UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Filip Blašković

Teorema Borsuk–Ulama i primene

- Master rad -

Mentor:
dr Bojan Bašić

Novi Sad, 2021.

Sadržaj

Predgovor

Glavna tema ovog rada je teorema Borsuk–Ulama, jedna od najpoznatijih teorema u algebarskoj topologiji. Sama formulacija teoreme pripisuje se Stanislavu Ulamu, poljskom matematičaru, pripadniku lavovske matematičke škole čiji su se članovi tridesetih i četrdesetih godina XX veka okupljali u čuvenom Škotskom kafeu u Lavovu (tadašnja Poljska, danas Ukrajina) kako bi diskutovali o različitim problemima, pre svega iz oblasti topologije i funkcionalne analize. U pomenutom kafeu Ulam je postavio hipotezu koju će 1933. godine dokazati njegov kolega i sunarodnik Karol Borsuk u radu [6] i koja tada dobija danas dobro poznat naziv: teorema Borsuk–Ulama.

Zahvaljujući jednostavnoj formulaciji, slikovitoj interpretaciji i širokoj primenljivosti nije neuobičajeno to što je velik broj radova posvećen istraživanju posledica teoreme Borsuk–Ulama i mogućnostima njene primene na rešavanje najrazličitijih problema u matematici. Naime, u svrhu slikovitog prikaza teoreme poslužimo se analogijom iz svakodnevnog života. Zamislimo da smo izduvali gumenu loptu za plažu i „spljeskali” je tako da leži u ravni. Tada sigurno postoje dve tačke na površi lopte koje leže jedna na drugoj, a koje su bile dijametralno suprotne (antipodalne) dok je lopta bila naduvana. Drugo popularno tumačenje je da u svakom trenutku na Zemlji postoje dve lokacije koje se nalaze na dijametralno suprotnim krajevima planete takve da imaju istu temperaturu i vazdušni pritisak (ili jednaka bilo koja druga dva meteorološka parametra pod pretpostavkom da se neprekidno menjaju).

Slika 1: Škotski kafe u Lavovu.

Naposletku, iskoristio bih ovu priliku da se zahvalim mentoru dr Bojanu Bašiću na pomoći oko odabira teme i izrade master rada, ali pre svega na podršci, savetima i poverenju koje mi je ukazivao tokom čitavih studija. Takođe, zahvalio bih se dr Rozaliji Madaras Silađi i dr Borisu Šobotu na tome što su pristali da budu članovi komisije i korisnim sugestijama. Veliku zahvalnost dugujem i prijateljima i porodici koji su učinili da mi period studiranja ostane u najlepšem sećanju. Posebno bih izdvojio sestru Brankicu koja je bila tu za mene u svakom trenutku kad bih osetio da mi je potreban savet i mnogo mi pomogla da lakše prebrodim sve prepreke na koje sam nailazio tokom studiranja.

Najveću zahvalnost, međutim, dugujem roditeljima Vesni i Miroslavu na svemu što su mi pružili i omogućili u životu. Bez njihove pomoći i bezuslovne podrške sigurno ne bih postigao ovaj uspeh.

Filip Blašković

1 Osnovni pojmovi

Na samom početku uvedimo neke oznake koje ćemo koristiti u nastavku rada. Tačke prostora $\mathbb{R}^n$ ćemo označavati podebljanim slovima $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, ...$ (specijalno, tačke skupa $\mathbb{R}$ označavamo i sa $x, y, z, ...$). Sa S^n označavamo jediničnu sferu u prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, a sa B^n zatvorenu jediničnu loptu u prostoru $\mathbb{R}^n$ u euklidskoj normi $\|\cdot\|$ ukoliko nije drugačije naznačeno. Ukoliko su topološki prostori X i Y homeomorfni pišemo $X \cong Y$. Za $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ i F zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$ sa $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, F) := \min\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| : \boldsymbol{a} \in F\}$ označavamo funkciju rastojanja tačke $\boldsymbol{x}$ od skupa F. Dijametar skupa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definišemo kao $\sup\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A\}$. Sa $[n]$ kraće označavamo skup $\{1, 2, ..., n\}$. Za skup $P \in \mathbb{R}^n$ sa $\operatorname{conv}(P)$ označavamo konveksni omotač skupa P, odnosno najmanji (u smislu inkluzije) konveksni skup C takav da $P \subseteq C$, odnosno presek svih konveksnih skupova C takvih da $P \subseteq C$.

U nastavku dajemo pregled osnovnih definicija i tvrđenja o simpleksima i srodnim pojmovima što će nam biti potrebno u ostatku rada. Tvrđenja ovde navodimo bez dokaza, a oni se uz naredne definicije mogu pronaći na primer u [18] i [25]. Za više detalja o konveksnim politopima pogledati [12] i [31].

Definicija 1.1. Konveksni politop P je konveksni omotač konačnog skupa tačaka u $\mathbb{R}^m$. Ekvivalentno, konveksni politop je presek konačno mnogo zatvorenih poluprostora u $\mathbb{R}^m$ koji je pritom ograničen (u smislu da ne sadrži polupravu $\{\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} : t \geq 0\}$ za sve $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$). Strane politopa P čine sam P i neprazni preseci $P \cap h$ gde je h hiperravan takva da se čitav P nalazi sa jedne strane h (ovaj drugi tip strana nazivamo pravim stranama). Unija pravih strana konveksnog politopa P je njegov rub u oznaci ∂P.

Definicija 1.2. Skup $\{\boldsymbol{a}_0, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ tačaka u prostoru $\mathbb{R}^m$ je u opštem položaju ako za proizvoljne realne skalare $\lambda_0, ..., \lambda_n$ važi

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \boldsymbol{a}_i = 0 \text{ i } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 \Rightarrow (\forall i)\lambda_i = 0.$$

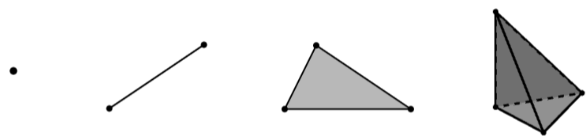
Ekvivalentno, skup tačaka u $\mathbb{R}^m$ je u opštem položaju ako i samo ako su vektori $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_0, ..., \boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_0$ linearno nezavisni.

Definicija 1.3. Neka je $\boldsymbol{a}_0, ..., \boldsymbol{a}_n$ niz tačaka u $\mathbb{R}^m$ u opštem položaju.

Geometrijski n-simpleks određen tačkama $\boldsymbol{a}_0, ..., \boldsymbol{a}_n$ je skup

$$\sigma^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \text{ pri čemu } (\forall i)\lambda_i \geq 0\}.$$

Koristimo i oznaku $\sigma^n = (\boldsymbol{a}_0, ..., \boldsymbol{a}_n)$. Primetimo da, ekvivalentno, simpleks σ^n možemo definisati kao konveksni omotač skupa od $n+1$ tačaka u opštem položaju u $\mathbb{R}^m$. Tačke $\boldsymbol{a}_0, ..., \boldsymbol{a}_n$ nazivaju se temena simpleksa σ^n, a broj n je njegova dimenzija, u oznaci $\dim(\sigma^n) := n$. Skup temena simpleksa σ^n označavamo sa $V(\sigma^n)$. Brojevi $\lambda_0, ..., \lambda_n$ su baricentričke koordinate tačke $\boldsymbol{x}$. Specijalno, prazan skup $\emptyset$ smatramo simpleksom koji nema definisanu dimenziju. Takođe, ukoliko nije bitno naglasiti dimenziju simpleksa koristimo i oznaku σ.



Slika 2: Primeri geometrijskih $0-, 1-, 2-$ i $3-$ simpleksa.

Lema 1.4. *Neka je σ simpleks. Baricentričke koordinate tačke $\boldsymbol{x} \in \sigma$ su jedinstvene.* $\square$

Definicija 1.5. Neka je σ simpleks. Konveksni omotač proizvoljnog skupa $A \subseteq V(\sigma)$ naziva se strana simpleksa σ. Strana simpleksa je i sama simpleks dimenzije $k = |A| - 1$ i nazivamo je još i k-strana. $(\dim(\sigma) - 1)$-stranu simpleksa σ nazivamo i lice simpleksa σ. Ako je simpleks τ strana simpleksa σ, pišemo $\tau < \sigma$. Unutrašnjost simpleksa $\sigma = (\boldsymbol{a}_0, ..., \boldsymbol{a}_n)$ je skup

$$\text{int}(\sigma) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \boldsymbol{a}_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ i za svako } i \in [n] \text{ je } \lambda_i > 0\}.$$

Skup $\partial\sigma := \sigma \setminus \text{int}(\sigma)$ nazivamo rub simpleksa σ.

Definicija 1.6. Geometrijski simplicijalni kompleks Δ u $\mathbb{R}^m$ je konačna familija simpleksa u $\mathbb{R}^m$ takva da:

(SK1) svaka strana simpleksa iz familije Δ i sama je simpleks te familije, odnosno

$$\tau < \sigma \in \Delta \Rightarrow \tau \in \Delta;$$

(SK2) presek svaka dva simpleksa iz Δ je prazan ili je strana svakog od njih, odnosno

$$\tau, \sigma \in \Delta \Rightarrow \tau \cap \sigma = \emptyset \quad \vee \quad \exists \rho < \tau, \sigma \text{ tako da } \tau \cap \sigma = \rho.$$

U nastavku ćemo koristiti i termine geometrijski kompleks ili samo kompleks. Skup temena kompleksa Δ u oznaci $V(\Delta)$ je unija skupa temena svih simpleksa iz Δ. Dimenzija geometrijskog simplicijalnog kompleksa Δ definiše se kao

$$\dim(\Delta) := \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in \Delta\}.$$

Unija svih simpleksa simplicijalnog kompleksa Δ je poliedar kompleksa Δ i označava se sa $\|\Delta\|$.

Definicija 1.7. Potfamilija Λ simpleksa simplicijalnog kompleksa Δ koja zadovoljava uslove iz definicije 1.6 naziva se potkompleks kompleksa Δ (odnosno i sama kolekcija simpleksa Λ je simplicijalni kompleks).

Lema 1.8. *Neka je Δ simplicijalni kompleks. Za svaku tačku $\boldsymbol{x} \in \Delta$ postoji jedinstveni simpleks $\sigma \in \Delta$ takav da je $\boldsymbol{x} \in int(\sigma)$. Za takav simpleks koristimo oznaku* $\mathrm{supp}(\boldsymbol{x})$ *i nazivamo ga nosač tačke $\boldsymbol{x}$.* □

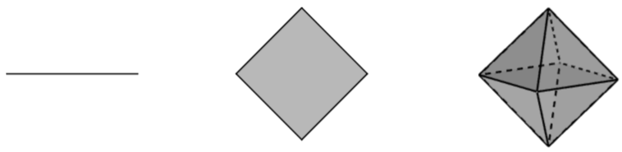
Lema 1.9. *Skup svih strana simpleksa σ je simplicijalni kompleks.* □

Definicija 1.10. Neka je X topološki prostor. Simplicijalni kompleks Δ takav da je $X \cong \|\Delta\|$ (gde je $\|\Delta\|$ posmatrano kao potprostor od $\mathbb{R}^m$) naziva se triangulacija prostora X.

Definicija 1.11. Kažemo da je konveksni politop P simplicijalni ako su sve njegove prave strane simpleksi.

Skup pravih strana svakog simplicijalnog politopa P čini simplicijalni kompleks. Rub d-dimenzionalnog konveksnog politopa P je homeomorfan sferi S^{d-1} pa nam prethodna definicija daje različite triangulacije sfere. Uvedimo posebnu klasu politopa koji će nam biti od koristi u nastavku rada.

Definicija 1.12. Neka je $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_d\}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^d$. Tada konveksni omotač skupa $\{\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_d, -\boldsymbol{e}_d\}$ nazivamo d-dimenzionalni hiperoktaedar (slika 3).



Slika 3: Hiperoktaedri dimenzija $1, 2$ i 3.

Uvedimo sada apstraktnu (kombinatornu) verziju simplicijalnog kompleksa. Naredna definicija i definicija 1.6 opisuju suštinski isti matematički objekat, a u zavisnosti od potrebe ćemo u nastavku posmatrati simplicijalni kompleks u svetlu jedne ili druge definicije.

Definicija 1.13. Apstraktni simplicijalni kompleks je uređen par (V, K) gde je V neki skup, a $K \subseteq \mathcal{P}(V)$ familija podskupova od V takva da važi

$$F \in K \ \wedge \ G \subseteq F \Rightarrow G \in K.$$

U nastavku ćemo koristiti i termin apstraktni kompleks. Skupovi iz K nazivaju se apstraktni simpleksi, a dimenzija apstraktnog kompleksa K se definiše kao $\dim(K) := \max\{|F| - 1 : F \in K\}$. Pretpostavljamo da je $V = \bigcup K$, pa umesto oznake (V, K) koristimo samo oznaku K, a $V(K)$ je odgovarajući skup temena.

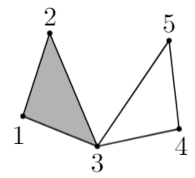
Jasno je da svakom geometrijskom simplicijalnom kompleksu Δ odgovara apstraktni K nad skupom temena svih simpleksa iz Δ. Skupovi iz familije K su tačno skupovi temena simpleksa iz Δ. Tako geometrijskom simplicijalnom kompleksu sa slike 4 odgovara apstraktni kompleks

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\},$$
$$\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Za poliedar kompleksa Δ se može reći i da je poliedar odgovarajućeg apstraktnog kompleksa K.

Takođe, svaki apstraktni simplicijalni kompleks (V, K) ima svoju geometrijsku reprezentaciju. Neka je $n := |V - 1|$ i neka je σ^n n-dimenzionalni simpleks. Definišemo potkompleks kompleksa σ^n (lema 1.9) sa $\Delta := \{\mathrm{conv}(F) : F \in K\}$.

Definicija 1.14. Neka su K i L apstraktni simplicijalni kompleksi. Simplicijalno preslikavanje iz K u L je preslikavanje $f : V(K) \to V(L)$



Slika 4: Geometrijski simplicijalni kompleks kom odgovara dati apstraktni kompleks.

koje preslikava simplekse na simplekse, odnosno $f(F) \in L$ za sve $F \in K$. Bijektivno simplicijalno preslikavanje čiji inverz je takođe simplicijalno preslikavanje je izomorfizam između apstraktnih simplicijalnih kompleksa. Ako on postoji između kompleksa K i L pišemo $K \cong L$.

Ovako definisanom preslikavanju f između simplicijalnih kompleksa možemo prirodno pridružiti odgovarajuće preslikavanje $\|f\|$ između njihovih poliedara (i odgovarajućih geometrijskih kompleksa). Ideja je da dodefinišemo f na svakom simpleksu na sledeći način.

Definicija 1.15. Neka su Δ_1 i Δ_2 geometrijski kompleksi, a K_1 i K_2 odgovaraući apstraktni kompleksi. Neka je $f : V(K_1) \to V(K_2)$ simplicijalno preslikavanje iz kompleksa K_1 u K_2. Tada definišemo preslikavanje

$$\|f\| : \|\Delta_1\| \to \|\Delta_2\|$$

tako što proširimo f sa temena na unutrašnjosti simpleksa u Δ_1. Naime, za svako $\boldsymbol{x} \in \|\Delta_1\|$ postoji nosač $\sigma = \text{supp}(\boldsymbol{x}) \in \Delta_1$. Neka je $\sigma = (\boldsymbol{v}_0, ..., \boldsymbol{v}_k)$ i $\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ gde je $\alpha_1, ..., \alpha_k > 0$ i $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$. Sada definišemo $\|f\|(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f(\boldsymbol{v}_i)$.

Teorema 1.16. *Neka je f simplicijalno preslikavanje. Tada je $\|f\| : \|\Delta_1\| \to \|\Delta_2\|$ neprekidno. Ako je f injektivno, tada je i $\|f\|$ injektivno. Ako je f izomorfizam, tada je $\|f\|$ homeomorfizam.* □

Napomena: triangulacija topološkog prostora X iz definicije 1.10 se može posmatrati i kao apstraktni simplicijalni kompleks. U nastavku simplicijalne komplekse podrazumevamo u apstraktnom smislu ako koristimo latinične oznake $K, L, M, ...$ (ukoliko nije drugačije naznačeno), a odgovarajuće poliedre označavaćemo sa $\|K\|$ za apstraktni kompleks K (definicija ima smisla do na homeomorfizam imajući u vidu teoremu 1.16). Međutim, treba imati u vidu da granica između geometrijskih i apstraktnih kompleksa nije uvek striktna što je i opravdano budući da se radi o istom matematičkom objektu posmatranom iz dva aspekta. Stoga, ukoliko govorimo o geometrijskim osobinama apstraktnih kompleksa iz konteksta će biti jasno o kojim geometrijskim reprezentacijama je reč čime izbegavamo komplikovan zapis koji bi nastao uvođenjem velikog broja oznaka.

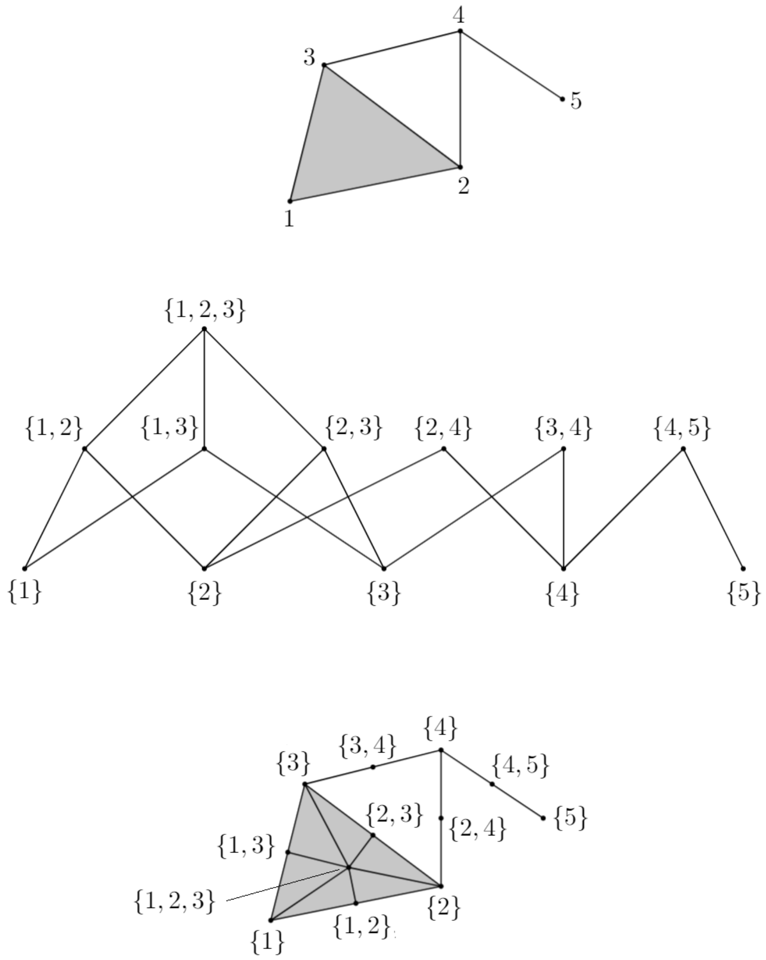
Definicija 1.17. Neka je $(P, \leq)$ parcijalno uređen skup. Sa $\Delta(P)$ označimo simplicijalni kompleks čija su temena elementi skupa P i čiji simpleksi su svi lanci iz $(P, \leq)$.

Definicija 1.18. Neka je K simplicijalni kompleks. Tada sa $P(K)$ označavamo parcijalno uređen skup čiji su elementi svi neprazni simpleksi iz K, a uređenje inkluzija.

Simplicijalnom kompleksu sa slike 5 (gore) odgovara dati parcijalno uređeni skup (sredina), dok njemu odgovara dati kompleks (dole).

Definicija 1.19. Neka je K simplicijalni kompleks. Simplicijalni kompleks $\mathrm{sd}(K) := \Delta(P(K))$ naziva se (prva) baricentrička podela kompleksa K.

Dakle, temena kompleksa $\mathrm{sd}(K)$ su neprazni simpleksi iz K, a simpleksi kompleksa $\mathrm{sd}(K)$ su svi lanci simpleksa iz K uređenih relacijom inkluzije. Geometrijski (i neformalno) gledano, kompleks $\mathrm{sd}(K)$ dobijamo tako što za svakom simpleksu iz Δ docrtamo težiste (baricentar) kao na slici 5 (dole) i povežemo ih na odgovarajući način. Takođe, važi da su poliedri $\|K\|$ i $\|\mathrm{sd}(K)\|$ homeomorfni. Baricentrička podela simplicijalnog kompleksa služi konstruisanju proizvoljno fine triangulacije nekog poliedra. Sa primenom ovog metoda susrešćemo se u nastavku rada.



Slika 5: Ilustracija primera uz definicije 1.17 i 1.18.

2 Teorema Borsuk–Ulama i njeni ekvivalenti

Teorema 2.1 (Borsuk–Ulam)**.** *Neka je $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ neprekidno preslikavanje gde je $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji $\boldsymbol{x} \in S^n$ tako da $f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$.*

Pre nego što dokažemo ovu teoremu, u nastavku dajemo nekoliko ekvivalentnih tvrđenja teoremi 2.1. Napomenimo da se rezultati iz ove sekcije mogu pronaći u [26].

Definicija 2.2. Za preslikavanje f sa domenom S^n kažemo da je antipodalno ako je neprekidno i $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ za sve $\boldsymbol{x} \in S^n$.

Teorema 2.3. *Za svako $n \geq 0$ sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(BU1) *Teorema 2.1.*

(BU2) *Za svako antipodalno preslikavanje $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ postoji $\boldsymbol{x} \in S^n$ tako da $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.*

(BU3) *Ne postoji antipodalno preslikavanje $f : S^n \to S^{n-1}$.*

(BU4) *Ne postoji neprekidno preslikavanje $f : B^n \to S^{n-1}$ koje je antipodalno na rubu, odnosno takvo da zadovoljava $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ za sve $\boldsymbol{x} \in \partial B^n$.*

(LjŠ-z) [Ljusternik-Šnireljman] *Neka su $F_1, ..., F_{n+1}$ zatvoreni skupovi takvi da pokrivaju sferu S^n. Tada postoji bar jedan od njih koji sadrži par antipodalnih tačaka sa sfere. To jest, $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$ za neko i, $1 \leq i \leq n+1$.*

(LjŠ-o) *Neka su $U_1, ..., U_{n+1}$ otvoreni skupovi takvi da pokrivaju sferu S^n. Tada postoji bar jedan od njih koji sadrži par antipodalnih tačaka sa sfere. To jest, $U_i \cap (-U_i) \neq \emptyset$ za neko i, $1 \leq i \leq n+1$.*

Dokaz. Dokaz izvodimo po sledećoj šemi.

$$\begin{tikzcd}
\text{(BU1)} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \text{(BU2)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(BU3)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(BU4)} \\
& \text{(LjŠ-z)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & & \\
& \text{(LjŠ-o)} & &
\end{tikzcd}$$

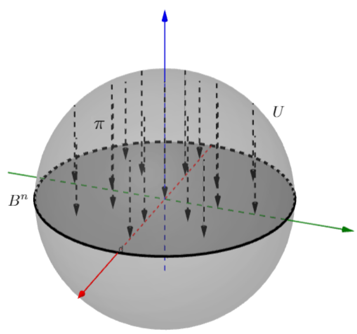
(BU1) $\Rightarrow$ (BU2). Jasno, jer iz teoreme 2.1 i definicije 2.2 dobijamo da postoji $\boldsymbol{x} \in S^n$ za koje je $f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$ i $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$, pa je $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

(BU2) $\Rightarrow$ (BU1). Definišimo antipodalno pomoćno preslikavanje $g(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) - f(-\boldsymbol{x})$ i na njega primenimo (BU2).

(BU2) $\Rightarrow$ (BU3). Ako bi postojalo antipodalno preslikavanje iz (BU3), ono bi bilo različito od nule za sve $\boldsymbol{x} \in S^n$, što je kontradikcija sa (BU2).

(BU3) $\Rightarrow$ (BU2). Pretpostavimo da je $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ antipodalno preslikavanje svuda različito od nule. Tada je preslikavanje $g : S^n \to S^{n-1}$ dato sa $g(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x})/\|f(\boldsymbol{x})\|$ antipodalno, što je kontradikcija sa (BU3).

(BU3) $\Rightarrow$ (BU4) Primetimo da je projekcija $\pi : (x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto (x_1, ..., x_n)$ homeomorfizam između gornje hemisfere $U = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$ sfere S^n i lopte B^n.



Slika 6: Projekcija π gornje hemisfere U sfere S^n na B^n.

Pretpostavimo da postoji neprekidno preslikavanje $g : B^n \to S^{n-1}$ koje je antipodalno na rubu ∂B^n. Definišimo preslikavanje $f : S^n \to S^{n-1}$ sa $f(\boldsymbol{x}) := g(\pi(\boldsymbol{x}))$ i $f(-\boldsymbol{x}) := -g(\pi(\boldsymbol{x}))$ za $\boldsymbol{x} \in U$. Na ovaj način definisali smo preslikavanje f na čitavoj sferi S^n (primetimo da je definicija smislena i za tačke sa ruba ∂B^n jer je g antipodalno preslikavanje na ∂B^n). Kako je f neprekidno na gornjoj i donjoj zatvorenoj hemisferi, to je neprekidno i na čitavoj S^n (videti teoremu 2.11 u [18]), a na osnovu definicije i antipodalno, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom (BU3).

(BU4) $\Rightarrow$ (BU3). Pretpostavimo da postoji antipodalno preslikavanje $f : S^n \to S^{n-1}$. Tada bi preslikavanje $g : B^n \to S^{n-1}$ definisano sa $g(\boldsymbol{x}) := f(\pi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ bilo neprekidno na B^n i antipodalno na ∂B^n, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom (BU4).

(BU1) $\Rightarrow$ (LjŠ-z). Neka je $F_1, ..., F_{n+1}$ zatvoren pokrivač sfere S^n. Definišemo funkciju $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ sa $f(\boldsymbol{x}) = (\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, F_1), ..., \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, F_n))$. Ovo preslikavanje je neprekidno pa na osnovu (BU1) postoji $\boldsymbol{x} \in S^n$ tako da $f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$. Ako postoji $i \in [n]$ tako da je $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ onda $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in F_i$. U suprotnom $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in F_{n+1}$.

(LjŠ-z) $\Rightarrow$ (BU3). Primetimo da postoji zatvoren pokrivač $F_1, ..., F_{n+1}$ sfere S^{n-1} takav da nijedan od skupova $F_1, ..., F_{n+1}$ ne sadrži par antipodalnih tačaka. Naime, ako posmatramo n-simpleks σ^n u $\mathbb{R}^n$ (pri čemu pretpostavimo da $\mathbf{0} \in \mathrm{int}(\sigma^n)$), svaku njegovu $(n-1)$-stranu (kojih ima $n+1$) projektujemo na sferu S^{n-1}. Ako bi postojalo antipodalno preslikavanje $f : S^n \to S^{n-1}$, skupovi $f^{-1}(F_1), ..., f^{-1}(F_{n+1})$ bi činili zatvoren pokrivač sfere S^n takav da ne postoji $\boldsymbol{x} \in S^n$ za koje $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in f^{-1}(F_i)$ za neko i, što je u kontradikciji sa (LjŠ-z).

(LjŠ-z) $\Rightarrow$ (LjŠ-o). Neka je $U_1, ..., U_{n+1}$ otvoren pokrivač sfere S^n. Tada postoji $F_1, ..., F_{n+1}$ zatvoren pokrivač sfere S^n takav da je $F_i \subseteq U_i$ za svako i. To je tačno jer za svako $\boldsymbol{x} \in S^n$ postoji njegova otvorena okolina $V_{\boldsymbol{x}}$ čije je zatvorenje sadržano u nekom U_i. Posmatrajući pokrivač koji se sastoji od svih $\overline{V_{\boldsymbol{x}}}$, iz kompaktnosti sfere S^n dobijamo da postoji konačan potpokrivač, pa i gore opisani pokrivač sfere S^n (koji dobijamo tako što grupišemo sve $\overline{V_{\boldsymbol{x}}}$ iz istih U_i gde $1 \leq i \leq n+1$ i tako dobijene kolekcije zamenimo njihovim unijama). Tvrđenje sledi na osnovu (LjŠ-z).

(LjŠ-o) $\Rightarrow$ (LjŠ-z). Neka je $F_1, ..., F_{n+1}$ zatvoren pokrivač sfere S^n.

Pretpostavimo da je (LjŠ-z) netačno. U tom slučaju, kako je skupova F_i konačno mnogo i kako je dijametar svakog od njih strogo manji od 2, postoji $\varepsilon_0 > 0$ takvo da je dijametar svih F_i najviše $2 - \varepsilon_0$. Za svako $i \in [n+1]$ definišimo otvoren skup $U_i^{\varepsilon_0/3} := \{\boldsymbol{x} \in S^n : \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, F_i) < \varepsilon_0/3\}$. Skupovi $U_i^{\varepsilon_0/3}$ za $1 \le i \le n+1$ čine otvoren pokrivač sfere S^n, međutim kako je i njihov dijametar strogo manji od 2 dobijamo da ne postoje $1 \le i \le n+1$ i $\boldsymbol{x} \in S^n$ takvo da $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in U_i^{\varepsilon_0/3}$ što je u kontradikciji sa (LjŠ-o). $\square$

Napomena: Svoju teoremu su Ljusternik i Šnireljman dokazali 1930. godine u [24], dok je, kao što je već pomenuto, dokaz Borsuk–Ulama usledio tek 1933. Međutim, kao što je pokazano, ispostavlja se da su tvrđenja ekvivalentna. U ovom radu daćemo dokaz verzije (BU4) izveden primenjujući pomoćno tvrđenje poznato kao Takerova lema.

Lema 2.4 (Taker)**.** *Neka je T triangulacija lopte B^n takva da je na rubu antipodalno simetrična (tj. takva da ako je $\sigma \subseteq S^{n-1} = \partial B^n$ simpleks takav da $\sigma \in T$, tada i $-\sigma \in T$). Dodelimo temenima iz T oznake na sledeći način*

$$\lambda : V(T) \to \{-1, +1, -2, +2, ..., -n, +n\}$$

pri čemu važi $\lambda(\boldsymbol{v}) = -\lambda(-\boldsymbol{v})$ za sve $\boldsymbol{v} \in S^{n-1}$ (i ovde koristimo termin da je λ na rubu antipodalno). Tada u triangulaciji T postoji 1-simpleks čija su temena označena sa k i $-k$ za neko $k \in [n]$.

U nastavku ćemo dokazati lemu 2.4. Pre dokaza navedimo još jednu ekvivalentnu verziju leme 2.4, što će nam kasnije biti od kroisti. Najpre navodimo potrebnu definiciju.

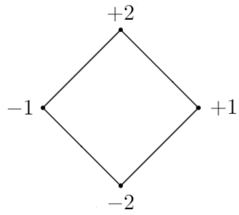
Definicija 2.5. Označimo sa $\diamondsuit^{n-1}$ apstraktni simplicijalni kompleks sa skupom temena $V(\diamondsuit^{n-1}) = \{+1, -1, ..., +n, -n\}$ pri čemu je $F \subseteq V(\diamondsuit^{n-1})$ simpleks iz $\diamondsuit^{n-1}$ kad god važi da ne postoji $i \in [n]$ takvo da $i, -i \in F$.

Ovako definisan simplicijalni kompleks se u geometrijskom smislu zapravo može posmatrati kao rub n-dimenzionalnog hiperoktaedra (def. 1.12). Jasno, važi $|| \diamondsuit^{n-1} || \cong S^{n-1}$.

Lema 2.6 (Taker)**.** *Neka je T triangulacija lopte B^n takva da je na rubu antipodalno simetrična. Tada ne postoji simplicijalno preslikavanje*

$$\lambda : V(T) \to V(\diamondsuit^{n-1})$$

koje je antipodalno na rubu S^{n-1}.



Slika 7: Primer kompleksa $\diamondsuit^1$.

Drugu verziju Takerove leme smo formulisali kako bismo problem dokazivanja teoreme Borsuk–Ulama preveli na diskretan oblik čiji dokaz se zasniva na kombinatornim metodama, pri čemu ćemo pratiti plan dokaza dat sledećim nizom ekvivalencija i dokazom Takerove leme u verziji 2.4 ujedno dokazati i teoremu Borsuk–Ulama (pri čemu ćemo na triangulaciju T nametnuti još jedan uslov, ali bez uticaja na opštost što ćemo kasnije prokomentarisati).

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\text{Taker}\\ \text{(verzija 2.4)}\end{array} & \Longleftrightarrow & \begin{array}{c}\text{Taker}\\ \text{(verzija 2.6)}\end{array} \\ \searrow\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\nearrow \\ & \text{(BU4)} & \end{array}$$

Jasno je da su verzije 2.4 i 2.6 ekvivalentne. Naime, ako bi za datu, na rubu antipodalno simetričnu triangulaciju lopte B^n postojalo simplicijalno i na rubu antipodalno preslikavanje $\lambda : V(T) \to V(\diamondsuit^{n-1}) = \{+1, -1, ..., +n, -n\}$, tada bismo na osnovu leme 2.4 dobili da postoji simpleks iz T čija je slika $\{-i, i\}$ za neko $i \in [n]$. Međutim, $\{-i, i\} \notin \diamondsuit^{n-1}$ što je kontradikcija sa činjenicom da je λ simplicijalno. Obratno, ako u triangulaciji T iz 2.4 ne bi postojao simpleks $\{-i, i\}$ za neko $i \in [n]$ tada bi preslikavanje λ bilo na rubu antipodalno i simplicijalno, što je kontradikcija sa tvrđenjem 2.6.

Teorema 2.7. *Tvrđenja teoreme Borsuk–Ulama (verzije* (BU4)*) i Takerove leme su ekvivalentna.*

Dokaz.

(BU4)$\Rightarrow$(lema 2.6). Primetimo da, ako bi za datu triangulaciju T lopte B^n postojalo na rubu S^{n-1} antipodalno simplicijalno preslikavanje

$\lambda : V(T) \to V(\Diamond^{n-1})$, onda bi preslikavanje $\|\lambda\| : B^n \to S^{n-1}$ bilo neprekidno, na rubu antipodalno preslikavanje (teorema 1.16), što je kontradikcija sa (BU4).

(lema 2.4)$\Rightarrow$(BU4). Pretpostavimo da postoji neprekidno, na rubu antipodalno preslikavanje $f : B^n \to S^{n-1}$. Konstruisaćemo pogodnu, na rubu antipodalno simetričnu triangulaciju T lopte B^n i preslikavanje λ sa osobinama iz formulacije leme 2.4, odakle ćemo doći do kontradikcije.

Definišimo $\varepsilon := 1/\sqrt{n}$. Primetimo da za svako $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n) \in S^{n-1}$ postoji $i \in [n]$ tako da je $|y_i| \geq \varepsilon$. Za $\boldsymbol{v} \in B^n$ definišimo $\kappa(\boldsymbol{v}) := \min\{i : |f(\boldsymbol{v})_i| \geq \varepsilon\}$, a zatim $\lambda : V(T) \to \{-1, +1, -2, +2, ..., -n, +n\}$ na sledeći način (za buduću „pametno odabranu" triangulaciju T lopte B^n)

$$\lambda(\boldsymbol{v}) := \begin{cases} +\kappa(\boldsymbol{v}), & \text{ako } f(\boldsymbol{v})_{\kappa(\boldsymbol{v})} > 0; \\ -\kappa(\boldsymbol{v}), & \text{ako } f(\boldsymbol{v})_{\kappa(\boldsymbol{v})} < 0. \end{cases}$$

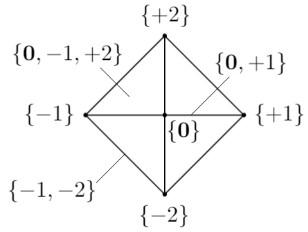
Pošto je f antipodalno preslikavanje na rubu ∂B^n, važi i $\lambda(-\boldsymbol{v}) = -\lambda(\boldsymbol{v})$ za svako teme $\boldsymbol{v}$ sa ruba S^{n-1}. Takođe, kako je f neprekidno preslikavanje na kompaktnom skupu (to jest na B^n), ono je i uniformno neprekidno, pa postoji $\delta > 0$ tako da iz $\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty < \delta$ sledi $\|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)\|_\infty < 2\varepsilon$. Posmatrajmo proizvoljnu triangulaciju T lopte B^n antipodalno simetričnu na rubu za koju važi $\max\{\operatorname{diam}(\sigma) : \sigma \in T\} < \delta$ [1]. Na osnovu leme 2.4 dobijamo da postoji 1-simpleks $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'$, gde b. u. o. možemo pretpostaviti $i = \lambda(\boldsymbol{v}) = -\lambda(\boldsymbol{v}') > 0$. Tada je $f(\boldsymbol{v})_i > \varepsilon$ i $f(\boldsymbol{v}')_i < -\varepsilon$, a kako je $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'$ simpleks iz T, odnosno dijametra manjeg od δ, i $\|f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{v}')\|_\infty \geq 2\varepsilon$, dolazimo do kontradikcije. □

Na osnovu prethodnog dokaza vidimo da je dovoljno da pokažemo dokaz leme 2.4 za specijalnu kolekciju triangulacija lopte B^n čiji dijametri simpleksa teže nuli (tako ćemo i dobiti dokaz teoreme (BU4)). No, time zapravo pokazujemo da važi i opšti oblik Takerove leme na osnovu niza implikacija [lema 2.4 (spec.)] $\Rightarrow$ (BU4) $\Rightarrow$ [lema 2.6] $\Leftrightarrow$ [lema 2.4].

Dokaz leme 2.4. Umesto lopte B^n u euklidskoj normi za potrebe dokaza posmatrajmo jediničnu loptu u l_1-normi, tj. hiperoktaedar $\hat{B}^n$.

[1] Primetimo da ovakva triangulacija postoji jer uzastopnim vršenjem baricentričke podele proizvoljne triangulacije možemo dobiti triangulaciju čiji su svi simpleksi proizvoljno malog dijametra. Za formalni dokaz ovog tvrđenja pogledati [7] (teorema 7, poglavlje 4).

Označimo sa $\diamondplus^n$ triangulaciju $\hat{B}^n$ indukovanu koordinatnim hiperravnima, odnosno za svaki simpleks $\sigma \in \diamondplus^n$ važi $\sigma \in \Diamond^{n-1} (= \partial\hat{B}^n)$ ili $\sigma = \tau \cup \{\mathbf{0}\}$ za neko $\tau \in \Diamond^{n-1}$ (triangulaciju $\hat{B}^n$ čine strane, ivice i temena hiperoktaedra $\hat{B}^n$ i simpleksi određeni bazom τ i temenom u tački $\mathbf{0}$).



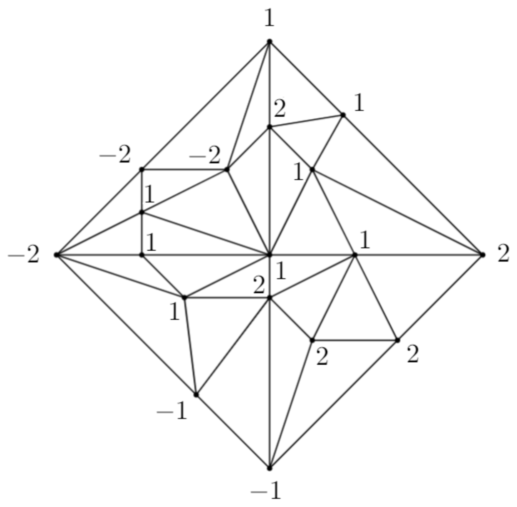
Slika 8: Primer triangulacije $\diamondplus^2$ hiperoktaedra $\hat{B}^2$.

Posmatrajmo na rubu antipodalno simetrične triangulacije T hiperoktaedra $\hat{B}^n$ koje profinjuju $\diamondplus^n$ (tj. za svako $\sigma \in T$ postoji $\tau \in \diamondplus^n$ tako da $\sigma \subseteq \tau$, u geometrijskom smislu). Primetimo da za triangulaciju sa ovom osobinom važi da su za svako $\sigma \in T$ sve koordinate u njegovoj unutrašnjosti konstantnog znaka. Triangulaciju sa ovim osobinama nazovimo *specijalna triangulacija*. Ukoliko pođemo od proizvoljne specijalne triangulacije T, primetimo da, kao što smo ranije spomenuli, uzastopnim vršenjem baricentričke podele na svakom simpleksu iz T možemo dobiti proizvoljno profinjenu specijalnu triangulaciju T' hiperoktaedra $\hat{B}^n$ (odnosno, maksimalni dijametar svih simpleksa iz T' možemo učiniti proizvoljno malim), te ukoliko dokažemo Takerovu lemu za specijalne triangulacije na osnovu dokaza 2.7 dobijamo dokaz teoreme (BU4).

Neka je $\lambda : V(T) \to \{\pm1, \pm2, ..., \pm n\}$ na rubu antipodalno preslikavanje koje dodeljuje oznake temenima specijalne triangulacije T. Ideja dokaza je da iz T izdvojimo posebnu klasu simpleksa nad kojom ćemo konstruisati graf. Pokazaćemo da u slučaju da tvrđenje Takerove leme ne važi, konstruisani graf ima tačno jedan čvor neparnog stepena, čime dolazimo do kontradikcije.

Neka je $\sigma \in T$. Uvedimo oznake

$$\lambda(\sigma) := \{\lambda(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in V(\sigma)\}$$



Slika 9: Primer na rubu antipodalno simetrične triangulacije T koja profinjuje $\diamondplus^2$.

i za neko $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int}(\sigma)$

$$S(\sigma) := \{+i : x_i > 0, i = 1, 2, ..., n\} \cup \{-i : x_i < 0, i = 1, 2, ..., n\}$$

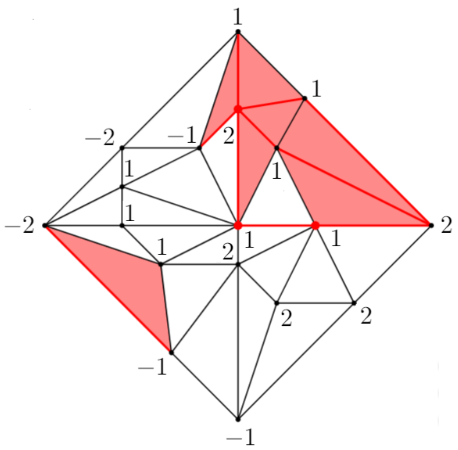
Jasno, $S(\sigma)$ ne zavisi od izbora $\boldsymbol{x} \in \sigma$.

Definišimo sada pomenutu klasu simpleksa iz T. Kažemo da je simpleks $\sigma \in T$ *srećan* ako važi $S(\sigma) \subseteq \lambda(\sigma)$ (slika 10). Označimo $k := |S(\sigma)|$ i primetimo da za srećan simpleks σ važi $\dim(\sigma) \leq k$ jer je k koordinata tačaka $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int}(\sigma)$ različito od nule, tj. σ leži u prostoru L_σ generisanom koordinatnim osama $\{x_i : i \in S(\sigma) \text{ ili } -i \in S(\sigma)\}$. Sa druge strane $\dim(\sigma) \geq k - 1$ jer je bar k temena potrebno da bi σ bio srećan. Srećan simpleks σ ćemo zvati *jak* ukoliko je $\dim(\sigma) = k - 1$ (odnosno ukoliko su oznake svih njegovih temena potrebne da bi ga učinile srećnim), a *slab* ako je $\dim(\sigma) = k$ (što znači da ima „teme viška", odnosno dva isto označena temena ili postoji teme $\boldsymbol{v} \in V(\sigma)$ tako da $\lambda(\boldsymbol{v}) = i$ za neko $i \notin S(\sigma)$).

Definišimo graf G nad skupom srećnih simpleksa u T na sledeći način. Čvorovi σ i τ su susedni ako

(1) $\sigma, \tau \in \Diamond^{n-1} = \partial \hat{B}^n$ i antipodalno su simetrični; ili

(2) σ je lice simpleksa τ (tj. $\dim \sigma + 1 = \dim \tau$) takvo da $\lambda(\sigma) = S(\tau)$,



Slika 10: Triangulacija iz primera sa slike 9 sa označenim srećnim simpleksima.

odnosno oznake temena simpleksa σ su dovoljne da učine simpleks τ srećnim (kažemo i da skup temena $V(\sigma)$ čini simpleks τ srećnim).

Kako je $S(\mathbf{0}) = \emptyset$ vidimo da je simpleks $\{\mathbf{0}\}$ srećan i slab. Takođe, njegov stepen u grafu G je jednak 1 jer je povezan samo sa 1-simpleksom u triangulaciji T kojeg oznaka temena $\lambda(\mathbf{0})$ čini srećnim (ako označimo $\lambda(\mathbf{0}) = i$ gde $i \in \{\pm 1, ..., \pm n\}$ tada sused simpleksa $\{\mathbf{0}\}$ leži na odgovarajućoj koordinatnoj poluosi $x_{|i|}$ određenoj znakom indeksa i). Pokažimo da su svi ostali simpleksi σ iz G stepena 2. Razlikujemo sledeće slučajeve.

1. Simpleks σ je jak. Kako su svi srećni simpleksi na rubu $\partial \hat{B}^n$ jaki razlikujemo dva podslučaja.

   1.1 $\sigma \in \partial \hat{B}^n$. Tada je jedan njegov sused simpleks $-\sigma$ (srećan je i nalazi se na rubu $\partial \hat{B}^n$). Druga mogućnost je da je σ lice nekog simpleksa τ takvo da skup $V(\sigma)$ čini τ srećnim. Tada je $k := \dim \tau = \dim \sigma + 1$ i σ i τ se nalaze u k-hiperoktaedru $L_\sigma \cap \hat{B}^n$ (gde je $\sigma \in \partial(L_\sigma \cap \hat{B}^n)$). Primetimo da je $T' := \{\rho \in T : \rho \in L_\sigma\}$ triangulacija za $\hat{B}^n \cap L_\sigma$. Zaključujemo da je σ lice tačno jednog slabog k-simpleksa iz $T' \subseteq T$ pri čemu ga skup $V(\sigma)$ čini srećnim. Naravno, nijedno lice simpleksa σ nije srećno (jer je σ jak), pa zaključujemo $d_G(\sigma) = 2$.

   1.2 $\sigma \notin \partial \hat{B}^n$. U tom slučaju $\sigma \in T'$ (gde je T' iz prethodnog primera) i lice je dva srećna k-simpleksa iz T'. Dakle, $d_G(\sigma) = 2$.

2. Simpleks σ je slab. Podrazumevamo da je $S(\sigma) \neq \emptyset$ jer smo slučaj simpleksa $\mathbf{0}$ već prodiskutovali. Ponovo razlikujemo dva podslučaja.

   2.1 Ako je $S(\sigma) = \lambda(\sigma)$, znači da postoje dva isto obeležena temena $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\sigma)$. Tada je σ susedan simpleksima $V(T) \setminus \{\boldsymbol{u}\}$ i $V(T) \setminus \{\boldsymbol{v}\}$. Pritom, σ ne može biti lice nekog srećnog simpleksa. Dakle, $d_G(\sigma) = 2$.

   2.2 Ako postoji $i \in \lambda(\sigma) \setminus S(\sigma)$, primetimo da onda $-i \notin S(\sigma) \subseteq \lambda(\sigma)$ jer bi u suprotnom postojao 1-simpleks sa suprotno obeleženim temenima. Tada je σ lice tačno jednog slabog simpleksa σ' kojeg skup $\lambda(\sigma) = S(\sigma) \cup \{i\}$ čini srećnim. U taj simpleks „ulazimo" krećući se u pozitivnom smeru $x_{|i|}$-ose polazeći iz proizvoljne tačke iz $\mathrm{int}(\sigma)$ ukoliko je $i > 0$ ili u negativnom smeru $x_{|i|}$-ose ako je $i < 0$. Dakle, σ' i σ su susedni u G. Sa druge strane, lice σ'' simpleksa σ određeno temenima iz $S(\sigma)$ je srećan simpleks, te je susedan sa σ. Dakle, $d_G(\sigma) = 2$.

Na osnovu prethodne diskusije dolazimo do zaključka da postoji samo jedan čvor (simpleks) neparnog stepena u grafu G što je nemoguće. Time je teorema dokazana. $\square$

3 Primene teoreme Borsuk–Ulama

3.1 Teorema o sendviču sa šunkom

Osvrnimo se najpre na popularan prikaz ovog problema koji ujedno i opravdava naizgled nematematički naslov poglavlja. Zamislimo da je potrebno podeliti sendvič sa sirom i šunkom na dva dela jednim rezom noža tako da svaki deo sadrži jednaku količinu hleba, sira i šunke. Teorema koju ćemo dokazati nam garantuje da je to moguće uraditi ma koliko naizgled „nepravedna” distribucija ova tri sastojka u sendviču bila. Hipotezu je formulisao poljski matematičar Hugo Štajnhaus tridesetih godina XX veka u [28], a dokazao Stefan Banah (u trodimenzionalnom slučaju) i on se može pronaći u [26].

Opšti oblik teoreme svakako tvrdi mnogo više. Međutim, da ne bismo morali zamišljati svet sa d-dimenzionalnim sendvičima (koliko god primamljivo zvučao život u takvom svetu) formalizovaćemo i generalizovati prethodni problem. U ovom odeljku se od čitaoca očekuje osnovno predznanje o teoriji mere (videti npr. [27]).

Definicija 3.1. Konačna Borelova mera na $\mathbb{R}^d$ je mera na $\mathbb{R}^d$ takva da je svaki otvoren skup merljiv i $\mu(A) < \infty$ za sve $A \in \mathcal{A}$ gde je $\mathcal{A}$ Borelova σ-algebra μ-merljivih skupova na $\mathbb{R}^d$.

Kao primer jedne konačne mere možemo posmatrati restrikciju Lebegove mere na neki kompaktan skup $C \subseteq \mathbb{R}^d$ gde je $\lambda^d(C) > 0$ (gde sa λ^d označavamo Lebegovu meru na $\mathbb{R}^d$), to jest, $\mu(X) = \lambda^d(X \cap C)$ za sve Lebeg-merljive skupove $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Tada je $\mu(\mathbb{R}^d) = \lambda^d(C)$.

Teorema 3.2 (Teorema o sendviču sa šunkom za mere)**.** *Neka su μ_1, $\mu_2, ..., \mu_d$ konačne Borelove mere na $\mathbb{R}^d$ takve da je mera svake hiperravni jednaka 0 za sve μ_i Tada postoji hiperravan h takva da*

$$\mu_i(h^+) = \frac{1}{2}\mu_i(\mathbb{R}^d) \quad \text{za } i = 1, 2, ..., d,$$

pri čemu sa h^+ označavamo jedan od poluprostora određenih sa h.

Dokaz. Posmatrajmo sferu $S^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$. Neka je $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, ..., u_d) \in S^d$. Dodelimo svakom $\boldsymbol{u}$ za koje je $u_i \neq 0$ za neko $i \in \{1, 2, ..., d\}$ poluprostor u $\mathbb{R}^d$ na sledeći način

$$h^+(\boldsymbol{u}) := \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d : u_1x_1 + ... + u_dx_d \leq u_0\}.$$

Kako je $h^+(-\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : -u_1x_1 - ... - u_dx_d \leq -u_0\} = (\mathbb{R}^d \setminus h^+(\boldsymbol{u})) \cup \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : u_1x_1 + ... + u_dx_d = u_0\} := h^-(\boldsymbol{u})$ možemo primetiti da antipodalnim tačkama sa sfere S^d odgovaraju suprotni (zatvoreni) poluprostori određeni istom hiperravni. U slučaju da je $\boldsymbol{u}$ oblika $\boldsymbol{u} = (\pm 1, 0, ..., 0)$ (odnosno ako je $u_i = 0$ za sve $i \in \{1, 2, ..., d\}$) prirodno definišemo

$$h^+(1, 0, ..., 0) := \mathbb{R}^d,$$
$$h^+(-1, 0, ..., 0) := \emptyset.$$

Definišimo na sledeći način preslikavanje $f : S^d \to \mathbb{R}^d$, gde je $f = (f_1, ..., f_d)$, koje će nam poslužiti kao funkcija na koju ćemo primeniti teoremu Borsuk–Ulama:

$$f_i(\boldsymbol{u}) := \mu_i(h^+(\boldsymbol{u})).$$

Ako postoji $\boldsymbol{u}_0 = (u_0^0, u_1^0, ..., u_d^0) \in S^d$ tako da $f_i(\boldsymbol{u}_0) = f_i(-\boldsymbol{u}_0)$ za svako $i \in [d]$, odnosno $f(\boldsymbol{u}_0) = f(-\boldsymbol{u}_0)$, imajući u vidu da antipodalnim tačkama odgovaraju suprotni poluprostori tražena hiperravan će upravo biti $\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : u_1^0x_1 + ... + u_d^0x_d = u_0^0\}$.

Ukoliko pokažemo još da je preslikavanje f neprekidno, uslovi teoreme Borsuk–Ulama će biti zadovoljeni i postojanje pomenutog $\boldsymbol{u}_0$ će slediti.

Pokažimo da za svaki niz $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takav da $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$, $n \to \infty$ važi $f_i(\boldsymbol{u}_n) = \mu_i(h^+(\boldsymbol{u}_n)) \to \mu_i(h^+(\boldsymbol{u})) = f_i(\boldsymbol{u}), n \to \infty$. Primetimo da za svako $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ takvo da $\boldsymbol{x} \notin \partial h^+(\boldsymbol{u})$ postoji dovoljno veliko $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $x \in h^+(\boldsymbol{u}_n)$ ako i samo ako $x \in h^+(\boldsymbol{u})$.

Ako sa χ i χ_n označimo karakteristične funkcije skupova $h^+(\boldsymbol{u})$ i $h^+(\boldsymbol{u}_n)$ na osnovu prethodnog komentara zaključujemo da $\chi_n(\boldsymbol{x}) \to \chi(\boldsymbol{x})$ skoro svuda (osim na rubu $\partial h^+(\boldsymbol{u})$ koji je μ_i-mere nula, za sve $i \in [d]$). Kako je svaka χ_n ograničena konstantnom funkcijom $g(\boldsymbol{x}) = 1$, pri čemu $g \in L^1(\mu_i)$, $i \in [d]$ (jer su mere μ_i konačne), primenjujući Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji[2] dobijamo

$$\mu_i(h^+(\boldsymbol{u}_n)) = \int \chi_n d\mu_i \longrightarrow \int \chi d\mu_i = \mu_i(h^+(\boldsymbol{u})), \;\; n \to \infty.$$

□

Prethodna teorema za posledicu ima svoju diskretnu verziju koju ćemo u nastavku dokazati.

Definicija 3.4. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^d$ konačan skup tačaka i h hiperravan. Kažemo da hiperravan h polovi skup A ako svaki otvoren poluprostor definisan pomoću hiperravni h sadrži najviše $\lfloor \frac{1}{2}|A| \rfloor$ tačaka iz A.

Teorema 3.5 (Teorema o sendviču sa šunkom za skupove tačaka)**.** *Neka su $A_1, A_2, ..., A_d \subseteq \mathbb{R}^d$ konačni skupovi. Tada postoji hiperravan h koja istovremeno polovi svaki od skupova $A_1, A_2, ..., A_d$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su svi skupovi $A_1, ..., A_d$ međusobno disjunktni i neparne kardinalnosti i tačke skupa $A := A_1 \cup ... \cup A_d$ su u opštem položaju (dakle, nikojih $d+1$ tačaka ne pripada istoj hiperravni). Kako bismo primenili prethodnu verziju teoreme za mere, zamenimo svaku tačku skupa A loptom poluprečnika ε čiji je ona centar. Skupove koji nastaju ovakvom zamenom tačaka iz A_i odgovarajućim loptama obeležimo sa A_i^ε. Pritom, uzmimo ε dovoljno malo tako da ne postoji hiperravan koja seče $d+1$ lopti iz $A^\varepsilon := \bigcup A_i^\varepsilon$. Na osnovu teoreme 3.2 dobijamo da postoji hiperravan h koja polovi skupove A_i^ε. Kako je svaki od skupova A_i^ε unija neparnog broja disjunktnih lopti (te h mora seći bar jednu od njih) i kako ravan h seče najviše d različitih lopti iz A^ε zaključujemo da h seče tačno jednu loptu iz svakog od skupova A_i^ε. Štaviše, polovi ih, pa centar svake od njih leži na hiperravni h. Odatle zaključujemo da h polovi i skupove tačaka A_i^ε.

Pretpostavimo sada da su tačke skupa A u proizvoljnom položaju. Za svako $\eta \in \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ označimo sa $A_{i,\eta}$ skup nastao od A_i pomeranjem tačaka za najviše η tako da je skup tačaka $A_\eta := A_{1,\eta} \cup ... \cup A_{d,\eta}$ u opštem položaju. Za svako ovakvo η na osnovu prethodnog paragrafa postoji

[2]Niže dajemo formulaciju ove teoreme, a njen dokaz se može naći na primer u [27].

Teorema 3.3 (Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji)**.** *Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompleksnih merljivih funkcija na prostoru $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sa merom μ na σ-algebri $\mathcal{M}$. Neka je $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$. Ako postoji $g \in L^1(\mu)$ tako da je $|f_n(x)| < g(x)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, tada je i $f \in L^1(\mu)$ i važi $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.*

hiperravan h_η koja polovi skupove $A_{i,\eta}$. Ravan h_η je definisana sa $h_\eta = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{a}_\eta, \boldsymbol{x} \rangle = b_\eta\}$ gde je $\boldsymbol{a}_\eta$ jedinični vektor. Kako su vrednosti b_η u ograničenom intervalu, za male η postoji tačka nagomilavanja $(\boldsymbol{a}, b) \in \mathbb{R}^{d+1}$ parova $(\boldsymbol{a}_\eta, b_\eta)$ kako $\eta \to 0$, odnosno postoji podniz $(\boldsymbol{a}_{\eta_j}, b_{\eta_j})$ takav da $(\boldsymbol{a}_{\eta_j}, b_{\eta_j}) \to (\boldsymbol{a}, b)$ za $j \to \infty$. Definišimo hiperravan h jednačinom $b = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$. Tvrdimo da ona polovi svaki od skupova A_i. Ako je tačka $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ na udaljenosti δ od h, postoji dovoljno veliko $j \in \mathbb{N}$ takvo da je $\boldsymbol{x}$ na udaljenosti bar $\delta/2$ od h_{η_j}. Primetimo da, ako se, na primer, k tačaka skupa A_i nalazi u jednom otvorenom poluprostoru određenom hiperravni h, postoji dovoljno veliko $j \in \mathbb{N}$ tako da je bar k tačaka skupa A_{i,η_j} u odgovarajućem otvorenom poluprostoru određenom hiperravni h_{η_j}.

Dakle, imajući prethodnu diskusiju u vidu, ako bi se više od $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ tačaka našlo u jednom otvorenom poluprostoru određenom sa h, došli bismo do kontradikcije sa činjenicom da h_{η_j} polovi skupove A_{i,η_j}. Stoga h polovi sve skupove A_i.

Na kraju, ako su neki skupovi A_i parne kardinalnosti, iz svakog od njih obrišimo proizvoljnu tačku. Zatim, na osnovu prethodne diskusije vidimo da postoji hiperravan h koja polovi novodobijene skupove. Vraćanjem obrisanih tačaka i imajući u vidu definiciju 3.4 ne možemo ništa pokvariti, odnosno h će poloviti skupove A_i. $\square$

Primetimo da je na osnovu teoreme 3.5 moguće da hiperravan h sadrži više od jedne tačke nekog skupa A_i. Sledeća teorema nam daje malo poboljšanu verziju teoreme 3.5 u smislu da uz pretpostavku da su sve tačke iz $A_1 \cup ... \cup A_d$ u opštem položaju možemo garantovati da postoji hiperravan h takva da sadrži najviše jednu tačku iz svakog A_i.

Posledica 3.6 (Teorema o sendviču sa šunkom za skupove tačaka u opštem položaju)**.** *Neka su $A_1, A_2, ..., A_d \subseteq \mathbb{R}^d$ disjunktni konačni skupovi tačaka u opštem položaju. Tada postoji hiperravan h koja polovi svaki A_i tako da je u svakom poluprostoru određenom sa h tačno $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ tačaka iz A_i i najviše jedna tačka iz A_i pripada hiperravni h.*

Dokaz. Posmatrajmo hiperravan h dobijenu na osnovu teoreme 3.5. Ona na osnovu do sada pokazanog može sadržati više tačaka istog skupa A_i (to je moguće ako su neki A_i parne kardinalnosti imajući u vidu opšti položaj tačaka). Fiksirajmo koordinatni sistem tako da je h hiperravan određena izrazom $x_d = 0$. Označimo sa $B = h \cap (A_1 \cup ... \cup A_d)$. U B se nalazi najviše d tačaka u opštem položaju. Cilj nam je da malo pomerimo hiperravan h tako da najviše jedna tačka iz svakog A_i ostane u h. To možemo da uradimo imajući u vidu sledeće: dodavanjem $d - |B|$ tačaka u h dobijamo skup $C \subseteq h$ od d tačaka u opštem položaju kojima je h potpuno određena. Za svako $\boldsymbol{a} \in C$ biramo tačku $\boldsymbol{a}'$ takvu da je $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$ za sve $\boldsymbol{a} \in C \setminus B$ i za sve tačke $\boldsymbol{a}$ koje treba da ostanu na h, a $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \varepsilon \cdot \boldsymbol{e}_d$ ili $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \varepsilon \cdot \boldsymbol{e}_d$ inače. Za dovoljno malo ε novodobijene tačke $\boldsymbol{a}'$ ostaju u opštem položaju i određuju novu hiperravan $h = h(\boldsymbol{a}')$ koja ispunjava traženi uslov. □

3.1.1 Polinomna verzija teoreme o sendviču sa šunkom i neke posledice

U ovom poglavlju biće reči o metodu rešavanja nekih geometrijskih problema u ravni pri čemu ćemo koristiti polinomnu verziju teoreme o sendviču sa šunkom (rezultat Artura Stouna i Džona Tukija, videti [19] i [29]). Ideja je da za zadati skup tačaka u ravni P dođemo do podele ravni na povezane komponente tako da svaka od njih sadrži najviše $|P|/r$ elemenata iz P za neko r. Pokazaćemo da postoji polinom stepena $\mathcal{O}(\sqrt{r})$ takav da traženu podelu dobijamo tako što iz $\mathbb{R}^2$ izbacimo sve nule tog polinoma. No, krenimo redom od sledeće definicije.

Definicija 3.7. Neka su $A_1, A_2, ..., A_s \subseteq \mathbb{R}^2$ konačni skupovi i neka je dat polinom $f \in \mathbb{R}[x, y]$ različit od nule. Kažemo da f polovi skupove A_i ako $f > 0$ za najviše $\lfloor |A_i|/2 \rfloor$ tačaka iz A_i i $f < 0$ za najviše $\lfloor |A_i|/2 \rfloor$ tačaka iz A_i.

Teorema 3.8 (Polinomna verzija teoreme o sendviču sa šunkom)**.** *Neka su $A_1, A_2, ..., A_s \subseteq \mathbb{R}^2$ konačni skupovi i D prirodan broj takav da $\binom{D+2}{2} - 1 \geq s$. Tada postoji polinom $f \in \mathbb{R}[x, y]$ različit od nule, stepena najviše D koji istovremeno polovi skupove A_i.*

Dokaz. Primetimo prvo da je $\binom{D+2}{2}$ broj monoma u polinomu $g(x, y) = \sum_{i+j \leq D} a_{ij} x^i y^j$, odnosno broj uređenih parova (i, j) za koje je $i + j \leq D$. Neka je $k := \binom{D+2}{2} - 1$. Dokaz možemo izvesti uz pretpostavku da je $s = k$ (jer je svakako $s \leq k$). Posmatrajmo preslikavanje $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^k$ dato sa

$$\varphi(x, y) = (x^i y^j)_{1 \leq i+j \leq D} \in \mathbb{R}^k$$

Definišimo $A_i' := \varphi(A_i)$. Na osnovu teoreme 3.5 postoji hiperravan $h \subseteq \mathbb{R}^k$ koja polovi skupove A_i. Neka je jednačina hiperravni h data sa

$$a_{00} + \sum_{i,j} a_{ij} \boldsymbol{z}_{ij} = 0$$

gde su $(\boldsymbol{z}_{ij})_{1\le i+j\le D}$ koordinatne ose u $\mathbb{R}^k$. Traženi polinom je tada dat sa $f(x,y)=\sum_{i+j\le D} a_{ij}x^iy^j$. $\square$

Sada navodimo posledicu teoreme 3.8, rezultat dokazan u [13].

Definicija 3.9. Neka je P skup od n tačaka u ravni i r prirodan broj takav da $1\le r\le n$. Kažemo da je $f\in\mathbb{R}[x,y]$ r-particioni polinom za P ako svaka povezana komponenta skupa $\mathbb{R}\setminus Z(f)$ sadrži najviše n/r tačaka iz P, gde je $Z(f):=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\}$.

Teorema 3.10. *Za svako $r>1$ i svaki konačan skup tačaka $P\subseteq\mathbb{R}^2$ gde je $|P|\ge r$ postoji r-particioni polinom f stepena najviše $\mathcal{O}(\sqrt{r})$.*

Dokaz. Konstruišemo induktivno kolekcije podskupova skupa P u oznaci $\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,...$ takve da za svako j važi $|\mathcal{P}_j|\le 2^j$ na sledeći način. Definišemo $\mathcal{P}_0:=\{P\}$. Pretpostavimo da smo konstruisali $\mathcal{P}_j$ gde je $|\mathcal{P}_j|\le 2^j$. Kako važi

$$\binom{D+2}{2}-1\ge 2^j \Leftrightarrow \binom{D+2}{2}>2^j \Leftrightarrow (D+2)(D+1)>2\cdot 2^j, \quad (3.1)$$

imajući u vidu nejednakost $D^2+3D+2>D^2$, uzimajući $D=\lfloor\sqrt{2\cdot 2^j}\rfloor$ dobijamo da važi polazna nejednakost (3.1), pa na osnovu teoreme 3.8 postoji polinom $f_j\in\mathbb{R}[x,y]$ stepena najviše $\sqrt{2\cdot 2^j}$ takav da polovi sve podskupove skupa P iz kolekcije $\mathcal{P}_j$.

Za $Q\in\mathcal{P}_j$ uvedimo oznake Q^+ za skup tačaka iz Q za koje je $f_j>0$ i Q^- za skup tačaka iz Q za koje je $f_j<0$. Definišemo zatim $\mathcal{P}_{j+1}:=\bigcup_{Q\in\mathcal{P}_j}\{Q^-,Q^+\}$. Takođe, $|\mathcal{P}_{j+1}|\le 2^{j+1}$. Primetimo i da svaki skup iz $\mathcal{P}_{j+1}$ ima najviše $|P|/2^j$ tačaka.

Neka je $t:=\lceil\log_2 r\rceil$. Tada svaki skup iz kolekcije $\mathcal{P}_t$ ima najviše $|P|/r$ tačaka. Definišimo polinom $f:=f_1f_2\cdots f_t$. Primetimo da nijedna komponenta povezanosti iz $\mathbb{R}^2\setminus Z(f)$ ne sadrži tačke $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ iz različitih skupova iz $\mathcal{P}_t$ jer, ako bi to bio slučaj, onda bi za neko $\boldsymbol{w}$ sa puta koji spaja $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ važilo $f_j=0$ za neko j pa bi samim tim bilo i $f=0$. Dakle, f je r-particioni polinom za P. Pritom važi

$$\deg(f)=\deg(f_1)+\deg(f_2)+...+\deg(f_t)\le\sqrt{2}\sum_{j=1}^{t}2^{\frac{j}{2}}=2\frac{\sqrt{2^t}-1}{\sqrt{2}-1}$$
$$<\frac{2}{\sqrt{2}-1}2^{\frac{t}{2}}\le\frac{2}{\sqrt{2}-1}2^{\frac{\log_2 r+1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\sqrt{r}=\mathcal{O}(\sqrt{r}).$$

$\square$

Prvi problem kom ćemo posvetiti pažnju tiče se broja incidencija datog konačnog skupa tačaka u ravni sa konačnim skupom pravih u ravni. Glavni rezultat u ovom delu je teorema Semeredi–Trotera čiji dokaz pomoću posledice polinomne verzije teoreme o sendviču sa šunkom dajemo u nastavku (videti [19]).

Definicija 3.11. Neka su dati konačan skup tačaka u ravni P i konačan skup pravih u ravni L. Sa $I(P, L)$ označavamo broj parova $(p, l) \in P \times L$ takvih da $p \in l$.

Teorema 3.12 (Semeredi–Troter)**.** *Za sve skupove P i L od, redom, m različitih tačaka i n različitih pravih u ravni važi*

$$I(P, L) = \mathcal{O}(m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}} + m + n).$$

Pre dokaza biće nam potrebne tri pomoćne leme.

Lema 3.13. *Neka su dati $f \in \mathbb{R}[x, y]$ stepena najviše D i prava l u $\mathbb{R}^2$. Tada važi ili $l \subseteq Z(f)$ ili $|l \cap Z(f)| \leq D$.*

Dokaz. Zapišimo jednačinu prave l u parametarskom obliku $\{u_1 t + v_1, u_2 t + v_2 : t \in \mathbb{R}\}$. Tačke preseka prave l i skupa $Z(f)$ su onda nule polinoma $g(t) := f(u_1 t + v_1, u_2 t + v_2)$. Tada je ili g identički jednako nuli ili g ima najviše $D = \deg(f)$ rešenja. $\square$

Lema 3.14. *Neka je dat nenula polinom $f \in \mathbb{R}[x, y]$ stepena najviše D. Tada $Z(f)$ sadrži najviše D različitih pravih.*

Dokaz. Posmatrajmo polinom f kao $g(y) := f(x, y) \in (\mathbb{R}[x])[y]$ sa koeficijentima iz $\mathbb{R}[x]$. Znamo da postoji $b \in \mathbb{R}$ tako da $g(b) = f(x, b) \in \mathbb{R}[x]$ nije identički jednako nuli. Samim tim postoji i $a \in \mathbb{R}$ tako da $f(a, b) \neq 0$ pa f nije jednak nuli za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Fiksirajmo sada $p \in \mathbb{R}^2$ tako da $p \notin Z(f)$. Obeležimo prave sadržane u $Z(f)$ sa $l_1, ..., l_k$. Izaberimo pravu l koja sadrži tačku p takvu da nije paralelna ni sa jednom pravom $l_1, ..., l_k$ niti sadrži nijednu tačku preseka $l_i \cap l_j$ za neke $i, j \in [k]$. Znamo da prava l nije sadržana u $Z(f)$, a takođe, na osnovu konstrukcije ima k preseka sa skupom $\bigcup_{i=1}^{k} l_i$. Na osnovu leme 3.13 dobijamo da je $k \leq D$ što je i trebalo pokazati. $\square$

Lema 3.15. *Za sve skupove P i L od, redom, m različitih tačaka i n različitih pravih u ravni važi*

$$I(P, L) \leq n + m^2.$$

Dokaz. Podelimo skup L na dva dela: skup L' svih pravih koje su incidentne sa najviše jednom tačkom i skup L'' pravih koje su incidentne sa bar dve tačke. Tada je

$$I(P, L') \leq |L'| \leq n. \tag{3.2}$$

Takođe, svaka tačka $p \in P$ može pripadati najviše $m-1$ pravoj iz L'' jer postoji $m-1$ tačka koje sa p određuju pravu. Tada je

$$I(P, L'') \leq m(m-1) \leq m^2. \tag{3.3}$$

Sabirajući (3.2) i (3.3) dobijamo

$$I(P, L) = I(P, L') + I(P, L'') \leq n + m^2.$$

□

Dokaz teoreme Semeredi–Trotera. Pretpostavimo prvo da je $m = n$. Definišimo $r := n^{\frac{2}{3}}$ $(r \leq n)$. Na osnovu teoreme 3.10 postoji r-particioni polinom f takav da je $\deg(f) = \mathcal{O}(\sqrt{r}) = \mathcal{O}(n^{\frac{1}{3}})$. Uvedimo i oznake $Z := Z(f), P_0 := P \cap Z, P_i := P \cap C_i$ gde su C_i komponente povezanosti prostora $\mathbb{R}^2 \setminus Z$. Kako je f r-particioni polinom, dobijamo $|P_i| \leq \frac{n}{r} = n^{\frac{1}{3}}$ gde $i = 1, 2, ..., s$.

Neka je $L_0 \subseteq L$ skup onih pravih iz L koje su sadržane u Z. Napišimo vrednost $I(P, L)$ kao sledeći zbir

$$I(P, L) = I(P_0, L_0) + I(P_0, L \setminus L_0) + \sum_{i=1}^{s} I(P_i, L).$$

Važe sledeća ograničenja. Imajući u vidu lemu 3.14 vidimo da važi $|L_0| < D = \deg(f)$ pa je

$$I(P_0, L_0) \leq |P_0| \cdot |L_0| \leq n \cdot D = \mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}}).$$

Na osnovu leme 3.13 vidimo da svaka prava može najviše D puta preseći Z pa je

$$I(P_0, L \setminus L_0) \leq D \cdot |L \setminus L_0| \leq D \cdot n = \mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}}).$$

Ako sa $L_i \subseteq L$ označimo sve prave iz L koje sadrže bar jednu tačku iz P_i, primenjujući lemu 3.15 dobijamo

$$\sum_{i=1}^{s} I(P_i, L) = \sum_{i=1}^{s} I(P_i, L_i) \leq \sum_{i=1}^{s} (|L_i| + |P_i|^2). \tag{3.4}$$

Kako iz leme 3.13 svaka prava seče najviše $D+1$ različitih skupova P_i, u „najgorem slučaju” je to situacija sa svakom pravom iz L, pa dobijamo

$$\sum_{i=1}^{s} |L_i| \leq (D+1)n = \mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}}). \tag{3.5}$$

Takođe je

$$\sum_{i=1}^{s} |P_i|^2 \leq \max_{i\in\{1,\dots,s\}} |P_i| \cdot \sum_{i=1}^{s} |P_i| \leq \frac{n}{r} \cdot n = \mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}}). \tag{3.6}$$

Sabirajući (3.5) i (3.6) pomoću (3.4) dobijamo

$$\sum_{i=1}^{s} I(P_i, L) \leq (D+1)n + \frac{n}{r}n = \mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}}).$$

Ovim je dokaz završen za slučaj $m = n$.

U slučaju $m \neq n$ bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $m \leq n$ (obratni slučaj se dokazuje zamenom uloga skupova tačaka i pravih koristeći princip dualnosti). Takođe možemo pretpostaviti da je $\sqrt{n} \leq m$ jer u suprotnom dokaz direktno sledi iz 3.15 gde dobijamo ograničenje klase $\mathcal{O}(n)$. Definišimo $r = m^{\frac{4}{3}}/n^{\frac{2}{3}}$ i dokaz nastavljamo analogno kao u slučaju $m = n$, gde dobijamo ograničenja klase $\mathcal{O}(m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{2}{3}})$. □

Još jedan rezultat koji se dobija kao posledica polinomne verzije teoreme o sendviču sa šunkom vezan je za problem ograničenja odozdo presecajućeg broja[3] (*eng. crossing number*) nad unapred fiksiranim skupom čvorova u ravni (videti [19]). Pre posledice dajemo definiciju.

Definicija 3.16. Neka je G graf u ravni nad skupom čvorova $V(G)$ takav da su mu sve grane predstavljene kao duži u ravni sa čvorovima kao krajnjim tačkama (geometrijski graf). Presecajući broj grafa G je maksimalan broj grana tog grafa koje je moguće istovremeno preseći pravom koja ne sadrži nijednu tačku iz $V(G)$.

Cilj ovog dela rada je da dokažemo sledeću teoremu.

Teorema 3.17. *Nad svakim skupom od n tačaka u ravni se može konstruisati razapinjuće stablo sa presecajućim brojem $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.* □

[3] Definiciju presecajućeg broja za potrebe ovog rada preuzimamo iz [19] iako se u literaturi taj termin koristi i za neke druge osobine grafa.

Koristićemo i teoreme čije formulacije slede.

Teorema 3.18 (Bezuova teorema [15])**.** *Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ polinomi sa dve promenljive stepena D_f i D_g redom. Ako sistem $f = g = 0$ ima konačno mnogo rešenja, onda ih je najviše $D_f D_g$ (to jest, $Z(f)$ i $Z(g)$ se seku u najviše $D_f D_g$ tačaka). Ako sistem $f = g = 0$ ima beskonačno mnogo rešenja, onda f i g imaju netrivijalni zajednički faktor.* □

Teorema 3.19 (Harnak [14])**.** *Neka je $f \in \mathbb{R}[x, y]$ polinom sa dve promenljive stepena D. Tada skup $Z(f)$ ima najviše $1 + \binom{D-1}{2}$ povezanih komponenti.* □

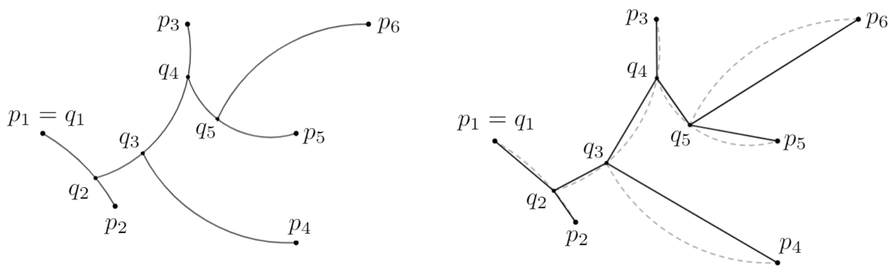
Neka je dat konačan skup tačaka u ravni P. Kako bismo dokazali teoremu 3.17, konstruisaćemo prvo povezan skup X koji se sastoji od lukova (tj. duži ili delova algebarskih krivih) koji povezuju tačke iz P. Kažemo da skup X ima presecajući broj najviše k ako svaka prava preseca X u najviše k tačaka (uz eventualno konačno mnogo izuzetaka). Za geometrijsko razapinjuće stablo nad P definicija se poklapa sa definicijom 3.16. Koristeći narednu lemu moći ćemo da konvertujemo konstruisan povezan skup X u razapinjuće stablo, pritom najviše udvostručujući presecajući broj.

Lema 3.20. *Neka je P skup n tačaka u ravni. Neka je X povezan skup koji sadrži P čiji je presecajući broj najviše k. Tada postoji geometrijsko razapinjuće stablo nad P (čije grane su, dakle, duži) čiji je presecajući broj najviše $2k$.*

Dokaz. Konstruišimo induktivno skup $S \subseteq X$ koji će takođe povezivati sve tačke iz P na sledeći način. Indeksirajmo tačke skupa P na proizvoljan način sa $p_1, p_2, ..., p_n$. Definišimo $S_1 := \{p_1\}$. Pretpostavimo da smo definisali skup $S_i \subseteq X$ za $\{p_1, ..., p_i\}$ i izaberimo luk $\alpha_i \subseteq X$ takav da povezuje p_{i+1} sa nekom tačkom $q_i \in S_i$ tako da je pritom $\alpha_i \cap S_i = \{q_i\}$. Tada definišemo $S_{i+1} := S_i \cup \alpha_i$. Za $i = n$ postavimo $S := S_n$ (slika 11). Presecajući broj skupa S je najviše k jer je $S \subseteq X$.

Vidimo da tačke q_i dele S na konačno mnogo lukova. Zamenimo sve lukove dužima koje spajaju njihove krajnje tačke kao na slici 11 desno. Presecajući broj tako dobijenog stabla se ne povećava.

Na kraju eliminišemo tačke q_i iz stabla i konstruišemo razapinjuće stablo nad P pritom najviše udvostručujući presecajući broj. To možemo



Slika 11: Ilustracija prvog i drugog koraka iz dokaza leme 3.20.

uraditi tako što polazeći od proizvoljnog čvora obiđemo čitavo stablo, pritom prolazeći svakom granom u oba smera, i povezujući uzastopno posećene tačke iz P (pri čemu ignorišemo tačke q_i). $\square$

Lema 3.21. *Neka je P skup od n tačaka u ravni. Tada postoji $X \subseteq \mathbb{R}^2$ koji sadrži P, ima najviše $n/2$ povezanih komponenti i presecajući broj $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.*

Dokaz. Kako nas zanima asimptotsko ponašanje presecajućeg broja možemo zapaziti da za n manje od pogodne konstante (koju ćemo kasnije odrediti) možemo konstruisati proizvoljno razapinjuće stablo nad P. Dakle, pretpostavimo da je n veliko. Iz teoreme 3.10 dobijamo da postoji r-particioni polinom f za skup P pri čemu je r što veće moguće, ali takvo da $Z(f)$ ima najviše $n/2$ povezanih komponenti. Na osnovu teoreme 3.10 znamo da je $\deg(f) = \mathcal{O}(\sqrt{r})$, a na osnovu teoreme 3.19 imamo da $Z(f)$ ima najviše $1+\binom{\deg(f)-1}{2}$ povezanih komponenti. Iz uslova $1 + \binom{\deg(f)-1}{2} \leq \frac{n}{2}$ dobijamo da možemo uzeti $r = n/c$ za pogodnu konstantu c.

Sada, svako $p \in P$ takvo da $p \notin Z(f)$ povežimo pomoću duži σ_p sa tačkom iz $Z(f)$, gde pritom ostatak duži σ_p nema zajedničkih tačaka sa $Z(f)$. Definišimo

$$X := Z(f) \cup \bigcup_{p \in P \setminus Z(f)} \sigma_p.$$

Ovako dobijeni skup X ima najviše $n/2$ povezanih komponenti.

Izračunajmo presecajući broj skupa X. Neka je l prava koja nije sadržana u $Z(f)$ i koja ne sadrži nijednu od duži σ_p. Na osnovu leme 3.13 ona preseca $Z(f)$ u najviše $\deg(f) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ tačaka (jer $r = n/c$). Ograničimo broj presečnih tačaka prave l sa dužima $\sigma_p, p \in P \setminus Z(f)$.

Kako je f r-particioni polinom za P, imamo da se u svakoj povezanoj komponenti skupa $\mathbb{R}^2 \backslash Z(f)$ nalazi najviše $n/(n/c) = c$ tačaka iz P. Prava l seče najviše $1 + \deg(f)$ komponenti, pa seče najviše $c(1 + \deg(f)) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ duži σ_p. Ovim je lema dokazana. $\square$

Dokaz teoreme 3.17. Na osnovu prethodnih lema nije teško dokazati teoremu 3.17. Za dati skup tačaka P konstruisaćemo povezan skup X odakle će na osnovu leme 3.20 slediti traženi rezultat. Konstruišimo niz skupova $B_0, B_1, B_2, ...$ tako da svaki B_i sadrži P i ima najviše $n/2^i$ povezanih komponenti na sledeći način. Definišimo $B_0 := P$. Pretpostavimo da smo konstruisali B_i. Biranjem tačke sa svake od njegovih komponenti dobijamo skup R_i sa najviše $n/2^i$ tačaka. Na osnovu leme 3.21 postoji skup $X_i \supseteq R_i$ sa najviše $n/2^{i+1}$ komponenti povezanosti i presecajućim brojem $\mathcal{O}(\sqrt{n/2^i})$. Postavimo onda $B_{i+1} := B_i \cup X_i$ i nastavimo postupak. Za neko i_0 ćemo dobiti da je B_{i_0} povezan skup i tada definišemo $X := B_{i_0}$. Presecajući broj skupa X je ograničen odozgo sumom presecajućih brojeva svih skupova X_i, odnosno sa $\mathcal{O}(\sqrt{n})$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Na kraju navedimo jednu generalizaciju teoreme o sendviču sa šunkom sa d na $d+1$ mera u $\mathbb{R}^d$. Naravno, nije uvek moguće naći hiperravan koja bi polovila $d + 1$ mera (na primer, ukoliko su mere koncentrisane oko temena d-simpleksa u $\mathbb{R}^d$), međutim nametnuvši dodatne uslove Mikio Kano i Jan Kinčl došli su do rezultata koji je objedinjen u teoremi koja sledi (videti [17]). Teorema je poznata i kao teorema o hamburgeru (budući da je hamburger, kao što dobro znamo, „bogatije nafilovan" od običnog sendviča).

Definicija 3.22. Neka je $r \geq d$ i neka su $\mu_1, ..., \mu_r$ konačne Borelove mere na $\mathbb{R}^d$. Kažemo da su $\mu_1, ..., \mu_r$ uravnotežene u podskupu $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ako za svako $i \in [r]$ važi

$$\mu_i(X) \leq \frac{1}{d} \cdot \sum_{j=1}^{r} \mu_j(X).$$

Definicija 3.23. Kažemo da je Borelova mera μ na $\mathbb{R}^d$ apsolutno neprekidna ako za svaki merljiv skup A za koji je $\lambda^d(A) = 0$ važi i $\mu(A) = 0$ gde je λ^d Lebegova mera na $\mathbb{R}^d$.

Teorema 3.24 (Teorema o hamburgeru)**.** *Neka je $d \geq 2$ prirodan broj. Neka su $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{d+1}$ apsolutno neprekidne konačne Borelove mere na*

$\mathbb{R}^d$. Uvedimo oznaku $\omega_i = \mu_i(\mathbb{R}^d)$ za $i \in [d+1]$ i $\omega = \min\{\omega_i : i \in [d+1]\}$. Pretpostavimo da je $\sum_{j=1}^{d+1} \omega_j = 1$ i da su $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{d+1}$ uravnotežene u $\mathbb{R}^d$. Tada postoji hiperravan h takva da za svaki otvoren poluprostor $H \in \{h^+, h^-\}$ određen sa h važi da su mere $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{d+1}$ uravnotežene u H i

$$\sum_{j=1}^{d+1} \mu_j(H) \geq \min\left\{\frac{1}{2}, 1 - d\omega\right\} \geq \frac{1}{d+1}.$$

Štaviše, ako definišemo $t := \min\{\frac{1}{2d}, \frac{1}{d} - \omega\}$ i pretpostavimo da je $\omega_{d+1} = \omega$, vektor $(\mu_1(H), \mu_2(H), ..., \mu_{d+1}(H))$ je konveksna kombinacija vektora $(t, ..., t, 0)$ i $(\omega_1 - t, ..., \omega_d - t, \omega_{d+1})$.

Dokaz. Posmatramo sferu $S^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ i $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, ..., u_d) \in S^d$ i analogno kao u dokazu teoreme 3.2 za $\boldsymbol{u} \in S^d$ takve da $|u_0| < 1$ definišemo poluprostore

$$h^+(\boldsymbol{u}) := \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d : u_1x_1 + ... + u_dx_d \leq u_0\},$$
$$h^-(\boldsymbol{u}) := \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d : u_1x_1 + ... + u_dx_d \geq u_0\}.$$

Za tačke $\boldsymbol{u} = (1, 0, ..., 0)$ i $\boldsymbol{u} = (-1, 0, ..., 0)$ definišemo

$$h^+(1, 0, ..., 0) := \mathbb{R}^d, \qquad h^-(1, 0, ..., 0) := \emptyset;$$
$$h^+(-1, 0, ..., 0) := \emptyset, \qquad h^-(-1, 0, ..., 0) := \mathbb{R}^d.$$

Sa $h(\boldsymbol{u})$ označimo zajednički rub poluprostora $h^+(\boldsymbol{u})$ i $h^-(\boldsymbol{u})$. Antipodalne tačke na S^d odgovaraju komplementarnim poluprostorima, to jest, za svako $\boldsymbol{u} \in S^d$ imamo $h^-(\boldsymbol{u}) = h^+(-\boldsymbol{u})$.

Definišemo funkciju $f = (f_1, f_2, ..., f_{d+1}) : S^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ po komponentama gde

$$f_i(\boldsymbol{u}) := \mu_i(h^+(\boldsymbol{u})).$$

Kako su mere μ_i apsolutno neprekidne imamo da je $\mu_i(h(\boldsymbol{u})) = 0$ za svako $\boldsymbol{u} \in S^d$. Odatle, analogno kao u dokazu teoreme 3.2 sledi da je f neprekidno.

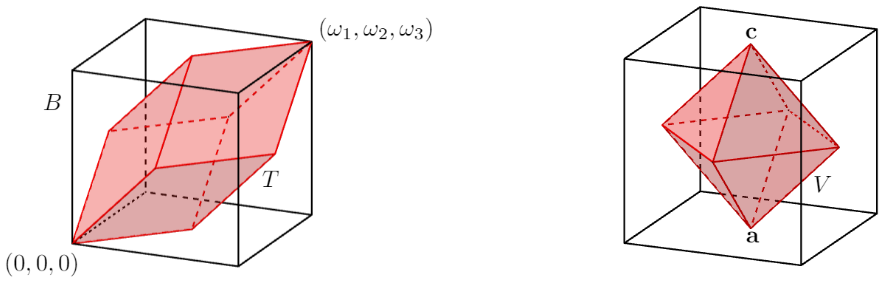
Primetimo da je direktna slika funkcije f sadržana u hiperpravougaoniku $B = \prod_{i=1}^{d+1}[0, \omega_i]$. Štaviše, slike antipodalnih tačaka sa sfere S^d u odnosu na f su simetrične u odnosu na centar hiperpravougaonika B.

Označimo sa T politop koji se dobija kao skup tačaka $(y_1, y_2, ..., y_{d+1}) \in B$ takav da važi

$$y_i \leq \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d+1} y_j \quad \text{i} \quad \omega_i - y_i \leq \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d+1}(\omega_j - y_j), \tag{3.7}$$

a sa $V \subseteq T$ politop koji dodatno zadovoljava i uslov

$$\min\left\{\frac{1}{2}, 1 - d\omega\right\} \leq y_1 + y_2 + ... + y_{d+1} \leq 1 - \min\left\{\frac{1}{2}, 1 - d\omega\right\}. \tag{3.8}$$



Slika 12: Na levoj slici je prikazan skup $T \subseteq B$ za $d = 2$ i $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}$. Na desnoj slici skup $V \subseteq T$ takav da svi njegovi elementi zadovoljavaju uslov (3.8).

Primetimo da će dokaz teoreme slediti ako uspemo da pokažemo da postoji $\boldsymbol{u} \in S^d$ tako da $f(\boldsymbol{u}) \in V$.

Neka je $\boldsymbol{b} = \left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, ..., \frac{\omega_{d+1}}{2}\right)$ centar hiperpravougaonika B. Vidimo da $\boldsymbol{b}$ zadovoljava uslove (3.7) (iz uravnoteženosti mera) i (3.8). Primetimo da je preslikavanje definisano sa $g = f - \boldsymbol{b}$ antipodalno.

Ukoliko $\mathbf{0}$ pripada direktnoj slici preslikavanja g onda postoji $\boldsymbol{u} \in S^d$ tako da $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b}$. Odnosno, ravan $h(\boldsymbol{u})$ zadovoljava uslove teoreme.

U suprotnom posmatrajmo proizvoljnu pravu l koja prolazi kroz $\boldsymbol{b}$ i označimo sa π_l projekciju prostora $\mathbb{R}^{d+1}$ na d-dimenzionalni potprostor ortogonalan na pravu l koji možemo poistovetiti sa prostorom $\mathbb{R}^d$. Definišimo preslikavanje $g' : S^d \to \mathbb{R}^d$ kao $g'(\boldsymbol{u}) := \pi_l(g(\boldsymbol{u}))$. Kako je g' neprekidno, antipodalno preslikavanje, na osnovu teoreme Borsuk–Ulama postoji tačka $\boldsymbol{u} \in S^d$ takva da $g'(\boldsymbol{u}) = 0$. Tada dobijamo da $f(\boldsymbol{u}) \in l$.

Ako pokažemo da postoji prava l kroz tačku $\boldsymbol{b}$ takva da $l \cap B$ čitav pripada skupu V, dobićemo da postoji $\boldsymbol{u} \in S^d$ tako da $f(\boldsymbol{u}) \in V$.

Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $\omega_1 \geq \omega_2 \geq ... \geq \omega_{d+1} = \omega$. Definišimo

$$t = \min\left\{\frac{1}{2d}, \frac{1}{d} - \omega\right\}.$$

Definišimo pravu l kao pravu kroz tačke

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (t, t, ..., t, 0), \\ \boldsymbol{c} &= (\omega_1 - t, \omega_2 - t, ..., \omega_d - t, \omega_{d+1}). \end{aligned}$$

Kako se tačke $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{c}$ nalaze na suprotnim stranama hiperpravougaonika B, simetrične su u odnosu na $\boldsymbol{b}$ i zadovoljavaju uslove (3.7) i (3.8) i V je konveksan skup, dobijamo da je $\boldsymbol{ac} = l \cap B \subseteq V$ (slika 12). Kombinujući sve dosad pokazano dobijamo da postoji $\boldsymbol{u} \in S^d$ tako da $f(\boldsymbol{u}) \in V$, što je i trebalo pokazati. $\square$

3.2 Problem podele ogrlice

U ovom poglavlju biće reči o nekim posledicama teoreme o sendviču sa šunkom.

Problem ogrlice. Zamislimo da dva lopova žele da podele ukradenu otvorenu ogrlicu na koju su nanizane perlice od različitog dragog kamenja (pritom pretpostavimo da ih ima paran broj od svake vrste i da su zanemarljive zapremine). Postavlja se pitanje kako je to moguće „pošteno” uraditi tako svaki lopov dobije po jednak broj od svake vrste perlica, a da pritom naprave što manje rezova na ogrlici. Jasno je da će biti potrebno bar onoliko rezova koliko ima vrsta perlica, jer u slučaju da su one grupisane kao na slici 13 levo vidimo da svaku grupu perlica iste vrste moramo podeliti jedim rezom. Da je to najgori slučaj, odnosno da je uvek dovoljno onoliko rezova koliko ima vrsta perlica (označimo taj broj sa k), ma koliki bio ukupan broj perlica, pokazuje sledeća teorema. Rezultate koji slede dokazali su Čarls Goldberg i Daglas Vest u [10], a mogu se pronaći i u [26].

Teorema 3.25. *Svaka otvorena ogrlica na koju su nanizane perlice od kojih je svaka jedne od k vrsta može biti podeljena pomoću najviše k rezova.*

Slika 13: Na slici levo vidimo da postoji slučaj kada je neophodno napraviti k rezova (za $k = 3$), dok je na slici desno dat jedan primer kako je sa k rezova moguće podeliti ogrlicu između dva lopova sa datom konfiguracijom perlica.

Dokaz. Pretpostavimo da je ogrlica postavljena u prostoru $\mathbb{R}^k$ duž krive čija je parametrizacija data sa $\gamma(t) = (t, t^2, ..., t^k)$ (slika 14) tako da su perlice postavljene u tačkama krive za celobrojne vrednosti t redom počev od $t = 1$. Za nastavak dokaza biće nam potrebno sledeće pomoćno tvrđenje.

Lema 3.26. *Svaka hiperravan h seče krivu γ u $\mathbb{R}^m$ u najviše m tačaka. Stoga, svaki skup od $m+1$ tačaka na krivoj γ je u opštem položaju. Takođe, ako h seče krivu γ u m različitih tačaka, tada γ pri svakom preseku prelazi sa jedne strane hiperravni h na drugu.*

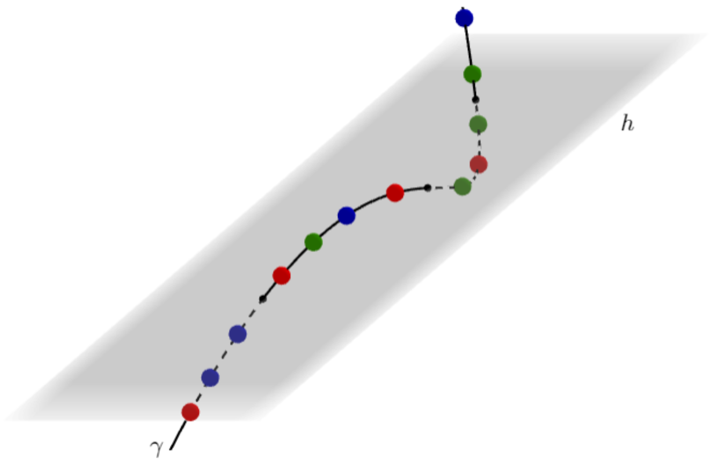
Dokaz. Neka je h hiperravan čija je jednačina $a_1x_1+a_2x_2+...+a_mx_m = b$ gde je $(a_1, ..., a_m) \neq \mathbf{0}$. Ako tačka $\gamma(t)$ pripada h, za neko $t \in \mathbb{R}$ važi $a_1t + a_2t^2 + ... + a_kt^m = b$. Dakle, h seče γ u onim tačkama koje se dobijaju za vrednosti t koje su nule polinoma $p(t) = (\sum_{i=1}^{m} a_it^i) - b$. Kako je polinom $p(t)$ stepena najviše m, on ima najviše m nula, pa samim tim postoji najviše m preseka krive γ i hiperravni h.

Ako γ i h imaju tačno m preseka, to znači da polinom $p(t)$ ima m prostih nula pa γ pri svakom preseku prelazi sa jedne strane hiperravni h na drugu. $\square$

Neka je na ogrlici ukupno n perlica. Definišimo za svako $1 \leq i \leq k$

$$A_i := \{\gamma(l) : l\text{-ta perlica je } i\text{-te vrste}, \ l = 1, 2, ..., n\}.$$

Na osnovu posledice 3.6 postoji hiperravan h koja istovremeno polovi svaki A_i (tako da ne preseca nijednu perlicu). Na taj način je ogrlica podeljena, a kako na osnovu leme 3.26 kriva γ i hiperravan h mogu imati najviše k preseka, tražena podela je izvršena sa najviše k rezova.



Slika 14: Postavimo ogrlicu duž krive čija je parametrizacija data sa $\gamma(t) = (t, t^2, ..., t^d)$.

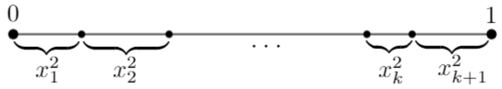
$\square$

Posmatrajmo u nastavku neprekidnu verziju problema ogrlice. Naime, neka je $I = [0, 1]$ jedinični interval i pretpostavimo da je svaka tačka obojena nekom bojom i gde $1 \leq i \leq k$ tako da je za svako i skup tačaka obojen tom bojom merljiv (podrazumevamo standardnu Lebegovu meru na $\mathbb{R}$). Nazovimo ovakvo bojenje intervala sa k boja *k-bojenje intervala. Podelu reda r* definišemo kao niz brojeva $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_r < y_{r+1} = 1$ takav da je za svako i mera skupa svih tačaka obojenih tom bojom sadržanog u $\bigcup\{[y_{i-1}, y_i] : i \equiv 0 \bmod 2\}$ jednaka polovini mere skupa svih tačaka obojenih bojom i u intervalu I.

Analogno diskretnom problemu ogrlice vidimo da postoji k-bojenje tačaka intervala I tako da je neophodno napraviti podelu reda k (k rezova), a u nastavku dokazujemo da je to i dovoljno, odnosno da postoji podela reda k, ma kakvo bilo k-bojenje intervala I.

Teorema 3.27 (Neprekidna verzija teoreme 3.25)**.** *Svako k-bojenje intervala ima podelu reda najviše k.*

Dokaz. Neka je dato k-bojenje intervala $I = [0, 1]$. Definišimo preslikavanje $f : S^k \to \mathbb{R}^k$ na sledeći način. Neka je $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_{k+1}) \in S^k$. Pridružimo vektoru $\boldsymbol{x}$ odgovarajuću podelu intervala $[0, 1]$ na $k+1$ delova pri čemu su podintervali dužina $x_1^2, x_2^2, ..., x_{k+1}^2$ redom, odnosno pravimo rezove u tačkama $z_i := x_1^2 + x_2^2 + ... + x_i^2$ gde je $0 = z_0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_k \leq z_{k+1} = 1$.



Slika 15: Podela intervala $[0, 1]$.

Za svako $1 \leq j \leq k$ definišimo preslikavanje

$$f_j(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{k+1} \operatorname{sgn}(x_i)\mu_j([z_{i-1}, z_i])$$

gde je $\mu_j([z_{i-1}, z_i])$ mera skupa svih tačaka obojenih bojom j u segmentu $[z_{i-1}, z_i]$. Jasno, svako f_j predstavlja razliku između količine boje j koja pripada jednom lopovu i količine koja odlazi drugom lopovu. Na kraju, definišimo $f(\boldsymbol{x}) := (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), ..., f_k(\boldsymbol{x}))$.

Preslikavanje $f : S^k \to \mathbb{R}^k$ je neprekidno i zadovoljava jednakost $-f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$. Na osnovu teoreme Borsuk–Ulama (BU2) postoji $\boldsymbol{x} \in S^k$ tako da je $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Jasno je da dobijeno $\boldsymbol{x}$ daje podelu intervala $[0, 1]$ reda najviše k, što je i trebalo dokazati. $\square$

Napomenimo da se diskretna verzija (teorema 3.25) može dokazati iz neprekidne (videti [4]). Neka je t_i broj perlica i-te vrste i $n := \sum_{i=1}^{k} t_i$ gde je k broj različitih vrsta. Svaku perlicu sa ogrlice poistovetimo sa intervalom $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$ i definišemo mere μ_i na intervalu $[0, 1]$ sa

$$\mu_i(A) := \frac{\int_A f_i(x)dx}{t_i/n} = \frac{n}{t_i}\int\limits_A f_i(x)dx \text{ gde je } f_i : [0, 1] \to \{0, 1\}$$

karakteristična funkcija, to jest za $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$

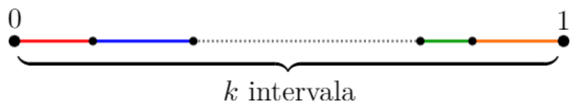
$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } k\text{-ta perlica } i\text{-te vrste;} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dakle, $\mu_i(A)$ daje koji deo ukupne mere skupa obojenog bojom i pripada skupu A. Sada primenimo teoremu 3.27 i dobijamo pravednu podelu intervala $[0, 1]$. Primetimo da se može dogoditi da se granice dobijene podele ne poklapaju sa granicama intervala $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$. Međutim, to lako rešavamo pogodnom translacijom granica nove podele.

Postoji i nešto opštija verzija teoreme 3.27 koju su dokazali Čarls Hobi i Džon Rajs, gde umesto standardnih mera intervala možemo posmatrati proizvoljne integrabilne funkcije $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., k$. Ovu teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 3.28 (Hobi i Rajs [16])**.** *Neka su date neprekidne (pa i integrabilne) funkcije* $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., k$. *Tada postoje* $0 = z_0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_k \leq z_{k+1} = 1$ *i* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{k+1} \in \{-1, +1\}$ *tako da* $\sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} g_j = 0$ *za sve* $1 \leq j \leq k$.

Dosad smo se bavili podelom ogrlice između dva lopova, međutim prirodno se postavlja pitanje šta ako je potrebno rezovima podeliti oglicu na više od dva lopova tako da svaki dobije jednak broj perlica svake vrste. Rezultate koji slede, a tiču se ovog problema dokazali su Noga Alon i Daglas Vest u [4]. Podsetimo se, ukoliko imamo k-bojenje intervala, dovoljno je napraviti najviše k rezova kako bi se interval pravedno podelio na dva dela. Neka je $m > 2$. Označimo sa $c(m, k)$ najmanji broj rezova koji je potrebno napraviti na k-obojenom intervalu tako da se pravedno podeli između m lopova (tako da svaki dobije $1/m$ od ukupne količine svake boje). Sličnom argumentacijom kao i u diskretnoj verziji problema ogrlice dobijamo da je u slučaju da je interval obojen tako da su sve istobojne tačke grupisane (slika 16) potrebno napraviti bar $m-1$ rezova u svakoj grupi. Kako njih ima k, vidimo da je $c(m, k) \geq (m-1)k$.



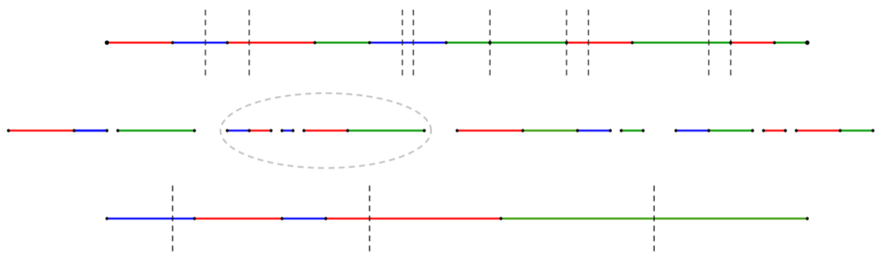
Slika 16: Primer k-bojenja intervala za koji je neophodno napraviti $(m-1)k$ rezova za pravednu podelu.

Pokazaćemo da je u slučaju da je $m = 2^j$ za neko $j \in \mathbb{N}$ zaista uvek dovoljno napraviti najviše $(2^j - 1)k$ rezova za pravednu podelu.

Teorema 3.29. $c(2^j, k) = (2^j - 1)k$.

Dokaz. Znamo da važi $c(2^j, k) \geq (2^j - 1)k$. Dovoljno je pokazati obrnutu nejednakost. Dokaz radimo indukcijom po j. Za $j = 1$ dobijamo slučaj kada je interval $[0, 1]$ potrebno podeliti između dva lopova sa najviše k rezova, što je dokazano u teoremi 3.27. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $j-1$ i dokažimo za $j > 1$. Dakle, znamo da je moguće iseckati interval sa najviše $(2^{j-1}-1)k$ rezova tako da dobijemo 2^{j-1} kolekcija podintervala, pri čemu svaka od njih sadrži po $1/2^{j-1}$ od ukupne količine svake boje.

Posmatrajmo dalje jednu takvu kolekciju, poređajmo intervale u niz i skalirajmo dobijenu konstrukciju na dužinu početnog intervala (slika 17). Novodobijeni interval je na osnovu teoreme 3.27 moguće pravedno podeliti između dva lopova pomoću najviše k rezova. Ako ovaj postupak uradimo za svaku od 2^{j-1} kolekcija, podelili smo interval na 2^j lopova i pritom napravili najviše novih $k \cdot 2^{j-1}$ rezova. Ukupno smo, dakle, napravili najviše $k \cdot 2^{j-1} + (2^{j-1}-1)k = (2^j-1)k$ rezova.



Slika 17: Ilustracija indukcijskog koraka.

□

Pokazani rezultat nas navodi da postavimo pitanje: da li je $c(m,k) = (m-1)k$ za svako m, k? Noga Alon je 1987. godine dao potvrdan odgovor na ovo pitanje. Dokaz će ovde biti izostavljen, a može se naći u [3].

Teorema 3.30. *Za svako m i k važi $c(m,k) = (m-1)k$.*

Podstaknuti prethodnim, možemo se zapitati i da li za svaki realan broj α tako da $0 < \alpha < 1$ postoji $c(\alpha, k)$, to jest minimalan broj rezova koje je potrebno napraviti na k-obojenom jediničnom intervalu tako da dobijemo konačnu kolekciju podintervala koji će u uniji imati α-ti deo ukupne količine od svake boje. Nije poznato da li je $c(\alpha, k)$ konačan broj za $k \geq 3$ i $0 < \alpha < 1$ (za $k = 2$ je odgovor potvrdan i dokaz se može pronaći u [4]). Na osnovu teoreme 3.30 zaključujemo da jeste konačan za racionalne brojeve α. Međutim, ukoliko dozvolimo da umesto konačne kolekcije podintervala nađemo neki merljivi skup sa istom osobinom, može se pokazati da takav uvek postoji, što sledi iz naredne teoreme čiji dokaz se može naći u [22].

Teorema 3.31 (Ljapunov). *Neka su $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ neprekidne mere verovatnoće na $[0,1]$ i neka je $X \subseteq [0,1]$ merljiv skup. Definišimo $f(X) := (\mu_1(X), ..., \mu_k(X)) \in \mathbb{R}^k$. Tada je skup $\{f(X) : X \subseteq [0,1], X \text{ je merljiv}\}$ zatvoren i konveksan podskup $\mathbb{R}^k$.*

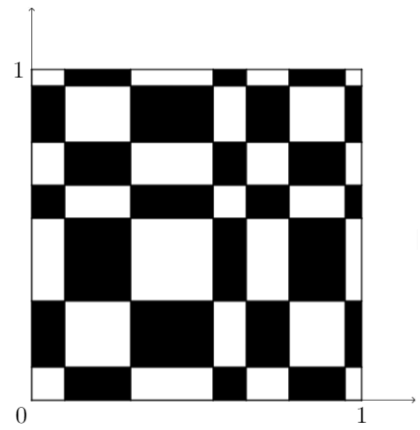
Kako je $f(\emptyset) = (0, ..., 0)$ i $f([0,1]) = (1, ..., 1)$, imajući u vidu konveksnost iz prethodne teoreme dobijamo da postoji merljiv skup $X \subseteq [0,1]$ takav da važi $f(X) = (\alpha, ..., \alpha)$.

Na kraju ćemo još razmotriti višedimenzionalni slučaj problema ogrlice sa dva lopova. Neka je C^d d-dimenzionalna jedinična kocka (alternativno ćemo koristiti i oznaku C) i neka su sve tačke te kocke obojene nekom od k boja tako da je svaki skup tačaka obojenih istom bojom merljiv. Nazovimo ovakvo bojenje *k-bojenje kocke*. Iz prethodnih rezultata dobijamo da je k-obojenu kocku moguće preseći sa najviše k hiperravni normalnih na unapred zadati pravac tako da dobijemo dve kolekcije „parčića" tako da unije parčića iz obe kolekcije sadrže pola od ukupne količine svake od boja. Na primer, ako posmatramo pravac određen x_1-osom, rešenje dobijamo primenom teoreme 3.28 na preslikavanja $\{g_j : 1 \leq j \leq k\}$ gde je $g_j(y)$ $(d-1)$-mera skupa tačaka iz $C \cap \{\boldsymbol{x} : x_1 = y\}$ obojenih bojom j.

Razmotrimo zato sledeći problem. Zamislimo da smo izdelili intervale $[0,1]$ na svim koordinatnim osama na isti način (pravimo neku vrstu d-dimenzionalne šahovske table gde je dozvoljeno da polja budu hiperpravougaonici). Matematički zapisano, neka je dat niz $0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_r < z_{r+1} = 1$ (označimo ga sa $\langle z \rangle$), neka je $I_i = [z_{i-1}, z_i]$ i $C_{i_1,...,i_d} = I_{i_1} \times \cdots \times I_{i_d}$. Obojimo svaku tačku kocke C jednom od dve boje. Pitamo se da li možemo izdeliti kocku na opisani način tako da skup $P := \bigcup\{C_{i_1,...,i_d} : i_1+...+i_d \equiv 0 \pmod 2\}$ „zahvata" tačno polovinu tačaka obojenih svakom bojom. Drugim rečima, želimo da je mera skupa istobojnih tačaka obojenih proizvoljnom od dve date boje i sadržanih u P jednaka polovini mere skupa svih tačaka obojenih tom bojom u kocki C. Ako takav niz $\langle z \rangle$ postoji za neko r, nazovimo ga *podela kocke reda r*.

Ukoliko je $d = 1$, data definicija se poklapa sa prethodnom definicijom podele intervala reda r. Za $d = 2$ je potrebno napraviti takvu podelu kvadrata na opisan način da sva bela polja (slika 18) sadrže „pola količine" (u smislu mere) svake od boja.

Pokazaćemo da je podelu kocke reda r gde je $r \leq k$ moguće napraviti



Slika 18: Ilustracija problema za $d = 2$. Bela polja sadrže „pola količine" (u smislu mere) svake od boja.

samo u slučaju neparnih dimenzija d. Za parno d i neki fiksiran broj l uvek postoji takvo bojenje kocke da nije moguće izvršiti podelu reda r za neko $r \leq l$. Konstrukciju tog bojenja ćemo takođe dati u nastavku, pri čemu će nam biti potrebne samo dve boje.

Teorema 3.32. *Za svako neparno d i svako k-bojenje kocke C^d možemo napraviti podelu reda najviše k i ova granica je najbolja moguća.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati drugi deo tvrđenja, odnosno da postoji k-bojenje kocke C^d za neparno d takvo da *moramo* podeliti jedinične intervale na osama na $k+1$ delova kako bismo ispunili traženi uslov.

Posmatrajmo k-bojenje kocke C^d takvo da svaka od prvih $k-1$ boja popunjava dovoljno male kocke tako raspoređene unutar C^d da nikoja hiperravan paralelna sa nekom od osa ne seče dve takve kockice istovremeno i da su sve one dovoljno blizu koordinatnom početku (kasnije ćemo definisati šta to tačno znači). Bojom k zatim obojimo ostatak kocke C^d. Na primer, za $\varepsilon > 0$ (koje će kasnije biti pogodno određeno) i $1 \leq i \leq k$ obojimo i-tom boju kocku $Q_i := [(i-1)\varepsilon, i\varepsilon] \times \cdots \times [(i-1)\varepsilon, i\varepsilon]$. Jasno je da svaka Q_i mora biti „presečena" kako bi oba lopova dobila jednaku količinu kocke C^d obojene bojom i. Drugim rečima, podela $\langle z \rangle$ koju tražimo mora biti takva da za svako $1 \leq i \leq k-1$ postoji j takvo da je $z_j \in ((i-1)\varepsilon, i\varepsilon)$. Takođe, ako je ε dovoljno malo, podela $\langle z \rangle$ mora sadržati i $z_j > (k-1)\varepsilon$ jer u suprotnom deo $[1-(k-1)\varepsilon] \times \cdots \times [1-(k-1)\varepsilon]$ pri čemu je $\varepsilon > 0$ takvo da $(1-(k-1)\varepsilon)^d > 1/2$ nije podeljen. Dakle, podela mora biti reda k.

Pokažimo sada da je za svako k-bojenje moguće naći podelu reda najviše k. Definišimo preslikavanje $f : S^k \to \mathbb{R}^k$ na sledeći način, slično kao u dokazu teoreme 3.27. Za $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_{k+1}) \in S^k$ uzmimo $\langle z \rangle$ takav da je $z_0 = 0$ i $z_j = x_1^2 + ... + x_j^2$ za $1 \leq j \leq k+1$. Tada definišimo komponentne funkcije za svako $1 \leq l \leq k$ kao

$$f_l(\boldsymbol{x}) := \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_d} \operatorname{sgn}(x_{i_1}) \cdots \operatorname{sgn}(x_{i_d}) \mu_l(C_{i_1,...,i_d})$$

gde sa $\mu_l(C_{i_1,...,i_d})$ označavamo meru skupa tačaka obojenih bojom l u polju $C_{i_1,...,i_d}$. Definišimo onda $f := (f_1, ..., f_k)$. Kako su sva komponentna preslikavanja neprekidna, to je i f. Takođe, kako je d neparno vidimo da je $f_l(-\boldsymbol{x}) = -f_l(\boldsymbol{x})$ za svako $1 \leq l \leq k$, pa je i $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$, to jest f je antipodalno. Iz teoreme Borsuk–Ulama (BU2) dobijamo da postoji $\boldsymbol{x} \in S^k$ tako da je $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. Takvo $\boldsymbol{x}$ definiše traženu podelu. □

Teorema 3.33. *Za svako parno $d \geq 2$ i svaki prirodan broj l postoji 2-bojenje kocke C^d takvo da ne postoji podela reda r ni za jedno $r \leq l$.*

Dokaz. Primetimo da u slučaju parnog d sva polja sa dijagonale šahovske table, odnosno $D := \bigcup\{C_{i_1,...,i_d} : i_1 = \cdots = i_d\}$, odlaze jednom lopovu. Takođe, glavna dijagonala kocke $\{\boldsymbol{x} : x_1 = \cdots = x_d\}$ pripada skupu D. Neka je l dato. Konstruišemo 2-bojenje kocke (u crvenu i plavu boju) C^d tako da ne postoji podela reda r ni za koje $r \leq l$. Ideja je da crvenom bojom obojimo „dovoljno uzak” prostor oko glavne dijagonale kako bismo osigurali da više od polovine crvenih tačaka (u smislu mere) pripada poljima sa dijagonale i tako ode u ruke jednom lopovu. Opisaćemo ovu konstrukciju za $d = 2$ dok se za ostale parne dimenzije radi slično.

Za dato l izaberimo dovoljno malo $\varepsilon > 0$ tako da

$$2\varepsilon - (3l+1)\varepsilon^2 > \frac{1}{2}(2\varepsilon - \varepsilon^2). \tag{3.9}$$

Obojimo kocku C^2 u crveno i plavo na sledeći način. Sve tačke iz skupa $\{(x, y) \in C^2 : x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon\}$ bojimo crveno, a ostale tačke kocke u plavo. Pretpostavimo da je data podela kocke $\langle z \rangle$ reda m. Označimo sa $\delta_i := z_i - z_{i-1}$ za $1 \leq i \leq m+1$ i neka su $C_{i,j}$ polja generisana sa $\langle z \rangle$.

Ako je $\delta_i \geq \varepsilon$, onda $C_{i,i}$ sadrži $\delta_i^2 - (\delta_i - \varepsilon)^2 = 2\delta_i\varepsilon - \varepsilon^2$ crvene boje. Dakle, $\bigcup C_{i,i}$ sadrži barem $\sum_{\delta_i \geq \varepsilon}(2\delta_i\varepsilon - \varepsilon^2)$ crvene boje. Znamo da je

$\sum_{i=1}^{m} \delta_i = 1$, pa kako je $1 = \sum_{\delta_i \geq \varepsilon} \delta_i + \sum_{\delta_i < \varepsilon} \delta_i < \sum_{\delta_i \geq \varepsilon} \delta_i + m\varepsilon$, dobijamo $\sum_{\delta_i \geq \varepsilon} \delta_i > 1 - m\varepsilon$. Imamo i

$$\begin{aligned}\sum_{\delta_i \geq \varepsilon} (2\delta_i \varepsilon - \varepsilon^2) &= 2\varepsilon \sum_{\delta_i \geq \varepsilon} \delta_i - \sum_{\delta_i \geq \varepsilon} \varepsilon^2 \\ &> 2\varepsilon(1 - m\varepsilon) - \varepsilon^2(m+1) = 2\varepsilon - (3m+1)\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Ukupna površina kvadrata C^2 pod crvenom bojom je $2\varepsilon - \varepsilon^2$. Imajući u vidu (3.9) i činjenicu da za $m \leq l$ važi $2\varepsilon - (3m+1)\varepsilon^2 \geq 2\varepsilon - (3l+1)\varepsilon^2$ dobijamo da za svako $m \leq l$ skup $\bigcup C_{i,i}$ sadrži više od polovine crvene boje u kocki C^2. Dakle, ne postoji podela reda najviše l. $\square$

3.3 Knezerov graf i njegov hromatski broj

Još jedan kombinatorni problem u čijem rešavanju je teorema Borsuk–Ulama odigrala važnu ulogu jeste Knezerova hipoteza. Nemački matematičar Martin Knezer je 1955. godine u [20] formulisao sledeću hipotezu.

Hipoteza 3.34. *Neka su k i n prirodni brojevi takvi da $k \leq n$. Neka je N skup sa n elemenata, N_k skup svih k-točlanih podskupova skupa N i f preslikavanje iz N_k u skup M sa osobinom da je $f(K_1) \neq f(K_2)$ kad god je $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Označimo sa $m(k,n,f)$ broj elemenata skupa M, a sa $m(k,n) = \min_f m(k,n,f)$. Tada za fiksirano k postoje brojevi $m_0 = m_0(k)$ i $n_0 = n_0(k)$ takvi da $m(k,n) = n - m_0$ za $n \geq n_0$, pritom je $m_0(k) \geq 2k-2$ i $n_0(k) \geq 2k-1$. U obe poslednje nejednakosti se verovatno može staviti znak jednakosti.*

Knezerovu hipotezu je prvi dokazao Laslo Lovas 1978. godine u radu [23]. U nastavku ćemo dati slikovitiji prikaz Knezerove hipoteze preveden na jezik teorije grafova i kraći dokaz od Lovasovog koji je pomoću teoreme Borsuk–Ulama izveo Džošua Grin u [11]. U dokazu se koristi opštija verzija teoreme Ljusternik-Šnireljmana.

Lema 3.35 (Opšta verzija teoreme Ljusternik-Šnireljman)**.** *Neka je sfera S^d pokrivena sa $d+1$ skupova od kojih je svaki otvoren ili zatvoren (označimo tu familiju skupova sa C). Tada postoji bar jedan od njih koji sadrži par antipodalnih tačaka.*

Dokaz. Dokaz radimo indukcijom po broju t zatvorenih skupova u pokrivaču C. Za $t = 0$ tvrđenje važi na osnovu (LjŠ-o). Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za slučaj kada je u C manje od t zatvorenih skupova.

Neka je C pokrivač sa t zatvorenih skupova. Fiksirajmo zatvoren $F \in C$. Ako on sadrži par antipodalnih tačaka dokaz je gotov. U suprotnom je njegov dijametar strogo manji od 2, odnosno jednak $2-\varepsilon$ za neko $\varepsilon > 0$. Analogno dokazu implikacije (LjŠ-o)⇒(LjŠ-z) u teoremi 2.3 definišemo otvoren skup $U^{\varepsilon/3} := \{\boldsymbol{x} \in S^d : \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, F) < \varepsilon/3\}$. Tada je $F \subseteq U^{\varepsilon/3}$ i $C' := (C \setminus \{F\}) \cup U^{\varepsilon/3}$ je pokrivač sfere S^d sa $t-1$ zatvorenih skupova. Na osnovu indukcijske hipoteze dobijamo da postoje $\boldsymbol{x} \in S^d$ i $X \in C'$ tako da $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in X$. Pritom, ne može biti $X = U^{\varepsilon/3}$ jer je $U^{\varepsilon/3}$ dijametra manjeg od 2 po konstrukciji. Dakle, postoji skup iz pokrivača C koji sadrži par antipodalnih tačaka što je i trebalo dokazati. □

Definicija 3.36. Neka je X konačan skup i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sistem podskupova skupa X. Knezerov graf za $\mathcal{F}$, u oznaci $KG(\mathcal{F})$, se definiše kao graf čiji je skup čvorova $\mathcal{F}$, pri čemu su dva čvora $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ susedna ako je $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Matematički zapisano

$$KG(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}, \{\{F_1, F_2\} : F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \cap F_2 = \emptyset\}).$$

Ako u hipotezi 3.34 za N uzmemo skup $[n]$ i umesto N_k koristimo oznaku $\binom{[n]}{k}$ za skup svih k-točlanih podskupova skupa $[n]$, preslikavanje f zapravo postaje bojenje Knezerovog grafa nad skupom čvorova $\binom{[n]}{k}$, a hipoteza 3.34 se odnosi na hromatski broj takvog grafa.

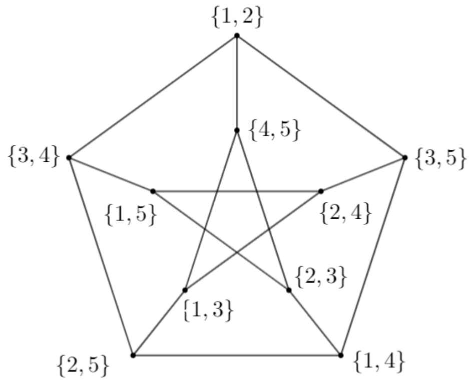
Označimo sa $KG_{n,k}$ Knezerov graf nad skupom čvorova $\binom{[n]}{k}$. Formulisaćemo Knezerovu hipotezu u obliku teoreme i dokazati je.

Teorema 3.37. *$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$ za $n \geq 2k - 1$.*

Pre dokaza daćemo nekoliko primera.

Primeri.

- $KG_{n,1}$ je kompletan graf K_n sa $\chi(K_n) = n$.
- $KG_{2k-1,k}$ je graf čiji je skup grana prazan (jer presek nikoja dva k-točlana skupa nekog $(2k-1)$-točlanog skupa nije prazan).
- $KG_{2k,k}$ je mečing, odnosno svaki čvor je susedan samo svom komplementu, pritom $\chi(KG_{2k,k}) = 2$ za $k \geq 1$.
- $KG_{5,2}$ je Petersenov graf i $\chi(KG_{5,2}) = 3$ (slika 19).



Slika 19: Graf $KG_{5,2}$ je u stvari Petersenov graf.

Primetimo da hromatski broj grafa $KG_{n,k}$ ne može biti veći od $n - 2k + 2$. U tu svrhu konstruišimo $(n - 2k + 2)$-bojenje grafa $KG_{n,k}$. Dodelimo svakom čvoru $F \in \binom{[n]}{k}$ boju iz skupa $\{1, 2, ..., n - 2k + 2\}$ na sledeći način:

$$c(F) := \min\{\min(F), n - 2k + 2\}.$$

Ako su dva čvora F i F' grafa $KG_{n,k}$ obojena istom bojom $c(F) = c(F') = i < n - 2k + 2$ tada u preseku imaju element i, te ne mogu biti disjunktni (odnosno, nisu susedni). U slučaju da su obojeni bojom $n - 2k + 2$ tada su oba sadržana u $(2k - 1)$-elementnom skupu $\{n - 2k + 2, ..., n\}$ pa ponovo zaključujemo da ne mogu biti disjunktni, pa ni susedni u $KG_{n,k}$.

Dokaz teoreme 3.37. Posmatrajmo Knezerov graf $KG_{n,k}$. Neka je $d := n - 2k + 1$ i $X \subseteq S^d$ n-elementni skup takav da su njegove tačke raspoređene u položaju tako da nijedna hiperravan koja prolazi kroz koordinatni početak ne sadrži više od d tačaka iz X. Pretpostavimo sada da je $\binom{X}{k}$ skup čvorova grafa $KG_{n,k}$ (skup $[n]$ identifikujemo sa skupom X). Pretpostavimo da postoji pravilno bojenje grafa $KG_{n,k}$ koristeći najviše $n - 2k + 1$ boja. Definišimo skupove $A_1, ..., A_d \subseteq S^d$ na sledeći način. Za $\boldsymbol{x} \in S^d$ važi da $\boldsymbol{x} \in A_i$ ako postoji k-točlani skup $F \in \binom{X}{k}$ obojen bojom i takav da se svi njegovi elementi nalaze u otvorenoj polulopti lopte S^d sa centrom u $\boldsymbol{x}$, to jest u $H(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in S^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle > 0\}$. Definišemo i skup $A_{d+1} := S^d \setminus \{A_1 \cup ... \cup A_d\}$.

Svi skupovi A_i, za $i = 1, ..., d$ su otvoreni, a A_{d+1} je zatvoren (kao komplement otvorenog skupa). Na osnovu leme 3.35 dobijamo da postoje $\boldsymbol{x} \in S^d$ i $i \in [d+1]$ tako da $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in A_i$.

Ako je $i \in [d]$, dobijamo da postoje dva disjunktna k-točlana podskupa od X (jedan sadržan u polulopti $H(\boldsymbol{x})$, drugi u njoj suprotnoj polulopti $H(-\boldsymbol{x})$), oba obojena bojom i. U tom slučaju postoji grana u Knezereovom grafu između dva čvora obojena istom bojom, što dovodi do kontradikcije sa pretpostavkom da je bojenje pravilno.

Sa druge strane, ako je $i = d+1$, tada iz definicije skupa A_{d+1} vidimo da $\boldsymbol{x}$ ne pripada nijednom A_i za $i \in [d]$. Stoga, skupovi $H(\boldsymbol{x})$ i $H(-\boldsymbol{x})$ sadrže najviše $k-1$ tačaka skupa X, pa se u $S^d \setminus (H(\boldsymbol{x}) \cup H(-\boldsymbol{x}))$ nalazi bar $n - 2k + 2 = d + 1$ elemenata skupa X, što je u kontradikciji sa pretpostavkom o rasporedu tačaka iz X. $\square$

Primetimo da $KG_{n,k}$ može poslužiti kao primer grafa sa velikim hromatskim brojem. Naime, $KG_{3k-1,k}$ na osnovu teoreme 3.37 ima hromatski broj $k+1$, iako u njemu ne postoje 3-ciklusi.

Vratimo se sada na opštiju verziju Knezerovog grafa iz definicije 3.36 i njegov hromatski broj. Podsetimo se definicije hromatskog broja hipergrafa $G = (X, \mathcal{F})$. Kažemo da je bojenje čvorova $c : X \to [m]$ (pravilno) m-bojenje hipergrafa G ako ne postoji monohromatska grana iz $\mathcal{F}$ (odnosno, $|c(F)| > 1$ za sve $F \in \mathcal{F}$), a za hipergraf u kojem je moguće definisati takvo bojenje kažemo da je m-obojiv. Hromatski broj $\chi(G)$ hipergrafa G (ili u oznaci $\chi(\mathcal{F})$) je najmanji prirodan broj m takav da je G m-obojiv.

Definišimo još *defekt m-obojivosti* sistema $\mathcal{F}$ u oznaci $cd_m(\mathcal{F})$ kao minimalnu kardinalnost skupa $Y \subseteq X$ takvog da je sistem skupova iz $\mathcal{F}$ koji ne sadrži nijedan element skupa Y m-obojiv, odnosno

$$cd_m(\mathcal{F}) = \min\{|Y| : \text{graf } (X \setminus Y, \{F \in \mathcal{F} : F \cap Y = \emptyset\}) \text{ je } m\text{-obojiv}\}.$$

Naredno donje ograničenje hromatskog broja grafa $KG(\mathcal{F})$ dao je Vladimir Doljnikov u [8].

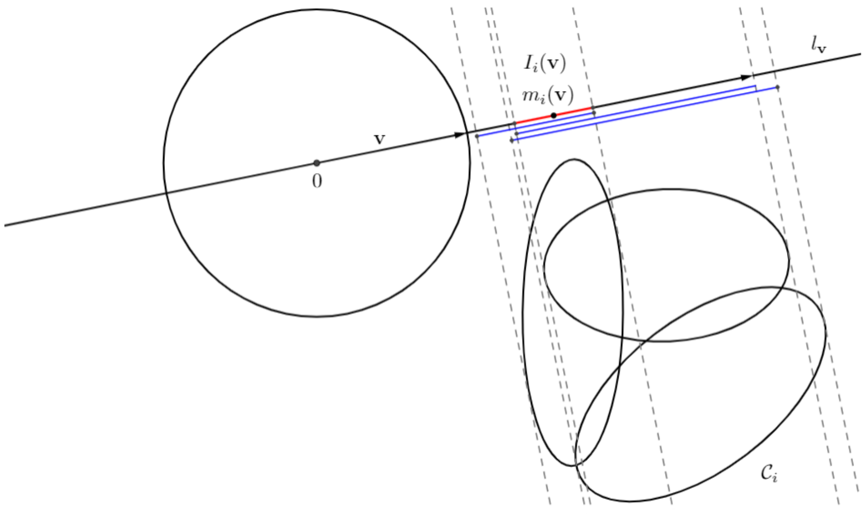
Teorema 3.38. *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ konačan sistem podskupova skupa X. Tada važi*

$$\chi(KG(\mathcal{F})) \geq cd_2(\mathcal{F}).$$

Da bismo dokazali teoremu 3.38 potrebna nam je sledeća pomoćna lema.

Lema 3.39. *Neka su $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_d$ familije nepraznih, konveksnih, kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^d$ i neka za svako $i \in [d]$ važi da je $C \cap C' \neq \emptyset$, za sve $C, C' \in \mathcal{C}_i$. Tada postoji hiperravan h koja seče sve skupove iz unije $\bigcup_{i=1}^d \mathcal{C}_i$.*

Dokaz. Posmatrajmo vektor $\boldsymbol{v} \in S^{d-1}$. Označimo sa $l_{\boldsymbol{v}}$ orijentisanu pravu koja prolazi kroz koordinatni početak, sadrži $\boldsymbol{v}$ i orijentacije određene vektorom $\boldsymbol{v}$ (slika 20). Za svaku familiju $\mathcal{C}_i$ posmatrajmo ortogonalne projekcije njenih skupova na pravu $l_{\boldsymbol{v}}$. Jasno, za svako $\mathcal{C}_i$ na ovaj način dobijamo familiju intervala na pravoj $l_{\boldsymbol{v}}$ takvu da svaka dva intervala imaju neprazan presek. Na osnovu Helijeve teoreme[4] presek svih intervala je neprazan interval, označimo ga sa $I_i(\boldsymbol{v})$. Označimo središnju tačku intervala $I_i(\boldsymbol{v})$ sa $m_i(\boldsymbol{v})$.



Slika 20: Za svaku familiju $\mathcal{C}_i$ posmatrajmo ortogonalne projekcije njenih skupova na pravu $l_{\boldsymbol{v}}$.

Definišimo preslikavanje $f : S^{d-1} \to \mathbb{R}^d$ po komponentama gde je $f_i(\boldsymbol{v}) := \langle m_i(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle$ (orijentisano rastojanje tačke $m_i(\boldsymbol{v})$ od koordinatnog

[4]Navodimo d-dimenzionalnu verziju Helijeve teoreme.

Teorema 3.40 (Helijeva teorema)**.** *Neka je $X_1, ..., X_n$ konačna kolekcija konveksnih podskupova $\mathbb{R}^d$ pri čemu je $n > d+1$. Ako je presek svakih $d+1$ skupova iz ove kolekcije neprazan, onda čitava kolekcija ima neprazan presek, tj. $\bigcap_{i=1}^n X_i \neq \emptyset$.*

početka, to jest, znak zavisi od toga da li su $\boldsymbol{v}$ i $m_i(\boldsymbol{v})$ isto usmereni). Ovako definisano preslikavanje f je antipodalno. Tvrdimo da postoji vektor $\boldsymbol{v} \in S^{d-1}$ takav da je $f_1(\boldsymbol{v}) = f_2(\boldsymbol{v}) = ... = f_d(\boldsymbol{v})$. Definišimo pomoćno preslikavanje $g : S^{d-1} \to \mathbb{R}^{d-1}$ gde je $g_i(\boldsymbol{v}) = f_i(\boldsymbol{v}) - f_d(\boldsymbol{v})$ za $i = 1, 2, ..., d-1$. Preslikavanje g je takođe antipodalno i prema teoremi Borsuk–Ulama dobijamo da postoji $\boldsymbol{v} \in S^{d-1}$ takav da $g(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, odnosno $f_1(\boldsymbol{v}) = f_2(\boldsymbol{v}) = ... = f_d(\boldsymbol{v})$. Za ovakvo $\boldsymbol{v}$ se sve središnje tačke $m_i(\boldsymbol{v})$ za $i = 1, 2, ..., d$ poklapaju, pa hiperravan koja je sadrži i ortogonalna je na $l_{\boldsymbol{v}}$ seče sve skupove iz familije $\bigcup_{i=1}^{d} \mathcal{C}_i$. □

Dokaz teoreme 3.38. Pretpostavimo da postoji d-bojenje Knezerovog grafa $KG(\mathcal{F})$. To znači da je moguće grupisati skupove iz sistema $\mathcal{F}$ u particije $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_d$ tako da bilo koja dva skupa iz iste particije imaju neprazan presek (svaku particiju čine npr. isto obojeni skupovi iz sistema $\mathcal{F}$). Postavimo elemente skupa X u $\mathbb{R}^d$ tako da se nikojih $d+1$ tačaka ne nalazi na istoj hiperravni. Definišemo d familija konveksnih skupova u $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{C}_i := \{\mathrm{conv}(F) : F \in \mathcal{F}_i\}.$$

Na osnovu leme 3.39 primenjene na ove familije dobijamo da postoji hiperravan h takva da seče sve konveksne omotače skupova $F \in \mathcal{F}$. Na kraju obojimo tačke skupa X sa jedne strane hiperravni h u crveno, a sa tačke sa druge strane u plavo. Tačke koje se eventualno nalaze na h obojimo u belo (to će nam biti tačke iz skupa Y u definiciji defekta m-obojivosti). Belih tačaka ima najviše d na osnovu uslova o rasporedu tačaka iz X u $\mathbb{R}^d$. Dakle, $cd_2(\mathcal{F}) \leq d$, što je i trebalo pokazati. □

Primetimo da se teorema 3.38 „lepo slaže" sa tvrđenjem 3.37. Naime, ako se sistem $\mathcal{F}$ sastoji od svih k-točlanih podskupova skupa $[n]$ gde $n \geq 2k$, vidimo da brisanjem bilo kojih $n - 2k + 1$ tačaka dobijamo sistem k-točlanih podskupova $(2k-1)$-elementnog skupa. Kako god obojili njegove elemente u dve boje, postojaće bar k isto obojenih elemenata, pa samim tim i monohromatski skup iz novodobijenog sistema, odnosno $\mathrm{cd}_2(\mathcal{F}) \geq n - 2k + 2$.

3.4 Brauverova teorema o fiksnoj tački

Sledeća teorema je jedno od najpoznatijih tvrđenja u topologiji. Cilj ovog poglavlja je da pokažemo vezu između Brauverove teoreme o fiksnoj tački i teoreme Borsuk–Ulama. Naime, pokazaćemo dva načina za njeno dokazivanje. Prvi dokaz je potpuno elementaran i koristi verziju (BU2) teoreme Borsuk–Ulama, a može se pronaći u [30], dok drugi sledi iz (BU4) gde se na osnovu pretpostavke da ne važi tvrđenje Brauverove teoreme na pogodan način konstruiše preslikavanje čije su osobine u kontradikciji sa tvrđenjem (BU4) (videti [26]). Treba napomenuti da, iako je Brauverova teorema posledica teoreme Borsuk–Ulama, hronološki gledano njen prvi dokaz je objavljen nešto više od 20 godina pre dokaza teoreme Borsuk–Ulama.

Teorema 3.41 (Brauverova teorema o fiksnoj tački)**.** *Neka je $f : B^n \to B^n$ neprekidno preslikavanje. Tada f ima fiksnu tačku, odnosno postoji $\boldsymbol{x} \in B^n$ takvo da je $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.*

Popularno tumačenje teoreme je dato kroz sledeći primer. Zamislimo da smo promešali kafu u šoljici. Tada sa sigurnošću znamo da se neki (beskonačno mali) delić zapemine kafe nakon mešanja vratio na isto mesto u šoljici na kom je bio pre mešanja. Specijalan slučaj teoreme za $n = 3$ dokazao je holandski matematičar Lojcen E. J. Brauver 1909. godine, a kompletan dokaz za sve dimenzije je 1910. godine dao francuski matematičar Žak Adamar. Brauver je 1912. godine dao drugi dokaz za sve dimenzije.

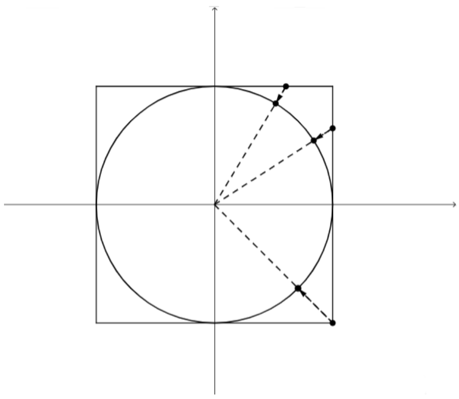
Ideja dokaza da prevedemo problem na „jezik” teoreme Borsuk–Ulama. Želimo da konstruišemo pogodno preslikavanje g takvo da će postojanje antipodalnih tačaka $\boldsymbol{x}$ i $-\boldsymbol{x}$ takvih da je $g(\boldsymbol{x}) = g(-\boldsymbol{x})$ implicirati postojanje fiksne tačke za f.

Dokaz teoreme 3.41. Kao što smo napomenuli, želimo da definišemo preslikavanje $g : S^n \to \mathbb{R}^n$. Za potrebe ovog dokaza je zgodnije posmatrati jediničnu loptu B^n u $||\cdot||_\infty$ normi, to jest hiperkocku $[-1, 1]^n$. Takođe, sa S^n ćemo označavati rub hiperkocke $[-1, 1]^{n+1}$, odnosno

$$S^n = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \text{ i } \max_{i\in[n+1]} |x_i| = 1\}.$$

Primetimo da teoremu Borsuk–Ulama možemo primeniti i na ovako definisanu sferu jer između standardne n-sfere i n-sfere u normi $||\cdot||_\infty$ postoji homeomorfizam (slika 21) takav da očuvava antipode (odnosno slike antipodalnih tačaka su antipodalne).

Uvedimo oznake S^n_g i S^n_d za gornju i donju stranu omotača hiperkocke S^n (iako nepravilno, u nastavku ćemo radi jednostavnije terminologije

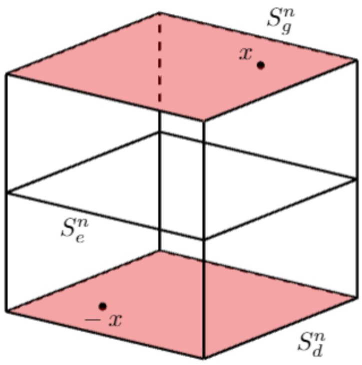


Slika 21: Homeomorfizam između n-sfere u normi $||\cdot||_\infty$ i standardne n-sfere.

koristiti izraz *kocka* za telo S^n bez opasnosti da dođe do zabune). Preciznije,

$$S^n_g := \{\boldsymbol{x} \in S^n : x_{n+1} = 1\},$$
$$S^n_d := \{\boldsymbol{x} \in S^n : x_{n+1} = -1\}.$$

Ostalih $2n$ strana formiraju središnji pojas S^n_p (slika 22).



Slika 22: Gornja i donja strana 2-sfere u normi $||\cdot||_\infty$ i njen ekvator.

Jasno, svaka strana kocke S^n je homeomorfna lopti B^n. Ovu činjenicu ćemo iskoristiti tako što će preslikavanje g biti definisano tako da bude antipodalno (to jest da je $g(-\boldsymbol{x}) = -g(\boldsymbol{x})$ za sve $\boldsymbol{x} \in S^n$) i različito od nule na središnjem pojasu. Primenjujući teoremu Borsuk–Ulama (BU2) dobijamo da postoji $\boldsymbol{x}_0 \in S^n$ takvo da je $g(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$ i da (bez umanjenja opštosti) $\boldsymbol{x}_0 \in S^n_g$.

Neka je zatim $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje definisano sa $p(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n)$ (dakle, p zanemaruje poslednju koordinatu argumenta). Definišimo preslikavanje $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$ na S^n_g i S^n_d kao

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} p(\boldsymbol{x}) - f(p(\boldsymbol{x})), & \boldsymbol{x} \in S^n_g; \\ p(\boldsymbol{x}) + f(-p(\boldsymbol{x})), & \boldsymbol{x} \in S^n_d. \end{cases}$$

Kako je $-p(\boldsymbol{x}) = p(-\boldsymbol{x})$ i p i f su neprekidni, dobijamo da je g neprekidno i $-g(\boldsymbol{x}) = g(-\boldsymbol{x})$. Ako uspemo da proširimo g neprekidno na S^n_p tako da i tamo bude antipodalno i različito od nule, dobićemo da je $\mathbf{0} = p(\boldsymbol{x}_0) - f(p(\boldsymbol{x}_0))$, gde $\boldsymbol{x}_0 \in S^n_g$, odnosno da je $p(\boldsymbol{x}_0)$ fiksna tačka preslikavanja f.

Ukoliko bismo samo linearno dodefinisali g na središnjem pojasu kocke od S^n_g do S^n_d, ne bismo mogli osigurati da će biti $g \neq \mathbf{0}$ svuda na S^n_p. U tom slučaju ćemo prvo pogodno definisati g na „ekvatoru” S^n_e gde je

$$S^n_e := \{\boldsymbol{x} \in S^n : x_{n+1} = \mathbf{0}\}$$

i zatim je linearno dodefinisati od ekvatora ka S^n_g i S^n_d pritom garantujući da g neće uzeti vrednost $\mathbf{0}$ na S^n_p. Do kraja dokaza biće nam potrebno nekoliko pomoćnih lema.

Lema 3.42. *Neka je F bočna strana kocke S^n. To jest, postoji $1 \leq k \leq n$ tako da je, za svako $\boldsymbol{x} \in F$, x_k konstantno i jednako $+1$ ili -1. Tada je za svako $x \in F \cap (S^n_g \cup S^n_d)$ koordinatna funkcija $g_k(\boldsymbol{x})$ jednaka nuli ili je istog znaka kao x_k.*

Dokaz. Iz definicije preslikavanja g vidimo da je

$$g_k(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} x_k - f_k(p(\boldsymbol{x})), & \boldsymbol{x} \in F \cap S^n_g; \\ x_k + f_k(-p(\boldsymbol{x})), & \boldsymbol{x} \in F \cap S^n_d. \end{cases}$$

Pošto je kodomen preslikavanja f jedinična n-kocka $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq 1\}$, znamo da je $|f_k| \leq 1$. Dakle, ako je $x_k = 1$ (tj. $\boldsymbol{x} \in S^n_g$) dobijamo da je $g_k(\boldsymbol{x}) \geq 0$ za $\boldsymbol{x} \in F \cap (S^n_g \cup S^n_d)$ i ako je $x_k = -1$ (tj.$\boldsymbol{x} \in S^n_d$) imamo $g_k(\boldsymbol{x}) \leq 0$ za $\boldsymbol{x} \in F \cap (S^n_g \cup S^n_d)$. □

Sada možemo definisati g na S_e^n na sledeći način

$$g(\boldsymbol{x}) := p(\boldsymbol{x}) + \frac{g(x_1, ..., x_n, -1) + g(x_1, ..., x_n, 1)}{2}, \qquad \text{za } \boldsymbol{x} \in S_e^n. \quad (3.10)$$

Vidimo da je $g(-\boldsymbol{x}) = -g(\boldsymbol{x})$ i na ekvatoru.

Lema 3.43. *Za sve $\boldsymbol{x} \in S_e^n$, ako je $|x_k| = 1$, tada je $g_k(\boldsymbol{x})$ različito od nule i istog je znaka kao x_k.*

Dokaz. Iz leme 3.42 vidimo da, ako je $|x_k| = 1$, g_k je istog znaka kao x_k na S_g^n i S_d^n. Iz (3.10) dobijamo da je

$$g_k(\boldsymbol{x}) = x_k + \frac{g_k(x_1, ..., x_n, -1) + g_k(x_1, ..., x_n.1)}{2}$$

pa je $g_k(\boldsymbol{x})$ različito od nule na S_e^n i istog je znaka kao x_k. □

Kako smo osigurali da g na ekvatoru bude različito od nule (bar u odgovarajućoj koordinati x_k i istog znaka kao x_k u toj koordinati), možemo neprekidno dodefinisati g na ostatak pojasa S_p^n linearno od ekvatora ka gornjoj i donjoj strani. Odnosno, za $0 \leq x_{n+1} \leq 1$ imamo

$$g(\boldsymbol{x}) = x_{n+1} g(x_1, ..., x_n, 1) + (1 - x_{n+1}) g(x_1, ..., x_n, 0). \quad (3.11)$$

Sa druge strane, za $-1 \leq x_{n+1} \leq 0$ imamo

$$g(\boldsymbol{x}) = -x_{n+1} g(x_1, ..., x_n, -1) + (1 + x_{n+1}) g(x_1, ..., x_n, 0). \quad (3.12)$$

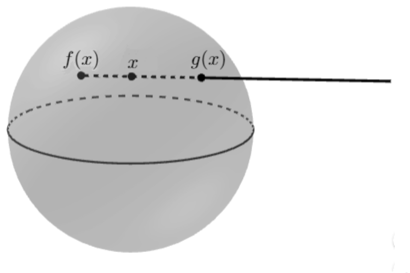
Lema 3.44. *Ako je $|x_{n+1}| < 1$, onda je $g(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$.*

Dokaz. Kako je $|x_{n+1}| \neq 1$, onda se $\boldsymbol{x}$ nalazi na nekoj od bočnih strana, te postoji k tako da je $x_k = \pm 1$. Upravo je koordinatna funkcija g_k različita od nule (pa i g). Znamo da su izrazi $1 - x_{n+1}$ i $1 + x_{n+1}$ strogo pozitivni. Takođe, $g(x_1, ..., x_n, \pm 1)$ i $g_k(x_1, ..., x_n, 0)$ su istog znaka kao x_k pri čemu je drugi izraz strogo različit od nule. Na osnovu (3.11) i (3.12) vidimo da je $g_k(\boldsymbol{x}) \neq 0$ i da je istog znaka kao x_k. □

Preslikavanje g je antipodalno na S^n pa nam teorema Borsuk–Ulama (BU2) garantuje postojanje tačke $\boldsymbol{x} \in S^n$ tako da važi $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ i bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti $\boldsymbol{x} \in S_g^n$. Imajući u vidu definiciju preslikavanja g na S_g^n, dobijamo da je $\boldsymbol{y} := p(\boldsymbol{x})$ fiksna tačka za f, čime je teorema dokazana. □

Napomenimo da postoji i znatno brži i elegantniji način da se dokaže Brauverova teorema o fiksnoj tački pomoću verzije (BU4) teoreme Borsuk–Ulama.

Dokaz teoreme 3.41 iz (BU4). Pretpostavimo da je preslikavanje $f : B^n \to B^n$ neprekidno takvo da ne poseduje fiksnu tačku. Definišimo preslikavanje $g : B^n \to S^{n-1}$ gde je $g(\boldsymbol{x})$ tačka preseka sfere S^{n-1} i poluprave koja polazi iz $f(\boldsymbol{x})$ i prolazi kroz $\boldsymbol{x}$. Restrikcija ovog preslikavanja na S^{n-1} je identičko preslikavanje. Međutim, ovako definisano g je u kontradikciji sa (BU4).



Slika 23: $g(\boldsymbol{x})$ je tačka preseka sfere S^{n-1} i poluprave koja polazi iz $\boldsymbol{x}$ i prolazi kroz $f(\boldsymbol{x})$.

□

3.5 Problem raznobojnih particija

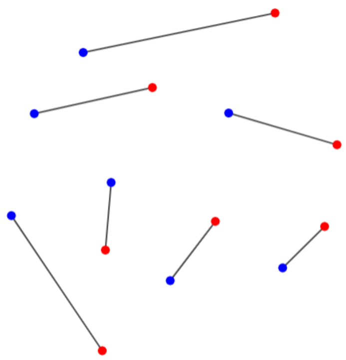
Motivaciju za sledeći problem nalazimo u zadatku koji se pojavio 1979. godine na prestižnom studentskom takmičenju Patnam (eng. *Putnam*) u Sjedinjenim Američkim Državama i Kanadi.

> *Problem*: Neka je A skup od $2n$ tačaka u ravni takav da nikoje tri nisu kolinearne. Neka je n tačaka iz A obojeno crvenom, a preostalih n plavom bojom. Dokazati ili opovrgnuti: moguće je povući n duži takvih da se nikoje dve ne seku, da su im krajnje tačke različito obojene tačke iz skupa A.

Nezavisno rešenje ovog zadatka od teoreme Borsuk–Ulama se može pronaći u [2] i [21], međutim Akijama i Alon su 1989. objavili rad u kojem su dokazali opštiju verziju ovog problema (videti [1]).

Teorema 3.45 (Akijama i Alon). *Neka je A skup $n \cdot d$ tačaka u opštem položaju u $\mathbb{R}^d$ i neka je $A = A_1 \cup \ldots \cup A_d$ particija skupa A na d disjunktnih delova od kojih je svaki kardinalnosti n. Tada postoji n po parovima disjunktnih $(d-1)$-simpleksa tako da svaki od njih sadrži tačno jedno teme iz svakog od skupova A_i.*

Dokaz. Dokaz radimo indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrđenje očigledno važi. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve $m < n$. Na osnovu posledice 3.6 postoji hiperravan h koja simultano deli svaki od skupova A_i na dva dela od kojih svaki sadrži $\lfloor n/2 \rfloor$ tačaka. Na osnovu indukcijske hipoteze u oba poluprostora postoji $\lfloor n/2 \rfloor$ disjunktnih simpleksa, što je kraj dokaza u slučaju da je n parno. Za n neparno, po jedna tačka iz svakog A_i pripada h, pa sve one generišu još jedan $(d-1)$-simpleks sadržan u h. $\square$



Slika 24: Na slici je prikazana situacija za $d = 2$ i $n = 7$ iz teoreme 3.45.

4 Generalizacija teoreme Borsuk–Ulama

Cilj ovog poglavlja je da dokažemo opštiju verziju teoreme Borsuk–Ulama (BU1) gde ćemo sada dozvoliti da domen preslikavanja f bude rub proizvoljnog kompaktnog i konveksnog podskupa prostora $\mathbb{R}^d$. Dokaz ovog tvrđenja izveli su Bajmoci i Baranj u radu [5]. Pre dokaza glavne teoreme uvedimo potrebne definicije i dokažimo nekoliko pomoćnih tvrđenja koja će nam biti od koristi.

Teorema 4.1 (Radon)**.** *Svaki skup $X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_m\}$ u $\mathbb{R}^d$ gde je $m \geq d+2$ se može particionisati na dva podskupa čiji konveksni omotači imaju neprazan presek.*

Dokaz. Posmatrajmo vektore $\boldsymbol{b}_i := (\boldsymbol{x}_i, 1)$, $i = 1, 2, ..., m$. Imamo $d+2$ vektora u $(d+1)$-dimenzionalnom prostoru pa zaključujemo da su oni linearno zavisni, to jest da postoje $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ koji nisu svi jednaki nuli tako da

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{b}_i = 0.$$

Definišimo skupove $I := \{i : \alpha_i \geq 0\}$ i $J := \{j : \alpha_j < 0\}$. Pošto je 1 poslednja koordinata vektora $\boldsymbol{b}_i$, dobijamo

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = -\sum_{j \in J} \alpha_j = \alpha \neq 0.$$

Tada vektor

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\alpha} \boldsymbol{x}_i = \sum_{j \in J} \frac{-\alpha_j}{\alpha} \boldsymbol{x}_j$$

pripada konveksnim omotačima skupova $\{\boldsymbol{x}_i : i \in I\}$ i $\{\boldsymbol{x}_j : j \in J\}$, što je i trebalo dokazati. □

Verzija teoreme Radona se može dati i u sledećem obliku.

Teorema 4.2 (Radon)**.** *Neka je $P \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ konveksan politop čija je unutrašnjost neprazna. Označimo sa $V(P)$ skup svih temena politopa P. Ako je $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ linearno preslikavanje, onda postoje disjunktni skupovi $B, C \subseteq V(P)$ takvi da*

$$f(\mathrm{conv}(B)) \cap f(\mathrm{conv}(C)) \neq \emptyset.$$

□

Pokazaćemo da važi i neprekidna verzija teoreme 4.2.

Teorema 4.3 (Radon)**.** *Neka je $P \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ konveksni politop čija je unutrašnjost neprazna. Ako je $f : \partial P \to \mathbb{R}^d$ neprekidno preslikavanje, onda postoje disjunktne strane, B i C politopa P takve da je*

$$f(B) \cap f(C) \neq \emptyset.$$

Pre nego što se upustimo u dokazivanje teoreme 4.3 navedimo jednostavnu posledicu.

Posledica 4.4. *Neka je σ^{d+1} $(d+1)$-simpleks. Sa $L_1, L_2, ..., L_{d+2}$ označimo njegove d-strane. Ako je $f : \partial\sigma^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ neprekidno preslikavanje, onda*

$$\bigcap_{i=1}^{d+2} f(L_i) \neq \emptyset.$$

Dokaz. Primetimo da, ako su B i C disjunktne strane simpleksa σ^{d+1}, onda za svako $i \in \{1, 2, ..., d+2\}$ važi $B \subseteq L_i$ ili $C \subseteq L_i$ (ili oba). Na osnovu teoreme 4.3 dobijamo da je presek $\bigcap_{i=1}^{d+2} f(L_i)$ neprazan. $\square$

Uvedimo oznake koje će biti od koristi u nastavku. Neka su dati konveksan, kompaktan skup $C \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ čija je unutrašnjost neprazna i vektor $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $a \in \mathbb{R}^{d+1}$. Definišimo

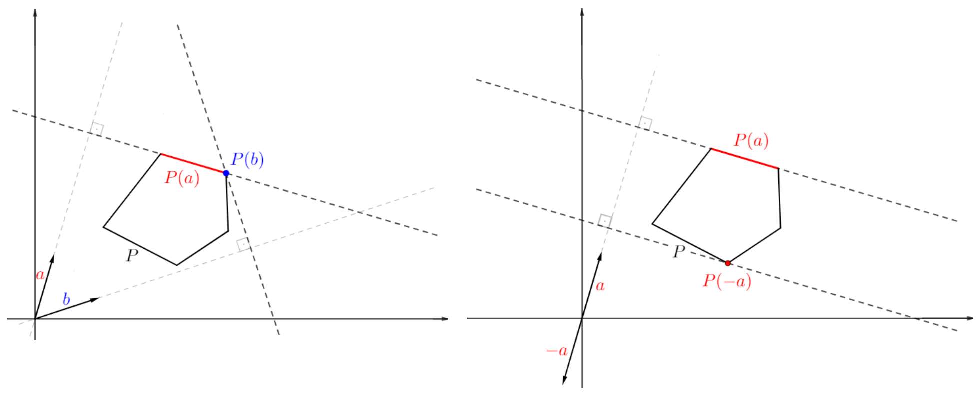
$$C(\boldsymbol{a}) := \{\boldsymbol{x} \in C : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = \max_{t \in C} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t} \rangle\}.$$

Primetimo da je geometrijsko mesto tačaka iz skupa $C(\boldsymbol{a})$ presek hiperravni normalne na vektor $\boldsymbol{a}$ i skupa C. Za dve tačke $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ kažemo da su naspramne ako za neko $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{d+1}$ važi $\boldsymbol{x} \in C(\boldsymbol{a})$ i $\boldsymbol{y} \in C(-\boldsymbol{a})$. U slučaju da je C politop, $C(\boldsymbol{a})$ je njegova strana. Tada za strane $C(\boldsymbol{a})$ i $C(-\boldsymbol{a})$ kažemo da su naspramne.

Teorema 4.5. *Neka su dati politop $P \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ čija je unutrašnjost neprazna i neprekidno preslikavanje $f : \partial P \to \mathbb{R}^d$. Tada postoje naspramne strane B i C politopa P tako da je presek $f(B) \cap f(C)$ neprazan.*

Jasno je da su naspramne strane politopa P disjunktne pa teorema 4.5 implicira teoremu 4.3. Dokažimo dalje reformulisanu verziju teoreme 4.5. Na osnovu njega imamo dokaz teoreme 4.3, pa ćemo pokazati i opštiji oblik teoreme Borsuk–Ulama (BU1).

Teorema 4.6. *Neka su dati politop $P \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ čija je unutrašnjost neprazna i neprekidno preslikavanje $f : \partial P \to \mathbb{R}^d$. Tada postoje naspramne tačke $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ iz P (ujedno i $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \partial P$) takve da $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$.*



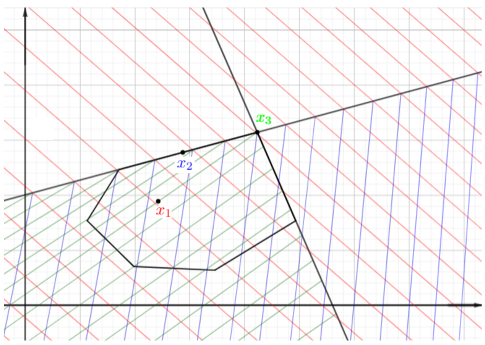
Slika 25: Na slici levo su prikazani skupovi $P(\boldsymbol{a})$ i $P(\boldsymbol{b})$ za date vektore $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u slučaju da je C iz definicije politop P. Na slici desno su prikazane naspramne strane politopa P koje odgovaraju vektorima $\boldsymbol{a}$ i $-\boldsymbol{a}$.

Lema 4.7. *Neka je P politop u $\mathbb{R}^d$ i $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_n \in P$, $n \in \mathbb{N}$ i neka je* $\lim \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$. *Tada postoji $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$ takvi da $\boldsymbol{x}_n + \varepsilon \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \in P$ za svako $n > N$.*

Dokaz. Primetimo da je tvrđenje tačno za svaki konus C (na mestu politopa P) sa temenom u $\boldsymbol{x}$ (za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$). Samim tim, tačno je i za $C \cap B(\boldsymbol{x}, \delta)$.

Međutim, $P \cap B(\boldsymbol{x}, \delta) = C \cap B(\boldsymbol{x}, \delta)$ za dovoljno malo δ gde je

$$C := \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d : \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}), \lambda > 0, \boldsymbol{w} \in P\}.$$



Slika 26: Na slici su prikazani konusi C za različite $\boldsymbol{x}_i$.

$\square$

Dokaz teoreme 4.6. Neka je $Q := P - P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{d+1} : \boldsymbol{z} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{w}$ gde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w} \in P\}$. Q je politop sa nepraznom unutrašnjošću i centralno je simetričan u odnosu na koordinatni početak. Za $\boldsymbol{x} \in Q$ definišimo

$$h(\boldsymbol{x}) = \max\{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{w} \text{ gde } \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in P\}$$

gde se maksimum na $\mathbb{R}^{d+1}$ posmatra u odnosu na leksikografsko uređenje na $\mathbb{R}^{d+1}$. Preslikavanje $h : Q \to P$ je dobro definisano i vektor $\boldsymbol{w}$ iz definicije h koji odgovara vektoru $h(\boldsymbol{x})$ je jednak $h(-\boldsymbol{x})$ (dakle, pritom je $\boldsymbol{x} = h(\boldsymbol{x}) - h(-\boldsymbol{x})$). Tvrdimo da je h neprekidno. Posmatrajmo tačke $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n \in Q$, $n \in \mathbb{N}$ takve da $\lim \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$. Predstavimo $\boldsymbol{x}_n$ kao $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{w}_n$ gde je $\boldsymbol{z}_n = h(\boldsymbol{x}_n)$. Kako je $\boldsymbol{z}_n$ ograničen niz, postoji podniz $n_i, i \in N$, takav da $\boldsymbol{z}_{n_i}$ konvergira (pa samim tim i $\boldsymbol{w}_{n_i}$). Neka su $\boldsymbol{z} = \lim \boldsymbol{z}_{n_i}$ i $\boldsymbol{w} = \lim \boldsymbol{w}_{n_i}$. Tada je $\boldsymbol{x} = \lim \boldsymbol{x}_{n_i} = \lim(\boldsymbol{z}_{n_i} - \boldsymbol{w}_{n_i}) = \lim \boldsymbol{z}_{n_i} - \lim \boldsymbol{w}_{n_i} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{w}$. Tvrdimo da je $h(\boldsymbol{x}) = \lim h(\boldsymbol{x}_{n_i}) = \lim \boldsymbol{z}_{n_i} = \boldsymbol{z}$.

Pretpostavimo suprotno, $\boldsymbol{z} < h(\boldsymbol{x})$. Prema lemi 4.7 postoji dovoljno malo ε tako da za veliko i važi

$$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}_{n_i} + \varepsilon(h(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}) \in P \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w}_{n_i} + \varepsilon(h(-\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}) \in P.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}' - \boldsymbol{w}' &= \boldsymbol{z}_{n_i} + \varepsilon(h(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{w}_{n_i} - \varepsilon(h(-\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{z}_{n_i} - \boldsymbol{w}_{n_i} + \varepsilon(h(\boldsymbol{x}) - h(-\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{w})) \\ &= \boldsymbol{z}_{n_i} - \boldsymbol{w}_{n_i} + \varepsilon(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}_{n_i} - \boldsymbol{w}_{n_i} = \boldsymbol{x}_{n_i}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Iz definicije preslikavanja h, (4.1) i činjenice da je $\boldsymbol{z}' > \boldsymbol{z}_{n_i}$ dobijamo $\boldsymbol{z}_{n_i} \neq h(\boldsymbol{x}_{n_i})$, što je kontradikcija. Dakle $\boldsymbol{z} = h(\boldsymbol{x})$. Kako svaki konvergentni podniz niza $\boldsymbol{z}_n$ konvergira ka $h(\boldsymbol{x})$, to je $\lim \boldsymbol{z}_n = h(\boldsymbol{x})$ pa je h neprekidno.

Primetimo da, ako $\boldsymbol{x} \in Q(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in Q : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = \max_{\boldsymbol{t} \in Q} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t} \rangle\}$, onda $h(\boldsymbol{x}) \in P(\boldsymbol{a})$ i $h(-\boldsymbol{x}) \in P(-\boldsymbol{a})$. Zaista, ako $\boldsymbol{x} \in Q(\boldsymbol{a})$, tada $\max_{\boldsymbol{t} \in Q} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle$. Znamo $\boldsymbol{x} = h(\boldsymbol{x}) - h(-\boldsymbol{x})$ gde $h(\boldsymbol{x}), h(-\boldsymbol{x}) \in P$, pa je

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a}, h(\boldsymbol{x}) \rangle + \langle -\boldsymbol{a}, h(-\boldsymbol{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = \max_{\boldsymbol{t} \in Q} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{t} \rangle &= \max_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in P} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \max_{\boldsymbol{u} \in P} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle + \max_{\boldsymbol{v} \in P} \langle -\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle. \end{aligned}$$

Zaključujemo $\langle \boldsymbol{a}, h(\boldsymbol{x}) \rangle = \max_{\boldsymbol{u} \in P} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle$ i $\langle -\boldsymbol{a}, h(-\boldsymbol{x}) \rangle = \max_{\boldsymbol{v} \in P} \langle -\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle$, to jest, $h(\boldsymbol{x}) \in P(\boldsymbol{a})$ i $h(-\boldsymbol{x}) \in P(-\boldsymbol{a})$. Odatle dobijamo da za $\boldsymbol{x} \in \partial Q$ (tj.

$\exists \boldsymbol{a}$ tako da $\boldsymbol{x} \in Q(\boldsymbol{a})$) imamo $h(\boldsymbol{x}), h(-\boldsymbol{x}) \in \partial P$ (jer $P(\boldsymbol{a}), P(-\boldsymbol{a}) \subseteq \partial P$), dakle $h : \partial Q \to \partial P$.

Definišimo preslikavanje $g : \partial Q \to \mathbb{R}^d$ tako da za $\boldsymbol{x} \in \partial Q$ važi $g(\boldsymbol{x}) = f(h(\boldsymbol{x}))$ (gde je f preslikavanje iz formulacije teoreme 4.6). Primetimo da je g dobro definisano i neprekidno. Uslov teoreme Borsuk–Ulama je ispunjen za g (umesto S^d ovde imamo ∂Q gde je Q simetričan u odnosu na koordinatni početak), pa postoji $\boldsymbol{x} \in \partial Q$ tako da $g(\boldsymbol{x}) = g(-\boldsymbol{x})$.

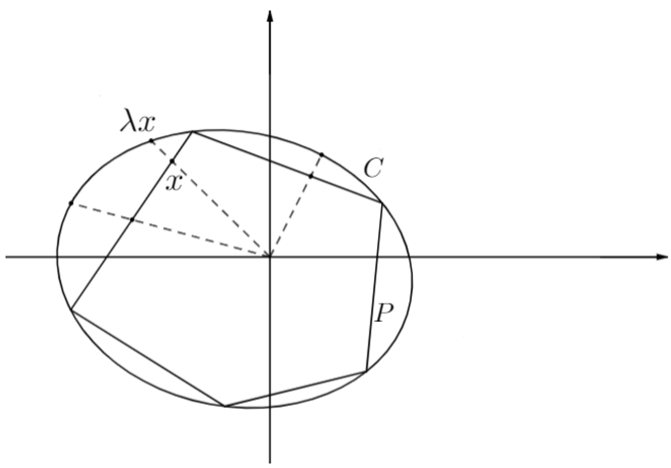
Znamo da postoji $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{d+1}$ takvo da $\boldsymbol{x} \in Q(\boldsymbol{a})$. Tada $\boldsymbol{z} = h(\boldsymbol{x}) \in P(\boldsymbol{a})$ i $\boldsymbol{w} = h(-\boldsymbol{x}) \in P(-\boldsymbol{a})$, odnosno, $\boldsymbol{z}$ i $\boldsymbol{w}$ su naspramne tačke u P. Pritom važi i

$$f(\boldsymbol{z}) = f(h(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{x}) = g(-\boldsymbol{x}) = f(h(-\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{w})$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Teorema 4.8 (Generalizacija teoreme Borsuk–Ulama)**.** *Neka je $C \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ konveksan, kompaktan skup čija je unutrašnjost neprazna. Ako je $f : \partial C \to \mathbb{R}^d$ neprekidno preslikavanje, onda postoje naspramne tačke $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ u C takve da je $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$.*

Dokaz. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $\mathbf{0} \in \mathrm{int}(C)$. Posmatrajmo politop P upisan u C (takav da $V(P) \subseteq \partial C$) pri čemu takođe $\mathbf{0} \in \mathrm{int}(P)$. Definišimo neprekidno preslikavanje $f_P : \partial P \to \mathbb{R}^d$ tako da $f_P(\boldsymbol{x}) = f(\lambda \boldsymbol{x})$ gde je $\lambda > 0$ jedinstveni pozitivan realan broj takav da $\lambda \boldsymbol{x} \in \partial C$.



Slika 27: Preslikavanje f_P je definisano tako da $f_P(\boldsymbol{x}) = f(\lambda \boldsymbol{x})$.

Prema teoremi 4.6 postoje naspramne tačke, $\boldsymbol{z}_P$ i $\boldsymbol{w}_P$ u P takve da $f_P(\boldsymbol{z}_P) = f_P(\boldsymbol{w}_P)$. Izaberimo dalje niz politopa $P_1, P_2, ...$ takav da $\mathbf{0} \in \mathrm{int}(P_n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$ pri čemu važi $V(P_n) \subseteq V(P_{n+1})$ i $\partial C \cap (\bigcup P_n)$ je gust u ∂C. Kao i ranije, vidimo da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje naspramne tačke $\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{w}_n$ u P_n takve da $f_{P_n}(\boldsymbol{z}_n) = f_{P_n}(\boldsymbol{w}_n)$. Kako su $\boldsymbol{z}_n$ i $\boldsymbol{w}_n$ naspramne u P_n, postoji vektor $\boldsymbol{a}_n \in S^d$ takav da $\boldsymbol{z}_n \in P_n(\boldsymbol{a}_n)$ i $\boldsymbol{w}_n \in P_n(-\boldsymbol{a}_n)$. Kako je C kompaktan, možemo pretpostaviti da $\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{w}_n$ i $\boldsymbol{a}_n$ konvergiraju ka granicama $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ i $\boldsymbol{a}$ redom. Znamo da $\langle \boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{a}_n \rangle = \max_{t \in P_n} \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}_n \rangle$ i $\langle \boldsymbol{w}_n, -\boldsymbol{a}_n \rangle = \max_{t \in P_n} \langle \boldsymbol{t}, -\boldsymbol{a}_n \rangle$. Puštajući limes kad $n \to \infty$ i imajući u vidu da je $\partial C \cap (\bigcup P_n)$ gust u ∂C dobijamo da su tačke $\boldsymbol{z}$ i $\boldsymbol{w}$ naspramne u C pri čemu važi $f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{w})$ (drugim rečima, $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{a} \rangle = \lim \langle \boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{a}_n \rangle = \lim \max_{t \in P_n} \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}_n \rangle = \max_{t \in \partial C} \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a} \rangle$, zatim $\langle \boldsymbol{w}, -\boldsymbol{a} \rangle = \lim \langle \boldsymbol{w}_n, -\boldsymbol{a}_n \rangle = \lim \max_{t \in P_n} \langle \boldsymbol{t}, -\boldsymbol{a}_n \rangle = \max_{t \in \partial C} \langle \boldsymbol{t}, -\boldsymbol{a} \rangle$). $\square$

Literatura

[1] J. Akiyama & N. Alon, Disjoint simplices and geometric hypergraphs, *Annals of the New York Academy of Sciences* **555** (1989), 1-3.

[2] G. L. Alexanderson, L. F. Klosinski & L. C. Larson, The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965-1984, *The Mathematical Association of America* (1985).

[3] N. Alon, Splitting necklaces, *Advances in Mathematics* **63** (1987), 247-253.

[4] N. Alon & D. West, The Borsuk–Ulam theorem and bisection of necklaces, *Proceedings of the American Mathematical Society* **98** (1986), 623-628.

[5] E. G. Bajmóczy & I. Bárány, On a common generalization of Borsuk's and Radon's theorem, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **34** (1979), 347–350.

[6] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Mathematicae* **20** (1933), 177-190.

[7] S. S. Cairns, Introductory Topology, *The Ronald Press Company, New York* (1961).

[8] V. L. Dol'nikov, Transversals of families of sets, *Studies in the theory of functions of several real variables, Yaroslav. Gos. Univ., Yaroslavl'* **109** (1981), 30-36.

[9] J. Dougherty, Some applications of the Borsuk–Ulam theorem, *Math REU University of Chicago, Apprentice Program* 2017.

[10] C. H. Goldberg & D. B. West, Bisection of circle colorings, *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods* **6** No. 1 (1985), 93-106.

[11] J. E. Greene, A new short proof of Kneser's conjecture, *The American Mathematical Monthly* **109** (2002), 918-920.

[12] B. Grünbaum, Convex Polytopes, *Springer-Verlag New York, Inc.* (2003).

[13] L. Guth & N. H. Katz, On the Erdös distinct distance problem in the plane, *Annals of Mathematics* **181** (2015), 155-190.

[14] C. G. A. Harnack, Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven, *Math. Ann.* **10** (1876).

[15] J. Harris, Algebraic Geometry, A First Course, *Springer-Verlag* (1992).

[16] C. R. Hobby & J. R. Rice, A moment problem in L_1 approximation, *Proceedings of the American Mathematical Society* **16** (1965), 665-670.

[17] M. Kano & J. Kynčl, The hamburger theorem, *Computational Geometry, Theory and Applications* **68** (2018), 167-173.

[18] M. S. Kurilić & A. Pavlović, Algebarska topologija, skripta (2018).

[19] H. Kaplan, J. Matoušek & M. Sharir, Simple proofs of classical theorems in discrete geometry via the Guth-Katz polynomial partitioning technique, *Discrete* & *Computational Geometry* **48** (2012), 499-517.

[20] M. Kneser, Aufgabe 360, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **58** (1955).

[21] L. C. Larson, Problem-Solving through Problems, *Springer-Verlag* (1983)

[22] A. A. Liapounoff, Sur les fonctions-vecteurs complètement additives, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **4** (1940), 465-478.

[23] L. Lovász, Kneser's Conjecture, Chromatic number and homotopy, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A **25** (1978), 319-324.

[24] L. Lyusternik & S. Shnirel'man, Topological methods in variational problems, *Issledowatelskii Institut Matematiki i Mechaniki pri O. M. G. U., Moscow* (1930).

[25] M. Marjanović & S. Vrećica, Topologija, *Zavod za udžbenike, Beograd* (2011).

[26] J. Matoušek, Using the Borsuk–Ulam Theorem, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg* (2003).

[27] S. Pilipović & D. Seleši, Mera i integral, *Zavod za udžbenike, Beograd* (2012).

[28] H. Steinhaus, Notatki: Z Topologii, *Mathesis Polska* **11** (1-2) (1938), 26-28.

[29] A. H. Stone & J. W. Tukey, Generalized sandwich theorems, *Duke Math. J.* **9** (1942).

[30] F. E. Su, Borsuk–Ulam implies Brouwer: A direct construction, *The American Mathematical Monthly* **104** (1997), 855-859.

[31] G. Ziegler, Lectures on Polytopes, *Springer-Verlag New York, Inc* (1995).

Biografija

Filip Blašković rođen je 2. jula 1997. godine u Kikindi. Osnovnu školu „Žarko Zrenjanin” u Kikindi završio je 2012. godine. Nakon završetka Gimnazije „Dušan Vasiljev” u Kikindi 2016. godine upisuje osnovne studije teorijske matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. U septembru 2019. godine završava osnovne studije sa prosečnom ocenom 10,0 i upisuje master studije teorijske matematike. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom sa prosečnom ocenom 10,0 i time stekao uslov za odbranu ovog rada.

Novi Sad, septembar 2021. Filip Blašković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj (RBR):

Identifikacioni broj (IBR):

Tip dokumentacije (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada (VR): Master rad

Autor (AU): Filip Blašković

Mentor (MN): dr Bojan Bašić

Naslov rada (NR): Teorema Borsuk–Ulama i primene

Jezik publikacije (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda (JI): srpski i engleski

Zemlja publikovanja (ZP): Srbija

Uže geografsko područje (UGP): Vojvodina

Godina (GO): 2021.

Izdavač (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3

Fizički opis rada (FO): 4 poglavlja/65 strana/31 referenca/28 slika

Naučna oblast (NO): Matematika

Naučna disciplina (ND): Diskretna matematika

Predmetna odrednica/ključne reči (PO): teorema Borsuk–Ulama, teorema o sendviču sa šunkom, problem podele ogrlice, Knezerov graf, Brauverova teorema o fiksnoj tački

UDK:
Čuva se (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku

Važna napomena (VN):

Izvod (IZ): Teorema Borsuk–Ulama je jedna od najpoznatijih teorema u algebarskoj topologiji čija formulacija glasi da za svako neprekidno preslikavanje iz n-dimenzionalne sfere S^n u n-dimenzionalan euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ postoje dve dijametralno suprotne tačke koje imaju istu sliku. U prvom pogalvlju uvedeni su osnovni pojmovi i tvrđenja koji su potrebni za razumevanje rada. U drugom poglavlju je dat kombinatorni dokaz teoreme Borsuk–Ulama i nekoliko njoj ekvivalentnih tvrđenja. U trećem delu je pokazana primena teoreme Borsuk–Ulama u rešavanju nekoliko problema (teorema o sendviču sa šunkom, problem podele ogrlice, hromatski broj Knezerovog grafa, Brauverova teorema o fikcnoj tački, problem raznobojnih particija). U četvrtom poglavlju je pokazana jedna generalizacija teoreme Borsuk–Ulama gde umesto domena S^n možemo posmatrati rub proizvoljnog konveksnog, kompaktnog skupa u $\mathbb{R}^{d+1}$ čija je unutrašnjost neprazna.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća (DP): 2.9.2021.

Datum odbrane (DO):

Članovi komisije (KO):
Predsednik: dr Rozalija Madaras Silađi, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Bojan Bašić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član: dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number (ANO):

Identification number (INO):

Document type (DT): Monograph type

Type of record (TR): Printed text

Contents Code (CC): Master's thesis

Author (AU): Filip Blašković

Mentor (MN): Bojan Bašić, PhD

Title (TI): The Borsuk–Ulam theorem and applications

Language of text (LT): Serbian (Latin)

Language of abstract (LA): Serbian and English

Country of publication (CP): Serbia

Locality of publication (LP): Vojvodina

Publication year (PY): 2021.

Publisher (PU): Author's reprint

Publication place (PP): Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3

Physical description (PD): 4 chapters/65 pages/31 references/28 pictures

Scientific field (SF): Mathematics

Scientific discipline (SD): Discrete mathematics

Subject/Key words (SKW): Borsuk–Ulam theorem, ham sandwich theorem, necklace splitting problem, Kneser graph, Brouwer fixed point theorem

UC:
Holding data (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics

Note (N):

Abstract (AB): The Borsuk–Ulam theorem is one of the most famous theorems in algebraic topology which states that every continuous function from an n-sphere S^n into Euclidean n-space $\mathbb{R}^n$ maps some pair of antipodal points to the same point. First we present the basic notions and theorems. In the second chapter we prove the Borsuk–Ulam theorem and some of its equivalent statements using combinatorial methods. In the third chapter we show how the Borsuk–Ulam theorem can be used to solve different problems in mathematics (the ham sandwich theorem, necklace splitting problem, chromatic number of Kneser graphs, Brouwer fixed point theorem, multicolored partitions). The thesis ends with a generalisation of the Borsuk–Ulam theorem where instead of the n-sphere we can take the boundary of an arbitrary convex, compact subset of $\mathbb{R}^{n+1}$ with nonempty interior for the domain of the continuous function.

Accepted by the Scientific Board on (ASB): September 2, 2021

Defended (DE):

Thesis defend board (DB):
President: Rozalija Madaras Silađi, PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Bojan Bašić, PhD, associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad, mentor
Member: Boris Šobot, PhD, associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad