, геометрији, физици, ... После овог историјског излагања, увели смо, прецизно, шта је елиптична функција. Након тога смо проучавали њихове особине. Ту смо, засебно, издвојили и доказали три Лиувилове теореме, које знатно олакшавају њихово даље проучавање и разумевање.

На крају, у последњој глави бавили смо се карактеризацијом елиптичних функција. Прво смо дали један конкретан пример елиптичне функције, а то је Вајерштрасова ρ функција. Показали смо да је она добро дефинисана и да се свака друга елиптична функција може приказати као рационална функција по промењивама ρ и ρ'. Навели смо и неке корисне идентитете за функцију ρ. На крају ове главе бавили смо се Абеловом теоремом, која нам омогућава да конструишемо елиптичне функције, ако знамо њене полове и нуле.

Библиографија

[1] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2003.

[2] Eberhard Freitag, Rolf Busam, *Complex Analysis*, Springer, Heidelberg, 2005.

[3] Edward B. Saff, Arthur David Snider, *Fundamentals of Complex Analysis Engineering, Science, and Mathematics*, Third Edition, Pearson, Harlow, 2014.

[4] Georgios Pastras, *The Weierstrass Elliptic Function and Applications in Classical and Quantum Mechanics, A Primer for Advanced Undergraduates*, Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2020.

[5] John Stillwell, *Mathematics and Its History*, Third Edition, Springer Science+Business Media, New York, 2010.

[6] Ranjan Roy, *Elliptic and Modular Functions from Gauss to Dedekind to Hecke*, Cambringe University Press, New York, 2017.

[7] J.V. Armitage, W.F. Eberlein, *Elliptic Functions*, Cambringe University Press, New York, 2006.

Биографија

Стефан Тутић је рођен 07.08.1997. у Новом Саду у Савезној Републици Југославији. Године 2004. уписује Основну школу „Иво Лола Рибар” у Новом Саду и завршава је 2012. године као носилац Вукове дипломе. Исте године уписује и Гимназију „Светозар Марковић” у Новом Саду. Четири године касније, по завршетку гимназије, уписује Природно - математички факултет у Новом Саду на смер Дипломирани професор математике (М4). По завршетку четврте године и са положеним свим испитима, прелази на интегрисане студије Мастер професор математике (М5). Са положеним свим испитима са пете године, са просечном оценом 9,69, стиче право на одбрану мастер рада. Такође је и носилац Доситејеве стипендије Фонда за младе таленте Републике Србије.

Нови Сад, 2021.　　　　Стефан Тутић

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: Монографска документација
ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ

Врста рада: Мастер рад
ВР

Аутор: Стефан Тутић
АУ

Ментор: др Милица Жигић
МЕ

Наслов рада: Карактеризација елиптичних функција
НР

Језик публикације: Српски (ћирилица)
ЈП

Језик извода: с / ен
ЈИ

Земља публиковања: Република Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2021
ГО

Издавач: Ауторски репринт
ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Трг Д. Обрадовића 4
МА

Физички опис рада: (3/66/7/0/7/0/0)(број поглавља/број страна/број литерарних цитата/број табела/број слика/број графика/број прилога)
ФО:

Научна област: Математика
НО

Научна дисциплина: Комплексна анализа
НД

Кључне речи: Аналитичке функције, пол, решетка, елиптичне функције, фундаментални паралелограм, периодични паралелограм, Лиувилове теореме, Вајерштрасова ρ функција, Абелова теорема
ПО, УДК

Чува се: У библиотеци Департмана за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
ЧУ

Важна напомена:
ВН

Извод:
ИЗ

У овом мастер раду бавили смо се основама елиптичних функција, при чему смо за њихово проучавање користили Вајерштрасов приступ. У првом поглављу смо приказали основна тврђења из комплексне анализе, која су нам неопходна за даљи рад. Ту смо се подсетили појмо-

ва као што су аналитичке функције, комплексна интеграција, развој функције у ред, нуле, полови и остатак функције, као и сва тврђења везана за њих. Затим у другој глави дали смо историјски увод у ову теорију. Ту смо видели како су математичари, проучавајући елиптичне интеграле, открили елиптичне функције. Затим смо дали прецизну дефиницију елиптичних функција и ту смо навели неке њихове основне особине. Такође, издвојили смо Лиувилове теореме, јер оне представљају основу за њихово изучавање. На крају, у трећој глави бавили смо се њиховом карактеризацијом. Прво смо навели Вајерштрасову ρ функцију, која је и први пример елиптичних функција. Показали смо како се све друге елиптичне функције могу приказати помоћу ње и навели смо неке њене особине. На самом крају бавили смо се Абеловом теоремом, која нам омогућује конструкцију елиптичних функција.

Датум прихватања теме од стране НН већа:
ДП

Датум одбране:
ДО

Чланови комисије:
ЧК

Председник: др Ненад Теофанов, редовни професор, Природно - математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Ментор: др Милица Жигић, ванредни професор, Природно - математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Члан: др Ивана Војновић, доцент, Природно - математички факултет, Универзитет у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Stefan Tutić
AU

Mentor: Milica Žigić, Ph.D.
MN

Title: Characterization of elliptic functions
TI

Language of text: Serbian (Cyrillic)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2021
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (3/66/7/0/7/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Complex analysis
SD

Subject/Key words: Analytic functions, pole, lattice, elliptic functions, fundamental parallelogram, periodic parallelogram, Liouville theorems, Weierstrass ρ function, Abel's theorem
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

In this master thesis, we deal with fundamentals of elliptic functions, using Weierstrass approach to study them. In the first chapter, we present the basic statements of complex analysis, which are necessary for our further work. Here we are reminded of concepts such as analytic functions, complex integration, series expansion of function, zeros, poles, and residuum of the function, as well as all the theorems related to them. Then, in the second chapter, we give a historical introduction to it. Here we saw how mathematicians by studying elliptic integrals, discovered elliptic functions. We then gave a precise definition of elliptic functions and stated some of their basic properties. We have also isolated Liouville's theorems, because they represent the basis for their studing. Finally, in the third chapter, we dealt with their characterization. We first listed the Weierstrass ρ function, which is also the first example of elliptic functions. We have shown how all other elliptic functions can be represented by it and we have stated some of its properties. At the very end, we dealt with Abel's theorem, which allows us to construct elliptic functions.

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Nenad Teofanov, Ph.D, Full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Mentor: Milica Žigić, Ph.D, Associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Ivana Vojnović, Ph.D, Assistant professor, Faculty of Science, University of Novi Sad