Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Marijana Mišić

Malotalasna transformacija i višeskalna detekcija ivica

Master rad

Mentor:

dr. Nenad Teofanov

2021, Novi Sad

Sadržaj

Predgovor

U radu će se izložiti detekcija ivica na slici pomoću malotalasne transformacije. Pre svega, navešće se razni tipovi konvergencije poput tačkaste, uniformne, kao i konvergencije brojnog reda, i u normi prostora L^1 i L^2. Definisaće se neophodne teorijske osnove poput Furijeove transformacije, kratkotrajne Furijeove transformacije i malotalasne transformacije. Posebno će se diskutovati neprekidna i diskretna malotalasna transformacija, kao i pojam multirezolucijske analize. Kao prvi osnovni teorijski rezultat rada dokazeće se međuodnos opadanja Furijeove transformacije i uniformne Lipšicove klase. Drugi rezultat koji navodimo je odnos malotalasne transformacije i Lipšicove regularnosti. Pre nego što se spomene veza teorijskih rezultata sa njihovom primenom na detekciju slika, jedan deo će se posvetiti pojedinim aspektima obrade i analize slika, lokalizaciji odnosno detekciji ivica (eng. egde detection). Navešće se neki poznatiji operatori za njihovu lokaciju. Posebno, navešće se konstrukcija filtera za detekciju ivica u okviru malotalasne analize. Dodatno, primena detekcije ivica na slici će biti izložena kroz par operatora i implementirana u Python-u pomoću kodova tih operatora.

Glava 1

Razni tipovi konvergencije

U ovoj glavi ćemo ukratko komentarisati konvergenciju funkcionalnih nizova i redova. Navešćemo numeričku, tačkastu i uniformnu konvergenciju, kao i konvergenciju u normi prostora L^1 i L^2. U prvom poglavlju ćemo se podsetiti konvergencije brojnih nizova i redova, a u ostalim poglavljima ćemo posmatrati konvergenciju funkcionalnih nizova i redova. Navešćemo njihove razlike i povezanosti.

U ovoj glavi korišćene su reference [7] i [8] iz spiska literature.

1.1 Konvergencija brojnog reda

Definicija 1. Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka a, ako za svako $\epsilon > 0$, postoji $N > 0$, tako da ako je $n \geq N$ onda $|a_n - a| < \epsilon$.
Ovo zapisujemo na sledeći način:

- $a_n \to a$, kada $n \to \infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Broj a zovemo granična vrednost ili limes niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji ima limes $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je konvergentan. U suprotnom, niz je divergentan.

Definicija 2. Brojni (numerički) red, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konvergira ka s, ako m-ta parcijalna suma $\{s_m\}$, definisana sa $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, konvergira ka s, to jest ako je $\lim_{m\to\infty} s_m = s$.

U ovom slučaju ovo pišemo:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

Broj s nazivamo sumom reda.

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je divergentan ako je divergentan niz njegovih parcijalnih suma $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Često ćemo red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ označavati sa $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Red $\sum_{n=1}^{N} a_n$ apsolutno konvergira ako konvergira red $\sum_{n=1}^{N} |a_n|$.

Potreban uslov konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je da njegov opšti član teži ka nuli, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Navešćemo osnovna svojstva konvergentnih nizova.

1. Svaki konvergentan niz u $\mathbb{R}$ ima samo jednu graničnu vrednost.

2. Svaki konvergentan niz u $\mathbb{R}$ je ograničen. Obrnuto ne važi.

3. Svaki organičen i monoton niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan.

4. Svaki podniz konvergentnog niza u $\mathbb{R}$ i sam je konvergentan i ima istu graničnu vrijednost kao i niz.

5. (Košijev kriterijum konvergencije) Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Košijev niz ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_\epsilon$ važi
$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

   Niz realnih brojeva je konvergentan ako i samo ako je Cauchyev.

Pored nizova realnih brojeva, posmatraćemo i nizove funkcija.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Skup svih funkcija iz S u $\mathbb{R}$ označimo sa $\mathbb{R}^S$. Niz funkcija f_n je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^S$, pri čemu $f(n) = f_n : S \to \mathbb{R}$.

1.2 Tačkasta konvergencija

Tačkasta konvergencija niz funkcija nad nekim skupom definiše se konvergencijom funkcijskih vrednosti u svakoj tački tog skupa.

Definicija 3. Neka je $S \subseteq R$ i neka je $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz funkcija na S. Ako niz brojeva $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira za svako $x \in A \subseteq S$ ka funkciji f, onda kažemo da niz funkcija $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tačkasto konvergira na A ka funkciji f.
Ovo zapisujemo na sledeći način, za sve $x \in A$ važi:

- $f_n(x) \to f(x)$, kada $n \to \infty$ ili
- $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Funkcija f je granična funkcija niza $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Niz konvergira na intervalu ako konvergira u svakoj tački tog intervala.

Definicija 4. Neka je $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz funkcija, $f_n : S \to R$, i neka je $\{s_m\}$ niz parcijalnih suma, $s_m : S \to R$, dat sa $s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x), x \in S$. Tada red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ tačkasto konvergira ka funkciji f na $A \subseteq S$ ako niz parcijalnih suma $\{s_m\}$ tačkasto konvergira ka funkciji f na $A \subseteq S$.

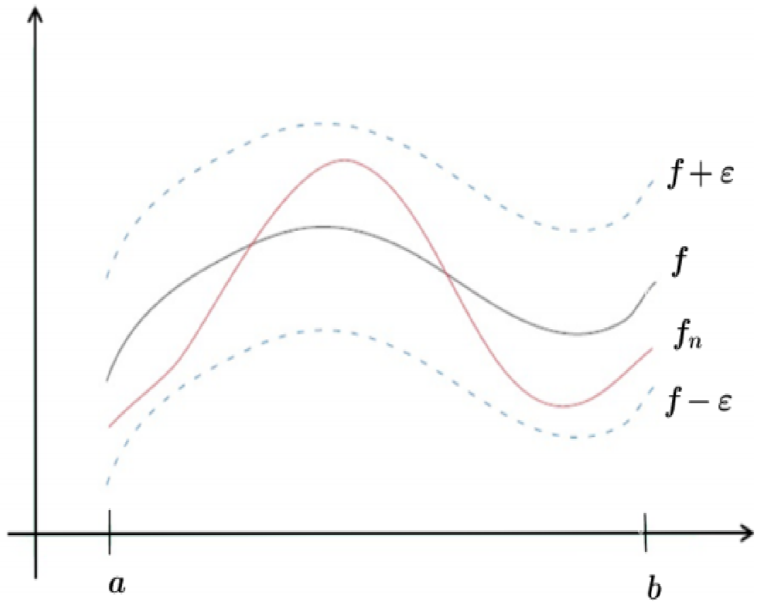
U ovom slučaju koristimo sledeći zapis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$$

1.3 Uniformna konvergencija

Definicija 5. Neka su $f_n : S \to R, n \in \mathbb{N}$ i $f : S \to R$ funkcije. Kažemo da niz funkcija $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka funkciji f na skupu S ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da važi:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in S, \quad \forall n \geq m. \tag{1.1}$$



Slika 1.1: $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Slika 1.1 geometrijski prikazuje (1.1) na intervalu $[a, b]$.

Definicija 6. Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija, $f_n : S \to R$, i neka je $\{s_m\}$ niz parcijalnih suma, $s_m : S \to R$, dat sa $s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x), x \in S$. Tada red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformno konvergira ka funkciji f ako niz parcijalnih suma $\{s_m\}$ uniformno konvergira ka funkciji f.

Razlika tačkaste i uniformne konvergencije je u tome što se tačkasta konvergencija može razlikovati po brzini u svakoj od tačaka skupa S, dok se kod uniformne konvergencije niz funkcija f_n ne razliku u velikoj meri od funkcije f u bilo kojoj tački skupa S. Odakle vidimo da uniformna konvergencija implicira tačkastu konvergenciju.

Takođe, primetimo da kod uniformne konvergencije broj m zavisi samo od ϵ, dok kod tačkaste konvergencije broj m zavisi i od broja ϵ i od tačke x.

Navedimo nekoliko tvrdnji.

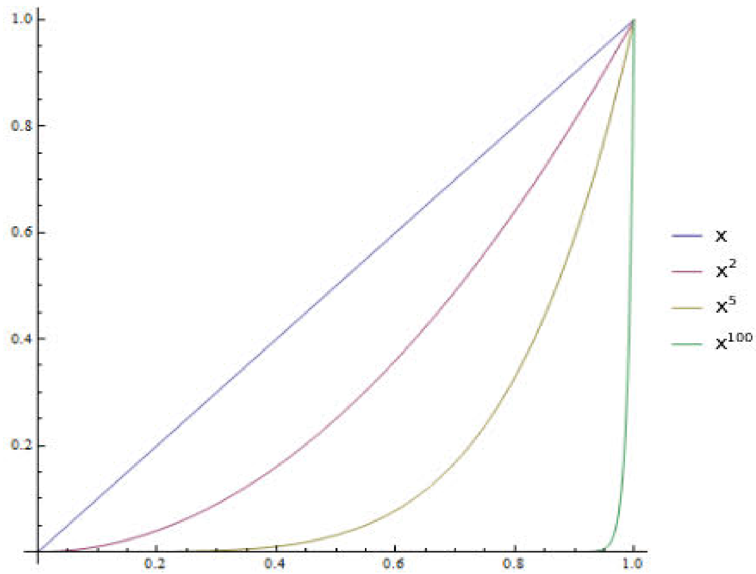
1. Ako niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka funkciji f, onda konvergira i tačkasto. Obrnuto ne važi.

2. Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformno konvergentan na intervalu $[a, b]$, tada je red i tačkasto konvergentan na tom intervalu. Obrnuto ne važi.

3. Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (uniformno) konvergentan na intervalu $[a, b]$, tada za svako $x \in [a, b]$ važi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Daćemo jedan primer gde je niz funkcija f_n tačkasto konvergira ka funkciji f, ali ne i uniformno.

Primer 1. *Posmatrajmo niz funkcija $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$ (Slika 1.2). U slučaju kada $x \in [0, 1)$, niz tačkasto konvergira ka nuli. U "blizini" $x = 1$, konvergencija je "sve sporija", a u tački $x = 1$ niz $f_n(x)$ konvergira ka 1.*



Slika 1.2: Funkcija $f_n(x) = x^n, n = 1, 2, 5, 100$

Na ovom primeru se vidi da tačkasta konvergencija ne očuvava neprekidnost, jer granična funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

ima prekid u $x = 1$.

Takođe, dokazaćemo da ova konvergencija nije uniformna na intervalu $[0,1]$, tj. pokazaćemo da važi sledeće:

$$\neg(\forall\epsilon \quad \exists m \quad \forall n \geq m \quad \forall x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon), \quad \text{tj.}$$

$$\exists\epsilon = \frac{1}{4} \quad \forall m \quad \exists n \geq m \quad \exists \tilde{x} \in [0,1] \quad |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| \geq \epsilon.$$

Primetimo, da se za neko $m \in \mathbb{N}$ može izabrati tačka $\tilde{x} \in [0,1]$ tako da je $f_n(\tilde{x}) \geq f_m(\tilde{x}) = \frac{1}{2}$, za $n > m$. Tada za $\epsilon = \frac{1}{4}$ važi $|f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| \geq \epsilon$, to jest $|f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| \geq |\frac{1}{2} - 0| > \frac{1}{4}$, za $n \geq m$.

Za ograničene funkcije koristićemo pojam uniformne norme kako bismo na drugačiji način definisali uniformnu konvergenciju.

Neka je $f : S \to R$ ograničena funkcija. Uniformna norma od f na skupu S definiše se na sledeći način:

$$\|f\| = \sup\{\, |f(x)| : x \in S\,\}.$$

Ova norma se još naziva i sup-norma i L^∞ norma.

Definiciju 5 ćemo sada preformulisati u skladu sa pojmom uniformne norme.

Definicija 7. Niz ograničenih funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : S \to R$ uniformno konvergira ka funkciji $f : S \to R$ na skupu S ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da važi:

$$\|f_n - f\| < \epsilon, \quad \forall n \geq m. \tag{1.3}$$

Drugim rečima, niz ograničenih funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : S \to R$ uniformno konvergira ka funkciji $f : S \to R$ ako je:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Uniformna konvergencija na S se naziva i L^∞ konvergencijom ili konvergencija u L^∞ normi.

Definicija 8. Niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : S \to R$ je uniformno Cauchyev na S ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_\epsilon$ važi:

$$\|f_m - f_n\| < \epsilon. \tag{1.4}$$

1.3 Uniformna konvergencija

Uniformna konvergencija, za razliku od tačkaste konvergencije, očuvava neprekidnost i organičenost.

Teorema 1. *Pretpostavimo da je* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : S \to R$ *niz ograničenih funkcija na* S *i da niz* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uniformno konvergira ka funkciji* f *na* S. *Tada je funkcija* f *ograničena na* S.

Dokaz. Neka je $\epsilon = 1$. Obzirom da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka funkciji f na S, postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|f_n(x) - f(x)| < 1, \quad \forall x \in S, \quad \forall n \geq m.$$

Uzmimo $n = m$. Tada, obzirom da je f_m ograničena, postoji konstanta M_m tako da je $|f_m| \leq M_m, \forall x \in S$. Iz toga sledi:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x)| < 1 + M_m, \quad \forall x \in S,$$

što znači da je i f ograničena. □

Teorema 2. *Pretpostavimo da je* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : S \to R$ *niz neprekidnih funkcija na* S *i da niz* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uniformno konvergira ka funkciji* f *na* S. *Tada je funkcija* f *neprekidna na* S.

Dokaz. Uzmimo $c \in S, \epsilon > 0$. Tada za svako n važi:

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|.$$

Obzirom da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka funkciji f na S, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall x \in S,$$

pa i za $x = c$.

Tada imamo

$$|f(x) - f(c)| \leq |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| + \frac{2\epsilon}{3}.$$

Obzirom da je f_n neprekidna u c, postoji $\delta > 0$, tako da je $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| < \frac{\epsilon}{3}$ za sve $x \in S$ za koje $|x - c| < \delta$.
Odatle sledi da je $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ ako $|x - c| < \delta$ i $x \in S$.

Time smo dokazali da je f neprekidna u c, a kako je c proizvoljno iz S, sledi da je f neprekidna na S. □

Teorema 3. *Neka su funkcije $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ neprekidne na intervalu $[a,b]$ i neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformno konvergentan na intervalu $[a,b]$. Tada je zbir $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in [a,b]$ neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$.*

Pored toga, uniformna konvergencija ima svojstva integrabilnosti i diferencijabilnosti. To možemo videti u naredne dve teoreme.

Teorema 4. *Neka su funkcije $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ neprekidne na intervalu $[a,b]$ i neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformno konvergentan na intervalu $[a,b]$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ može da se integrali član po član, to jest za svako x_1, x_2 ($a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$) važi:*

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx \right).$$

Teorema 5. *Neka su funkcije $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diferencijabilne i $\{f_n^{'}\}_{n\in\mathbb{N}}$ neprekidne na intervalu $[a,b]$. Takođe, neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergentan, a red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}$ uniformno konvergentan na intervalu $[a,b]$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ može da se diferencira član po član, to jest za svako $x \in [a,b]$ važi:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x).$$

Sada ćemo posmatrati konvergenciju u normi prostora L^1 i L^2, koja je nešto slabija od tačkaste i uniformne konvergencije.

1.4 Konvergencija u normi prostora L^1

Definicija 9. Kažemo da niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : S \to R$ konvergira ka funkciji $f : S \to R$ na skupu S u normi prostora $L^1(S,R)$ ako važi:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0,$$

to jest

$$\lim_{n\to\infty} \int_S |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Drugim rečima, niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : S \to R$ konvergira ka funkciji $f : S \to R$ na skupu S u normi prostora $L^1(S,R)$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da važi:

$$\|f_n - f\|_1 < \epsilon, \quad \forall n \geq m. \tag{1.5}$$

L^1 konvergencija može biti geometrijski interpretirana kao površina oblasti između krivih f_n i krive f koja teži ka nuli kada $n \to \infty$. Dakle, vrednosti funkcije se mogu u nekom trenutku razlikovati, ali moraju biti približne kada je n veliki broj, izuzev na skupu mere nula.

Teorema 6. *Ako niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira (L^∞) ka funkciji f na ograničenom intervalu S, onda niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka funkciji f na S u normi prostora $L^1(S,R)$.*

U gore navedenom primeru (Slika 1.2), smo videli da niz funkcija $f_n(x) = x^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$ tačkasto konvergira, ali ne i uniformno. Sada ćemo na istom primeru proveriti L^1 konvergenciju.
Kako je:

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

onda $f_n \to f$ u L^1 normi.

1.5 Konvergencija u normi prostora L^2

Definicija 10. Kažemo da niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : S \to R$ konvergira ka funkciji $f : S \to R$ u normi prostora $L^2(S,R)$ ako važi:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

to jest

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_S |f_n(x) - f(x)|^2 dx} = 0.$$

Drugim rečima, niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : S \to R$ konvergira ka funkciji $f : S \to R$ u normi prostora $L^2(S,R)$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da važi:

$$\|f_n - f\|_2 < \epsilon, \quad \forall n \geq m. \tag{1.6}$$

Teorema 7. *Ako niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira (L^∞) ka funkciji f na ograničenom intervalu $[a,b]$, onda niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka funkciji f na ograničenom intervalu $[a,b]$ u normi prostora $L^2([a,b],R)$.*

Teorema 8. *Ako niz funkcija* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira ka funkciji* f *na ograničenom intervalu* $[a, b]$ *u normi prostora* $L^2([a, b], R)$*, onda niz funkcija* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira ka funkciji* f *na konačnom intervalu* $[a, b]$ *u normi prostora* $L^1([a, b], R)$*.*

Tačkasta konvergencija ne implicira konvergenciju u normi L^2.
Ali ako pored tačkaste konvergencije niza f_n ka funkciji f, postoji $M \geq 0$ takvo da je $|f_n(x)| \leq M, x \in S$ tada niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u normi L^2.

Glava 2

Uvod u malotalasnu transformaciju

Teorija malih talasa se razvila na osnovu pokušaja lokalizacije klasične Furijeove transformacije, a svoju primenu pronašla je u oblastima obrade signala u nauci i inženjerstvu. Za postavljanje polaznih osnova Furijeove analize zaslužan je Joseph Fourier, koji je shvatio da je moguće svaku periodičnu funkciju aproksimirati sumom određenih trigonometrijskih funkcija.

Furijeova transformacija omogućava globalnu spektralnu analizu signala. Da bi signal lokalizovao u vremensko-frekvencijskoj ravni, Denis Gabor je uveo kratkotrajnu Furijeovu transformaciju. Međutim, kako kratkotrajna Furijeova transformacija omogućava da se frekvencija signala posmatra po delovima, takozvanim prozorima, čija širina ostaje fiksna, to predstavlja nedostatak u nekim primenama. Ovaj nedostatak je prevaziđen u radovima Jean Morlet-a.

Morlet je analizirao seizmičke signale i pri tome koristio prozore različite širine. Kratkotrajnom Furijeovom transformacijom je analizirao eho koji se vraća slanjem akustičnih impulsa u zemlju kako bi utvrdio prisustvo i debljinu sloja nafte. Morlet je menjao širinu prozora, odnosno funkciju prozora je skupljao i proširivao i na taj način analizirao različite frekvencijske komponente signala. Odgovarajući prozor je talasna funkcija koja osciluje i opada u beskonačnosti, pa je taj pristup nazvan teorija malih talasa. Ideja je bila da se signal transformiše primenom malotalasne transformacije, a zatim da se ponovo vrati u početni oblik kako bi se očuvale informacije potrebne za rekonstrukciju signala.

Da rezimiramo, frekvencija je mera brzine promene neke pojave. Može biti visoka i niska, u zavisnosti od brzine promene. Furijeova transformacija govori koje frekvencije postoje u posmatranom signalu, ali ne i u kom vremenu se te promene javljaju (muzičaru neće značiti koje note treba da svira ako mu se ne kaže kada u pesmi treba da ih svira). Ona koristi bazne funkcije sinusa i kosinusa u tu svrhu.
Koristeći Furijeovu transformaciju po delovima dobijamo kratkotrajnu Furijeovu transformaciju iliti Gaborovu (eng. windowed) transformaciju. Ideja je da se signal posmatra kroz fiksne prozore, pomerajući ih duž signala. Problem prozora konstantne dužine je neadekvatna rezolucija svih frekvencija. Recimo, kada imamo male širine prozora možemo preciznije da odredimo kada se frekvencija desila dok istovremeno gubimo na frekvencijskoj rezoluciji i obrnuto, u slučaju kada je širina prozora velika. Ne možemo znati koje frekvencije sadrži signal tako da izbor širine prozora, koji bi trebao da bude podešen u odnosu na frekvenciju, predstavlja najveći problem.
Tako dolazimo do malotalasne ili vejvlet (eng. wavelet) transformacije koja omogućava usklađenost veličine prozora sa frekvencijom. Mogućnost proširenja, smanjenja i pomeranja prozora omogućava nam dobijanje potrebnih informacija o signalu.

Korišćene su reference $[2], [3], [4], [5]$ i $[6]$ iz spiska literature.

2.1 Furijeova transformacija

Neka realna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ predstavlja signal. Ako x posmatramo kao vreme, onda je $f(x)$ vremenski opis datog signala. Definišemo novu funkciju kako bismo analizirali svojstva signala, $\mathcal{F}(\omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, gde je $\omega \in \mathbb{R}$ frekvencija, a $\mathcal{F}(\omega)$ frekvencijski opis signala koja govori o tome da li frekvencija postoji, kao i u kojoj meri je zastupljena.

Apsolutno integrabilne funkcije na $\mathbb{R}^d$ su funkcije koje pripadaju $L^1(\mathbb{R}^d)$ to jest integral $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx$ postoji i konačan je. Prostor $L^1(\mathbb{R}^d)$ je Banahov prostor sa normom $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx$.
Prostor $L^2(\mathbb{R}^d)$, kvadrat integrabilnih funkcija na $\mathbb{R}^d$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx$. Dakle, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ako i samo ako je $\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty$.

Definicija 11. Furijeova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ je funkcija $\mathcal{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

Furijeova transformacija je preslikavanje $\mathcal{F} : f \to \hat{f}$. Funkcije $e^{2\pi i \omega x}$ nisu kvadrat integrabilne na $\mathbb{R}^d$, odnosno $\int_{\mathbb{R}^d} |e^{2\pi i \omega x}|^2 dx$ nije konačan, ali su ograničene, odnosno $|e^{2\pi i \omega x}| = 1, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Prema tome, izraz $\langle f, e^{2\pi i \omega x} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx$ je dobro definisan za sve apsolutno integrabilne funkcije f, jer je

$$|\langle f, e^{2\pi i \omega x} \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty.$$

Definicija 12. Inverzna Furijeova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ je funkcija $\check{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\omega) = \check{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}^d. \tag{2.2}$$

Primetimo da je $\check{f}(\omega) = \hat{f}(-\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^d$.

Teorema 9. *(Formula inverzije u jednodimenzialnom prostoru) Ako su f i $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ onda su f i $\hat{f}$ neprekidne funkcije i*

$$f(x) = (\hat{f})\check{}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega \tag{2.3}$$

pri čemu je jednakost za svako $x \in \mathbb{R}$.

Definicija 13. (Švarcova klasa) Švarcov prostor funkcija $S(\mathbb{R}^d)$ se sastoji od svih beskonačno diferencijabilnih funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ za koje važi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^m f^{(n)}(x)| = \|x^m f^{(n)}\|_\infty < \infty, \quad m, n \geq 0. \tag{2.4}$$

Dakle, $f \in S(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako za svaki izbor $m, n \in \mathbb{N}_0$ postoje konstante $C_{m,n} > 0$ tako da važi

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{C_{m,n}}{|x|^m}, \quad x \neq 0.$$

Uobičajno je da se elementi prostora $S(\mathbb{R}^d)$ nazivaju brzo opadajuće funkcije.

Da bismo izvršili obradu signala, najćešće signal posmatramo u vremenskom domenu, a da bismo dobili informacije o frekvenciji moramo prvo da izvršimo transformaciju u frenkvencijski domen, i to se zapravo radi Furijeova transformacija.

Zanimljiva analogija da bi se bolje shvatila Furijeova transformacija je množenje dva rimska broja. Dakle, rimske brojeve prebacimo u redovne brojeve, pomnožimo ih, pa zatim proizvod vratimo u rimski broj.

2.2 Kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT)

U kratkotrajnoj Furijeovoj transformaciji originalan signal se množi sa prozorskom funkcijom, pa se primenom Furijeove transformacije obrađuju podaci u delovima signala koji su obuhvaćeni prozorom, tačnije za te delove znamo informacije o frekvencijama i o vremenu njihovog pojavljivanja.

Definicija 14. Neka je data prozorska funkcija $g \in S(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\}$. Kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT) funkcije $f \in S(\mathbb{R}^d)$ u odnosu na prozor g data sa

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi i t\omega}dx, \quad x, \omega \in \mathbb{R}^d. \tag{2.5}$$

Teorema 10. *(Relacija ortogonalnosti za STFT) Neka* $f_1, f_2, g_1, g_2 \in S(\mathbb{R}^d)$. *Tada* $V_{g_j}f_j \in S(\mathbb{R}^{2d})$ *za* $j = 1, 2$, *i važi*

$$\langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2\rangle\overline{\langle g_1, g_2\rangle}. \tag{2.6}$$

Teorema 11. *(Formula inverzije za STFT) Pretpostavimo da* $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *i* $(g, \gamma) \neq 0$. *Tada za sve* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *važi*

$$f = \frac{1}{\langle \gamma, g\rangle}\int\int_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega)M_\omega T_x \gamma d\omega dx \tag{2.7}$$

u slabom smislu.

Dokaz. Kako je $V_g f(x,\omega) = \langle f, M_\omega T_x g\rangle$, gde je operator translacije $(T_y f)(x) = f(x-y), \quad y \in \mathbb{R}^d$, a operator modulacije $(M_y f)(x) = e^{2\pi ixy} f(x), \quad y \in \mathbb{R}^d$, dobija se

$\overline{V_\gamma h}(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{h}(t) M_\omega T_x \gamma(t) dt,$

pa je $\int\int_{R^{2d}} V_g f(x,\omega)\overline{V_\gamma h}(x,\omega) d\omega dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} (\int\int_{R^{2d}} V_g f(x,\omega) M_\omega T_x \gamma(t) d\omega dx) \overline{h}(t) dt \\ &= \langle \int\int_{R^{2d}} V_g f(x,\omega) M_\omega T_x \gamma(t) d\omega dx, h\rangle. \end{aligned}$$

Na osnovu relacije ortogonalnosti važi

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{\langle \gamma, \omega\rangle} \langle V_g f, V_\gamma h\rangle$$

$$= \frac{1}{\langle \gamma, \omega\rangle} \langle \int\int_{R^{2d}} V_g f(x,\omega) M_\omega T_x \gamma(t) d\omega dx, h\rangle, \forall h \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

odakle sledi dokaz formule inverzije. $\square$

Za razliku od Furijeove transformacije, kratkotrajna Furijeova transformacija nam daje informacije i o vremenu signala, pored frekvencije signala. Međutim ovde imamo problem Heisenberg-ovog principa neodređenosti koji kaže da proizvod vremenske i frekvencijske rezolucije mora biti konstantan.
Dakle nemoguća je idealna lokalizacija u vremenu i frekvenciji. Osim toga, prozor mora biti konstantan (iste dužine i širine).
Izbor odgovarajućeg prozora je u ovom slučaju težak jer nam je dobra frekvencijska rezolucija potrebna za niske frekvencije kojih ima duž celog signala, dok sa druge strane visokih ima malo ali nam je u tom slučaju potrebna dobra vremenska rezolucija.

2.3 Malotalasna (wavelet) transformacija

Problem konstantnih frekvencijskih i vremenskih rezolucija kratkotrajne Furijeove transformacije je rešen malotalasnom transformacijom.

Radi jednostavnosti, posmatraćemo jednodimenzionalni slučaj.

Najveća prednost malotalasne Furijeove transformacije je dakle u tome što se širina prozora može menjati, pa samim tim menjaju se i frekvencijska i vremenska rezolucija.

Definicija 15. Mali talas (wavelet) je funkcija $\psi \in L^2(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ za koju važi:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \tag{2.8}$$

a malotalasna transformacija je definisana sa

$$(T^{wav} f)(a,t) = \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi(\frac{x-t}{a})} f(x) dx, \tag{2.9}$$

za $a \neq 0, t \in \mathbb{R}$.

Primetimo da iz $C_\psi < \infty$ sledi $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$, pa funkcija ψ osciluje i opada u beskonačnosti, zbog čega je prozvana malim talasom, to jest talasićem.

Da važi $C_\psi < \infty$ dovoljno je da važi $\hat{\psi}(0) = 0$ i da je $\hat{\psi}(\omega)$ neprekidno diferencijabilna funkcija.

Koristeći operatore translacije $(T_y f)(x) = f(x-y), y \in \mathbb{R}$, operator dilatacije $(D_y f)(x) = \sqrt{y} f(xy), y > 0$ i involuciju funkcije f datu sa $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, malotalasna transformacija se može zapisati u sledećem obliku:

$$(T^{wav} f)(a,t) = \langle f, T_t D_{1/a} \psi \rangle = (f * D_{1/a} \psi^*)(t), \quad a \neq 0, t \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Lema 1. *Neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$, operator translacije $(T_y f)(x) = f(x-y)$, operator dilatacije $(D_y f)(x) = \sqrt{y} f(xy)$ i operator modulacije $(M_y f)(x) = e^{2\pi i x y} f(x)$. Furijeovom transformacijom translacije i recipročne dilatacije dobija se modulacija i dilatacija Furijeove transformacije. Dakle, važi:*

$$(T_b D_{\frac{1}{a}} f)\hat{} = M_{-b} D_a \hat{f}$$

Dokaz. $(T_b D_{\frac{1}{a}} f)\hat{} = \int T_b D_{1/a} f(x) e^{-2\pi i x\omega} dx = \int T_b \frac{1}{\sqrt{a}} f(\frac{x}{a}) e^{-2\pi i x\omega} dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{a}} f(\frac{x-b}{a}) e^{-2\pi i x\omega} x$

Nakon smene:

$$\frac{x-b}{a} = s \Rightarrow x - b = as \Rightarrow x = as + b, dx = ads,$$

dobija se

$(T_b D_{\frac{1}{a}} f)\hat{} = \int \frac{1}{\sqrt{a}} f(s) e^{-2\pi i(as+b)\omega} ads = \sqrt{a} \int f(s) e^{-2\pi i b\omega} e^{-2\pi i a s\omega} ds$

$= \sqrt{a} e^{-2\pi b\omega} \hat{f}(a\omega) = e^{-2\pi i b\omega} D_a \hat{f}(\omega) = M_{-b} D_a \hat{f}$ $\square$

Sledeća teorema je relacija ortogonalnosti za mali talas.

Teorema 12. *Neka je $\psi \neq 0$ proizvoljni mali talas. Tada za sve $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ važi:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T^{wav} f(a,b) \overline{T^{wav} f(a,b)} \frac{dadb}{a^2} = C_\psi \langle f, g \rangle \tag{2.11}$$

gde je C_ψ dato sa (2.8).

Dokaz. $(T^{wav} f)(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi(\frac{x-b}{a})} f(x) dx$
$= \langle f, T_b D_{1/a} \psi \rangle = \langle \hat{f}, (T_b D_{1/a} \psi)\hat{} \rangle$

$= \langle \hat{f}, M_{-b} D_a \hat{\psi} \rangle$

Kako je $M_{-b} D_a \hat{\psi}(\omega) = e^{-2\pi i b\omega} \sqrt{a} \hat{\psi}(a\omega)$, dobija se

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T^{wav} f(a,b) \overline{T^{wav} g(a,b)} \frac{dadb}{a^2}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) |a|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i b\omega} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega] [\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega')} |a|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i b\omega'} \hat{\psi}(a\omega') d\omega'] \frac{dadb}{a^2}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i b(\omega' - \omega)} db \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) |a|^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega] [\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega')} |a|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}(a\omega') d\omega'] \frac{da}{a^2}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega')} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \hat{\psi}(a\omega') \delta(\omega' - \omega) d\omega d\omega'] \frac{da}{|a|}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \frac{da}{|a|}$

pri čemu smo koristili:

$\boxed{\hat{\delta} = 1}$, to jest $\boxed{\delta(\omega) = \hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\omega} dx}$

$\boxed{\delta(\omega' - \omega) = \delta(\omega - \omega')}$

$\boxed{(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega')}\hat{\psi}(a\omega')\delta(\omega' - \omega)d\omega' = (\delta * \overline{\hat{g}(\omega'')}\hat{\psi}(a\omega''))(\omega) = \overline{\hat{g}(\omega)}\hat{\psi}(a\omega)}$

$\boxed{\text{Parsevalova jednakost: } \langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle, \quad f.g \in L^2(\mathbb{R}^d)}$

$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(y)|^2 \frac{dy}{|y|} = C_\psi, \text{ gde je smena } a\omega = y, da = \frac{dy}{\omega}}$

pa je

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T^{wav}f(a,b)\overline{T^{wav}f(a,b)}\frac{dadb}{a^2} = C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega = C_\psi \langle f, g\rangle$$

□

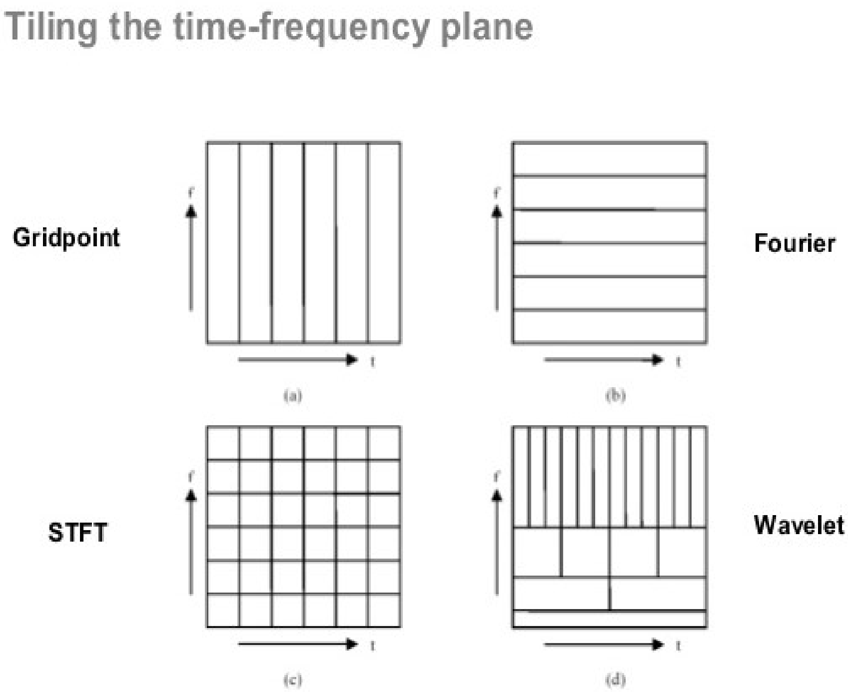
Istom argumentacijom kao i u Teoremi 10. dolazimo do zaključka da se formula iz Teoreme 11. može napisati kao:

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T^{wav}f(a,b)\psi^{a,b}\frac{dadb}{a^2}, \tag{2.12}$$

gde je $\psi^{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}}\psi(\frac{x-b}{a})$, pri čemu je jednakost u slabom smislu, to jest

$$\langle C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T^{wav}f(a,b)\psi^{a,b}\frac{dadb}{a^2}, h\rangle = \langle f, h\rangle, \quad \forall h \in L^2(R).$$

Na slici 2.1 se uočava podela vremensko frekvencijske ravni kod Furijeove transformacije, STFT i malotalasne transformacije.



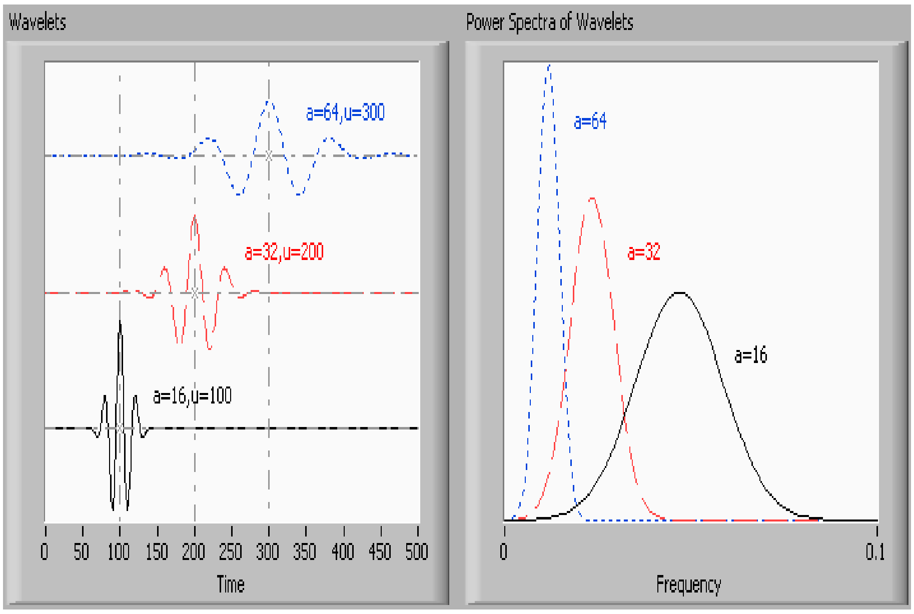
Slika 2.1: Preuzeto sa: https://www.slideshare.net

Malotalasna transformacija dakle razlaže signal $f(x)$ na bazične funkcije $\psi^{s,\tau}$. U neprekidnoj malotalasnoj transformaciji bazne funkcije $\psi^{s,\tau}$ dobijamo skaliranjem i transliranjem neke zadate funkcije ψ (mother wavelet).

$$\psi^{s,\tau}(x) = |s|^{-\frac{1}{2}}\psi(\frac{x-\tau}{s}), \quad s,\tau \in \mathbb{R}, s \neq 0$$

Broj τ je u ovom slučaju parametar translacije, pod tim se misli na pomeranje prozora duž signala. U zavisnosti od znaka i veličine parametra znamo konkretno pomeranje. Ako je $\tau = 0$ nema pomeranja, u slučaju da je $\tau > 0$ prozor se pomera ulevo, a za $\tau < 0$ prozor se pomera udesno. Dakle, $\tau < 0$ kontroliše lokaciju, odnosno položaj malog talasa (eng. wavelet).

Broj s je parametar dilatacije, odnosno skaliranja. Skaliranje talasića, u zavisnosti od znaka, znači širenje ili skupljanje prozora. Kada je $s = 0$ nema promena, vejvlet je mother vejvlet ψ. Ako je $s > 0$, prozor će se raširiti, samim tim i "spustiti", pa će se u ovom slučaju hvatati niže frekvencije. Suprotno, kada je $s < 0$, prozor će se skupiti i "podići", pa će se hvatati visoke frekvencije. Dakle, s kontroliše širinu malog talasa (eng. wavelet) i obrnuto je proporcijalna frekvencijskom pojasu.



Slika 2.2: Preuzeto sa: https://zone.ni.com

2.3.1 Diskretna malotalasna (vejvlet) transformacija

Diskretnu malotalasnu transformaciju ćemo posmatrati kao diskretizovanu neprekidnu malotalasnu transformaciju. Dakle, diskretizacija ovog vejvleta

$$\psi^{s,\tau}(x) = |s|^{-\frac{1}{2}}\psi(\frac{x-\tau}{s}), \quad s, \tau \in \mathbb{R}, s \neq 0, \tag{2.13}$$

može biti zapisana kao

$$\psi^{j,k}(x) = |s_0^j|^{-\frac{1}{2}}\psi(\frac{x - k\tau_0 s_0^j}{s_0^j}), \tag{2.14}$$

gde su j i k celi brojevi koji kontrolišu dilataciju i translaciju vejvleta, respektivno.

Dilatacioni korak $s_0 \neq 1$ i translacioni korak τ_0 su fiksirani i zbog jednostavnosti uzimamo da su pozitivni jer za j i k svakako uzimamo i pozitivne i negativne vrednosti. Dakle, $s_0 > 1$, $\tau_0 > 0$.

Različite vrednosti j nam daju talasiće različitih širina i u zavisnosti od toga imamo pomeranje uskih ili širokih talasića. Dakle, translacioni korak zavisi od broja j. U slučaju da je $j = 0$, imamo množenje celih brojeva sa τ_0, gde je τ_0 odabrano tako da $\psi(x - k\tau_0)$ pokriva ceo signal.

Izbor malog talasa ψ koji koristimo u diskretnoj malotalasnoj transformaciji ograničen je zahtevom (2.8), to jest mora da zadovoljava uslov prihvatljivosti.

Pored toga, da bi funkcija ψ bila matični mali talas (eng. mother wavelet), ona treba da ispunjava još dva uslova:

1. da je prosečna vrednost wavelet-a u vremenskom domenu jednaka nuli

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0, \tag{2.15}$$

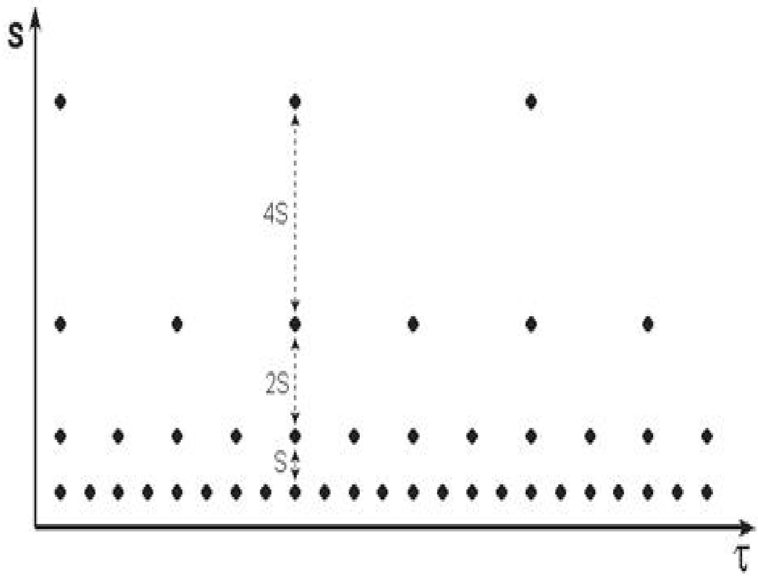
2. da pripada prostoru $L^2(\mathbb{R})$ i normalizovana je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)dx = 1. \tag{2.16}$$

Spomenuli smo koje uslove treba da ispunjava mother wavelet, a da bi se koristio u malotalasnoj transoformaciji, on se prvo sabija (skalira) i translira.

Dakle, diskretna malotalasna transformacija izleda ovako:

$$(T^{wav}(f, \psi))(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)|s_0^j|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi(\frac{x - k\tau_0 s_0^j}{s_0^j})}dx \tag{2.17}$$



Slika 2.3: Mreža tačaka diskretizacije za diskretni wavelet u vremensko-skaliranom prostoru (preuzeto sa https://www.vcl.fer.hr/dtv/jpeg/wave.htm)

Pored mogućnosti menjanja dužine i širine prozora, prednost malotalasne transformacije je mogućnost korišćenja multirezolucione analize koja omogućava analizu različitih frekvencijskih signala sa različitim frekvencijskim rezolucijama. Pa u slučaju visokih frekvencija koristimo kraće prozore i obrnuto, u slučaju niskih frekvencija koristimo duže prozore.

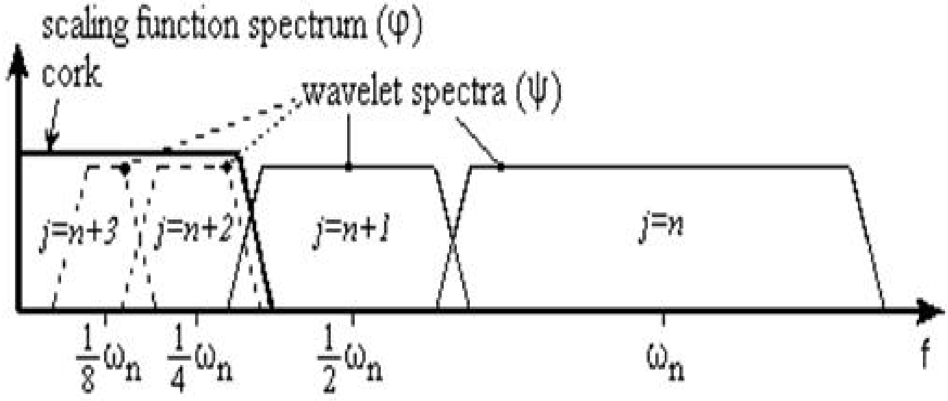
2.3.2 Multirezolucijska analiza

Diskretni vejvleti su ortogonalni na svoje dilatacije i translacije i normalizovani, drugim rečima takvi vejvleti su ortonormalni.

Prema tome, da bi diskretni vejvleti bili ortonormalni mora da važi sledeće:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{j,k}(x)\overline{\psi^{m,n}(x)}dx = \begin{cases} 1, & \text{za } j = m \text{ i } k = n \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Najčešće se uzmima da je $s = 2$, a $\tau = 1$. Na taj način pokrivamo skoro ceo signal osim u slučaju kada je u (2.8) $C_\psi = 0$, to jest kada je spektar wavelet-a jednak nuli. Pri svakom širenju wavelet-a spektar se prepolovi, pa bi nam trebalo beskonačno mnogo wavelet-a da pokrijemo signal (videti Sliku 2.4). Zbog toga uvodimo jednu skalirajuću funkciju $\phi(x)$ koja služi za niske frekvencije i glatke delove i nju još nazivamo skalna funkcija (eng. father wavelet). Dok matičnu funkciju (eng. mother wavelet) posmatramo kao funkciju $\psi(x)$ koja služi za delove sa više detalja i sa visokom frekvencijom.



Slika 2.4: Spektar skalirajuće funkcije i wavelet-a

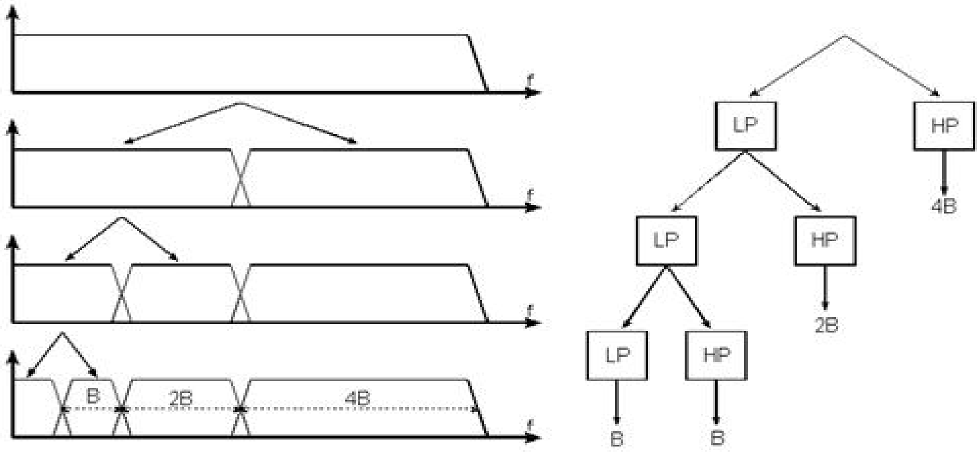
Za skalnu funkciju važi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1. \tag{2.18}$$

U praksi, skalna funkcija nam predstavlja niskopropusni filter, dok matična funkcija predstavlja visokopropusni filter. Stoga, malotalasna transformacija se može posmatrati kao prolaz signala kroz ove filtere.

Ukoliko signal prođe kroz dva filtra, visokopropusni filter koji daje detalje u signalu i niskopropusni filter koji aproksimira signal. Dobijena aproksimacija signala ponovo može proći kroz oba filtera. Ovaj postupak se može ponavljati sve dok se ne dostigne željeni nivo dekompozicije.

Ovaj postupak se naziva multirezolucijska analiza. Na kraju, informacija signala je sadržana u detaljima signala koje izbacuju visokopropusni filteri i u poslednjem signalu aproksimacije to jest poslednjem delu signala koji niskopropusti filter aproksimira. Ovo je ilustrovno na slici 2.5.



Slika 2.5: Prolaz signala kroz niskopropusni i visokopropusni filter (Preuzeto sa https://www.vcl.fer.hr/dtv/jpeg/wave.htm)

Aproksimacija signala definisana je sa:

$$y_J(x) = \sum_k s^{J,k}\phi^{J,k}(x) + \sum_k d^{J,k}\psi^{J,k}(x) + \sum_k d^{J-1,k}\psi^{J-1,k}(x) + \ldots \\ + \sum_k d^{2,k}\psi^{2,k}(x) + \sum_k d^{1,k}\psi^{1,k}(x),$$

gde je J broj multirezolucijskih skala, a $k \in Z$ ili se može ograničiti.

Aproksimacija signala može biti zapisana i na sledeći način:

$$y_J = S_J + D_J + D_{J-1} + \ldots + D_2 + D_1,$$

gde je $S_J = \sum_k s^{J,k}\phi^{J,k}(x)$ i $D_j = \sum_k d^{j,k}\psi^{j,k}(x), j = 1, 2, \ldots, J$.

Funkcije $\phi^{J,k}(x)$ i $\psi^{j,k}(x)$ su definisane na sledeći način:

$$\phi^{J,k}(x) = |2^J|^{-\frac{1}{2}}\phi(\frac{x-k2^J}{2^J}) \tag{2.19}$$

$$\psi^{j,k}(x) = |2^j|^{-\frac{1}{2}}\psi(\frac{x-k2^j}{2^j}), \quad j = 1, 2, .., J-1, J. \tag{2.20}$$

Koeficijenti $s^{J,k}, d^{J,k}, d^{J-1,k}, d^{J-2,k}, ..., d^{2,k}, d^{1,k}$ su koeficijenti malotalasne transformacije i dati su sa:

$$s^{J,k} = \int y(x)\phi^{J,k}(x)dx,$$

$$d^{J,k} = \int y(x)\psi^{j,k}(x)dx, \quad j = 1, 2, ..., J-1, J.$$

Ovi koeficijenti su mera doprinosa odgovarajuće malotalasne funkcije posmatranom signalu.

Dakle, multirezolucijska analiza nivoa J, razlaže signal na ortogonalne komponente od kojih su J komponente sa detaljima i jedna komponenta uglačavanja.

Definicija 16. Multirezolucijska analiza je razbijanje prostora $L^2(\mathbb{R})$ na niz zatvorenih poluprostora $y_j, j \in \mathbb{Z}$ (aproksimacioni prostor) sa sledećim osobinama:

1. $0 \subseteq ... \subseteq y_2 \subseteq y_1 \subseteq y_0 \subseteq y_{-1} \subseteq ... \subseteq L^2(\mathbb{R})$,
2. $\bigcap_{j\in Z} y_j = 0, \quad \bigcup_{j\in Z} y_j = L^2(\mathbb{R})$,
3. $(\forall j \in Z)(f(x) \in y_j \Leftrightarrow f(2x) \in y_{j-1})$,
4. $f(x) \in y_0 \Leftrightarrow (\forall j \in Z) f(x-j) \in y_0$ i
5. postoji funkcija $\phi(x) \in y_0$ (skalna funkcija) takva da je skup $\{\phi(x-j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza prostora y_0.

Glava 3

Lipšicova regularnost

Malotalasna transformacija omogućava lokalnu spektralnu analizu signala. Singulariteti i nepravilne strukture često sadrže bitne informacije o signalu. Na primer, tačke prekida opisuju konture objekata na slici.
Singulariteti i ivice na slici se pronalaze pomoću lokalnog maksimuma malotalasne transformacije u multirezolucijskoj analizi. Amplituda malotalasne transformacije na skali zavisi od regularnosti lokalnog signala i Lipšic eksponentata.

Posmatraćemo wavelet-e kao realne funkcije.

Prvo ćemo spomenuti uniformnu Lipšicovu regularnost funkcije f na $\mathbb{R}$ pomoću Furijeove transformacije. Time se dobija informacija o globalnoj regularnosti. S obzirom da nas interesuje lokalna regularnost, posmatraćemo malotalasnu transformaciju.

Lokalna regularnost funkcije f mora biti precizno određena da bi se izanalizirala struktura njenog određenog dela. Lipšicovi eksponenti omogućavaju proveru regularnosti u nekom intervalu ili u nekoj tački. Recimo, ako funkcija f ima singularitet u tački v, znamo da iz toga sledi da funkcija f nije diferencijabilna u tački v i tada Lipšicov eksponent u v karakteriše ponašanje signala u okolini tačke v.

U ovoj glavi korišćene su reference $[1]$ i $[4]$ iz spiska literature.

3.1 Definicija Lipšica i Furijeova analiza

Tejlorova formula daje približno izračunavanje funkcije u okolini neke određene tačke pomoću njenog Tejlorovog polinoma.

Pretpostavimo da je f m-puta diferencijabilna funkcija na intervalu $[v-h, v+h]$. Neka je Tejlorov polinom p_v u okolini tačke v dat sa:

$$p_v(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(v)}{k!}(x-v)^k. \tag{3.1}$$

Pri aproksimaciji funkcije polinomom napravi se greška, koja je jednaka razlici funkcije i Tejlorovog polinoma. Nazivamo je Tejlorovim ostatkom i obeležavamo na sledeći način:

$$\epsilon_v(x) = f(x) - p_v(x), \quad x \in (v-h, v+h). \tag{3.2}$$

Tejlorov ostatak zadovoljava:

$$\forall x \in [v-h, v+h], \quad |\epsilon_v(x)| \leq \frac{|x-v|^m}{m!} \sup_{u \in [v-h,v+h]} |f^{(m)}(u)|. \tag{3.3}$$

Dakle, m-puta diferencijabilna funkcija f u okolini tačke v ima ostatak ϵ_v koji je ograničen sa gornje strane. Lipšicova regularnost daje precizniju procenu pomoću eksponenta koji ne mora da bude ceo broj. U literaturi se taj eksponent naziva Helderov eksponent.

Definicija 17. Funkcija zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu $[a, b]$ ako postoji konstanta K takva da za svako $x, y \in [a, b]$ važi:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|. \tag{3.4}$$

Konstanta K se naziva Lipšic konstanta.

Definicija 18. Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je Lipšic neprekidna na $\mathbb{R}$ ako postoji konstanta $K \geq 0$ tako da je

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Ako je neka funkcija Lipšic neprekidna na $\mathbb{R}$, onda je i uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$.

Tačkasta i uniformna Lipšicova neprekidnost se može proveriti i pomoću Lipšic esponenata koji računaju grešku, odnosno Tejlorov ostatak lokalne Tejlorove aproksimacije.

Sada profinjujemo ove definicije dodavanjem Lipšicovog eksponenta.

Definicija 19. Za funkciju f kažemo da je tačkasto Lipšic reda $\alpha > 0$ u tački v ako postoji konstanta $K > 0$ i polinom p_v reda $\lfloor \alpha \rfloor$, tako da za sve $x \in \mathbb{R}$ važi:

$$|f(x) - p_v(x)| \leq K|x - v|^\alpha, \quad \alpha \geq 0. \tag{3.6}$$

Definicija 20. Za funkciju f kažemo da je uniformno Lipšic reda $\alpha > 0$ na $[a, b]$ ako postoji konstanta $K > 0$ i polinom p_v reda $\lfloor \alpha \rfloor, v \in [a, b]$, tako da za sve $x \in \mathbb{R}$ i $v \in [a, b]$ važi:

$$|f(x) - p_v(x)| \leq K|x - v|^\alpha, \quad \alpha \geq 0. \tag{3.7}$$

Dakle, konstanta K za uniformnu Lipšic regularnsot ne zavisi od $v \in [a, b]$.

Tačkasta Lipšic regularnst nam daje Lipšicove eksponente α koji se mogu menjati u zavisnosti od apcise v. I tako možemo konstruisati multifraktalne funkcije u kojima f ima drugačiju Lipšic regularnost za svaku tačku.

U slučaju uniformne Lipšic regularnsoti dobija se globalno merenje regularnosti koje se odnosi na ceo interval $[a, b]$.

Razlikovaćemo par slučajeva uniformne Lipšic regularnosti, odnosno Lipšic esponenata:

- ako je $\alpha > m$ u okolini tačke v onda je f sigurno m puta neprekidno diferencijabilna funkcija u toj okolini
- ako je $0 \leq \alpha < 1$ onda je $p_v(x) = f(v)$, pa će (3.6) postati

  $$|f(x) - f(v)| \leq K|x - v|^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

  Funkcija koja je ograničena ali prekidna u tački v je reda 0 u toj tački.
- ako je $\alpha < 1$ u tački v, onda f nije diferencijabilna u v i Lipšicov red α opisuje vrstu singulariteta

Globalna regularnost funkcije (signala) f zavisi od Furijeove transformacije $\hat{f}(\omega)$, kada $\omega \to \infty$. Ako $f \in L^1(\mathbb{R})$, onda formula inverzije (9) implicira da je f neprekidna i ograničena:

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega x}|d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|d\omega < +\infty \tag{3.9}$$

Sledeća teorema primenjuje ovo svojstvo da bi se dobio dovoljan uslov da funkcija f bude p puta diferencijabilna.

Teorema 13. *Funkcija f je ograničena i p puta neprekidno diferencijabilna ako ispunjava:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|d\omega(1 + |\omega|^p) < +\infty. \tag{3.10}$$

Lipšic regularnost funkcije $f \in \mathbb{R}$ povezana je sa asimptotskim opadanjem Furijeove transformacije. Teorema 14 može se posmatrati kao generalizacija Teoreme 13.

Teorema 14. *Funkcija f je ograničena i uniformno Lipšic reda α na R ako važi:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|d\omega(1 + |\omega|^\alpha) < +\infty. \tag{3.11}$$

Dokaz. Ograničenost može da se dokaže pomoću Teoreme 9, iz koje sledi

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|d\omega < +\infty.$$

Lipšic neprekidnost reda α dokazujemo pomoću (3.8), iz kog sledi

$$\frac{|f(x) - f(v)|}{|x - v|^\alpha} \leq K, \quad \forall x, v \in \mathbb{R}.$$

Kako je

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega x}d\omega$$

onda važi:

$$\frac{|f(x) - f(v)|}{|x - v|^\alpha} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|\frac{|e^{2\pi i\omega x} - e^{2\pi i\omega v}|}{|x - v|^\alpha}d\omega \tag{3.12}$$

Za $|x - v|^{-1} \leq \omega$,

$$\frac{|e^{2\pi i\omega x} - e^{2\pi i\omega v}|}{|x - v|^\alpha} \leq \frac{2}{|x - v|^\alpha} \leq 2|\omega|^\alpha.$$

Za diferencijabilnu funkciju $f(t) = e^{2\pi it}, f^{'}(t) = 2\pi i e^{2\pi it}$ važi
$|f(\omega x) - f(\omega v)| = |f^{'}(v)||\omega||x-v| \leq |2\pi e^{2\pi iv}||\omega||x-v| = 2\pi|\omega||x-v|$.

Za $|x-v|^{-1} \geq \omega$,

$$\frac{|e^{2\pi i\omega x} - e^{2\pi i\omega v}|}{|x-v|^{\alpha}} \leq \frac{2\pi|\omega||x-v|}{|x-v|^{\alpha}} \leq 2\pi|\omega|^{\alpha}.$$

Sada, ako integral iz (3.12) posmatramo kao zbir dva dela u slučaju kada je $|x-v|^{-1} \leq \omega$ i $|x-v|^{-1} \geq \omega$, dobićemo:

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(v)|}{|x-v|^{\alpha}} &\leq \int_{|x-v|^{-1}\leq\omega} 2|\omega|^{\alpha}|\hat{f}(\omega)|d\omega + \int_{|x-v|^{-1}\geq\omega} 2\pi|\omega|^{\alpha}|\hat{f}(\omega)|d\omega \\ &\leq 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)||\omega|^{\alpha}d\omega = K < \infty.\end{aligned}$$

Dakle, ako važi 14, onda je $K < +\infty$, pa je f Lipšic neprekidna reda α. □

Koliko god Furijeova transformacija bila korisna za globalnu regularnost neke funkcije, ne možemo njome izmeriti regularnost u nekoj tački pomoću opadanja Furijeove transformacije kada $\omega \to \infty$. Dok je malotalasnom transformacijom to moguće uraditi. Kako su vejvleti dobro lokalizovani u vremenu, ona može dati Lipšicovu regularnost na nekom intervalu i u nekoj tački.

3.2 Talasi sa anulirajućim momentima (eng. vanishing moments)

Najbitnije kod merenja regularnosti signala su anulirajući momenti. Ako talas (eng. wavelet) ima n anulirajućih momenata, tada malotalasnu transformaciju možemo posmatrati kao multiskalni diferencijalni operator reda n. Ovo je prva povezanost diferencijabilnosti funkcije f i opadanja njene malotalasne transformacije na finim skalama.

Iz (3.6) vidimo da je aproksimacija funkcije f koja je tačkasto Lipšic reda α polinomom p_v u okolini tačke v data sa:

$$f(x) = p_v(x) + \epsilon_v(x), \quad |\epsilon_v(x)| \leq K|x-v|^{\alpha}. \tag{3.13}$$

Malotalasna transformacija procenjuje eksponenat α zanemarujući polinom p_v. Za tu svrhu koristićemo wavelet koji ima $n > \alpha$ anulirajućih momenata.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = 0, \quad 0 \leq k < n.$$

To znači da je mali talas koji ima n anulirajućih momenata ortogonalan na polinome reda manjeg od n. Kako je $\alpha < n$, polinom p_v je sigurno reda ne većeg od $n-1$, odakle je

$$(T^{wav}(p_v, \psi))(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p_v(x)|s|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi(\frac{x-\tau}{s})} dx = 0. \tag{3.14}$$

Iz $f = p_v + \epsilon_v$, sledi da je $(T^{wav}(f, \psi))(s, \tau) = (T^{wav}(\epsilon_v, \psi))(s, \tau)$.

Sledeće poglavlje objašnjava kako se iz $|(T^{wav}(f, \psi))(s, \tau)|$ izračunava α kada je τ u okolini tačke v.

3.3 Merenje regularnosti talasima

Sledeća teorema govori da wavelet sa n anulirajućih momenata može da se zapiše kao izvod n-tog reda funkcije θ, gde dobijamo malotalasnu transformaciju kao višeskalni diferencijalni operator.
Pretpostavljamo da ψ brzo opada, što znači da za svako opadanje, to jest za eksponent $m \in \mathbb{N}$, postoji C_m tako da važi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\psi(x)| \leq \frac{C_m}{1+|x|^m}. \tag{3.15}$$

Teorema 15. *Wavelet ψ brzo opada sa n anulirajućih momenata ako i samo ako postoji brzo opadajuća funkcija θ tako da je*

$$\psi(x) = (-1)^n \frac{d^{(n)}\theta(x)}{dt^n}.$$

U tom slučaju, malotalasna transformacija može da se napiše na sledeći način:

$$(T^{wav}(f,\psi))(s,\tau) = s^n \frac{d^n}{d\tau^n}(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)|s|^{-\frac{1}{2}}\overline{\theta(\frac{x-\tau}{s}})dx), \tag{3.16}$$

ψ *nema više od* n *anulirajućih momenata ako i samo ako je* $\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)dx \neq 0.$

Opadanje malotalasne transformacije povezano je sa tačkastom i uniformnom Lipšic regularnošću signala. Merenje asimptotskog opadanja je jednako analiziranju strukture signala sa skalom koja ide u nulu. Pretpostavljamo da ψ ima n anulirajućih momenata i da je C_n sa izvodima koji brzo opadaju. To znači da za svako $0 \leq k \leq n$ i $m \in \mathbb{N}$, postoji C_m tako da važi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\psi^k(x)| \leq \frac{C_m}{1+|x|^m}. \tag{3.17}$$

Sledeća teorema povezuje uniformnu Lipšic regularnost funkcije f na nekom intervalu sa amplitudom njene malotalasne transformacije na finim skalama.

Teorema 16. *Ako je* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *uniformno Lipšic reda* $\alpha \leq n$ *na intervalu* $[a,b]$, *onda postoji* $A > 0$ *tako da važi:*

$$\forall (s,\tau) \in \mathbb{R}^+ \times [a,b], \quad |(T^{wav}(f,\psi))(s,\tau)| \leq As^{\alpha+1/2}. \tag{3.18}$$

Važi i obrnuto, to jest ako pretpostavimo da je f *ograničena i njegova malotalasna transformacija* $(T^{wav}(f,\psi))(s,\tau)$ *zadovoljava* (3.18) *za svako* $\alpha < n$ *koji nije ceo broj. Tada je* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *uniformno Lipšic reda* α *na intervalu* $[a+\epsilon, b-\epsilon]$, *za svako* $\epsilon > 0$.

Dokaz. Ova Teorema 16 je dokazana kao mala izmena dokaza Teoreme 17. Kako je f Lipšic reda α u svakoj tački $v \in [a,b]$. Teorema 17 u (3.19) pokazuje da važi sledeće

$$\forall (s,\tau) \in \mathbb{R}^+ \times R, \quad |(T^{wav}(f,\psi))(s,\tau)| \leq As^{\alpha+1/2}(1+|\frac{\tau-v}{s}|^{\alpha}).$$

Za $\tau \in [a,b]$ možemo uzeti da je baš $\tau = v$ što implicira sledeće:

$$|(T^{wav}(f,\psi))(s,\tau)| \leq As^{\alpha+1/2}.$$

Vidimo iz (3.19) da A ne zavisi od v zato što je Lipšic regularnost uniformna na $[a,b]$.

Kako bismo dokazali suprotno, da je f Lipšic reda α na $[a+\epsilon, b-\epsilon]$, moramo da dokažemo da postoji K tako da za $\forall v \in [a+\epsilon, b-\epsilon]$ možemo pronaći polinom p_v stepena $\lfloor\alpha\rfloor$ tako da $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - p_v(x)| \leq K|x-v|^\alpha$.

Kada $x \notin [a+\frac{\epsilon}{2}, b-\frac{\epsilon}{2}]$, onda $|x-v| \geq \frac{\epsilon}{2}$ i kako je f ograničena onda je dokazano konstantom K koja zavisi od ϵ. □

Sada ćemo dokazati Jaffard teoremu.

Teorema 17. *(Jaffard) Ako je $f \in L^2(\mathbb{R})$ Lipšic reda $\alpha \leq n$ u tački v, onda postoji $A > 0$ tako da važi:*

$$\forall (s,\tau) \in \mathbb{R}^+ \times R, \quad |(T^{wav}(f,\psi))(s,\tau)| \leq As^{\alpha+1/2}(1 + |\frac{\tau - v}{s}|^\alpha). \tag{3.19}$$

Obrnuto, ako $\alpha < n$ nije ceo broj, postoji A i $\alpha' < \alpha$ tako da važi sledeća nejednakost

$$\forall (s,\tau) \in \mathbb{R}^+ \times R, \quad |(T^{wav}(f,\psi))(s,\tau)| \leq As^{\alpha+1/2}(1 + |\frac{\tau - v}{s}|^{\alpha'}), \tag{3.20}$$

onda je f Lipšic reda α u tački v.

Dokaz. Dokazujemo nejednačinu (3.19).

Kako je f Lipšic reda α u tački v, onda postoji polinom p_v stepena $\lfloor\alpha\rfloor \leq n$ i K tako da važi $|f(x) - p_v(x)| \leq K|x-v|^\alpha$. Kako ψ ima n anulirajućih momenata, vidimo u (3.14) da je $(T^{wav}(p_v,\psi))(s,\tau) = 0$, pa odatle sledi:

$$\begin{aligned}(T^{wav}(p_v,\psi))(s,\tau) &= |\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - p_v(x))|s|^{-\frac{1}{2}}\overline{\psi(\frac{x-\tau}{s})}dx| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} K|x-v|^\alpha |s|^{-\frac{1}{2}}|\overline{\psi(\frac{x-\tau}{s})}|dx.\end{aligned}$$

Ako uvedemo smenu, $t = \frac{x-\tau}{s}$, dobijamo

$$(T^{wav}(p_v, \psi))(s, \tau) \leq |s|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} K|st + \tau - v|^{\alpha}|\overline{\psi(t)}|dt.$$

Kako važi $|a + b|^{\alpha} \leq 2^{\alpha}(|a|^{\alpha} + |b|^{\alpha})$,

$$(T^{wav}(p_v, \psi))(s, \tau) \leq K2^{\alpha}|s|^{-\frac{1}{2}}\left(s^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{\alpha}|\overline{\psi(t)}|dt + |\tau - v|^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(t)}|dt\right),$$

što dokazuje (3.19). $\square$

Glava 4

Detekcija ivica na slici

U ovoj glavi objasnićemo pojam ivice i detekcije ivica na slici. Videćemo kako šum može negativno da utiče na sliku ukoliko želimo da detektujemo ivice na njoj. Navešćemo neke operatore pomoću kojih se mogu detektovati ivice na slici. Videćemo za šta služi malotalasna transformacija kada pričamo o detektoru ivica. Objasnićemo detaljno Canny operator. I na kraju ćemo dati konkretan primer slike puštene kroz filter putem Phyton-a koristeći kodove najpoznatijih operatora.

U ovoj glavi korišćene su reference $[3]$ i $[4]$ iz spiska literature.

4.1 Ivica i detekcija ivica

Ivice predstavljaju granice objekata na slici, to jest mesta na slici na kome dolazi do nagle promene intenziteta boja ili teksture, osvetljenja ili refleksija površine. Pomoću toga može se prepoznati objekat na slici, kao i njegov položaj i orijentacija.

U obradi slike, ivica može da se tumači kao jedna klasa singulariteta, koji se karakterišu kao prekidi kada gradijent teži ka beskonačnosti. Međutim, podaci na slici su diskretni, pa se ivica na slici definišu kao lokalni maksimum gradijenta.

Uvešćemo pojam ivične tačke.
Ivična tačka je piksel na kom se javlja nagla promena intenziteta boja ili osvetljenja u odnosu na njegova 4 susedna piksela.
Mesto na kojem identifikujemo promenu intenziteta boja ili osvetljenja na slici ima svoju koordinatu $[i, j]$, koja predstavlja redni broj reda i kolone tog mesta.

Ako je na Slici 4.1 tačka $p(i, j)$, onda su njegova 4 susedna piksela:

$$p(i, j-1), p(i-1, j), p(i, j+1) \quad \text{i} \quad p(i+1, j).$$

p(i-1,j-1)	p(i-1, j)	p(i-1, j+1)
p(i,j-1)	p(i, j)	p(i, j+1)
p(i+1,j-1)	p(i+1, j)	p(i+1, j+1)

Slika 4.1: Tačka p(i,j) i njene susedne tačke

Povezivanje ivica se obično vrši u smeru kazaljke na satu tako što se od ivičnih tačaka formira uređena lista.

U sklopu multirezolucijske analize smo spomenuli da signal (u ovom slučaju slika) prolazi kroz niskopropusni filter, koji daje detalje o signalu, i visokoprospusni filter, koji aproksimira signal.
Niskopropusni filter slike nosi značajan deo energije, ali nije upotrebljiv za vizuelni kvalitet slike. Nasuprot tome, visokopropusni deo slike je upotrebljiv jer u sebi ima značajne informacije, ali malu energiju i zbog toga se brzo pretvori u šum.

Detektor ivica možemo posmatrati kao visokopropusni filter koji se primenjuje da bi se izdvojile ivice na slici. Dakle, on nam služi za obradu informacija sa slike, to jest izdvajanja pojedinačnih objekata slike.

Šta zapravo detektor ivica radi? On uzima potrebnu količinu podataka, uglavnom je smanjuje, zatim filtrira sve nepotrebne informacije i ostavlja samo ivice, koje treba srediti u uređenu listu.

Detaljnije, detektor analizira piksele i na osnovu karakteristika boja ili osvetljenja i odlučuje da li je on ivični. Kada smo detektovali ivične tačke onda ih spajamo kako bismo dobili ivice. Konačno, spajanjem ivica dobijamo liniju koja zapravo čini konturu objekta na slici.

Postoje različite vrste detektora ivica koji su bazirani na principu usklađivanja lokalnih segmenata slike sa specifičnim šablonom ivica. Neki od poznatijih su: Roberts, Sobel, Prewitt, Frei-Chen, Laplacian, i svi su oni efikasni jer su bazirani na šablonskoj mreži 3x3.

U zavisnosti od operatora kojeg koristimo, razlikuju se i promene koje detektujemo na slici. Drugim rečima, različiti operatori detektuju različite promene zbog različitog načina obrade podataka.

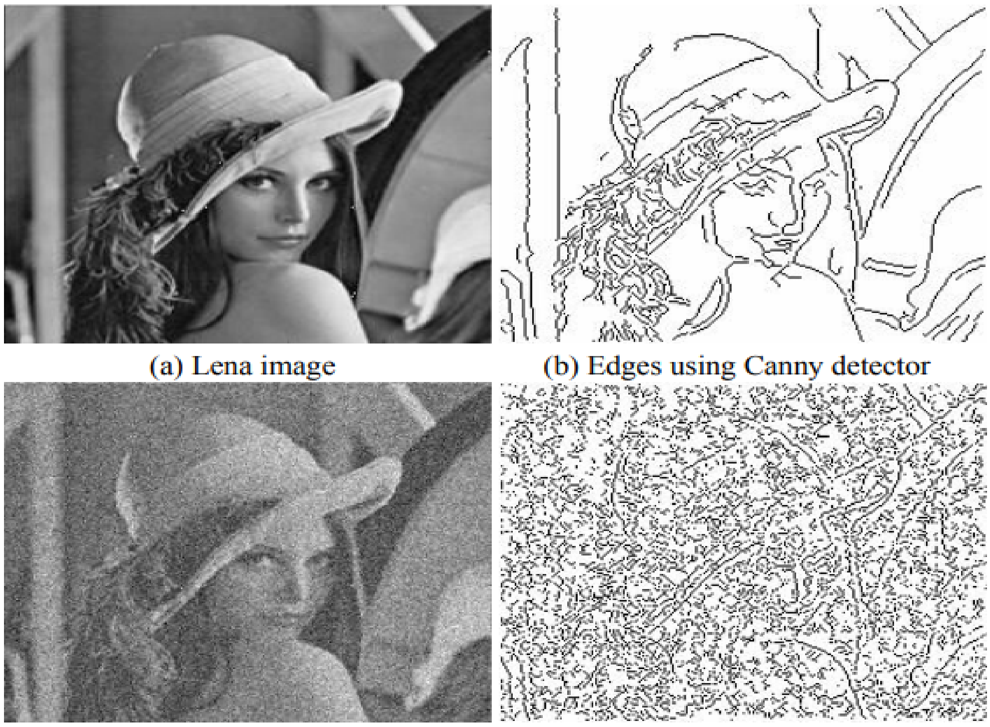
4.2 Šum i njegov uticaj na detekciju ivica

Detektori ivica posebno dobro rade ako šablon odgovara ivicama. Međutim, oni ne uspevaju da obrade slike sa jakim šumom, pogotovo jer je buka nepredvidiva na originalnoj slici, a uglavnom je uzrokovana prenosom ili kompresijom slike.

Postoje različite vrste šuma na slici, ali dve najproučavanije vrste su beli šum (eng. white noise) i šum soli i bibera (eng. salt and pepper noise).

Kada postoji šum na slici, ona je na neki način zagađena i prisustvo šuma otežava da se na takvoj slici prouči detekcija ivica. Zbog postojanja šumova, detektovane ivice mogu biti prave ili lažne, baš zbog tih nejasnoća slike. Međutim, uzmimo u obzir da postoje i ivice koje ne mogu biti otkrivene detekcijom.

Ovaj slučaj možemo videti na primeru Slike 4.2, gde je detekcija slike odrađena na slici:
a) originalna slici
c) slika sa belim šumom
pa su dobijene:
b) ivice originalne slike posle Canny detektora
d) ivice slike sa belim šumom posle detektora.



(a) Lena image (b) Edges using Canny detector (c) Lena image with noise (d) Edges from the image with noise

Slika 4.2: Uticaj šuma na slici

Kako bi se smanjio uticaj šuma, od 1979. do 1984. razvile su se dve tehnike. Prva je Gausovom metodom filtrirati sliku pre detekcije ivica, a druga aproksimacija slike glatkom funkcijom.
Mana ovih pristupa je što se možda neće dobiti optimalan rezultat zbog korišćenja fiksnog operatora.

1986. je razvijen Canny detektor ivica, koji koristi višefazni algoritam da bi otkrio ivice širokog raspona. Takođe, Canny je pokušao da nađe optimalno rešenje, pa je 1991. razvio računarski pristup detekciji ivica. Ideja je da se optimalni detektor ivica aproksimira prvim izvodom Gausijana.

4.3 Detekcija ivica pomoću malotalasne transformacije

U trećoj glavi naveli smo 3 vrste transformacija: Furijeovu, kratkotrajnu Furijeovu i malotalasnu transformaciju, kao i njihove razlike. Malotalasna transformacija se pokazala kao najbolji alat za analizu lokalnih svojstva signala (funkcija). Pomoću nje možemo znati frekvencijska svojstva funkcije u lokalnom vremenskom intervalu.

Furijeova transformacija jeste pogodna za analizu singulariteta, ali globalnih. Kako smo ivice na slici definisali kao lokalne singularitete, to je glavni razlog zašto koristimo malotalasnu transformaciju, jer je pomoću nje moguće pronaći ih.

Slika 4.3 će biti originalna slika na kojoj ćemo detektovati ivice raznim operatorima.

Malotalasna transformacija karakteriše lokalnu regularnost signala tako što razloži signal na blokove koji su dobro lokalizovani u vremenu i frekvenciji. Ovaj mehanizam je osnova klasičnih detektora ivica.

Za ispravnu detekciju svih ivica neophodan je multirezolucijski pristup, u kojem wavelet transformacija igra ključnu ulogu. Taj pristup se sastoji od ponovljenih detekcija ivica na nekoliko različitih skala primenom Gausovog filtra, u cilju postizanja željenih performansi. Nakon toga se započinje postupak praćenja ivica od najviše ka najnižoj skali. Zbog nedostatka ovog postupka, koji je zahtevanje velike količine memorije pri izvršavanju, predlaže se iterativni postupak u kome se određuje optimalna skala za svaki piksel u slici (iz definicije multirezolucijske analize 16 imamo iterativne postupke y_j). Nakon ovog postupka dobija se finalna mapa ivica primenom Canny detektora kojeg ćemo kasnije detaljno objasniti.

Recimo, ako posmatramo funkciju $f(x, y)$, njene ivice su zapravo njeni singulariteti, koji su povezani sa lokalnim maksimumom malotalasne transformacije.

Detekcija ivica pomoću Laplasovog operatora zahteva pre svega određivanje Laplasijana slike

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2},$$

zatim se detektuju vrednosti Laplasijana za koje se određuju prolasci kroz nulu. Mana je što se na ovaj način ne dobijaju informacije o smeru ivice.

Slika 4.3: Originalna slika

Laplasov operator se razlikuje od drugih po tome što koristi samo jedan kernel (jezgro). Na primer:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da se ovde aproksimira drugi izvod na slici, Laplasov operatov je osetljiviji na šum od operatora baziranih na gradijentu.

Kako bi se smanjio uticaj šuma, slika bi trebalo prvo biti filtrirana. Najćešće se koristi Gausov filter za otklanjanje šumova. Dobra strana Gausovog filtera je što ne stvara nove ivice, to jest objekte prilikom pojednostavljenja slike ali se njime mogu neki elementi slike izgubiti.

Zapravo, postoji mogućnost da spojimo Gausov i Laplasov filter i sliku provučemo odjednom kroz oba filtera.

Pogledajmo sada kod na Slici 4.4. Koristimo Python kako bismo implementirali filtere na sliku.

```
import cv2
import matplotlib.pyplot as plt

# Open the image
img = cv2.imread(cv2.samples.findFile('test1.jpg'), cv2.IMREAD_COLOR)

# Apply gray scale
gray_img = cv2.cvtColor(img, cv2.COLOR_BGR2GRAY)

# Apply gaussian blur
blur_img = cv2.GaussianBlur(gray_img, (11, 11), 0)

# Positive Laplacian Operator
laplacian = cv2.Laplacian(blur_img, cv2.CV_64F)

plt.figure(figsize = (20, 15))
plt.title('Shapes')
plt.imsave('shapes-lap.png', laplacian, cmap='gray', format='png')
plt.imshow(laplacian, cmap='gray')
plt.show()
```

Slika 4.4: Gausov i Laplasov filter: kod

Slika 4.5: Slika posle Gausovog i Laplasovog filtera

Napomena: Ovde koristimo ugrađene funkcije iz paketa OpenCV.
(link: https://docs.opencv.org/master/index.html)

Na Slici 4.5 možemo videti rezultat Gausovog i Laplasovog filtera implementiranog na slici.

Gradijentni operatori imaju lošiju lokalizaciju jer su im ivice široke, dok se kod drugog izvoda slike, ivice određuju prolaskom kroz nulu (eng. zero crossing), pa je lokalizacija mnogo bolja. Ovo možemo videti na Slici 4.6.

Kao što smo rekli, postoje razne vrste operatora koji se koriste za detekciju ivica. Sve te metode se razlikuju u načinu filtriranja, poboljšavanja ivica, samoj detekciji i lokalizaciji. Mi ćemo se fokusirati na detekciji ivica baziranoj na gradijentu i na ivicama (Sobel operator).

4.4 Detekcija ivica bazirana na gradijentu

Kako detektujemo ivice bazirane na gradijentu? Zašto posmatramo izvode? Ako posmatramo jednu dimenziju slike, prvim i drugim izvodom mogu se videti nagle promene intenziteta u slici. Te lokalne promene na slici će biti detektovane kao ivične tačke.

Primer 2. *Recimo, neka je prvi izvod* $\frac{d}{dx}f = f^{'}(x) = f(x+1) - f(x)$*, onda će drugi izvod biti:*

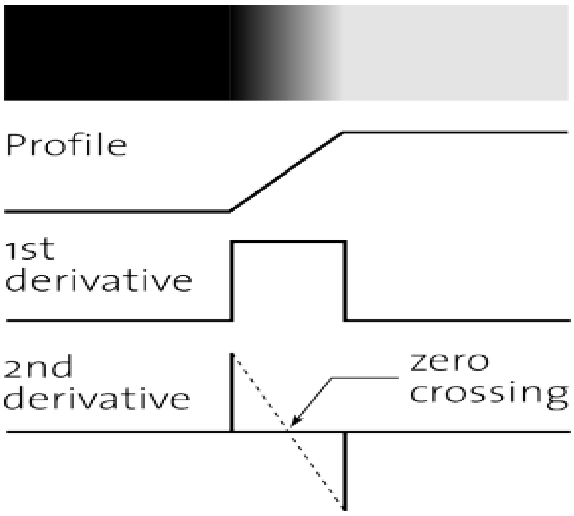
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}f = \frac{d}{dx}f^{'} = f^{''}(x) = f^{'}(x+1) - f^{'}(x) &= f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x) \\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)\end{aligned}$$

Dakle, drugi izvod je $\frac{d^2}{dx^2}f = f^{''}(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$.

Detektore ivica ćemo posmatrati kao aproksimacije gradijentnih operatora. Međutim, spomenuli smo da šum utiče nepovoljno na kvalitet, to jest na izračunavanje gradijenta, pa je neophodno filtriranje glatkim filterom kroz koji će slika proći kako bi se uklonio šum i neki nerelevantni detalji, pre nego što se izračuna gradijent gradijentnim operatorom.

Gradijent nam daje informaciju o pravcu i amplitudi maksimalne promene svakog piksela u slici. Uvodi se prag kako bismo dobili ivične piksele to jest piksele čiji intenzitet gradijenta prelazi taj prag.

Gradijent je dvodimenzionalna funkcija prvog izvoda.

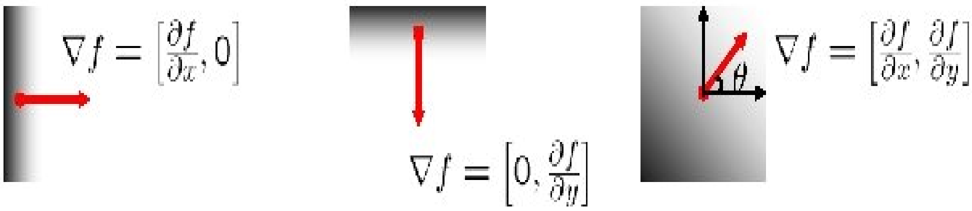


Slika 4.6: Primer prvog i drugog izvoda

Gradijent neke funkcije je mera promene te funkcije, koji takođe pokazuje pravac najbrže promene (videti Sliku 4.7).

Gradijent slike:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_x, f_y) \tag{4.1}$$



Slika 4.7: Detekcija ivica pomoću gradijenta

Magnituda gradijenta je maksimalna stopa rasta funkcije $f(x,y)$ po jediničnoj udaljenosti u pravcu gradijenta, ali je nezavisna od pravca ivice.

Intenzitet (magnituda) gradijenta:

$$|\nabla f(x,y)| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

Pravac (smer) gradijenta (maskimalni rast funkcije):

$$\theta = \arctan\left(\frac{f_y}{f_x}\right) \tag{4.2}$$

Najčešći operatori bazirani na gradijentu su Robertsov, Pruit, Sobel operator i drugi.

4.5 Sobelov operator

Pod detekcijom baziranoj na ivicama misli se da se kontura može detektovati pomoću ivičnih piksela. Udruživanjem ivičnih piksela dobijamo granicu ili konturu objekta na slici. Ivice se formiraju ukoliko ima značajne razlike između piksela.

Ovde takođe koristimo funkcije gradijenta za detekciju ivica, odnosno za merenje promene intenziteta boja, tekstura ili neke druge karakteristike slike. Dakle, ukoliko se prvi izvod nekog piksela razlikuje od njegovih susednih, onda je detektovan ivični piksel.

Sada ćemo detaljnije objasniti Sobelov operator, odnosno njegov algoritam za detekciju ivica.

Prvo, primetimo da ovaj algoritam koristi aproksimaciju izvoda kako bi detektovao ivice. Sobelov algoritam izračunava gradijent 2D digitalne slike koristeći dva dvodimenzionalna kernela 3x3 za otkrivanje ivica konture i tako dobija piksele u kojima je vrednost gradijenta maksimalna.

Posmatrajmo piksel $[i,j]$ i njegove susedne piksele.

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_7 & [i,j] & a_3 \\ a_6 & a_5 & a_4 \end{bmatrix}$$

Spomenuli smo već da je magnituda gradijenta data sa:

$$|\nabla f(x,y)| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2},$$

gde su parcijalni izvodi:

$f_x = (a_2 + ca_3 + a_4) - (a_0 + ca_7 + a_6),$

$f_y = (a_0 + ca_1 + a_2) - (a_6 + ca_5 + a_4),$

gde je konstanta $c = 2$.

Sobelov operator koristi dva kernela 3x3 koja služe za filtriranje podataka. Dati su na sledeći način:

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad G_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Operator gradijenta G_x ima nule u srednjoj koloni, što znači da se u ovom slučaju uporedjuju pikseli iz prve i treće kolone. Takođe vidimo da srednje vrednosti 2 i -2 imaju veći značaj odgovarajućeg piksela. Dakle, ovde detektujemo vertikalne ivice.

Po istom principu, operator gradijenta G_y ima nule u srednjoj vrsti, što znači da se upoređuju pikseli prve i treće vrste. Tako da ovde detektujemo horizontalne ivice.

Sobel je jedan od najkorišćenijih detektora ivica. Zasniva se na konvoluciji slike sa malim, celobrojnim filterom u horizontalnom (G_y) i vertikalnom (G_x) pravcu i zbog toga je i jeftin u smislu izračunavanja.

Konvolucija je matematički operator koji od dve funkcije f i g proizvodi treću koja predstavlja količinu preklapanja između funkcije f i okrenute i translirane funkcije g.

Definicija 21. Neka su f i g funkcije čiji je domen ceo $\mathbb{R}$. Konvolucija funkcija f i g, u oznaci $f * g$, definiše se sa:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds, t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Suštinsko svojstvo konvolucije je da se ona Furijeovom transformacijom transformiše u množenje u frekvencijskom domenu, što je od ključnog značaja za primene u obradi signala, ali i u diferencijalnim jednačinama.

Teorema 18. *Za svako f,$g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ važi:*

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = 2\pi\mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega) \tag{4.4}$$

Sobel filter nam istovremeno pruža diferenciranje (uz pomoću kojeg pronalazimo ivice) i zaglađivanje (koje smanjuje šum).

Na Slici 4.8 je prikazan kod Sobelovog filtera kojeg smo implementirali u Python-u.

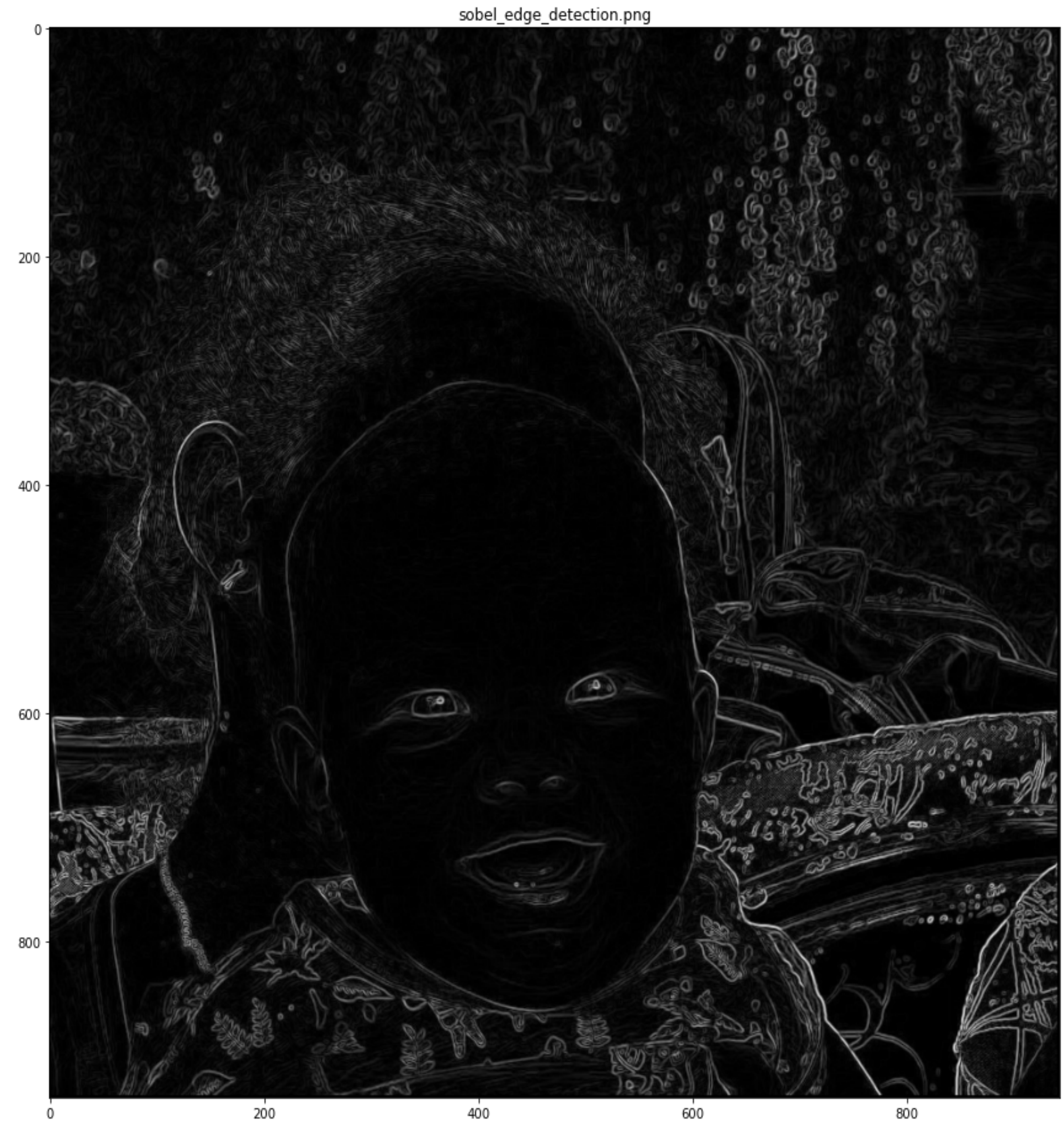
Napomena: Ovde koristimo ugrađene funkcije iz paketa OpenCV.
(link: https://docs.opencv.org/master/index.html)

U kodu na slici 4.8 prvo primenjujemo sive tonove (eng. gray scale), zatim definišeno kernele za horizontalni i vertikalni operator gradijenta, pa onda prelazimo preko slike i računamo gradijente.

Na slici 4.9 možemo videti rezultat Sobelovog filtera implementiranog na slici.

```
import numpy as np
from PIL import Image
import matplotlib.pyplot as plt

# Open the image
img = np.array(Image.open('test.jpg')).astype(np.uint8)

# Apply gray scale
gray_img = np.round(0.299 * img[:, :, 0] +
                    0.587 * img[:, :, 1] +
                    0.114 * img[:, :, 2]).astype(np.uint8)

# Sobel Operator
h, w = gray_img.shape
# define filters
horizontal = np.array([[-1, 0, 1], [-2, 0, 2], [-1, 0, 1]])  # s2
vertical = np.array([[-1, -2, -1], [0, 0, 0], [1, 2, 1]])  # s1

# define images with 0s
newhorizontalImage = np.zeros((h, w))
newverticalImage = np.zeros((h, w))
newgradientImage = np.zeros((h, w))

# offset by 1
for i in range(1, h - 1):
    for j in range(1, w - 1):
        horizontalGrad = (horizontal[0, 0] * gray_img[i - 1, j - 1]) + \
                         (horizontal[0, 1] * gray_img[i - 1, j]) + \
                         (horizontal[0, 2] * gray_img[i - 1, j + 1]) + \
                         (horizontal[1, 0] * gray_img[i, j - 1]) + \
                         (horizontal[1, 1] * gray_img[i, j]) + \
                         (horizontal[1, 2] * gray_img[i, j + 1]) + \
                         (horizontal[2, 0] * gray_img[i + 1, j - 1]) + \
                         (horizontal[2, 1] * gray_img[i + 1, j]) + \
                         (horizontal[2, 2] * gray_img[i + 1, j + 1])

        newhorizontalImage[i - 1, j - 1] = abs(horizontalGrad)

        verticalGrad = (vertical[0, 0] * gray_img[i - 1, j - 1]) + \
                       (vertical[0, 1] * gray_img[i - 1, j]) + \
                       (vertical[0, 2] * gray_img[i - 1, j + 1]) + \
                       (vertical[1, 0] * gray_img[i, j - 1]) + \
                       (vertical[1, 1] * gray_img[i, j]) + \
                       (vertical[1, 2] * gray_img[i, j + 1]) + \
                       (vertical[2, 0] * gray_img[i + 1, j - 1]) + \
                       (vertical[2, 1] * gray_img[i + 1, j]) + \
                       (vertical[2, 2] * gray_img[i + 1, j + 1])

        newverticalImage[i - 1, j - 1] = abs(verticalGrad)

        # Edge Magnitude
        mag = np.sqrt(pow(horizontalGrad, 2.0) + pow(verticalGrad, 2.0))
        newgradientImage[i - 1, j - 1] = mag

plt.figure(figsize = (20, 15))
plt.title('sobel_edge_detection.png')
plt.imsave('sobel.png', newgradientImage, cmap='gray', format='png')
plt.imshow(newgradientImage, cmap='gray')
plt.show()
```

Slika 4.8: Sobelov filter: kod



Slika 4.9: Slika posle Sobelovog filtera

4.6 Kanijev (Canny) operator

Canny operator je jedan je od najpoznatijih detektora ivica koji je otkrio John F. Canny 1986. godine.

Canny je pokušao da nađe optimalno (numeričko) rešenje za kriterijume idealnog detektora ivica koji glase ovako:

1. više pravih nego lažnih detekcija ivica
2. svaka ivica je širine jednog piksela
3. dobra lokalizacija

Canny algoritam se sastoji iz nekoliko delova.

Prvi deo je potiskivanje šuma. Uglađivanje slike se radi Gausovim filterom. Gausovom funkcijom dobijamo kompromis između osetljivosti na šum i lokalizacije.

Drugi deo je računanje gradijenta. To možemo uraditi nekim operaterom, recimo Sobelom jer smo njega spomenuli.
Dakle, ako filtriramo sliku Sobelovim kernelom u vertikalnom i horizontalnom pravcu, dobićemo prve izvode G_x i G_y pomoću kojih ćemo izračunati gradijent (4.1) i smer ivice za svaki piksel (4.2).

Treći korak je potiskivanje ne-maksimuma. Pošto sada imamo magnitudu i pravac gradijenta, vrši se potpuno skeniranje slike kako bi se uklonili pikseli koji ne predstavljaju ivicu. To radimo tako što za svaki piksel proveravamo da li je lokalni maksimum u njegovoj blizini i to u smeru gradijenta. Ako jeste, onda piksel ide u sledeći i poslednji korak, a ako nije potiskuje se. Na kraju, dobijamo slomljene tanke ivice koje treba popraviti.

Četvrti i poslednji korak je dodatno (naknadno) poređenje sa pragom (eng. Hysteresis Thresholding). Zadaju se dve vrednosti praga, viši i niži. Ideja je da svi pikseli koji pređu viši prag su sigurne ivice, a pikseli koji pređu niži prag su potencijalne ivice, a piskeli koji su ispod nižeg praga se odbacuju. Potencijalne ivice se zadržavaju u slučaju da su povezane sa nekom sigurnom ivicom, u suprotnom one se isto odbacuju.

4.6 Kanijev (Canny) operator

Poslednji korak takođe uklanja šumove malih piksela pod pretpostavkom da su ivice dugačke linije.

Na Slici 4.10 je prikazan kod Kanijevog filtera kojeg smo implementirali u Python-u.

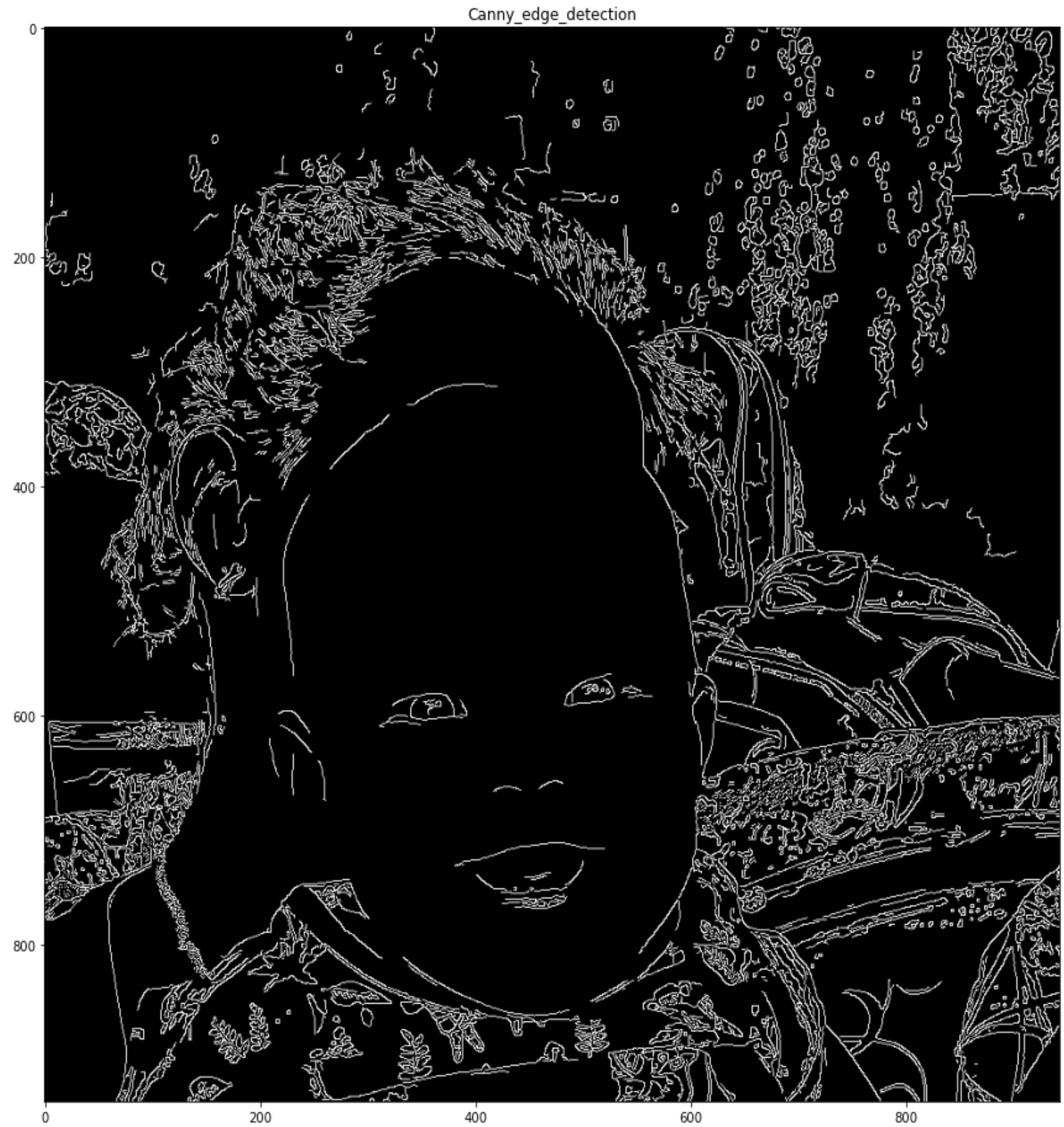
Napomena: Ovde koristimo ugrađene funkcije iz paketa OpenCV.
(link: https://docs.opencv.org/master/index.html)

```python
import cv2
import matplotlib.pyplot as plt

# Open the image
img = cv2.imread('test1.jpg')

# Apply Canny
edges = cv2.Canny(img, 100, 200, 3, L2gradient=True)

plt.figure(figsize = (20, 15))
plt.title('Canny_edge_detection')
plt.imsave('Canny_edges.png', edges, cmap='gray', format='png')
plt.imshow(edges, cmap='gray')
plt.show()
```

Slika 4.10: Kanijev (Canny) filter: kod

OpenCV stavlja sve gore navedene korake u jednu funkciju, cv.Canny().
Za tu funkciju su nam potrebna četiri inputa: slika, niži prag, viši prag, veličina Sobel kernela (po difoltu je 3) i jednačinu za pronalaženje magnitude gradijenta.

Na Slici 4.11 možemo videti rezultat Kanijevog filtera implementiranog na slici.



Slika 4.11: Slika posle Kanijevog (Canny) filtera

Zaključak

Furijeovom transformacijom možemo videti koje frekvencije postoje u posmatranom signalu, ali ne i u kom vremenu se te promene javljaju. Uz pomoć kratkotrajne Furijeove transformacije, signal je moguće lokalizovati u vremensko-frekvencijskoj ravni. Prednost kratkotrajne Furijeove transformacije je moćunost posmatranja frekvencije signala po delovima, takozvanim prozorima čija je mana nemogućnost prilagođavanja širine. Tako dolazimo do malotalasne ili vejvlet (eng. wavelet) transformacije koja omogućava usklađenost veličine prozora sa frekvencijom i tako dobijamo sve potrebne informacije o signalu.
Savremene metode multirezolucijske detekcije ivica bazirane su na wavelet transformaciji, koja omogućava multirezolucijsku predstavu slike. Metode koriste tu osobinu wavelet transformacije da bi se istovremeno analizirala struktura slike na malim i velikim skalama, i da bi se kombinovale informacije o ivicama sa različitih skala.
Osnovu ovog rada čini detekcija ivica na slici. Iako je za detekciju najvećeg broja ivica u slici neophodno analizirati sliku na nekoliko skala, klasični detektori ivica ne sadrže niskopropusni filtar za uklanjanje šuma, već se izvršava samo diferenciranje slike (detektori bazirani na gradijentu, Sobel). Canny detektor je baziran na Gausovom filteru.
Primena detekcije ivica na slici je pre svega izložena kroz navedenih operatora i dodatno implementirana u Python-u pomoću kodova tih operatora.

Bibliografija

[1] Stephane Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, The Sparse Way Burlington, MA, 2009 by Elsevier Inc.

[2] Nenad Teofanov, Predavanja iz primenjene analize, Zavod za udžbenike Beograd, 2011.

[3] Jun Li, Thesis, Wavelet Approach to Edge Detection, Huntsville, Texas, August, 2003.

[4] Maria Cristina Pereyra, Lesley A. Ward Harmonic Analysis From Fourier to Wavelets, USA, 2012. by the American Mathematical Society

[5] Maja Ljubišić, Master rad, Teorija malih talasa sa nekim primenama u ekonomiji, Novi Sad, 2018.

[6] Slađana Mandić, Master rad, Primena malih talasa i unakrsne malotalasne analize u ekonomiji, Novi Sad, 2020.

[7] David F. Walnut, An introduction to Wavelet Analysis, Birkhäuser Boston, 2002.

[8] dr L. Stefanović, mr B. Ranđelović, mr M. Matejić, Teorija redova za studente tehničkih nauka, Niš, 2013.

Biografija

Marijana Mišić je rođena 8. septembra 1994. godine u Somboru. Završila je Osnovnu školu "Bora Stanković"u Karavukovu, kao nosilac Vukove diplome. Zatim je upisala saobraćajnu školu "Pinki", smer tehničar PTT saobraćaja, u Novom Sadu, koju je 2013. godine završila sa odličnim uspehom.
Iste godine upisala je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika finansija. Takođe, upisala je master studije na istom fakultetu 2017. godine.
Predviđene ispite sa master studija položila je 2019. godine i time stekla uslov za odbranu master rada. Ubrzo nakon toga, počinje praksu u firmi Synechron, a zatim je zapošljena iste godine kao test konsultant. Posle dve godine radnog iskustva pronalazi vreme za pisanje master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Marijana Mišić
AU
Mentor: dr Nenad Teofanov
ME
Naslov rada: Malotalasna transformacija i višeskalna detekcija ivica
NR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s / en
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2021
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad,
MA
Fizički opis rada: (5/67/8/0/18/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Teorija malih talasa
ND
Ključne reči: transformacija, signal, vejvlet, filter, multirezolucija, dekompozicija, ivica, slika, detekcija, operator
PO, UDK
Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Ovaj rad se bavi detekcijom ivica na slici pomoću malotalasne transformacije. U prvom delu rada navode se razni tipovi koncergencije i njihove povezanosti. U drugom delu rada uvodi se pojam malih talasa (vejvleta) i kontinualne i diskretne vejvlet transformacije. Povezuju se malotalasna transformacija sa Furijeovom i kratkotrajnom Furijeovom transformacijom i ističu se njihove razlike. Zatim je objašnjen koncept multirezolucijske analize. U trećem delu rada objašnjena je Lipšicova regularnost. Poslednja i suštinska glava objašnjava pojam ivica i detekcija ivica. Navode se razni operatori pomoću kojih se detektuju ivice, a detaljno se objašnjava Sobel i Canny operator. Primena detekcije ivica na slici je pre svega izložena kroz navedenih operatora i dodatno implementirana u Python-u pomoću kodova tih operatora.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 15.08.2019.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
ČK
Predsednik: dr Ljiljana Teofanov , redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu
Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Milica Žigić , vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master's thesis
CC
Author: Marijana Mišić
AU
Mentor: dr Nenad Teofanov
MN
Title: Wavelet transform modulus maxima and multiscale edge detection
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: s / en
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2021
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad,
PP
Physical description: (5/67/8/0/18/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Wavelet theory
SD
Subject/Key words: transform, signal, wavelet, filter, multiresolution, decomposition, edge, image, detection, operator
SKW
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: This master thesis is about edge detection by using wavelet transform. The first part of the thesis presents the notion of different types of convergence and their connection. In the second part of the thesis, wavelet, continuous and discrete wavelet transform are introduced. The relation between wavelet transform, Fourier and Short-time Fourier transform is established. Further, the concept of multiresolution is explained. In the third part of this thesis, Lipschitz regulatiry is explained. Tha last and essential part of the thesis explains the concept of egde and edge detection. The various operators which are used for egde detection are listed, and the Sobel and Canny operator is explained in detail. Usage of edge detection is exposed through the above mention operators and additionally, implementation of operations are presented by Python's code.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 15.08.2019.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: dr Ljiljana Teofanov, full professor at Faculty of Technical Sciences in Novi Sad
Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Milica Žigić, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad