Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Tanja Malinović

Topološke grupe

Master rad

Mentor
dr Boriša Kuzeljević

2021, Novi Sad

Predgovor

Algebra i topologija su dve fundamentalne grane matematike koje imaju komplementarne uloge. Algebra proučava sve vrste operacija i predstavlja osnovu za algoritme i rešavanje jednačina. Često, metode kojima se koristi su konačne prirode. Topologija proučava neprekidnost i konvergencije i pruža opšti okvir za proučavanje koncepta granica. Veliki deo topologije je posvećen radu sa beskonačnim skupovima. Zbog ove razlike algebra i topologija imaju jaku tendenciju da se proučavaju nezavisno. Međutim, u raznim primenama matematike kao što su funkcionalna analiza, dinamički sistemi, teorija reprezentacije i druge, prirodno je da algebra i topologija dolaze u dodir. Mnogi važni matematički objekti predstavljaju spoj algebarske i topološke strukture. Topološki prostori funkcija i uopšte linearni topološki prostori, grupe transformacija, topološke grupe i topološka polja su oblasti takve vrste.

Pravilo koje opisuje vezu između topologije i algebarske operacije je da operacija mora biti neprekidna. U ovom radu se prvenstveno bavimo proučavanjem veze topoloških osobina i algebarske strukture grupa.

Rad se sastoji od tri glave. U prvoj glavi dati su osnovni pojmovi i tvrđenja vezani za teoriju grupa i teoriju topoloških prostora koji će biti potrebni u nastavku rada. Uvodi se pojam topološkog faktor prostora i dokazuju se teoreme o istom.

U drugoj glavi dajemo definiciju topološke grupe i primere topologija koje poznate grupe kao što su aditivna grupa realnih brojeva, jedinična kružnica u kompleksnoj ravni, opšta linearna grupa stepena n nad $\mathbb{R}$, grupa kvaterniona i aditivna grupa $r-$ *adičkih* celih brojeva pretvaraju u topološke grupe. U ovom radu za topologije koje posmatramo na grupi pretpostavljamo da zadovolja-
vaju T_1 aksiomu separacije. U nekim literaturama ovaj uslov nije uzet kao pretpostavka, ali se zatim dokazuje ekvivalentnost $T_0 \Leftrightarrow T_1 \Leftrightarrow T_2$. U ovoj glavi takođe dajemo osnovne veze između algebarske i topološke strukture u topološkim grupama.

Centralni deo treće glave je poznata teorema *Birkhoff-Kakutani* koja daje dovoljan uslov za metrizabilnost topološke grupe. Bavimo se preslikavanjem pod nazivom *prednorma* pomoću kojeg se na topološkoj grupi koja zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti definiše metrika koja indukuje topologiju topološke grupe. Na kraju se bavimo i posledicama ove teoreme.

Zahvaljujem se članovima komisije za odbranu ovog rada, dr Milošu Kuriliću i dr Igoru Dolinki, na prenetom znanju tokom studija, kao i savetima prilikom pisanja ovog rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Boriši Kuzeljeviću na velikoj pomoći u stručnim sugestijama prilikom pisanja ovog rada.

Za kraj želim se zahvaliti svojoj majci i sestrama za neizmernu podršku i razumevanje.

Novi Sad, 2021. Tanja Malinović

Sadržaj

Glava 1

1 Uvod

U ovom poglavlju navodimo oznake koje ćemo koristiti i dajemo uvodne napomene. Predstavljamo pojmove i tvrđenja iz teorije grupa i topoloških prostora koji će nam biti potrebni za definisanje i izučavanje topoloških grupa. Za dokaze tvrđenja i više osobina predstavljenih pojmova dajemo reference. Pretpostavljamo da sve topologije koje posmatramo na topološkim grupama zadovoljavaju T_1 aksiomu separacije.

1.1 Skupovi i funkcije

Ako su A i B skupovi, sa $A \subset B$ označavamo da je A podskup skupa B. Ako je X skup, sa $\mathcal{P}(X)$ označavamo skup svih podskupova skupa X, koji se naziva partitivni skup od X. Ako je X skup i $A \subset X$, skup svih elemenata iz X koji nisu elementi skupa A se naziva komplement skupa A, u oznaci $X \setminus A$.
Ako je $f : X \to Y$ preslikavanje i $A \subset X$, skup $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$ se zove *direktna slika* skupa A. Za $B \subset Y$ skup $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$ je *inverzna slika* skupa B.
Neka je $f : X \to Y$. Za $A \subset X$ sa $f_{|A}$ označavamo *sirjektivnu restrikciju* f na A. To je funkcija $f_{|A} : A \to f[A]$ definisana sa $f_{|A}(x) = f(x)$ za sve $x \in A$. Preslikavanje $i : X \to X$ definisano sa $i(x) = x$ za sve $x \in X$ zovemo *identičko preslikavanje*.
Zadržavamo uobičajene oznake za skupove brojeva: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Obeležavamo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Kardinalni broj* skupa A označavamo sa $|A|$. Kardinalni broj $|\mathbb{N}|$ skupa prirodnih brojeva označavamo sa $\aleph_0$. Za skup A kažemo da je prebrojiv ako i samo ako $|A| = \aleph_0$.

Koristimo izraz familija za označavanje preslikavanja X koje neprazan skup indeksa I slika u nepraznu kolekciju skupova $\mathcal{X}$. Umesto $X(i)$ piše se X_i. Familija se označava sa $\{X_i : i \in I\}$. Skup I može biti proizvoljne kardinalnosti.

1.2 Teorija grupa

Za dokaze navedenih tvrđenja i više osobina navedenih pojmova čitaoca upućujemo na [7].

Definicija 1.2.1. Neka je $G \neq \emptyset$ i $\cdot : G \times G \to G$ binarna operacija na skupu G. Tada algebarsku strukturu $(G, \cdot)$ zovemo *grupa* ako postoji element $e \in G$ tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(G1) Za sve $a, b, c \in G$ važi: $\quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(G2) Za svako $a \in G$ važi: $\quad a \cdot e = e \cdot a = a$

(G3) Za svako $a \in G$ postoji $b \in G$ tako da: $\quad a \cdot b = b \cdot a = e$

Element e zovemo *neutralni element* grupe G i on je jedinstven. Lako se pokazuje da je element b iz $(G3)$ jedinstven, zovemo ga *inverz* elementa a i označavamo sa a^{-1}. Tada za element a kažemo da je *invertibilan.*
Kada se koristi multiplikativna notacija, to jest simbol $\cdot$ za operaciju grupe, uobičajeno je da se on izostavlja i zamenjuje konkatenacijom faktora, pa se tako umesto $a \cdot b$ piše ab.

Komutativne grupe, to jest grupe koje zadovoljavaju uslov

$$ab = ba$$

za sve $a, b \in G$ zovemo *Abelove grupe.*

U svakoj grupi G važe zakoni kancelacije (skraćivanja), to jest za sve $a, x, y \in G$ važi:

$$ax = ay \Rightarrow x = y$$
$$xa = ya \Rightarrow x = y$$

Lema 1.2.2. *U svakoj grupi G važi $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ za sve $a, b \in G$.*

Neka su A i B podskupovi grupe G, definišemo

$$AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\},$$

kao i

$$A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}.$$

Množenje podskupova je asocijativno, to jest važi $A(BC) = (AB)C$ i važi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Propozicija 1.2.3. *Za proizvoljne podskupove A, B, C grupe G važi :*

$$AB \cap C = \emptyset \Leftrightarrow A \cap CB^{-1} = \emptyset.$$

Definicija 1.2.4. Neka je G grupa. Za skup $A \subset G$ kažemo da je:

a) *simetričan* ako važi $A^{-1} = A$;

b) *invarijantan* ako važi $xAx^{-1} = A$ za sve $x \in G$.

Neka je G grupa. Za fiksiran element $a \in G$, preslikavanja $x \to xa$ i $x \to ax$ koja preslikavaju G u G, redom zovemo *desna* i *leva translacija* na G za a. Ova preslikavanja su bijekcije za svaki element $a \in G$. Preslikavanje $x \to x^{-1}$ koje preslikava G u G zovemo *invertovanje*, koje je takođe bijekcija.

Definicija 1.2.5. Neka je G grupa sa neutralnim elementom e i $\emptyset \neq H \subset G$. H zovemo *podgrupa* grupe G, u oznaci $H \leq G$, ako i samo ako važe uslovi:

(1) za sve $a, b \in H$ važi $ab \in H$;

(2) $e \in H$;

(3) za sve $a \in H$ važi a^{-1}.

Propozicija 1.2.6. *Neka je G grupa i $\emptyset \neq H \subset G$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) H je podgrupa

(2) $HH = H$ i $H^{-1} = H$

(3) $HH^{-1} \subset H$

Primer 1.2.7. *Centar grupe G* je skup svih onih elemenata iz G koji komutiraju sa svim elementima grupe G, dakle:

$$Z(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ za sve } x \in G\} .$$

$Z(G)$ je uvek podgrupa grupe G.

Neka je $H \leq G$ i $a \in G$. Skup $H\{a\}$ (koji kraće pišemo Ha) zovemo *desni koset* podgrupe H u G. Analogno definišemo i *levi koset* aH podgrupe H u G.

Lema 1.2.8. *Neka je $H \leq G$ i $a, b \in G$. Tada važi:*

$$(i)\ Ha = Hb \text{ ako i samo ako } ab^{-1} \in H;$$
$$(ii)\ aH = bH \text{ ako i samo ako } a^{-1}b \in H.$$

Propozicija 1.2.9. *Desni (levi) koseti podgrupe H grupe G čine particiju skupa G.*

Definicija 1.2.10. Za podgrupu H grupe G kažemo da je *normalna*, u oznaci $H \trianglelefteq G$, ako za sve $g \in G$ važi

$$gH = Hg,$$

to jest ako se svaki levi koset od H poklapa sa odgovarajućim desnim kosetom.

Svaka grupa G ima dve trivijalne normalne podgrupe: to su sama grupa G i $E = \{e\}$.

Propozicija 1.2.11. *Svaka podgrupa Abelove grupe je normalna.*

Propozicija 1.2.12. *Neka je $H \leq G$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) $H \trianglelefteq G$

(2) $g^{-1}Hg = H$ *za sve* $g \in G$

(3) $g^{-1}Hg \subset H$ *za sve* $g \in G$.

Definicija 1.2.13. Neka su $(G, \cdot)$ i $(H, *)$ grupe. Preslikavanje $f : G \to H$ zovemo *homomorfizam* grupe G u grupu H, ako za sve $x, y \in G$ važi

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Ako važi gornji uslov i ako je f bijekcija, kažemo da je f *izomorfizam* grupa G i H. Za injektivni homomorfizan kažemo da je *potapanje*, tada je G izomorfna sa nekom podgrupom grupe H.

Neka su $(G, \cdot)$ i $(H, *)$ grupe sa neutralnim elementima e_G i e_H. Lako se pokazuje da za svaki homomorfizam f mora biti $f(e_G) = e_H$ kao i $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$, pri čemu je inverz sa leve strane uzet u grupi G, a sa desne strane u grupi H.

Za proizvoljan homomorfizam $f : G \to H$ definišemo njegovu *sliku*

$$Imf = f[G]$$

kao i njegovo jezgro

$$kerf = \{a \in G : f(a) = e_H\}.$$

Slika svakog homomorfizma je podgrupa od H , dok je jezgro homomorfizma normalna podgrupa od G.

Ako je N normalna podgrupa grupe G, na skupu svih levih (desnih) koseta, u oznaci $G_{/N}$ definišemo operaciju množenja

$$aN \cdot bN = abN.$$

Iz normalnosti podgrupe N sledi dobra definisanost operacije. Dalje, važi $(aN)N = aNeN = aN$. Dakle N ima ulogu neutralnog elementa na skupu $G_{/N}$, a kako je $(a^{-1})N(aN) = (a^{-1}a)N = N$ sledi da je $a^{-1}N$ inverz elementa aN. Dakle, $(G_{/N}, \cdot)$ je grupa koju zovemo *faktor grupa*.

Propozicija 1.2.14. *Ako je G Abelova grupa i $N \trianglelefteq G$ tada je $G_{/N}$ Abelova grupa.*

Primer 1.2.15. Neka je G grupa i $N \trianglelefteq G$. Definišemo preslikavanje

$$\pi : G \to G_{/N} \ , \ \pi(a) = aN \text{ za sve } a \in G.$$

koje zovemo *prirodno preslikavanje.* π je homomorfizam grupa takav da je $ker\pi = N$.

Zaista, za $a, b \in G$ važi $\pi(ab) = abN = aNbN = \pi(a)\pi(b)$, zbog čega je π homomorfizam (lako se vidi da je on sirjektivan, $Im\pi = G_{/N}$). Važi, $a \in ker\pi$ ako i samo ako $\pi(a) = N$ ako i samo ako $aN = N$ ako i samo $a \in N$, pa je $ker\pi = N$.

Na kraju ovog odeljka navodimo dva važna primera. Prvi koji se zove grupa kvaterniona i drugi tzv. $r-$*adički* brojevi. Zapravo, grupa kvaterniona ima bogatiju algebarsku strukturu, pa ćemo se podsetiti potrebnih definicija.

Definicija 1.2.16. Neprazan skup R sa dve binarne operacije $+$ i $\cdot$ koje zovemo aditivna i multiplikativna operacija, redom, zovemo *prsten* ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(R1) $(R, +)$ je Abelova grupa;

(R2) $(R, \cdot)$ je monoid ;

(R3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ i $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ za sve $x, y, z \in R$.

Sa 0 i 1 označavamo neutralne elemente grupe $(R, +)$ i monoida $(R, \cdot)$, redom. Lako se pokazuje da u svakom prstenu važi $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ a sve $x \in R$.

Ako je u prstenu R multiplikativna operacija komutativna, tada R zovemo *komutatitavan prsten.* Prsten R u kojem je $0 \neq 1$ i svaki nenula element $x \in R$ invertibilan u odnosu na multiplikativnu operaciju zovemo *telo.* Kumutativno telo zovemo *polje.*

Primer 1.2.17. (*grupa kvaterniona*)
Označimo sa $\mathbf{Q}$ skup svih linearnih kombinacija
$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, takvih da su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ specijalni simboli da

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \quad i \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Na skupu $\mathbf{Q}$ definišemo uobičajeno sabiranje po koordinatama na sledeći način :
$(a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k})(a'+b'\mathbf{i}+c'\mathbf{j}+d'\mathbf{k}) = (a+a')+(b+b')\mathbf{i}+(c+c')\mathbf{j}+(d+d')\mathbf{k}$
Sa ovim sabiranjem, $\mathbf{Q}$ je komutativna grupa koju zovemo *aditivna grupa kvaterniona.*

Dalje, definiše se proizvod dva kvaterniona $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ i $q' = a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$ uobičajenim množenjem linearnih polinoma primenjujući gornje jednakosti i pravilo komutativnosti $x\mathbf{i} = \mathbf{i}x$, $x\mathbf{j} = \mathbf{j}x$, $x\mathbf{k} = \mathbf{k}x$ za sve $x \in R$:

$$\begin{aligned}(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}) &= (aa' - bb' - cc' - dd')\\ &+ (ab' + ba' + cd' - dc')\mathbf{i}\\ &+ (ac' - bd' + ca' + db')\mathbf{j}\\ &+ (ad' + bc' - cb' + da')\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Lako se proverava da je na skupu $\mathbf{Q}$ množenje asocijativna operacija sa neutralnim elementom $1 = 1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Dakle, $(\mathbf{Q}, \cdot)$ je nekomutativan monoid. Takođe, važi distributivnost operacije sabiranja prema operaciji množenja na osnovu čega sledi da je $\mathbf{Q}$ *nekomutativan prsten.*

Neka je $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, gde je $0 = 0 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Za svaki element $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ iz $\mathbf{Q}$, označimo $\overline{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$. Tada važi $q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Kako svaki nenula element $q \in \mathbf{Q}$ ima svoj inverz u odnosu na operaciju množenja $q^{-1} = \overline{q} \cdot (1/a^2 + b2 + c^2 + d^2)$, sledi da je $\mathbf{Q}$ telo. Grupu $\mathbf{Q}^*$ zovemo *multiplikativna grupa kvaterniona.* Primetimo, $Q_8 = \{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\} \leq \mathbf{Q}^*$. Q_8 zovemo *grupa jedinica kvaterniona.*

Primer 1.2.18. (*r-adički brojevi*)
Neka je $r > 1$ ceo broj. Označimo sa $A = \{0, 1, 2, \cdots, r - 1)$ i $P = A^{\mathbb{Z}}$. Za svaki $\overline{x} \in P$ označimo $\overline{x} = \langle x_n : n \in \mathbb{Z}\rangle$. Posmatrajmo $\Omega_{[r]} \subset P$, $\Omega_{[r]} = \{\overline{x} \in P : (\exists k \in \mathbb{Z})(\forall n < k)\, x_n = 0\}$. Cilj nam je definisati sabiranje na $\Omega_{[r]}$ koje oponaša sabiranje prirodnih brojeva u dekompoziciji po stepenima broja r.
Označimo nula niz sa $\overline{0} \in \Omega_{[r]}$, niz čiji su svi elementi 0 i definišimo $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$ i $\overline{0} + \overline{x} = \overline{x}$ za sve $\overline{x} \in \Omega_{[r]}$. Neka su $\overline{x}, \overline{y} \in \Omega_{[r]}$ nenula elementi i neka su $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ tako da $x_{m_0} \neq 0$ i $x_n = 0$ za sve $n < m_0$, slično $y_{n_0} \neq 0$ i $y_n = 0$ za sve $n < n_0$. Označimo $k_0 = min\{m_0, n_0\}$.
Induktivno definišimo $\overline{x} + \overline{y} = \overline{z} \in \Omega_{[r]}$ na sledeći način. $z_n = 0$ za sve $n < k_0$. Izaberemo $z_{k_0} \in A$ i $t_{k_0} \in \{0, 1\}$ tako da zadovoljavaju jednačinu

$$x_{k_0} + y_{k_0} = z_{k_0} + t_{k_0} r. \tag{1}$$

Jasno, brojevi z_{k_0} i t_{k_0} su jedinstveno određeni jednačinom (1). Dalje, pretpostavimo da su za $k \geq k_0$ dati $z_{k_0}, z_{k_0+1}, ..., z_k \in A$ i $t_{k_0}, t_{k_0+1}, ..., t_k \in \{0, 1\}$.

Tada definišemo $z_{k+1} \in A$ i $t_{k+1} \in \{0, 1\}$ tako da zadovoljavaju jednačinu

$$x_{k+1} + y_{k+1} + t_k = z_{k+1} + t_{k+1}r.$$

Takođe, takvi brojevi postoje i jedinstveno su određeni. Sa ovako definisanom operacijom sabiranja $\Omega_{[r]}$ je komutativna grupa koju zovemo *grupa r-adičkih brojeva.* Zaista, iz definicije operacije sabiranja i komutativnosti grupe $\mathbb{Z}$ važi $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ za sve $\overline{x}, \overline{y} \in \Omega_{[r]}$ i $\overline{0}$ je neutralni element. Neka je $\overline{x} \in \Omega_{[r]}$ nenula element takav da za $m \in \mathbb{Z}$ važi $x_m \neq 0$ i $x_n = 0$ za $n < m$. Tada je element $\overline{y} \in \Omega_{[r]}$ definisan sa: $y_n = 0$ za $n < m$, $y_m = r - x_m$ i $y_n = r - x_n - 1$ za $n > m$ njegov inverz, tj. važi $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x} = \overline{0}$. Za dokaz asocijativnosti operacije čitaoca upućujemo na [1]. Lako se pokazuje da je $\mathbb{Z}_{[r]} = \{\overline{x} \in \Omega_{[r]} : (\forall n < 0)\, x_n = 0\}$ podgrupa grupe $\Omega_{[r]}$. Grupu $\mathbb{Z}_{[r]}$ zovemo *grupa r-adičkih celih brojeva.*

1.3 Topološki prostori

U ovom odeljku navodimo definicije i tvrđenja teorije topoloških prostora, koje koristimo u radu. Za dokaze teorema i više osobina navedenih pojmova upućujemo na [5].

Topologija i baza topologije

Definicija 1.3.1. Neka je $X \neq \emptyset$. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je *kolekcija otvorenih skupova* ako važe sledeći uslovi:

(O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$

(O2) ako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ onda $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(O3) za svaku kolekciju $\{O_i : i \in I\} \subset \mathcal{O}$ važi $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$

Za kolekciju $\mathcal{O}$ kažemo da je *topologija* na skupu X, a za par $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je *topološki prostor*. Skup $F \subset X$ kažemo da je *zatvoren* ako i samo ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup. Kolekciju svih zatvorenih skupova označavamo sa $\mathcal{F}$.

Definicija 1.3.2. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ je *baza topologije* $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi :

B1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}$ su otvoreni, to jest $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$;

B2) Svaki otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ može da se prikaže kao unija neke podfamilije familije $\mathcal{B}$ (to jest postoji kolekcija $\{B_j : j \in J\} \subset \mathcal{B}$, da je $O = \bigcup_{j \in J} B_j$).

Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da zadovoljava *drugu aksiomu prebrojivosti* ako i samo ako ima prebrojivu bazu topologije $\mathcal{O}$.

Primer 1.3.3. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Tada je $\mathcal{O}_{disc} = \mathcal{P}(X)$ topologija na skupu X i zovemo je *diskretna topologija* . Za prostor $(X, \mathcal{O}_{disc})$ kažemo da je *diskretan.* Bazu diskretne topologije na skupu X čini familija $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$.

Teorema 1.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Tada*

a) Ako je familija $\mathcal{B}' \subset \mathcal{O}$ takva da se svaki skup $B \in \mathcal{B}$ može predstaviti kao unija nekih elemenata iz $\mathcal{B}'$,onda je i $\mathcal{B}'$ baza topologije $\mathcal{O}$.

b) Ako je $\mathcal{O}_1$ neka druga topologija na skupu X i $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}_1$, onda je $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$.

Kako neke osobine topološkog prostora zavise samo od osobina baze topologije, u nekim slučajevima se topološka struktura na nekom skupu X zadaje tako što se navode samo elementi neke njene baze.

Definicija 1.3.5. Neka je $X \neq \emptyset$. Kolekcija $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ je *baza neke topologije* na skupu X ako i samo ako je kolekcija $\{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ topologija na skupu X.

Primer 1.3.6. *(Uobičajena topologija na skupu $\mathbb{R}$).* Familija

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$$

svih otvorenih intervala je baza neke topologije na skupu $\mathbb{R}$. Topologiju određenu bazom $\mathcal{B}$ zovemo *uobičajena topologija* na skupu $\mathbb{R}$ i označavamo je sa $\mathcal{O}_{uob}$. U prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ skup O je otvoren ako i samo ako je unija neke familije (konačne ili beskonačne) otvorenih intervala.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je :

- T_1-*prostor* ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoren skup O da je $x \in O$ i $y \notin O$
- $T_2 -$ *prostor* ili *Hauzdorfov* ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 da je $x \in O_1$ i $y \in O_2$.
- *regularan* ako i samo ako za svaki zatvoren skup F i tačku $x \in X \setminus F$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 da je $x \in O_1$ i $F \subset O_2$.
- $T_3 -$ *prostor* ako i samo ako je T_1 i regularan.

- *nula-dimenzionalan* ako i samo ako je T_2 i postoji baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ da $\mathcal{B} \subset \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$.

Teorema 1.3.7. *a) Topološki prostor X je $T_1 -$ prostor ako i samo ako su svi jednoelementni podskupovi skupa X zatvoreni skupovi.*
b) Svaki T_3 prostor je Hauzdorfov prostor i svaki Hausdorfov prostor je $T_1 -$ prostor.

Topologija metričkog prostora

Definicija 1.3.8. Neka je X neprazan skup. Svaka funkcija $d : X^2 \to [0, \infty)$ takva da za sve $x, y, z \in X$ važi

$(M1)$ $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,

$(M2)$ $d(x, y) = d(y, x)$,

$(M3)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

je *metrika* na skupu X. Uređeni par (X, d) je tada *metrički prostor.* Broj $d(x, y)$ nazivamo *rastojanjem* tačaka x i y. Ako je $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, onda skup

$$L(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

zovemo *otvorena lopta* sa centrom u tački x i poluprečnikom ε.

Na metričkom prostoru (X, d) za $x \in X$ i $A \subset X$ neprazan skup definišemo i *rastojanje tačke x od skupa A*:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

U svakom metričkom prostoru se na prirodan način može definisati topološka struktura, o čemu govori naredna teorema.

Teorema 1.3.9. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je familija svih otvorenih lopti, $\mathcal{B}_d = \{L(x, \varepsilon) : x \in X \wedge \varepsilon > 0\}$, baza neke topologije $\mathcal{O}_d$ na skupu X.*

Za topologiju $\mathcal{O}_d$ definisanu u prethodnoj teoremi kažemo da je *određena* (ili *indukovana*) *metrikom d.* Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je *metrizabilan* ako i samo ako postoji metrika d na skupu X takva da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$. Dakle, u proizvoljnom metričkom prostoru važi: *skup je otvoren ako i samo je unija neke kolekcije otvorenih lopti.* Važi i sledeća karakerizacija.

Teorema 1.3.10. *U proizvoljnom metričkom prostoru* (X, d) *važi: skup* $O \subset X$ *je otvoren ako i samo ako za svaku tačku* $x \in O$ *postoji broj* $\varepsilon > 0$ *takav da je* $L(x, \varepsilon) \subset O$.

Teorema 1.3.11. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Tada je neprazan skup* $A \subset X$ *zatvoren ako i samo ako za svaku tačku* $x \in X \setminus A$ *važi* $d(x, A) > 0$.

Primer 1.3.12. *Euklidska metrika i uobičajena topologija na* $\mathbb{R}^n$
Na skupu $\mathbb{R}^n$ preslikavanje

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

za $x, y \in \mathbb{R}^n$, gde je $x = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$ i $y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ je metrika na $\mathbb{R}^n$ koju zovemo *Euklidska metrika* na $\mathbb{R}^n$, a odgovarajuću topologiju $\mathcal{O}_{d_2}$ uobičajena topologija na $\mathbb{R}^n$.

Okoline i baza okolina

Definicija 1.3.13. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $U \subset X$ je *okolina tačke* $x \in X$ ako i samo postoji otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ takav da je $x \in O \subset U$. Familiju svih okolina tačke x označavamo sa $\mathcal{U}(x)$.

Da je skup otvoren može se izraziti korišćenjem okoline tačke.

Teorema 1.3.14. *Neka je* $(X, \mathcal{O})$ *topološki prostor. Tada važi: skup* $U \subset X$ *je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje tačke.*

Teorema 1.3.15. *Neka je* $(X, \mathcal{O})$ *topološki prostor. Za svako* $x \in X$ *važi:*

(U1) ako $U \in \mathcal{U}(x)$ *onda* $x \in U$

(U2) ako $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ *onda* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$

(U3) ako $U \in \mathcal{U}(x)$ *i* $U \subset A \subset X$ *onda* $A \in \mathcal{U}(x)$

(U4) za svako $U \in \mathcal{U}(x)$ *postoji* $V \subset U$ *da* $V \in \mathcal{U}(x)$ *i* $\forall y \in V$, $V \in \mathcal{U}(y)$

Obratno, topologija na nekom skupu X se može definisati tako što se prvo svakoj tački $x \in X$ pridruži familija $\mathcal{V}(x)$ tako da su zadovoljeni uslovi $(U1) - (U4)$, pa je otvoren skup onaj koji je okolina svake svoje tačke, tj. familja $\mathcal{O} = \{O \subset X : (\forall x \in O)\, O \in \mathcal{V}(x)\}$ je topologija na skupu X. U topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$, za svako $x \in X$, kolekcija $\mathcal{V}(x)$ je baš familija svih okolina tačke x.

Definicija 1.3.16. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Familija skupova $\mathcal{B}(x)$ je *baza okolina* tačke x ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(BO1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x, tj. $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$;

(BO2) $(\forall U \in \mathcal{U}(x))\ (\exists B \in \mathcal{B}(x))\ (B \subset U)$.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da zadovoljava *prvu aksiomu prebrojivosti* ako i samo ako u svakoj tački $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina. Lako se pokazuje da ako topološki prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti da tada zadovoljava i prvu aksiomu prebrojivosti.

Primer 1.3.17. U prostou $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ za proizvoljnu tačku $x \in \mathbb{R}$ familija $\mathcal{B}(x) = \{L(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ je baza okolina tačke x. Kako je ta familija prebrojiva prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.

Teorema 1.3.18. *Svaki metrički prostor zadovoljava I aksiomu prebrojivosti.*

Adherencija skupa i separabilnost

Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$. Tačka $x \in X$ je:

- *adherentna tačka* skupa A ako i samo ako $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ U \cap A \neq \emptyset$;
- *tačka nagomilavanja* skupa A ako i samo ako $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ U \cap A \backslash \{x\} \neq \emptyset$;
- *izolovana tačka* skupa A ako i samo ako $\exists U \in \mathcal{U}(x)\ U \cap A = \{x\}$.

Skup svih adherentnih tačaka skupa A zovemo *adherencija* (ili *zatvaranje*) skupa A, u oznaci $\overline{A}$.

U topološkom prostoru X za proizvoljan skup $A \subset X$ važi:

a) $\overline{A}$ je najmanji zatvoren nadskup skupa A.

b) Skup A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.

c) $A \subset B$ implicira $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Teorema 1.3.19. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Tada je prostor X regularan ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svako $B \in \mathcal{B}$ tako da $x \in B$ postoji otvoren skup U takav da je $x \in U \subset \overline{U} \subset B$.*

Za skup $D \subset X$ kažemo da je *gust* u X ako i samo ako je $\overline{D} = X$. Prostor $(X, \mathcal{O})$ je *separabilan* ako i samo ako postoji skup $D \subset X$ koji je gust i prebrojiv.

Primer 1.3.20. U prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ važi $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Dakle, $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$ kako je i prebrojiv skup, $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je separabilan.

Naredna teorema daje potreban i dovoljan uslov da $D \subset X$ bude gust.

Teorema 1.3.21. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}$. Tada važi: skup $D \subset X$ je gust ako i samo ako je $B \cap D \neq \emptyset$ za svaki neprazan skup $B \in \mathcal{B}$. Specijalno, skup D je gust ako i samo ako seče svaki neprazan otvoren skup $O \in \mathcal{O}$.*

Teorema 1.3.22. *Ako topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda je separabilan.*

Dakle, druga aksioma prebrojivosti povlači prvu aksiomu prebrojivosti i separabilnost, dok obratne implikacije nisu tačne.

Teorema 1.3.23. *Metrički prostor (X, d) je separabilan ako i samo ako zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.*

Neprekidna preslikavanja, homeomorfizmi

Definicija 1.3.24. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$. Kažemo da je f *neprekidno* ako i samo ako

$$(\forall x \in X)(\forall V \in \mathcal{U}(f(x)))(\exists U \in \mathcal{U}(x)) f[U] \subset V.$$

Teorema 1.3.25. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

a) *f je neprekidno*

b) $(\forall O \in \mathcal{O}_Y)\ f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$

c) $(\forall F \in \mathcal{F}_Y)\ f^{-1}[F] \in \mathcal{F}_X$

d) *Za svaki skup $A \subset X$ važi $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.*

Teorema 1.3.26. *Kompozicija neprekidnih preslikavanja je neprekidna.*

Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je *kompletno regularan* ako i samo ako za svaki neprazan zatvoren skup $F \subset X$ i svaku tačku $x \in X \setminus F$ postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to [0, 1]$ tako da $f[F] = 1 \wedge f(x) = 0$. Za topološki prostor kažemo da je *prostor Tihonova* ($T_{3\frac{1}{2}} - prostor$) ako i samo ako je T_1 i kompletno regularan.

Definicija 1.3.27. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je *homeomorfizam* ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. f je bijekcija; 2. f je neprekidno; 3. f^{-1} je neprekidno.

Topološki prostori X i Y su *homeomorfni* ako i samo ako postoji homeomorfizam $f : X \to Y$.

Definicija 1.3.28. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je :

- *otvoreno* ako i samo ako je za svaki otvoren skup $O \subset X$ skup $f[O] \subset Y$ otvoren.

- *zatvoreno* ako i samo ako je za svaki zatvoren skup $F \subset X$ skup $f[F] \subset Y$ zatvoren.

Teorema 1.3.29. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ proizvoljni topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

a) f je homeomorfizam; b) f je otvoreno; c) f je zatvoreno.

Osobina $\mathcal{P}$ topoških prostora je *invarijanta neprekidnih preslikavanja* ako i samo ako za svaka dva topološka prostora $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ i svaku neprekidnu sirjekciju $f : X \to Y$ važi:

Ako prostor X ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i prostor Y ima osobinu $\mathcal{P}$.

Analogno se definišu *invarijante otvorenih neprekidnih preslikavanja, invarijante zatvorenih neprekidnih preslikavanja* kao i *invarijante homeomorfizama.*

Invarijante homeomorfizama zovemo *topološke osobine.* Dakle homeomorfni prostori imaju iste topološke osobine.

Potprostori topoloških prostora

Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$ njegov proizvoljan neprazan podskup, onda se na skupu A na prirodan način može definisati topologija koju skup A "nasleđuje" od prostora $(X, \mathcal{O})$.

Teorema 1.3.30. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$ neprazan skup. Tada je kolekcija $\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ topologija na skupu A.*

Za topologiju $\mathcal{O}_A$ na skupu A kažemo da je *indukovana (nasleđena)* topologijom $\mathcal{O}$ i topološki prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ zovemo *potprostor* prostora $(X, \mathcal{O})$.

Primetimo da svaki neprazan podskup topološkog prostora određuje neki potprostor, dok svaki podskup grupe ne mora da određuje podgrupu (jer mora da zadovoljava uslov zatvorenosti u odnosu na operacije).

Teorema 1.3.31. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$, $x_0 \in A \subset X$ i $\mathcal{U}_A(x_0)$ familiju svih okolina tačke x_0 u potprostoru $(A, \mathcal{O}_A)$. Tada važi:*

a) kolekcija skupova $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ je baza topologije $\mathcal{O}_A$.

b) $\mathcal{U}_A(x_0) = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}(x_0)\}$

C) Ako je $\mathcal{B}(x_0)$ baza okolina tačke x_0 u prostoru $(X, \mathcal{O})$, onda je kolekcija

$$\mathcal{B}_A(x_0) = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}(x_0)\}$$

baza okolina tačke x_0 u potprostoru $(A, \mathcal{O}_A)$.

Iz prethodne teoreme sledi da ako topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu (prvu) aksiomu prebrojivosti onda svi njegovi potprostori nasleđuju tu osobinu.

Povezan prostor

Definicija 1.3.32. Topološki prostor X je *povezan* ako i samo ako skup X ne može da se predstavi kao unija dva neprazna disjunktna otvorena skupa. Inače kažemo da je prostor *nepovezan.*

Povezanost je invarijanta neprekidnih preslikavanja.

Definicija 1.3.33. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Neprazan podskup $A \subset X$ je *povezan skup* ako i samo ako je $(A, \mathcal{O}_A)$ povezan topološki prostor.

Teorema 1.3.34. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada, ako je skup $A \subset X$ povezan, onda je i $f[A]$ povezan skup.*

Ako su A i B povezani podskupovi topološkog prostora X koji nisu razdvojeni tj. $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ i $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ tada je $A \cup B$ povezan skup.

Važi i da je topološki prostor povezan ako i samo ako su svake dve tačke $x, y \in X$ elementi nekog povezanog skupa $A \subset X$ na osnovu čega uvodimo binarnu relaciju na skupu X.

Teorema 1.3.35. *Neka je X topološki prostor i ρ binarna relacija na skupu X data sa : $x\rho y$ ako i samo ako postoji povezan skup $A \subset X$ koji sadrži tačke x i y. Tada važi:*

a) Relacija ρ je relacija ekvivalencije.

b) Ako je C_x klasa ekvivalencije tačke $x \in X$ i $\mathcal{A}_x$ kolekcija svih povezanih skupova $A \subset X$ koji sadrže tačku x, onda je $C_x = \bigcup \mathcal{A}_x$.

c) Skup C_x je najveći povezan skup koji sadrži tačku x.

d) Skup C_x je zatvoren.

Klase ekvivalencije relacije ρ su *komponente povezanosti* prostora X. Skup C_x zovemo *komponenta povezanosti tačke x*. Dakle, komponente povezanosti su najveći povezani delovi prostora, a kolekcija svh komponenti predstavlja particiju prostora.

Definicija 1.3.36. Za topološki prostor X kažemo da je *putno povezan* ako i samo ako za svake dve tačke $x, y \in X$ postoji neprekidno preslikavanje $f : [0,1] \to X$ takvo da je $f(0) = x$ i $f(1) = y$.

Putna povezanost je invarijanta neprekidnih preslikavanja (a zato i topološka osobina) i važi: svaki putno povezan topološki prostor je povezan.

Kompaktnost

U topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$ i $A \subset X$ familiju $\{O_i : i \in I\}$ otvorenih podskupova skupa X zovemo *otvoren pokrivač* skupa A ako i samo ako je $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Za potkolekciju pokrivača koja je i sama pokrivač kažemo da je potpokrivač datog pokrivača.

Definicija 1.3.37. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je *kompaktan* ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X ima konačan potpokrivač.

Definicija 1.3.38. Za skup A u prostoru $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je *kompaktan* ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa A ima konačan potpokrivač.

Teorema 1.3.39. *Kompaktnost je nasledna prema zatvorenim podskupovima.*

Definicija 1.3.40. Za topološki prostor X kažemo da je *lokalno kompaktan* ako i samo ako za sve $x \in X$ postoji okolina U tačke x tako da je $\overline{U}$ kompaktan skup u X, tj. svaka tačka ima kompaktnu okolinu.

Teorema 1.3.41. *Ako je skup $A \subset X$ kompaktan u Hauzdorfovom prostoru X onda je A zatvoren skup.*

Teorema 1.3.42. *Neka je X kompaktan Hauzdorfov prostor. Tada važi: skup $A \subset X$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren.*

Teorema 1.3.43. *Neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup na kompaktan skup.*

Teorema 1.3.44. *Neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora u Hauzdorfov prostor je zatvoreno preslikavanje.*

Topološki proizvod

Direktan proizvod familije skupova $\{X_i : i \in I\}$ je skup

$$\prod_{i \in I} X_i = \{\langle x_i : i \in I\rangle : \forall i \in I(x_i \in X_i).$$

Teorema 1.3.45. *Neka je I neprazan skup, a $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada je kolekcija*

$$\mathcal{B} = \{\bigcup_{i \in K} \pi^{-1}[O_i] : K \subset I \wedge |K| < \aleph_0 \wedge \forall i \in K(O_i \in \mathcal{O}_i\})$$

baza neke topologije $\mathcal{O}$ na $\prod_{i \in I} X_i$, gde je $\pi_i : \prod_{j \in I} X_i \to X_i$ dato sa $\pi_i(\langle x_j : j \in I\rangle) = x_i$.

Topologiju $\mathcal{O}$ na skupu $\prod X_i$ iz prethodne teoreme zovemo *topologija Tihonova.* Za prostor $(\prod X_i, \mathcal{O})$ kažemo da je *Tihonovski proizvod* familije prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$.

Naredna lema objašnjava kako izgleda element baze topologije Tihonova.

Lema 1.3.46. *Uz pretpostavke i oznake iz prethodne teoreme važi:*

$$\bigcap_{i \in K} \pi^{-1}[O_i] = \prod_{i \in I} V_i \quad \textit{gde je} \quad V_i = \begin{cases} X_i, & i \in I \setminus K \\ O_i, & i \in K \end{cases}$$

Teorema 1.3.47. *Uz pretpostavke i oznake iz prethodne teoreme važi: Projekcije $\pi_j : \prod X_i \to X_j$ su neprekidna preslikavanja.*

Definicija 1.3.48. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ topološki prostori, a $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$ preslikavanja. Tada je preslikavanje $f : X \to \prod Y_i$ dato sa

$$f(x) = \langle f_i(x) : i \in I\rangle\ , \qquad \text{za sve } x \in X,$$

dijagonalno preslikavanje određeno familijom preslikavanja $\{f_i : i \in I\}$. Označamo ga sa $\triangle f_i$.

Teorema 1.3.49. *Neka su X i Y_i, $i \in I$ topološki prostori i $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$ neprekidna preslikavanja tada je i dijagonalno preslikavanje $\triangle f_i$ neprekidno.*

Faktor prostor

Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i ρ relacija ekvivalencije na skupu X prirodno se postavlja pitanje kako definisati topologiju na skupu svih klasa ekvivalencije relacije ρ koja zavisi od topologije $\mathcal{O}$.

Lema 1.3.50. *Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ topološki prostor, Y neki skup i $q : X \to Y$ proizvoljna sirjekcija. Tada je kolekcija*

$$\mathcal{O}_Y = \{O \subset Y : q^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X\}$$

topologija na skupu Y.

Dokaz: Kako je $q^{-1}[\emptyset] = \emptyset \in \mathcal{O}_X$ i $q^{-1}[Y] = X \in \mathcal{O}_X$ uslov $O1$ je zadovoljen. Dalje, ako su skupovi $O_1, O_2 \in Y$ takvi da $q^{-1}[O_1], q^{-1}[O_2] \in \mathcal{O}_X$ onda i je $q^{-1}[O_1 \cap O_2] = q^{-1}[O_1] \cap q^{-1}[O_2] \in \mathcal{O}_X$, pa imamo $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_Y$, što dokazuje da važi uslov $O2$.
Konačno, ako su skupovi $O_i \subset Y, i \in I$ takvi da je $q^{-1}[O_i] \in \mathcal{O}_X$, onda je $q^{-1}[\bigcup_{i \in I} O_i] = \bigcup_{i \in I} q^{-1}[O_i] \in \mathcal{O}_X$, odakle sledi $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_Y$, pa je i uslov $O3$ zadovoljen. □

Na osnovu ove leme zaključujemo da je naredna definicija korektna.

Definicija 1.3.51. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, $\rho \subset X^2$ relacija ekvivalencije i $q : X \to X_{/\rho}$ prirodno preslikavanje $q(x) = [x]_\rho$ za sve $x \in X$ gdje je $[x]_\rho$ klasa ekvivalencie elementa x. Za topologiju $\mathcal{O}_{/\rho}$ na skupu $X_{/\rho}$ datu sa

$$\mathcal{O}_{/\rho} = \{O \subset X_{/\rho} : q^{-1}[O] \in \mathcal{O}\}$$

kažemo da je *faktor topologija.* Prostor $(X_{/\rho}, \mathcal{O}_{/\rho})$ zovemo *faktor prostor* prostora $(X, \mathcal{O})$ određen relacijom ρ.

Ako imamo topološki prostor $(X, \mathcal{O}_X)$, sirjektivnim preslikavanjem $f : X \to Y$ definišimo $\mathcal{O}_Y$ topologiju na skupu Y kao u prethodnoj lemi. Preslikavanje f na prirodan način određuje relaciju ekvivalencije ρ na skupu X, datu sa $x_1 \rho x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Postavlja se pitanje da li je, gledano sa topološkog aspekta, prostor $(Y, \mathcal{O}_Y)$ jednak faktor prostoru $(X_{/\rho}, \mathcal{O}_{/\rho})$, to jest da li su homeomorfni.

Teorema 1.3.52. *Neka su X i Y skupovi i $f : X \to Y$ sirjekcija. Ako je $\rho \subset X^2$ relacija ekvivalencije data sa $x_1 \rho x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ i ako je $q : X \to X_{/\rho}$ odgovarajuće prirodno preslikavanje dato sa $q(x) = [x]$, gde je $[x]$ klasa ekvivalencije elementa x, onda je preslikavanje $F : X_{/\rho} \to Y$, dato sa $F([x]) = f(x)$ dobro definisano. Sem toga, F je bijekcija i važi $f = F \circ q$.*

Dokaz: Kako iz $[x'] = [x]$ sledi $x'\rho x$, to jest $F([x']) = f(x') = f(x) = F([x])$, funkcija F je dobro definisana.
Kako je $f : X \to Y$ sirjekcija, za proizvoljno $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $f(x) = y$, pa je $F([x]) = y$. Dakle F je sirjekcija. Dalje, ako je $F([x_1]) = F([x_2])$ to jest $f(x_1) = f(x_2)$, onda je $x_1\rho x_2$ to jest$[x_1] = [x_2]$, pa je F injekcija.
Konačno, za proizvoljno $x \in X$ imamo $(F \circ q)(x) = F([x]) = f(x)$. $\square$

Definicija 1.3.53. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka važe pretpostavke prethodne teoreme. Za preslikavanje f kažemo da je *faktor preslikavanje* ako i samo ako je preslikavanje F homeomorfizam.

Teorema 1.3.54. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ sirjektivno preslikavanje. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

a) Preslikavanje f je faktor preslikavanje;

b) $\forall O \subset Y\, (O \in \mathcal{O}_Y \Leftrightarrow f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X)$;

c) $\forall F \subset Y\, (F \in \mathcal{F}_Y \Leftrightarrow f^{-1}[F] \in \mathcal{F}_X)$.

Dokaz: $(a \Rightarrow b)$ Neka je f faktor preslikavanje, to jest neka je preslikavanje F homeomorfizam. Zbog neprekidnosti funkcija F i q, neprekidna je i kompozicija $F \circ q = f$, pa za proizvoljan skup $O \in \mathcal{O}_Y$ imamo $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$. S druge strane, ako je $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$, zbog $f^{-1}[O] = q^{-1}[F[O]]$ imamo $F^{-1}[O] \in \mathcal{O}_{X/\rho}$. Kako je preslikavanje F otvorena sirjekcija, sledi $O = F[F^{-1}[O]] \in \mathcal{O}_Y$.
$(b \Rightarrow a)$ Neka važi uslov (b). Tada za proizvoljan otvoren skup $O \in \mathcal{O}_Y$ imamo $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$, to jest $q^{-1}[F^{-1}[O]] \in \mathcal{O}_X$, pa prema definiciji topologije $\mathcal{O}_{X/\rho}$ imamo $F^{-1}[O] \in \mathcal{O}_{X/\rho}$. Dakle, F je neprekidno preslikavanje. Kako je F bijekcija, preostaje da se pokaže da je i otvoreno preslikavanje. Neka $O \in \mathcal{O}_{X/\rho}$. Pokazujemo da $F[O] \in \mathcal{O}_Y$, što je prema (b) ekvivalento sa $f^{-1}[F[O]] \in \mathcal{O}_X$. Međutim, znamo da $f = F \circ q$, pa je
$f^{-1}[F[O]] = q^{-1}[F^{-1}[F[O]]] = q^{-1}[O]$, a $q^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$ zbog neprekidnosti preslikavanja q. $\square$

Teorema 1.3.55.

a) Neprekidna otvorena sirjekcija je faktor preslikavanje.

b) Neprekidna zatvorena sirjekcija je faktor preslikavanje.

Dokaz: a) Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna otvorena sirjekcija. Zbog neprekidnosti preslikavanja f, iz $O \in \mathcal{O}_Y$ sledi $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$. S druge strane, ako je $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$, onda imamo

$O = f[f^{-1}[O]] \in \mathcal{O}_Y$, jer je f otvorena sirjekcija. Dakle, uslov (b) prethodne teoreme je zadovoljen pa je f faktor preslikavanje.

Dokaz tvrđenja (b) je sličan dokazu tvrđenja (a). $\square$

Posledica 1.3.56. *Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ kompaktan, a $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Hauzdorfov prostor. Tada je svaka neprekidna sirjekcija $f : X \to Y$ faktor preslikavanje.*

Dokaz: Neka je $F \subset X$ zatvoren skup. Kompaktnost je nasledna osobina prema zatvorenim skupovima pa je F kompaktan. Kako je f neprekidno imamo da je i $f[F]$ kompaktan u Hauzdorfovom prostoru Y, tada je $f[F]$ zatvoren u Y. Dakle, f je zatvoreno, pa iz prethodne teoreme sledi da je f faktor preslikavanje. $\square$

Glava 2

2 Topološke grupe

2.1 Definicija i primeri

Definicija 2.1.1. Neka je G skup, $\cdot$ binarna operacija na G koja zadovoljava aksiome grupe i $\mathcal{O}$ toplogija na G. Tada uređenu trojku $(G, \cdot, \mathcal{O})$ zovemo topološka grupa ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(TG1) preslikavanje iz $G \times G$ u G dato sa $(x, y) \to x \cdot y$ je neprekidno

(TG2) preslikavanje iz G u G dato sa $x \to x^{-1}$ neprekidno

Kraće ćemo pisati topološka grupa G umesto $(G, \cdot, \mathcal{O})$.

Dakle, topološka grupa je zapravo grupa snabdevena topologijom tako da su grupovna operacija i operacija invertovanja kompatibilne sa tom topologijom u smislu neprekidnosti. Svaka grupa može trivijalno postati topološka grupa ako je snabdemo diskretnom topologijom. Međutim, postavlja se pitanje kako grupu pretvoriti u topološku grupu a da bude snabdevena netrivijalnom topologijom koja bi zadovoljavala i neke dodatne osobine.

Napomena. *Na osnovu neprekidnih preslikavanja iz definicije topološke grupe sledi:*

- *Za sve elemente a i b iz G i svaku okolinu W elementa ab postoje okolina U elementa a i okolina V elementa b tako da $UV \subset W$.*

- *Za svaki element a iz G i svaku okolinu V elementa a^{-1} postoji okolina U elementa a tako da $U^{-1} \subset V$.*

Napomena. *Uslovi (TG1) i (TG2) iz definicije topološke grupe mogu se zameniti jednim uslovom:*
(TG) Preslikavanje iz $G \times G$ u G dato sa $(x, y) = xy^{-1}$ je neprekidno

Primer 2.1.2. Proizvoljna grupa G snabdevena sa $\mathcal{O}_{disc} = \mathcal{P}(G)$ diskretnom topologijom je topološka grupa i naziva se diskretna topološka grupa.

Primer 2.1.3. Aditivna grupa $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva sa uobičajenom topologijom je Abelova topološka grupa.

Zaista, topologija na prostoru $\mathbb{R}$ indukovana metrikom $d(x, y) =| x - y |$ jednaka je uobičajenoj topologiji na $\mathbb{R}$. Pokažimo neprekidnost operacija:

a) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x + y$.
Neka je $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna tačka i $U \in \mathcal{U}(x_0 + y_0)$. Postoji $\varepsilon > 0$ tako da $L(x_0+y_0, \varepsilon) \subset U$. Biramo $L(x_0, \varepsilon/2) \times L(y_0, \varepsilon/2) \in \mathcal{U}((x_0, y_0))$. Tada za sve $(x, y) \in L(x_0, \varepsilon/2) \times L(y_0, \varepsilon/2)$ važi

$$\mid (x+y)-(x_0+y_0) \mid \leq \mid x-x_0 \mid + \mid y-y_0 \mid < \varepsilon \Rightarrow x+y \in L(x_0+y_0, \varepsilon) \subset U.$$

b) $In : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $In(x) = -x$ za sve $x \in \mathbb{R}$.
Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ proizvoljna tačka i $U \in \mathcal{U}(-x_0)$. Postoji $\varepsilon > 0$ tako da $L(-x_0, \varepsilon) \subset U$. Tada za sve $x \in L(x_0, \varepsilon) \in \mathcal{U}(x_0)$ važi $\mid x - x_0 \mid < \varepsilon$, što je ekvivalentno sa $\mid -x_0 - (-x) \mid < \varepsilon$, to jest $-x \in L(-x_0, \varepsilon)$.

Primer 2.1.4. $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ sa operacijom množenja kompleksnih brojeva i uobičajenom nasleđenom topologijom je Abelova topološka grupa.

Primer 2.1.5. Grupa $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(R) : detA \neq 0\}$ invertibilnih kvadratnih matrica $n \times n$ sa realnim koeficijentima i operacijom množenja matrica je nekomutativna topološka grupa.

Grupu $GL(n, \mathbb{R})$ možemo snabdeti topologijom potprostora n^2-dimenzionalnog Euklidskog prostora. Posmatramo preslikavanje $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ definisano sa

$$\varphi((a_{i,j})) = (b_1, b_2, ..., b_{n^2}), \;\; b_{i+(j-1)n} = a_{i,j}$$

za sve $(a_{i,j}) \in GL(n, \mathbb{R})$. Jasno φ je injektivno preslikavanje. Neka je

$$\phi = \varphi_{|GL(n,\mathbb{R})} : GL(n, \mathbb{R}) \to \varphi[GL(n, \mathbb{R})] = M \subset \mathbb{R}^{n^2}$$

i $\mathcal{O}_M$ topologija potprostora M koja je nasleđena od topologije Euklidskog prostora $\mathbb{R}^{n^2}$. Tada je familija

$$\mathcal{O} = \{O \subset GL(n, \mathbb{R}) : \phi[O] \in \mathcal{O}_M\}$$

topologija na $GL(n, \mathbb{R})$ koja je kompatibilna sa operacijom množenja matrica i operacijom invertovanja matrice. Grupu $GL(n, \mathbb{R})$ zovemo *opšta linearna grupa* stepena n nad $\mathbb{R}$. Sa ovako definisanom topologijom preslikavanje ϕ je homeomorfizam prostora $GL(n, \mathbb{R})$ i M.

Primer 2.1.6. Aditivna grupa kvaterniona $\mathbf{Q}$ (pogledati primer 1.2.17) je topološka grupa.

Posmatrajmo preslikavanje $f : \mathbf{Q} \to \mathbb{R}^4$ definisano sa:

$$f(q) = (x, y, z, t) \text{ za sve } q = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + t\mathbf{k} \in \mathbf{Q}$$

Jasno, f je bijekcija. Topologizaciju grupe $\mathbf{Q}$ definišemo proglašavanjem preslikavanja f homeomorfizmom, to jest, analogno prethodnom primeru familija

$$\mathcal{O} = \{O \subset \mathbf{Q} : f[O] \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}\}$$

je topologija na $\mathbf{Q}$, gde $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}$ predstavlja uobičajenu topologiju Euklidskog prostora $\mathbb{R}^4$. Sa ovako definisanom topologijom $\mathbf{Q}$ je topološka grupa koja zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

Može se pokazati da je multiplikativna grupa $\mathbf{Q}^*$ sa ovako definisanom topologijom takođe topološka grupa, što sledi na osnovu definicije množenja i inverznog elementa u $\mathbf{Q}^*$.

2.2 Okoline neutralnog elementa

Postavlja se prirodno pitanje: Koji su načini topologizacije proizvoljne grupe G? Jasno je da uvek možemo posmatratrati diskretnu topologiju na G koja čini da G postane topološka grupa. Kako bi isključili ovo trivijalno rešenje, tragamo za nediskretnim topologijama na grupi G, koje zovemo netrivijalne. U cilju topologizacije prozvoljne grupe G netrivijalnom topologijom u nastavku navodimo osnovna svojstva topoloških grupa.

Propozicija 2.2.1. *Neka je G topološka grupa sa neutralnim elementom e i a proizvoljan element iz G. Tada su:*

a) desna translacija $\rho_a : G \to G$, $\rho_a(x) = xa$;

b) leva translacija $\lambda_a : G \to G$, $\lambda_a(x) = ax$;

c) $^{-1} : G \to G$, $x \to x^{-1}$;

d) konjugacija $\sigma_a : G \to G$, $\sigma_a(x) = axa^{-1}$

homeomorfizmi.

Dokaz: a) Jasno, ρ_a je bijekcija. Neka je $x \in G$ proizvoljno i $V \in \mathcal{U}(xa)$. Iz uslova $(TG1)$ postoji $U \in \mathcal{U}(x)$ i postoji $O \in \mathcal{U}(a)$ tako da $UO \subset V$. Tada $\rho_a[U] = Ua \subset UO \subset V$. Dakle ρ_a je neprekidna. Kako važi $\rho_a^{-1}(x) = xa^{-1}$ i $\rho_a \circ \rho_a^{-1} = i$ sledi da je ρ_a^{-1} neprekidno, pa je stoga ρ_a homeomorfizam.
Analogno se dokazuju i ostali homeomorfizmi. □

Posledica 2.2.2. *Neka je G topološka grupa sa neutralnim elementom e i a proizvoljan element iz G. Tada:*

a) ako je U okolina elementa e tada je Ua okolina elementa a;

b) ako je $\mathcal{B}_e$ proizvoljna baza okolina elementa e tada je kolekcija $\mathcal{B}_a = \{Ua : U \in \mathcal{B}_e\}$ baza okolina elementa a.

Dokaz: a) Neka je $U \in \mathcal{U}(e)$. Tada postoji otvoren skup O da $e \in O \subset U$. Kako je desna translacija homeomorfizam sledi da je $\rho_a[O]$ otvoren. Dakle $a \in \rho_a[O] = Oa \subset Ua$, pa je $Ua \in \mathcal{U}(a)$. b) sledi iz a) □

U nastavku sledi propozicija koja daje dovoljan uslov za neprekidnost homomorfizma topoloških grupa.

Propozicija 2.2.3. *Neka je $f : G \to H$ homomorfizam topoloških grupa. Ako je f neprekidno u neutralnom elementu e_G grupe G tada je f neprekidno preslikavanje.*

Dokaz: Neka je $x \in G$ proizvoljan element i neka je O otvorena okolina elementa $y = f(x)$ u H. Kako je leva translacija λ_y homeomorfizam na H postoji otvorena okolina V neutralnog elementa e_H u H tako da $yV \subset O$.
Iz neprekidnosti f u e_G postoji otvorena okolina U elementa e_G u G tako da $f[U] \subset V$.
Iz homeomorfizna λ_x na G skup xU je otvorena okolina elementa x u G.
Kako je f homomorfizam tada imamo :

$$f[xU] = yf[U] \subset yV \subset O.$$

□

Neka je H podgrupa topološke grupe G. Jasno, tada je sirjektivna restrikcija preslikavanja iz $H \times H$ u H , $(h_1, h_2) \to h_1 h_2^{-1}$ neprekidna pa je podgrupa H i sama topološka grupa sa nasleđenom topologijom grupe G. U nastavku sledi važna osobina podrupa u topološkoj grupi.

Teorema 2.2.4. *Neka je G topološka grupa. Svaka otvorena podgrupa $H \leq G$ je zatvorena.*

Dokaz: Familija svih desnih koseta $\{Ha : a \in G\}$ koje u grupi G određuje njena podgrupa H je otvoreni pokrivač grupe G čiji su elementi disjunktni skupovi. Štaviše, svaki desni koset je i zatvoren, jer je komplement unije otvorenih desnih koseta. Specijalno, $H = He$ je zatvoren u G. □

Definicija 2.2.5. Za topološki prostor X kažemo da je *homogen* ako za sve $x, y \in X$ postoji homeomorfizam $f : X \to X$ da $f(x) = y$.

Iz translacija na topološkoj grupi dobija se sledeći rezultat,

Posledica 2.2.6. *Svaka topološka grupa G je homogen prostor.*

Dokaz: Neka su $x, y \in X$ proizvojni elementi iz G. Za $z = x^{-1}y$ dobija se da $\rho_z(x) = xz = xx^{-1}y = y$. Kako je desna translacija homeomorfizam prostora G u samog sebe sledi da je G homogen prostor. □

Da bi se od proizvoljne grupe G dobila topološka grupa, na osnovu poslednje posledice, mogu se koristiti samo homogene topologije. Glavna karakteristika homogenih topoloških prostora jeste da se ti prostori na isti način ponašaju u svakoj svojoj tački. Dakle, ako se zna kako se topologija topološke grupe ponaša u neutralnom elementu, tada iz osobine homogenosti znamo ponašanje topologije u svakom njenom elementu.
Ovo zapažanje sugeriše određen pristup topologizaciji grupe G. Prvo se definiše baza okolina neutralnog elemnta, koja se zatim translira kroz elemente grupe G i konačno se definiše topologija preko baze koja je familija svih dobijenih baza okolina.

Teorema 2.2.7. *1) Neka je G topološka grupa i $\mathscr{U}$ otvorena baza okolina neutralnog elementa e. Tada:*

i) za svako $U \in \mathscr{U}$ postoji $V \in \mathscr{U}$ tako da $V^2 \subset U$;

ii) za svako $U \in \mathscr{U}$ postoji $V \in \mathscr{U}$ tako da $V^{-1} \subset U$;

iii) za svako $U \in \mathscr{U}$ i svako $x \in U$ postoji $V \in \mathscr{U}$ tako da $Vx \subset U$;

iv) za svako $U \in \mathscr{U}$ i $x \in G$ postoji $V \in \mathscr{U}$ tako da $xVx^{-1} \subset U$;

v) za sve $U, V \in \mathscr{U}$ postoji $W \in \mathscr{U}$ tako da $W \subset U \cap V$;

vi) $\{e\} = \bigcap \mathscr{U}$

2) Obratno, neka je G grupa i $\mathscr{U}$ familija podskupova od G koja zadovoljava uslove $i) - vi)$. Tada je familija $\mathcal{B}_{\mathscr{U}} = \{Ua : a \in G, U \in \mathscr{U}\}$ baza T_1 topologije $\mathcal{O}_{\mathscr{U}}$ na G. Sa ovom topologijom G je topološka grupa i familija $\{aU : a \in G, U \in \mathscr{U}\}$ je baza za istu topologiju na G.

Dokaz: 1) Neka je G topološka grupa i $U \in \mathscr{U}$. Kako je $e \cdot e = e$ iz neprekidnosti grupovne operacije sledi da postoje okoline neutralnog elementa V_1 i V_2 tako da $V_1 \cdot V_2 \subset U$. Tada za okolinu neutralnog elementa $V' = V_1 \cap V_2$ važi $(V')^2 \subset U$. Tada postoji $V \in \mathscr{U}$ tako da $V \subset V'$ i važi $V^2 \subset U$. Dakle važi i). Slično, iz neprekidnosti operacije invertovanja sledi ii).
Ako je $U \in \mathscr{U}$ on je otvoren skup i kao takav je okolina svake svoje tačke. Za proizvoljno $x \in U$ na osnovu posledice [2.2.2] postoji $V \in \mathscr{U}$ tako da $Vx \subset U$. Dakle važi iii).
Na osnovu homeomorfizna σ_x i činjenice da $\sigma_x(e) = e$ sledi da za $U \in \mathscr{U}$

postoji okolina $V' \in \mathcal{U}(e)$ da $xV'x^{-1} \subset U$. Dalje postoji $V \in \mathscr{U}$ tako da $V \subset V'$ i pritom važi $xVx^{-1} \subset U$ čime je pokazano *iv*).
Za proizvoljne $U, V \in \mathscr{U}$ važi $U \cap V \in \mathcal{U}(e)$ pa postoji $W \in \mathscr{U}$ tako da $W \subset U \cap V$. Dakle važi *v*).
Jasno je $e \in \bigcap \mathscr{U}$. Pretpostavimo da za neko $a \in G \setminus \{e\}$ važi $a \in \bigcap \mathscr{U}$. Kako je G T_1 prostor postoji okolina neutralnog elementa V tako da $a \notin V$. $\mathscr{U}$ je baza okolina elementa e pa postoji $U \in \mathscr{U}$ tako da $e \in U \subset V$. Sledi $a \notin U$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom. Dakle važi *vi*).

2) Posmatrajmo $\mathcal{O} = \{W \subset G : (\forall x \in W)(\exists U \in \mathscr{U})\ Ux \subset W\}$.

Stav 1. $\mathcal{O}$ je topologija na G.

Jasno, $\emptyset, G \in \mathcal{O}$ pa važi $(O1)$. Ako su $W_1, W_2 \in \mathcal{O}$ pokažimo da $W_1 \cap W_2 = W \in \mathcal{O}$. Za $x \in W$ postoje $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$ tako da $U_1x \subset W_1$ i $U_2x \in W_2$. Iz osobine *v*) sledi da postoji $U \in \mathscr{U}$ tako da $U \subset U_1 \cap U_2$. Tada je jasno da $Ux \subset W_1 \cap W_2 = W$, čime je pokazan uslov $(O2)$. Neka je $\{W_i : i \in I\} \subset \mathcal{O}$ tada za svako $x \in \bigcup_{i\in I} W_i$ postoji $i_0 \in I$ tako da $x \in W_{i_0}$ pa postoji $U_{i_0} \in \mathscr{U}$ tako da $U_{i_0}x \subset W_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} W_i$. Dakle $\bigcup_{i\in I} W_i \in \mathcal{O}$ tj. važi uslov $(O3)$.

Stav 2. $Ux \in \mathcal{O}$, za sve $x \in G$ i sve $U \in \mathscr{U}$.

Neka je $y \in Ux$ proizvoljan element. Tada $yx^{-1} \in U$. Iz osobine *iii*) postoji $V \in \mathscr{U}$ tako da $Vyx^{-1} \subset U$. Sledi da $Vy \subset Ux$. Dakle $Ux \in \mathcal{O}$.

Stav 3. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathscr{U}}$

Iz stava 2 sledi $\mathcal{B}_{\mathscr{U}} \subset \mathcal{O}$. Neka je $W \in \mathcal{O}$. Tada $W = \bigcup_{x\in W} U_x x \in \mathcal{O}_{\mathscr{U}}$, gde je $U_x \in \mathscr{U}$. Sledi da $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{\mathscr{U}}$ i familija $\mathcal{B}_{\mathscr{U}} = \{Ua : a \in G,\ U \in \mathscr{U}\}$ je baza topologije $\mathcal{O}$, to jest $\mathcal{O}_{\mathscr{U}} \subset \mathcal{O}$.

Stav 4. Operacija na grupi G je neprekidna u odnosu na topologiju $\mathcal{O}$.

Neka su a i b proizvoljni elementi grupe G i $O \in \mathcal{O}$ takav da $ab \in O$. Tada postoji $W \in \mathscr{U}$ tako da $Wab \subset O$. Za dokaz stava 4 dovoljno je pronaći $U, V \in \mathscr{U}$ koji zadovoljvaju uslov $Ua \cdot Vb \subset Wab$ koji je ekvivalentan uslovu $UaV \subset Wa$, odnosno ekvivalentan uslovu $U(aVa^{-1}) \subset W$.

Prvo, na osnovu uslova *i*) izabere se $U \in \mathscr{U}$ tako da $U \cdot U \subset W$, a zatim koristeći uslov *iv*) izabere se $V \in \mathscr{U}$ tako da $aVa^{-1} \subset U$. Za ovako izabrane $U, V \in \mathscr{U}$ važi da $U(aVa^{-1}) \subset U \cdot U \subset W$ što implicira da važi $Ua \cdot Vb \subset Wab$ čime je dokazan stav 4. Specijalno, sve desne translacije na grupi G su neprekidne i prostor $(G, \mathcal{O})$ je homogen.

Stav 5. $bV \in \mathcal{O}$, za sve $b \in G$ i sve $U \in \mathscr{U}$.

Neka je $y \in bV$. Tada $b^{-1}y \in V$ i iz osobine $iii)$ postoji $W \in \mathscr{U}$ tako da $Wb^{-1}y \subset V$, a iz osobine $iv)$ postoji $U \in \mathscr{U}$ tako da $b^{-1}Ub \subset W$. Tada $b^{-1}Ubb^{-1}y \subset Wb^{-1}y \subset V$, na osnovu čega sledi $b^{-1}Uy \subset V$ to jest $Uy \subset bV$, čime je dokazan stav 5.

Stav 6. Preslikavanje $In : G \to G$ dato sa $In(x) = x^{-1}$ je neprekidno u odnosu na $\mathcal{O}$.

Koristeći ekvivalentan uslov za neprekidna preslikavanja i na osnovu stava 3 pokazuje se da $In^{-1}[Ua] = a^{-1}U^{-1} \in \mathcal{O}$ za sve $a \in G$ i sve $U \in \mathscr{U}$. Iz stava 5 dovoljno je pokazati da $U^{-1} \in \mathcal{O}$. Neka je $x \in U^{-1}$. Tada $x^{-1} \in U$ i osobina $iii)$ implicira da $Vx^{-1} \subset U$ za neko $V \in \mathscr{U}$. Iz osobine $ii)$ izabere se $W \in \mathscr{U}$ tako da $W^{-1} \subset V$. Tada $W^{-1}x^{-1} \subset Vx^{-1} \subset U$ odnosno $xW \subset U^{-1}$. Na osnovu stava 5 xW je otvoren skup i time je dokazano da je U^{-1} okolina svake svoje tačke, to jest $U^{-1} \in \mathcal{O}$.

Konačno, pokažimo da topologija $\mathcal{O}$ zadovoljava aksiomu separacije T_1. Neka su $a, b \in G$ tako da $a \neq b$. Iz uslova $vi)$ sledi da postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da $ba^{-1} \notin U$. Tada $b \notin Ua$. Dakle, postoji okolina Ua elementa a koja ne sadrži element b. Time je završen dokaz. $\square$

Uslove $(i) - (vi)$ zovemo aksiomama topoloških grupa.

Napomena. *Uslovi (i) i (ii) mogu se zameniti jednim uslovom :*

$$\forall U \in \mathscr{U}, \exists V \in \mathscr{U}, VV^{-1} \subset U.$$

Teorema 2.2.8. *U svakoj topološkoj grupi G postoji otvorena baza neutralnog elementa čiji su elementi simetrični skupovi.*

Dokaz: Za proizvoljnu otvorenu okolinu U neutralnog elementa e definiše se $V = U \cap U^{-1}$. Tada važi $V = V^{-1}$, skup V je otvorena okolina elementa e i $V \subset U$. $\square$

Teorema 2.2.9. *Svaka topološka grupa G je regularan prostor.*

Dokaz: Neka je U otvorena okolina neutralnog elementa e u G. Iz teorema [2.2.7] i [2.2.8] sledi da postoji otvorena okolina V od e takva da $V^{-1} \subset U$ i $V^2 \subset U$. Tada ako $x \in \overline{V}$ imamo $Vx \cap V \neq \emptyset$. Stoga $a_1x = a_2$ za neke $a_1, a_2 \in V$ pa sledi $x = a_1^{-1}a_2 \in V^{-1}V = V^2 \subset U$. Dakle, imamo da je $\overline{V} \subset U$. Iz homogenosti grupe G neposredno sledi da je G regularan prostor. $\square$

Svaka topološka grupa je T_1 prostor, iz prethodne teoreme imamo da je svaka topološka grupa T_3 prostor. Jasno je da važi sledeći rezlutat.

Posledica 2.2.10. *Svaka topološka grupa je* Hauzdorfov prostor.

Primer 2.2.11. Neka je G grupa i $\mathscr{N}$ familija svih normalnih podgrupa grupe G. Iz osobina normalnih podgrupa jasno je da familija $\mathscr{N}$ zadovoljava uslove teoreme [2.2.7]. Tada je $\mathcal{O} = \{Nx : N \in \mathscr{N}, x \in G\}$ familija svih koseta svih normalnih podgrupa grupe G topologija na G koja je kompatibilna sa operacijama u grupi. S obzirom da su sve otvorene podgrupe topološke grupe i zatvorene (teorema 2.2.4) s ovom topologijom G je nula-dimenzionalan prostor.

Primer 2.2.12. Za sve $r > 1$ na grupi $\Omega_{[r]}$ r-adičkih brojeva (pogledati primer 1.2.18) postoji nediskretna topologija kompatibilna sa operacijom sabiranja i invertovanja.
Označimo za $m \in \mathbb{Z}$ skup $\Lambda_m = \{\overline{x} \in \Omega_{[r]} : (\forall n < m)\, x_n = 0\}$. Jasno, $\Lambda_m \leq \Omega_{[r]}$ i važi $\Lambda_{m+1} \subset \Lambda_m$ za sve $m \in \mathbb{Z}$.
Tvrdimo da kolekcija $\mathscr{U} = \{\Lambda_m : m \in \mathbb{Z}\}$ zadovoljava uslove teoreme [2.2.7]. Zaista, iz činjenice da su Λ_m podgrupe od $\Omega_{[r]}$ jasno je da su zadovoljeni uslovi $i) - iii)$. Uslov $iv)$ je trivijalno zadovoljen s obzirom da je $\Omega_{[r]}$ komutativna grupa, dok uslov $v)$ sledi iz inkluzije ... $\subset \Lambda_{m+1} \subset \Lambda_m \subset \Lambda_{m-1} \subset$ ..... Jasno $\overline{0} = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} \Lambda_m$, tj. važi uslov $vi)$. Na osnovu teoreme [2.2.7] $\mathscr{U}$ je baza okolina elementa $\overline{0}$ a kolekcija $\mathcal{B}_{\mathscr{U}} = \{\Lambda_m + \overline{x} : \overline{x} \in \Omega_{[r]}, m \in \mathbb{Z}\}$ je baza T_1 topologije sa kojom je $\Omega_{[r]}$ topološka grupa.
Kako je $\mathscr{U}$ opadajući lanac netrivijalnih podgrupa od $\Omega_{[r]}$, definisana topologija nije diskretna. Dalje, kako je svaka otvorena podgrupa i zatvorena sledi da neutralni element $\overline{0}$ ima bazu okolina čiji su elemeti i otvoreni i zatvoreni skupovi. Iz homogenosti sledi da je topološka grupa $\Omega_{[r]}$ nula-dimenzionalna.
Pokažimo da je svaka podgrupa Λ_m kompaktna kao potprostor od $\Omega_{[r]}$. Uočimo da Λ_m možemo identifikovati sa podskupom od A^{J_m}, gde je
$A = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ i $J_m = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$. Tada Λ_m nasleđuje topologiju $\mathcal{O}_m$ prostora A^{J_m} koja je uobičajena topologija proizvoda. Tvrdimo da je $\mathcal{O}_m$ jednaka topologiji prostora Λ_m nasleđene od topologije topološke grupe $\Omega_{[r]}$. Zaista, za svako $\overline{x} \in \Lambda_m$ i $k > m$ zbir $\overline{x} + \Lambda_k \subset \Lambda_m$ sadrži sve nizove $(\ldots, 0, \ldots, 0, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \ldots)$ gde su $y_k, y_{k+1}, \ldots$ proizvoljni elementi iz A. Dakle, imamo da je $\overline{x} + \Lambda_k$ otvoren u A^{J_m}, pa sledi $\mathcal{O}_m = \mathcal{O}_{\Lambda_m}$. Kako je A^{J_m} kompaktan i odgovarajuće topologije jednake, sledi da je Λ_m kompaktna podgrupa od $\Omega_{[r]}$ za sve $m \in \mathbb{Z}$. Specijalno, $\mathbb{Z}_{[r]} = \Lambda_0$ je otvorena kompaktna podgrupa od $\Omega_{[r]}$.

2.3 Otvoreni skupovi, adherencija i kompaktni skupovi

U ovom odeljku opisujemo nekoliko jednostavnih osobina familije otvorenih, zatvorenih i kompaktnih skupova u topološkim grupama. Iako se mnoge osobine prirodno nameću i lako se dokazuju one čine osnovu za konstrukciju topološke algebre.

Propozicija 2.3.1. *Neka je G topološka grupa, $U \subset G$ otvoren skup i $A \subset G$ proizvoljan skup. Tada su UA i AU otvoreni skupovi u prostoru G.*

Dokaz: Kako je svaka translacija na topološkoj grupi homeomorfizam i kako je unija proizvoljne familije otvorenih skupova otvoren skup sledi da su $AU = \bigcup_{a\in A} \lambda_a[U]$ i $UA = \bigcup_{a\in A} \rho_a[U]$ otvoreni skupovi. □

Propozicija 2.3.2. *Neka je G topološka grupa. Tada za svaki neprazan skup $A \subset G$ i svaku otvorenu okolinu U neutralnog elementa e važi $\overline{A} \subset UA \cap AU$.*

Dokaz: Za okolinu U iz propozicije postoji V otvorena okolina neutralnog elementa takva da $V^{-1} \subset U$.
Neka je $x \in \overline{A}$. Tada za Vx otvorenu okolinu tačke x važi $A \cap Vx \neq \emptyset$. Neka je $a \in A \cap Vx$, to jest $a = bx$ za neko $b \in V$. Tada je $x = b^{-1}a \in V^{-1}A \subset UA$. Dakle, $\overline{A} \subset UA$.
Koristeći xV otvorenu okolinu tačke x, analogno se pokazuje da $\overline{A} \subset AU$. □

Zaključak prethodne propozicije može se dodatno ojačati, o čemu govori naredna teorema.

Teorema 2.3.3. *Neka je G topološka grupa sa neutralnim elementom e i $\mathcal{B}_e$ proizvoljna baza okolina elementa e. Tada za svaki skup $A \subset G$ važi:*

$$\overline{A} = \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}_e\} = \bigcap\{UA : U \in \mathcal{B}_e\}$$

Dokaz: Na osnovu propozicije [2.3.2] sledi $\overline{A} \subset \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}_e\}$.
Pokažimo obratnu inkluziju kontrapozicijom.
Ako $x \notin \overline{A}$ tada postoji $W \in \mathcal{B}_e$ tako da $A \cap xW = \emptyset$. Za okolinu W postoji $U \in \mathcal{B}_e$ tako da $U^{-1} \subset W$. Tada $A \cap xU^{-1} = \emptyset$ odnosno $AU \cap \{x\} = \emptyset$, to jest $x \notin AU$.
Analogno se pokazuje da važi i $\overline{A} = \bigcap\{UA : U \in \mathcal{B}_e\}$. □

Propozicija 2.3.4. *Neka je G topološka grupa. Ako je $A \subset G$ simetričan skup, tada je i $\overline{A}$ simetričan.*

Dokaz: Pokazujemo da važi $\overline{A} = (\overline{A})^{-1}$.
($\supset$) Na osnovu simetričnosti skupa A i neprekidnosti operacije invertovanja imamo da je $(\overline{A})^{-1} \subset \overline{A^{-1}} = \overline{A}$
($\subset$) Kako je $A \subset \overline{A}$ sledi $A = A^{-1} \subset (\overline{A})^{-1}$. Iz propozicije [2.2.1] operacija invertovanja je homeomorfizam pa je $(\overline{A})^{-1}$ zatvoren skup koji sadrži A. Na osnovu definicije adherencije sledi $\overline{A} \subset (\overline{A})^{-1}$ □

U nastavku pokazujemo osobine podgrupa topoloških grupa.

Propozicija 2.3.5. *Neka je G topološka grupa. Važi :*

a) Ako je $H \leq G$ tada je $\overline{H} \leq G$.

b) Ako je $H \trianglelefteq G$ tada je i $\overline{H} \trianglelefteq G$.

Dokaz: a) Neka su $x, y \in \overline{H}$. Pokažimo da $xy^{-1} \in \overline{H}$, tj. da za svaku otvorenu okolinu U neutralnog elementa e grupe G važi $xy^{-1}U \cap H \neq \emptyset$. Iz aksioma topološke grupe za okolinu U i $y \in G$ postoji otvorena okolina neutralnog elementa W tako da $yWy^{-1} \subset U$. Dalje, za okolinu W postoji otvorena okolina neutralnog elementa V tako da $VV^{-1} \subset W$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} yVV^{-1}y^{-1} &\subset yWy^{-1} \subset U \\ VV^{-1}y^{-1} &\subset y^{-1}U. \end{aligned}$$

Kako xV i yV okoline elemenata x i y, redom i $x, y \in \overline{H}$ sledi da $xV \cap H \neq \emptyset$ i $yV \cap H \neq \emptyset$, pa postoje $u, v \in V$ tako da $xu \in H$ i $yv \in H$. H je podgrupa pa važi

$$xuv^{-1}y^{-1} \in H \tag{2}$$

S druge strane

$$xuv^{-1}y^{-1} \in xVV^{-1}y^{-1} \subset xy^{-1}U \tag{3}$$

Iz jednačina (2) i (3) sledi $xy^{-1}U \cap H \neq \emptyset$, tj. $xy^{-1} \in \overline{H}$.
b) Neka je H normalna pogrupa topološke grupe G. Za proizvoljno $a \in G$ na osnovu homeomorfizma $\sigma_a : x \to axa^{-1}$ sledi:

$$a\overline{H}a^{-1} \subset \overline{aHa^{-1}} = \overline{H}$$

Dakle, $\overline{H} \trianglelefteq G$. □

Teorema 2.3.6. *Neka je G topološka grupa i $H \leq G$ njena podgrupa. Važi:*

a) H je otvorena podgrupa ako i samo ako sadrži neprazan otvoren podskup od G.

b) Podgrupa H je zatvorena ako i samo ako postoji otvoren skup $U \subset G$ tako da je $U \cap H$ neprazan i zatvoren u U.

Dokaz: a) Neka je U neprazan otvoren podskup od G takav da $U \subset H$. Tada za sve $a \in H$ sledi da je Ua otvoren skup u G takav da $Ua \subset H$. Tada je $H = \bigcup_{a \in H} Ua$ otvoren u G. Obratno, jasno.

b) Ako je H zatvorena podgrupa od G tada je $H \cap U$ zatvoren u U. Obratno, neka je $U \subset G$ otvoren tako da $U \cap H \neq \emptyset$ i $U \cap H$ zatvoren u U.

Iz činjenice da je $U \setminus H = U \setminus (U \cap H)$ sledi da je $U \setminus H$ otvoren u U, a kako je U otvoren u G sledi da je i $U \setminus H$ otvoren u G i $(U \setminus H) \cap \overline{H}$ otvoren u $\overline{H}$. H je gust u $\overline{H}$ pa ako bi bilo $U \setminus H \neq \emptyset$ imali bismo $(U \setminus H) \cap \overline{H} \cap H \neq \emptyset$ to jest $(U \setminus H) \cap H \neq \emptyset$ što je nemoguće. Dakle $U \setminus H = \emptyset$ pa $U \subset H$. Na osnovu a) sledi H je otvorena podgupa, zatim na osnovu teoreme [2.2.4] H je zatvorena podgrupa. □

Posledica 2.3.7. *Ako je H lokalno kompaktna podgrupa topološke grupe G tada je H zatvorena. Specijalno, svaka diskretna podgrupa je zatvorena.*

Dokaz: Kako je H lokalno kompaktan potprostor postoji $C \subset H$ kompaktna okolina neutralnog elementa e u potprostoru H. Na osnovu definisanosti baze okolina tačke na potprostoru, postoji otvorena okolina elementa e u G tako da $U \cap H \subset C$.
Kako je C kompaktan i svaka topološka grupa Hauzdorfov prostor, C je zatvoren skup u G. Tada imamo da je $U \cap H = U \cap C$ neprazan zatvoren skup u U. Iz teoreme [2.2.4] sledi da je podgrupa H zatvorena. □

Kako bi ilustrovali navedene rezultate, u narednom primeru određujemo kako izgledaju zatvorene podgrupe aditivne grupe $\mathbb{R}$.

Primer 2.3.8. *Svaka prava zatvorena podgrupa aditivne grupe $\mathbb{R}$ je oblika $a\mathbb{Z}$ za neki realan broj $a \geq 0$.*

Stav 1: Ako je $A \subset \mathbb{R}$ diskretna podgrupa, tada postoji realan broj $a \geq 0$ tako da $A = a\mathbb{Z}$:

Ako je $A = \{0\}$, trivijalno $A = 0\mathbb{Z}$. Pretpostavimo da je $A \neq \{0\}$. Definišimo $a = \inf\{t \in A : t > 0\}$. Kako je A diskretna i zatvorena na osnovu posledice [2.3.7] sledi da $a > 0$ i $a \in A$. Dakle, $a\mathbb{Z} \subset A$. Dalje, za proizvoljan element $b \in A$ postoji $k \in \mathbb{Z}$ da $ka \leq b < (k+1)a$. Tada $0 \leq b - ka < a$, pa zbog definicije elementa a sledi da $b = ka$, tj. $A \subset a\mathbb{Z}$.
Jasno, za realan broj a' tako da $0 \leq a' < a$ važi $a'\mathbb{Z} \neq a\mathbb{Z}$.

Stav 2: Ako je $A \subset \mathbb{R}$ nediskretna podgrupa tada je A gust skup u $\mathbb{R}$.

Pokazujemo da $\overline{A} = \mathbb{R}$. Kako je A nediskretna, tada postoji $a \in A$ koja je tačka nagomilavanja tog skupa. Međutim tada je i 0 tačka nagomilavanja skupa A. Stoga za svako $n \in \mathbb{N}$ možemo pronaći element $a_n \in A$ tako da $0 < |a_n| \leq 1/n$.
Za proizvoljno $r \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ možemo izabrati $k_n \in \mathbb{Z}$ tako da $|a_n k_n - r| \leq 1/n$ iz čega sledi $r \in \overline{A}$. Dakle $\overline{A} = \mathbb{R}$, tj. A je gust u $\mathbb{R}$. Stoga ako je $A \subset \mathbb{R}$ prava zatvorena podgrupa, iz Stava 2. ona mora biti diskretna, tada je iz Stava 1. A oblika $a\mathbb{Z}$ za realan broj $a \geq 0$.

Definicija 2.3.9. Neka je X topološki prostor i $x \in X$. Minimalnu kardinalnost baze okolina tačke x zovemo *karakter prostora* X *u tački* x i označavamo sa $\mathcal{X}(x, X)$

Lema 2.3.10. *Neka je* Y *potprostor regularnog topološkog prostora* X *tako da je* Y *gust u* X. *Tada važi* $\mathcal{X}(y, Y) = \mathcal{X}(y, X)$ *za sve* $y \in Y$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{B}$ baza okolina tačke $y \in Y$ u prostoru X. Tada je familija $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ baza okolina tačke y u potprostoru Y. Jasno, $\mathcal{X}(y, Y) \leq \mathcal{X}(y, X)$.
Obratno, neka je $\mathcal{B}_Y$ baza okolina tačke y u Y takva da $|\mathcal{B}_Y| = \mathcal{X}(y, Y)$. Za svako $U \in \mathcal{B}_Y$ izaberemo otvoren skup $V_U \subset X$ tako da $V_U \cap Y = U$. Tvrdimo da je familija $\mathcal{B} = \{V_U : U \in \mathcal{B}_Y\}$ baza okolina tačke y u prostoru X. Zaista, za proizvoljnu okolinu O tačke y u prostoru X iz regularnosti prostora sledi da postoji otvorena okolina W tačke y u X takva da $\overline{W} \subset O$.
$\mathcal{B}_Y$ je baza okolina za y u Y i $y \in W \cap Y$ otvoren skup u Y pa postoji $U \in \mathcal{B}_Y$ da $U \subset W \cap Y$. Kako je Y gust u X sledi da je $V_U \cap Y = U$ gust u V_U. Tada imamo $V_U = \overline{U} \subset \overline{W} \subset O$. Dakle $y \in V_U \subset O$.
Iz definicije za $\mathcal{B}$ jasno je $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}_Y| = \mathcal{X}(y, Y)$. Dakle, $\mathcal{X}(y, X) \leq \mathcal{X}(y, Y)$ □

Propozicija 2.3.11. *Neka je* G *topološka grupa i* $H \subset G$ *podgrupa koja zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Tada* $\overline{H}$ *zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Dokaz: Označimo $K = \overline{H}$. Iz propozicije [2.3.5] K je podgrupa topološke grupe G, stoga je homogen prostor. Dovoljno je pokazati da neutralni element grupe e ima prebrojivu bazu okolina u prostoru K. Kako je svaka topološka grupa regularna i regularnost nasledna topološka osobina, K je regularan prostor. Iz uslova propozicije imamo $\mathcal{X}(e, H) \leq \aleph_0$ pa na osnovu leme [2.3.10] sledi $\mathcal{X}(e, K) \leq \aleph_0$. Dakle, $K = \overline{H}$ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. □

Na kraju ovog odeljka predstavljamo rezultat o proizvodu kompaktnog i zatvorenog skupa, kao i rezultat separacije kompaktnog i zatvorenog skupa u topološkim grupama.

Teorema 2.3.12. *Neka je* G *topološka grupa sa neutralnim elementom* e. *Ako su* $F \subset G$ *kompaktan i* $P \subset G$ *zatvoren skup takvi da* $F \cap P = \emptyset$ *tada postoji otvorena okolina* $V \in \mathcal{U}(e)$ *da važi* $FV \cap P = \emptyset$ *i* $VF \cap P = \emptyset$.

Dokaz: Na osnovu homeomorfizma leve translacije kolekcija
$\mathcal{B}_x = \{xV : V \in \mathcal{B}_e\}$ je baza okolina tačke x, gde je $\mathcal{B}_e$ otvorena baza

okolina od e. Kako je topološka grupa G regularan prostor sledi da postoji V_x otvorena okolina od e da $xV_x \cap P = \emptyset$.

Iz neprekidnosti množenja možemo izabrati otvorenu okolinu W_x neutralnog elementa da $W_x^2 \subset V_x$.

Tada $F \subset \bigcup_{x \in F} xW_x$, tj. $\{xW_x : x \in F\}$ otvoren pokrivač kompaktnog skupa F. Tada postoji konačan potpokrivač skupa F, to jest postoji konačan skup $C \subset F$ takav da

$$F \subset \bigcup_{x \in C} xW_x.$$

Pokažimo da za $V_1 = \bigcap_{x \in C} xW_x$ važi $FV_1 \cap P = \emptyset$. Dovoljno je pokazati da $yV_1 \cap P = \emptyset$ za proizvoljno $y \in F$. Za $y \in F$ postoji $x \in C \subset F$ tako da $y \in xW_x$. Tada

$$yV_1 \subset xW_xV_1 \subset xW_xW_x \subset xV_x \subset G \setminus P.$$

Dakle, $FV_1 \cap P = \emptyset$. Analogno, možemo pronaći otvorenu okolinu V_2 neutralnog elementa tako da $V_2F \cap P = \emptyset$.

Tada je traženi skup $V = V_1 \cap V_2$. □

Posledica 2.3.13. *Neka je G topološka grupa. Ako su $F \subset G$ kompaktan i $P \subset G$ zatvoren skup, tada su skupovi FP i PF zatvoreni u G.*

Dokaz: Kontrapozicijom pokažimo da $\overline{FP} \subset FP$.
Za proizvoljno $a \notin FP$ sledi da $F^{-1}a \cap P = \emptyset$. Kako je kompaktnost invarijanta homeomorfizma sledi da je $F^{-1}a$ kompaktan skup. Iz teoreme [2.3.12] postoji otvorena okolina U neutralnog elementa takva da $F^{-1}aU \cap P = \emptyset$ to jest $aU \cap FP = \emptyset$. Kako je $aU \in \mathcal{U}(a)$ sledi $a \notin \overline{FP}$.
Dakle, FP je zatvoren skup u G.

Analogno se pokazuje i da je skup PF zatvoren skup. □

Jednostavan primer pokazuje da slično tvrđenje ne važi za dva proizvoljna zatvorena skupa topološke grupe.

Primer 2.3.14. U aditivnoj grupi $\mathbb{R}$ posmatrajmo zatvorene podgrupe $A = \mathbb{Z}$ i $B = \pi\mathbb{Z}$. Tada $A + B$ nije oblika $c\mathbb{Z}$ za neki relan broj $c \geq 0$. Na osnovu primera [2.3.8] $A + B$ je prebrojiva gusta podgrupa u $\mathbb{R}$ koja nije zatvorena.

Teorema 2.3.15. *Neka su E i F proizvoljni kompaktni podskupovi topološke grupe G. Tada je njihov proizvod EF kompaktan potprostor grupe G.*

Dokaz: Direktan proizvod $E \times F$ je kompaktan prostor. Iz neprekidnosti operacije množenja $E \times F \to EF$ i činjenice da je kompaktnost invarijanta neprekidnih preslikavanja sledi da je prostor EF kompaktan. □

Propozicija 2.3.16. *Neka je B kompaktan podskup topološke grupe G. Tada za svaku okolinu U neutralnog elementa e postoji V okolina elementa e takva da $bVb^{-1} \subset U$ za svako $b \in B$.*

Dokaz: Neka je $U \in \mathcal{U}(e)$. Iz neprekidnosti grupovnih operacija možemo izabrati otvorenu simetričnu okolinu $W \in \mathcal{U}(e)$ tako da $W^3 \subset U$.
Kako je B kompaktan i familija $\{Wx : x \in B\}$ njegov otvoren pokrivač, sledi da postoji konačan $F \subset B$ tako da $B \subset \bigcup_{x \in F} Wx = WF$.
Za proizvoljno $b \in B$ imamo $b = wx$ za neke $w \in W$ i $x \in F \subset B$.
Neka je $V = \bigcap_{x \in F} x^{-1}Wx$. Tada je V otvorena okolina neutralnog elementa i važi:

$$bVb^{-1} = wxVx^{-1}w^{-1} \subset wWw^{-1} \subset W^3 \subset U.$$

□

2.4 Povezanost topološke grupe

Neka je G topološka grupa sa neutralnim elementom e. Sa H označimo komponentu povezanosti elementa e. H je tada najveći zatvoren povezan skup koji sadrži e.

Propozicija 2.4.1. *Komponenta povezanosti H proizvoljne topološke grupe G je zatvorena normalna podgrupa od G, to jest $aHa^{-1} \subset H$ za sve $a \in G$.*

Dokaz: Povezanost je invarijanta neprekidnih preslikavanja. Kako je H povezan i $\sigma_a : x \to axa^{-1}$ homeomorfizam sledi da je $\sigma_a[H] = aHa^{-1}$ povezan skup. Kako $e \in aHa^{-1}$ i H je najveći povezan skup u G koji sadrži e sledi $aHa^{-1} \subset H$ to jest H je normalna podrupa grupe G. □

Naredna teorema koristi se za pronalaženje diskretnih normalnih podgrupa povezane topološke grupe. Naime, sve takve podgrupe su sadržane u centru grupe $Z(G)$. Dokažimo prvo pomoćnu lemu o pokrivaču povezane topološke grupe.

Lema 2.4.2. *Neka je U proizvoljna otvorena okolina neutralnog elementa e povezane topološke grupe G. Tada je*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

Dokaz: Neka je V otvorena okolina elementa e takva da $V^{-1} = V$ i $V \subset U$. Tada je $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ otvorena podgrupa grupe G. Zaista, za $x, y \in H$ postoje $k, l \in \mathbb{N}$ tako da $x \in V^k$ i $y \in V^l$. Tada važi $y^{-1} \in V^l$ i

$$xy^{-1} \in V^k V^l = V^{k+l} \subset H.$$

Na osnovu teoreme [2.2.4] H je i zatvorena podgrupa. Kako je G povezan prostor sledi da mora važiti $H = G$. Zaista, ako bi H bio pravi podskup od G tada bi važilo $G = H \cup G \setminus H$, a kako su $H, G \setminus H$ otvoreni to je kontradikcija sa pretpostavkom da je G povezan. Kako je $V \subset U$ sledi $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. $\square$

Teorema 2.4.3. *Neka je K diskretna normalna podgrupa povezane topološke grupe G. Tada svaki element iz K komutira sa svim elementima grupe G, to jest $K \subset Z(G)$.*

Dokaz: Jasno je da za $K = \{e\}$ važi $K \subset Z(G)$. Pretpostavimo da je K netrivijalna normalna podgrupa.
Neka je $x \in K \setminus \{e\}$. Kako je K diskretna postoji U otvorena okolina tačke x u G tako da $U \cap K = \{x\}$. Iz neprekidnosti operacije množenja na grupi i jednačine $exe = x$ postoji V simetrična okolina elementa e u G tako da $VxV \subset U$.
Kako je K normalna podgrupa, za proizvoljno $y \in V$ važi $yxy^{-1} \in K$ i $yxy^{-1} \in VxV^{-1} \subset U$. Dakle $yxy^{-1} \in U \cap K = \{x\}$, to jest $yxy^{-1} = x$. Tada $yx = xy$ za sve $y \in V$.
Kako je G povezana topološka grupa na osnovu leme [2.4.2] skupovi V^n, $n \in \mathbb{N}$ pokrivaju skup G. Sledi da se svaki element $g \in G$ može predstaviti na sledeći način: $g = y_1 \cdots y_n$ tako da $y_1, \ldots, y_n \in V$ i $n \in \mathbb{N}$. Element x komutira sa svim elementima skupa V pa sledi

$$gx = y_1 \cdots y_n x = y_1 \cdots x y_n = \ldots = x y_1 \cdots y_n = xg$$

Dakle, $x \in Z(G)$. Sledi $K \subset Z(G)$. $\square$

Podsetimo se, za topološki prostor kažemo da je *putno povezan* ako za proizvoljne $x, y \in X$ postoji neprekidno preslikavanje $f : [0,1] \to X$ takvo da $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$. Svaki putno povezan prostor je i povezan prostor. U nastavku dajemo primer kompaktne putno povezane topološke grupe.

Primer 2.4.4. (*Unitarna grupa matrica*)

Posmatrajmo $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ kvadratne matrice $n \times n$ sa kompleksnim koeficijentima. Za matricu $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ označimo:

$$A^T = (a_{j,i}) \text{ transponovana matrica od } A;$$
$$\overline{A} = (\overline{a_{i,j}}) \text{ konjugovama matrica od } A;$$
$$A^H = \overline{A}^T = \overline{A^T}.$$

Neka je $U(n)$ skup svih matrica $n \times n$ takvih da je $AA^H = E_n$, gde je E_n jedinična $n \times n$ matrica. Matricu $A \in U(n)$ zovemo *unitarna* matrica.

S obzirom da je determinanta matrica multiplikativna funkcija, to jest $det(BC) = detB \cdot detC$ imamo

$$1 = detE_n = det(AA^H) = detA \cdot detA^H. \tag{4}$$

Stoga je svaka unitarna matrica invertibilna, $detA \neq 0$. Iz činjenice da $detA = detA^T$, $|det\overline{A}| = |detA|$ i iz (4) sledi da je $|detA| = 1$ za sve $A \in U(n)$. Štaviše, ako je $A \in U(n)$ tada $A^{-1} = A^H$ i važi $A^H A = E_n$ iz čega sledi

$$A^{-1}(A^{-1})^H = A^{-1}(A^H)^H = A^{-1}A = E_n$$

to jest i $A^{-1} \in U(n)$. Dalje, za $A, B \in U(n)$ važi

$$(AB)(AB)^H = ABB^H A^H = E_n$$

to jest $AB \in U(n)$. Dakle, $U(n)$ je podgrupa grupe $GL(n, \mathbb{C})$. Grupu $U(n)$ zovemo *unitarna grupa* stepena n nad $\mathbb{C}$. $U(n)$ je sa topologijom nasleđenom od $GL(n, \mathbb{C})$ topološka grupa.

Stav 1: $U(n)$ je kompaktan prostor.
Kako je skup $\{E_n\}$ zatvoren u $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ i preslikavanje $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dato sa $f(A) = AA^H$ neprekidno, sledi da je $U(n) = f^{-1}[\{E_n\}]$ zatvoren skup. Primetimo $U(n) \subset E^{n^2}$, gde je $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. E^{n^2} je kompaktan, a kako je $U(n)$ zatvoren sledi da je $U(n)$ i kompaktan.

Stav 2: $U(n)$ je putno povezan prostor.
Svaka unitarna matrica $A \in U(n)$ je *unitarno ekvivalentna* sa nekom dijagonalnom matricom. To znači da postoji unitarna matrica $U \in U(n)$ i D dijagonalna $n \times n$ matrica tako da $UAU^H = D$. Bez uticaja na opštost, neka je $A \neq E_n$.
Kako $A, U \in U(n)$ sledi da $D \in U(n)$ i $|detD| = 1$. Štaviše, za elemente $d_{k,k}$ matrice D važi $|d_{k,k}| = 1$ i možemo ih zapisati $d_{k,k} = e^{2\pi i \lambda_k}$ gde je $0 \leq \lambda_k < 1$ za sve $k = 1, \ldots, n$.
Za svaki realan t i $k \leq n$ definišemo $d_{k,k}(t) = e^{2\pi i t \lambda_k}$ i posmatramo dijagonalnu matricu $D(t)$ sa elementima $d_{k,k}(t)$, $1 \leq k \leq n$. Jasno, svaka matrica $D(t)$ je unitarna i važi $D(0) = E_n$ i $D(1) = D$. Tada je preslikavanje $t \to D(t)$, koje slika $[0, 1]$ u $U(n)$ neprekidno.
Konačno, definišemo preslikavanje $\varphi(t) = U^H D(t) U$ za sve $t \in [0, 1]$ koje je neprekidna bijekcija. Važi $\varphi(0) = U^H E_n U = E_n$ i $\varphi(1) = U^H D U = A$.
Ovim smo pokazali da neutralni element E_n od $U(n)$ možemo povezati sa proizvoljnom unitarnom matricom $A \in U(n) \backslash \{E_n\}$. Iz homogenosti topološke grupe sledi da je $U(n)$ putno povezan prostor, a time i povezan prostor.

2.5 Faktor grupe

Jedan od glavnih predmeta proučavanja topoloških grupa jesu faktor grupe. Mnogi netrivijalni primeri i kontraprimeri nastaju kao faktor grupe relativno jednostavnijih i dobro poznatih topoloških grupa. Iako su faktor grupe predmet mnogih studija i dalje postoje otvoreni problemi o ponašanju različitih topoloških i algebarskih osobina faktor grupa.

Teorema 2.5.1. *Neka je G topološka grupa sa neutralnim elemetom e i topologijom $\mathcal{O}$. Neka je H zatvorena podgrupa grupa grupe G. Označimo sa $G^L_{/H}$ skup svih levih koseta određenih podgrupom H snabdeven faktor topologijom određenom prirodnim preslikavanjem $\pi : G \to G^L_{/H}$ tako da $\pi(a) = aH$ za sve $a \in G$. Tada je familija $\{\pi[xU] : e \in U \subset \mathcal{O}\}$ baza okolina elementa $xH \in G^L_{/H}$, preslikavanje π je otvoreno i $G^L_{/H}$ je homogen T_1 prostor.*

Dokaz: Neka je $U \in \mathcal{O}$ proizvoljan otvoren skup u G. Na osnovu propozicije [2.3.1] sledi $\pi[U] = UH \in \mathcal{O}$. Kako je $\pi^{-1}\pi[U] = UH$ na osnovu definicije faktor topologije sledi da je $\pi[U]$ otvoren skup u $G^L_{/H}$. Dakle, π je otvoreno preslikavanje. Važi i više, kako je π neprekidna otvorena sirjekcija sledi da je π faktor preslikavanje.
Uzmimo otvorenu okolinu W elementa xH u $G^L_{/H}$ i definišimo $O = \pi^{-1}[W]$. Kako je π neprekidno O je otvoren skup u G. Dalje, $x \in \pi^{-1}[xH] \subset \pi^{-1}[W] = O$, to jest $x \in O$ pa postoji otvorena okolina U neutralnog elementa u G tako da $xU \subset O$. Tada

$$\pi[xU] \subset \pi[O] = \pi\pi^{-1}[W] \subset W.$$

Dakle, familija $\{\pi[xU] : e \in U \subset \mathcal{O}\}$ je baza okolina elementa $xH \in G^L_{/H}$.
Pokažimo da je $G^L_{/H}$ homogen prostor. Za $a \in G$ definišimo preslikavanje

$$h_a : G^L_{/H} \to G^L_{/H} \text{ tako da } h_a(xH) = axH.$$

Kako $axH \in G^L_{/H}$ definicija preslikavanja je dobra. Iz činjenice da je G grupa lako se pokazuje da je h_a bijekcija za sve $a \in G$. Štaviše, sva preslikavanja h_a su homeomorfizmi. Zaista, h_a je neprekidno, jer za proizvoljnu okolinu $W \in \mathcal{U}(axH)$ postoji otvorena okolina U neutralnog elementa grupe G tako da

$$axH \in \pi[axU] = axUH \subset W.$$

Tada za $V = \pi[xU] \in \mathcal{U}(xH)$ važi

$$h_a[V] = h_a[\pi[xU]] = h_a[xUH] = axUH \subset W.$$

Kako je $h_a \circ h_a^{-1} = i$, gde je $h_a^{-1}(xH) = a^{-1}H$ sledi da je h_a homeomorfizam. Za proizvoljne $xH, yH \in G^L_{/H}$ posmatramo homeomorfizam h_a za $a = yx^{-1}$. Važi

$$h_a(xH) = axH = yx^{-1}xH = yH$$

Ovim smo pokazali da je $G^L_{/H}$ homogen prostor.
Topološka grupa G je T_1 prostor i π faktor preslikavanje pa sledi da su sve tačke $\pi(a) = aH$ zatvoreni skupovi u $G^L_{/H}$, tj. $G^L_{/H}$ je T_1 prostor. $\square$

Prostor $G^L_{/H}$ iz prethodne teoreme zovemo *levi koset prostor* određen podgrupom H, a homeomorfizam h_a zovemo *leva translacija* grupe $G^L_{/H}$ za a.

Napomena.

Slično, za topološku grupu G i njenu zatvorenu podgrupu H možemo definisati *desni koset prostor* $G^D_{/H} = \{Ha : a \in G\}$ sa faktor topologijom određenom prirodnim preslikavanjem $p : G \to G^D_{/H}$, $p(a) = Ha$. Analogno prethodnoj teoremi p je otvoreno preslikavanje, familija $\{p[Ux] : e \in U \in \mathcal{O}\}$ je baza okolina elementa Hx i $G^D_{/H}$ je homogen T_1 prostor.

Propozicija 2.5.2. *Neka je G topološka grupa, H njena zatvorena podgrupa i $\pi : G \to G^L_{/H}$. Neka je za $a \in G$ λ_a leva translacija na G za a i h_a leva translacija na $G^L_{/H}$ za a. Tada je $\pi \circ \lambda_a = h_a \circ \pi$.*

Ako je data topološka grupa G i njena zatvorena normalna podgrupa H znamo da su tada svi levi koseti jednaki odgovarajućim desnim kosetima, $aH = Ha$ za sve $a \in G$. Odgovarajući faktor prostor označavamo sa $G_{/H}$ i on sa operacijom množenja koseta $aHbH = abH$ čini grupu koju zovemo *faktor grupa* grupe G u odnosu na H. U nastavku pokazujemo da je i faktor grupa topološka grupa.

Teorema 2.5.3. *Neka je G topološka grupa i H njena zatvorena normalna podgrupa. Tada je faktor grupa $G_{/H}$ sa faktor topologijom određenom prirodnim preslikavanjem $\pi : G \to G_{/H}$ topološka grupa i π je otvoreni neprekidni homomorfizam.*

Dokaz: Dovoljno je pokazati neprekidnost operacije $M : G_{/H} \times G_{/H} \to G_{/H}$ datom sa $M(xH, yH) = xy^{-1}H$.
Neka je O proizvoljna okolina elementa $xy^{-1}H$. Tada postoji otvorena okolina U neutralnog elementa e u grupi G tako da $xy^{-1}H \in \pi[xy^{-1}U] \subset O$. Iz neprekidnosti operacija na grupi G za U postoji V otvorena okolina od e u G tako da $VV^{-1} \subset U$. Tada važi:

$$(xV)(yV)^{-1} \subset xy^{-1}U.$$

Kako je π homomorfizam imamo da $\pi[xV]\pi[(yV)^{-1}] \subset \pi[xy^{-1}U]$. Tada za $\pi[xV]$ okolinu elementa xH i $\pi[yV]$ okolinu elementa yH važi

$$M[\pi[xV], \pi[yV]] = \pi[xy^{-1}U] \subset O.$$

Dakle M je neprekidno preslikavanje. $\square$

Teorema 2.5.4. *Faktor grupa $G_{/H}$ je diskretna ako i samo ako je H otvorena normalna podgrupa od G.*

Dokaz: Faktor grupa $G_{/H}$ je diskretna ako i samo ako je svaki skup $A \subset G_{/H}$ otvoren u $G_{/H}$, to jest ako i samo ako je $\pi^{-1}[A]$ otvoren u G. Kako je H otvoren skup u G tada je i $\pi^{-1}[A] = \bigcup_{x\in\pi^{-1}[A]} xH$ otvoren u G. $\square$

U nastavku sledi propozicija koju navodimo bez dokaza. Za više detalja čitaoca upućujemo na [1].

Propozicija 2.5.5. *Neka je G topološka grupa i $H \subset G$ kompaktna podgrupa takva da je $G_{/H}$ kompaktna. Tada je G kompaktna topološka grupa.*

Teorema 2.5.6. *Neka je G topološka grupa, H njena zatvorena normalna podgrupa, X potprostor od G, $\pi : G \to G_{/H}$ prirodno preslikavanje i $Y = \pi[X]$. Ako prostori H i potprostor Y od $G_{/H}$ zadovoljavaju prvu aksiomu prebrojivosti tada i X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Dokaz: Na osnovu propozicije [2.5.2] možemo pretpostaviti da neutralni element e grupe G pripada potprostoru X. Proveravamo da li e ima prebrojivu bazu okolina u prostoru X.
Fiksiramo niz simetričnih otvorenih okolina $W_n \in \mathcal{U}(e)$ u G takvih da $W_{n+1}^2 \subset W_n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i da je familija $\{W_n \cap H : n \in \mathbb{N}_0\}$ baza okolina elementa e u H.
Zatim, fiksiramo niz otvorenih okolina $U_n \in \mathcal{U}(e)$ u G takvih da je familija $\{\pi[U_n] \cap Y : n \in \mathbb{N}_0\}$ baza okolina od $\pi(e) = H$ u prostoru Y. Definišimo:

$$B_{i,j} = W_i \cap U_j \cap X, \;\; i, j \in \mathbb{N}_0.$$

Za kraj dokaza dovoljno je dokazati sledeći stav:
Stav : Familija $\{B_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ je baza okolina elementa e u X.

Jasno, svaki $B_{i,j}$ je otvoren u X i sadrži e. Neka je O otvorena okolina elementa e u G. Iz neprekidnosti operacije množenja postoji otvorena okolina $V \in \mathcal{U}(e)$ u G tako da $V^2 \subset O$. Izaberemo $m \in \mathbb{N}_0$ tako da $W_m \cap H \subset V$. Dalje, postoji $k \in \mathbb{N}_0$ tako da

$$\pi[U_k] \cap Y \subset \pi[V \cap W_{m+1}].$$

Dokažimo da je
$$B_{m+1,k} \subset O.$$
Neka je $z \in B_{m+1,k} = W_{m+1} \cap U_k \cap X$. Tada $z \in U_k \cap X \subset (V \cap W_{m+1})H$, jer $\pi(z) \in \pi[U_k] \cap Y \subset \pi[V \cap W_{m+1}]$. Međutim, $z \notin W_{m+1}(G \setminus W_m)$ jer $W_{m+1}^2 \subset W_m$ i $z \in W_{m+1} = W_{m+1}^{-1}$. Stoga $z \in (V \cap W_{m+1})(H \cap W_m)$. Kako $W_m \cap H \subset V$ zaključujemo da $z \in V^2 \subset O$.

Dakle familija $\{B_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ je prebrojiva baza okolina neutralnog elementa e u X. Tada zbog homogenosti sledi da prostor X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. $\square$

Posledica 2.5.7. ***[N. Ya. Vileking]*** *Neka je G topološka grupa i H njena zatvorena normalna podgrupa. Ako prostori H i $G_{/H}$ zadovoljavaju prvu aksiomu prebrojivosti tada i G zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Formulacija ove posledice važi i ako se uslov prve aksiome prebrojivosti zameni uslovom separabilnosti. Da bismo to dokazali, potreban nam je pomoćni rezultat za čiji dokaz upućujemo na [1].

Lema 2.5.8. *Neka su X, Y topološki prostori i $f : X \to Y$ otvoreno neprekidno preslikavanje. Ako za $x \in X$ i $B \subset Y$ važi $f(x) \in \overline{B}$ tada $x \in \overline{f^{-1}[B]}$. Specijalno, $\overline{f^{-1}[B]} = f^{-1}[\overline{B}]$.*

Teorema 2.5.9. *Neka je G topološka grupa i H njena zatvorena normalna podgrupa. Ako su prostori H i $G_{/H}$ separabilni tada je i G separabilan prostor.*

Dokaz: Neka je $\pi : G \to G_{/H}$ prirodno preslikavanje. Kako je $G_{/H}$ separabilan postoji $B \subset G_{/H}$ tako da $\overline{B} = G_{/H}$ i $|B| \leq \aleph_0$. Kako je H separabilan i svaki koset xH homeomorfan sa H, možemo fiksirati prebrojiv gust $M_y \subset \pi^{-1}(y)$ za sve $y \in B$.
Neka je $M = \bigcup\{M_y : y \in B\}$. tada je M prebrojiv podskup od G i gust u $\pi^{-1}[B]$. Kako je π otvoreno preslikavanje, sledi iz leme [2.5.8] da $\overline{\pi^{-1}[B]} = G$. Dakle M je gust u G, to jest G je separabilan. $\square$

Glava 3

3 Metrizabilnost topoloških grupa

U nastavku rada bavimo se osobinom metrizabilnosti topoloških grupa. Garrett Birkhoff i Shizuo Kakutani su pokazali da je dovoljan uslov za metrizabilnost topološke grupe G da ta topološka grupa zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Metrika koja određuje topologiju takve topološke grupe zadaje se pomoću neprekidnog preslikavanja koje zovemo prednorma.

3.1 Prednorma

Za početak posmatramo samo grupu G sa neutralnim elementom e i definišemo realnu funkciju na G na sledeći način:

Definicija 3.1.1. Neka je G grupa sa neutralnim elementom e. Preslikavanje $N : G \to \mathbb{R}$ zovemo *prednorma* ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(PN1) $N(e) = 0$

(PN2) $N(xy) \leq N(x) + N(y)$

(PN3) $N(x^{-1}) = N(x)$.

Propozicija 3.1.2. *Ako je N prednorma na grupi G tada za sve $x \in G$ važi $N(x) \geq 0$.*

Dokaz:

$$0 = N(e) = N(xx^{-1}) \leq N(x) + N(x^{-1}) = 2N(x) \Rightarrow N(x) \geq 0$$

□

Propozicija 3.1.3. *Neka je N prednorma na grupi G. Tada*

$$| N(x) - N(y) | \leq N(xy^{-1}), \text{ za sve } x \text{ i } y \text{ iz } G.$$

Dokaz: Iz osobina prednorme imamo $N(x) = N(xy^{-1}y) \leq N(xy^{-1}) + N(y)$ odakle sledi:

$$N(x) - N(y) \leq N(xy^{-1}) \tag{5}$$

Zatim,
$N(y) = N(y^{-1}) = N(x^{-1}xy^{-1}) \leq N(x^{-1}) + N(xy^{-1}) = N(x) + N(xy^{-1})$
dakle sledi

$$N(y) - N(x) \leq N(xy^{-1}) \tag{6}$$

Na osnovu (5) i (6) sledi nejednačina iz propopozicije. □

Jednostavnim izvođenjem mogu se dokazati sledeće propozicije.

Propozicija 3.1.4. *Neka je N prednorma na grupi G i $\alpha \geq 0$. Tada je preslikavanje αN na grupi G definisano sa $(\alpha N)(x) = \alpha(N(x))$ za sve $x \in G$, prednorma na G.*

Propozicija 3.1.5. *Ako su N i M prednorme na grupi G onda je i preslikavanje $N + M$ prednorma na G.*

Lema 3.1.6. *Neka je $f : G \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Tada je $N_f : G \to \mathbb{R}$ definisano za svako $x \in G$ sa*

$$N_f(x) = \sup\{|\ f(yx) - f(y)\ | : y \in G\}$$

prednorma na grupi G.

Dokaz: Na osnovu ograničenosti funkcije f sledi dobra definisanost preslikavanja N_f. Pokazaćemo još i da su zadovoljeni uslovi definicije 3.1.1 :

(PN1) $N_f(e) = \underset{y \in G}{sup} \mid f(ye) - f(y) \mid = 0$

(PN2) $N_f(xy) = \underset{a \in G}{sup} \mid f(axy) - f(a) \mid = \underset{a \in G}{sup} \mid f(axy) \pm f(ax) - f(a) \mid$
$\leq \underset{a \in G}{sup} \mid f(ax) - f(a) \mid + \underset{a \in G}{sup} \mid f(axy) - f(ax) \mid = N_f(x) + N_f(y)$

(PN3) $N_f(x^{-1}) = \underset{y \in G}{sup} \mid f(yx^{-1}) - f(y) \mid = \underset{y \in G}{sup} \mid f(yx^{-1}x) - f(yx^{-1}) \mid = N(x)$

Poslednje jednakosti u proveri uslova (PN2) i (PN3) slede iz činjenice da je desna translacija na grupi $\rho_x : a \to ax$ bijekcija. $\square$

U opštem slučaju, prednorma N na topološkoj grupi G ne mora biti neprekidna funkcija. Sledeća propozicija daje potreban i dovoljan uslov za neprekidnost prednorme.

Propozicija 3.1.7. *Prednorma N na topološkoj grupi G je neprekidna ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina U neutralnog elementa e takva da je $N(x) < \varepsilon$ za sve $x \in U$.*

Dokaz: Potreban uslov je jasan iz definicije neprekidnog preslikavanja topoloških prostora (1.3.24). Pokažimo da važi i dovoljan uslov.
Neka je $z \in G$ proizvoljan element i $\varepsilon > 0$. Neka je $U \in \mathcal{U}(e)$ otvorena okolina koja zadovoljava uslov propozicije. Tada je $V = Uz$ otvorena okolina tačke z. Za proizvoljno $y \in Uz$ imamo da $yz^{-1} \in U$ pa sledi da je $N(yz^{-1}) < \varepsilon$. Tada na osnovu propozicije 3.1.3 sledi da je $|N(z) - N(y)| < \varepsilon$. Dakle, funkcija N je neprekidna u z. $\square$

U nastavku sledi konstrukcija neprekidnih prednormi na topološkoj grupi G. Takva konstrukcija će obezbediti bogatu familiju neprekidnih prednormi na proizvoljnoj topološkoj grupi.

Neka je N prednorma na grupi G sa neutralnim elementom e , definišimo *jediničnu loptu* sa centrom u e kao skup $B_N = \{x \in G : N(x) < 1\}$ i $B_N(\varepsilon) = \{x \in G : N(x) < \varepsilon\}$ za $\varepsilon > 0$ loptu sa centrom u e poluprečnika ε. Primetimo, ako je N neprekidna prednorma tada su ovako definisane lopte otvoreni podskupovi od G.

Lema 3.1.8. *Neka je $\{U_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ niz otvorenih simetričnih okolina neutralnog elementa e u topološkoj grupi G takav da je $U_{n+1}^2 \subset U_n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Tada na G postoji prednorma N koja zadovoljava uslov:*

$$\textit{(PN4)} \quad \{x \in G : N(x) < \frac{1}{2^n}\} \subset U_n \subset \{x \in G : N(x) \leq \frac{2}{2^n}\}$$

Štaviše, takva prednorma N je neprekidna i ako su skupovi U_n invarijantni važi $N(xyx^{-1}) = N(y)$ za sve $x, y \in G$.

Dokaz: Induktivno konstruišemo niz otvorenih okolina neutralnog elementa e na sledeći način: $V(1) = U_0$ Pretpostavimo da su za fiksiran $n \in \mathbb{N}_0$, $V(\frac{m}{2^n})$ za $m = 1, 2, 3, ..., 2^n$ otvorene okoline neutralnog elementa e, tada definišemo

- $V\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = U_{n+1}$
- $V\left(\dfrac{2m}{2^{n+1}}\right) = V\left(\dfrac{m}{2^n}\right)$, $m = 1, \ldots, 2^n$
- $V\left(\dfrac{2m+1}{2^{n+1}}\right) = V\left(\dfrac{m}{2^n}\right) \cdot U_{n+1} = V\left(\dfrac{m}{2^n}\right) \cdot V\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$, $m = 1, \ldots, 2^n - 1$

i neka je $V\left(\dfrac{m}{2^n}\right) = G$ za $m > 2^n$. Na ovaj način smo dobili familiju otvorenih okolina neutralnog elementa $V(r)$ za svako r oblika $r = \dfrac{u}{2^k}$ tako da $u \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}_0$. Pokažimo da važi:

$$V\left(\frac{m}{2^n}\right) \cdot V\left(\frac{1}{2^n}\right) \subset V\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \tag{7}$$

Primetimo da je (7) tačno za $m+1 > 2^n$, a slučaj kada je $m < 2^n$ dokazujemo indukcijom po n.

Ako je $n = 1$ jedina moguća vrednost za m je 1 i tada imamo

$$V\left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot V\left(\tfrac{1}{2}\right) = U_1 \cdot U_1 \subset U_0 = V(1)$$

Pretpostavimo da je (7) tačno za neko n. Dokažimo da je tada tačno i za $n+1$.

Ako je $m = 2k$ za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada je
$V\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \cdot V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{k}{2^{n}}\right) \cdot V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right)$

Ako je $0 < m = 2k+1 < 2^{n+1}$ za neko $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} V\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) \cdot V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) &= V\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \cdot U_{n+1} \\ &= V\left(\frac{k}{2^{n}}\right) \cdot U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset V\left(\frac{k}{2^{n}}\right) \cdot U_{n} \\ &= V\left(\frac{k}{2^{n}}\right) \cdot V\left(\frac{1}{2^{n}}\right) \end{aligned}$$

Na osnovu indukcijske hipoteze imamo

$$V\left(\frac{k}{2^{n}}\right) \cdot V\left(\frac{1}{2^{n}}\right) \subset V\left(\frac{k+1}{2^{n}}\right) = V\left(\frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{m+1}{2^{n+1}}\right)$$

čime smo završili dokaz za (7).

Definišimo realnu funkciju f na G na sledeći način:

$$f(x) = inf\{r > 0 : x \in V(r)\}$$

za sve x iz G. Funkcija f je dobro definisana jer je $x \in V(2) = G$, za sve $x \in G$. Iz uslova (7) sledi da za $0 < r < s \leq 1$, gde su r i s racionalni brojevi čiji su brojioci pozitivni celi brojevi a imenioci stepeni broja 2, važi $V(r) \subset V(s)$. Primetimo,

$$Ako\, je\, f(x) < r \text{ tada } x \in V(r). \tag{8}$$

Stoga ovako definisana f je nenegativna funkcija i ograničena odozgo sa 2. Na osnovu leme [3.1.6] preslikavanje N definisano sa

$$N(x) = \sup_{y \in G} \mid f(yx) - f(y) \mid$$

za sve $x \in G$ je prednorma na G. Dokažimo da N zadovoljava uslov $(PN4)$. Primetimo, $f(e) = 0$. Pretpostavimo da je $N(x) < 1/2^n$ za neko $x \in G$. Tada $f(x) =\mid f(ex) - f(e) \mid \leq N(x) < 1/2^n$ i iz (8) sledi da $x \in V(1/2^n) = U_n$. Ovim smo dokazali deo uslova $(PN4)$ da je $\{x \in G : N(x) < 1/2^n\} \subset U_n$.

Dokažimo sada i drugi deo uslova $(PN4)$ iz kojeg jasno sledi i neprekidnost prednorme N. Uzmimo proizvoljno $x \in V(1/2^n) = U_n$. Kako su U_n

simetrične okoline važi $x^{-1} \in V(1/2^n)$. Kako za svaki element $y \in G$ postoji pozitivan ceo broj k takav da $(k-1)/2^n \leq f(y) \leq k/2^n$ iz (8) imamo da $y \in V(k/2^n)$. Sledi

$$yx, yx^{-1} \in V\left(\frac{k}{2^n}\right) \cdot V\left(\frac{1}{2^n}\right) \subset V\left(\frac{k+1}{2^n}\right).$$

Tada $f(yx), f(yx^{-1}) \leq (k+1)/2^n$ što zajedno sa $(k-1)/2^n \leq f(y)$ daje $f(yx) - f(y) \leq 2/2^n$ i $f(yx^{-1}) - f(y) \leq 2/2^n$. Zamenom y sa yx u poslednjoj nejednačini dobijamo $f(y) - f(yx) \leq 2/2^n$ što zajedno sa prethodnom nejednačinom implicira $\mid f(yx) - f(y) \mid \leq 2/2^n$ za sve $y \in G$. Dakle, $N(x) \leq 2/2^n$.

Konačno, pretpostavimo da su skupovi U_n invarijantni to jest takvi da $xU_nx^{-1} = U_n$ za sve $x \in G$ i $n \in \mathbb{N}$. Kako je proizvod konačno mnogo invarijantnih skupova invarijantan, sledi da je $V(r)$ takođe invarijantan za sve racionalne brojeve $0 < r \leq 1$ čiji su imenioci stepeni broja 2. Stoga sledi da $f(xyx^{-1}) = f(y)$ za sve $x, y \in G$. Za proizvoljne $x, y \in G$ dobijamo da važi:

$$\begin{aligned} N(xyx^{-1}) = \sup_{z \in G} \mid f(zxyx^{-1}) - f(z) \mid &= \sup_{z \in G} \mid f(x^{-1}zxy - f(z) \mid \\ &= \sup_{t \in G} \mid f(ty) - f(xtx^{-1}) \mid \\ &= \sup_{t \in G} \mid f(ty) - f(t) \mid = N(y) \end{aligned}$$

gde je $t = x^{-1}zx$. Drugi red gornje jednakosti sledi iz činjenice da je preslikavanje $\varphi : G \to G$ definisano sa $\varphi(z) = x^{-1}zx$ za sve $z \in G$ bijekcija. Ovim je dokaz završen. $\square$

Teorema 3.1.9. *[**A.A.Markov**] Za svaku otvorenu okolinu U neutralnog elementa e topološke grupe G, postoji neprekidna prednorma N na G takva da je jedinična lopta B_N sadržana u U.*

Dokaz: Neka je $U_0 = U \cap U^{-1}$. Kako postoji otvorena okolina V_1 tako da $V_1^2 \subset U_0$ definišemo $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo niz otvorenih simetričnih okolina neutralnog elementa $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ koje zadovoljaju uslov prethodne leme na osnovu koje postoji neprekidna prednorma N na G takva da je zadovoljen uslov $(PN4)$. Dakle za $n = 0$ imamo $B_N = \{x \in G : N(x) < 1\} \subset U_0 \subset U$ $\square$

Znamo da je topološki prostor *kompletno-regularan* ako i samo ako za svaki neprazan zatvoren skup $F \subset X$ i svaku tačku $x \in X \setminus F$ postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to [0,1]$ tako da $f[F] = \{1\} \wedge f(x) = 0$. U nastavku pokazujemo da u topološkim grupama važi i jači uslov.

Definicija 3.1.10. Za realnu funkciju f na topološkoj grupi G sa neutralnim elementom e kažemo da je :

- *levo uniformno neprekidna* ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $V \in \mathcal{U}(e)$ tako da $|f(xv) - f(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in G$ i sve $v \in V$;
- *desno uniformno neprekidna* ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $W \in \mathcal{U}(e)$ tako da $|f(wx) - f(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in G$ i sve $w \in W$;
- *uniformno neprekidna* ako i samo ako je i levo i desno uniformno neprekidna.

Iz dokaza teoreme [3.1.7] dobijamo sledeći rezultat:

Propozicija 3.1.11. *Svaka neprekidna prednorma na topološkoj grupi G je uniformno neprekidna funkcija.*

Teorema 3.1.12. *Neka je G topološka grupa. Tada za svaku otvorenu okolinu U neutralnog elementa e postoji uniformno neprekidna funkcija f na G takva da važi*

$$f(e) = 0 \text{ i } f(x) \geq 1 \text{ za sve } x \in G \setminus U.$$

Dokaz: Neka je U proizvoljna otvorena okolina neutralnog elemeta e u G. Na osnovu teoreme [3.1.9] postoji neprekidna prednorma $N : G \to [0, \infty)$ tako da $B_N = \{x \in G : N(x) < 1\} \subset U$. Tada imamo da $N(e) = 0$ i $N(x) \geq 1$ za sve $x \in G \setminus U$. Na osnovu propozicije [3.1.11] takvo N je uniformno neprekidno. □

Posledica 3.1.13. *Svaka topološka grupa G je prostor Tihonova.*

Dokaz: Zbog homogenosti topološke grupe dovoljno je posmatrati neutralni element e i zatvoren skup $F \subset G$ da $e \notin F$. Iz regularnosti topološke grupe postoji otvorena okolina $U \in \mathcal{U}(e)$ da $U \cap F = \emptyset$, to jest $F \subset G \setminus U$. Iz teoreme [3.1.9] za okolinu U postoji neprekidna prednorma $N : G \to [0, \infty)$ tako da $B_N = \{x \in G : N(x) < 1\} \subset U$. Tada je preslikavanje $f : G \to [0, 1]$ dato sa

$$f(x) = \begin{cases} N(x) & , x \in U \\ 1 & , x \in G \setminus U \end{cases}$$

neprekidno i važi $f(e) = 0$ i $f(x) = 1$ za sve $x \in F$. □

3.2 Teorema Birkhoff-Kakutani

Znamo da svaki metrički prostor zadovolja prvu aksiomu prebrojivosti. U nastavku sledi teorema koja govori o tome da u topološkim grupama važi obratno. Predstavljamo i neke posledice ove teoreme.

Teorema 3.2.1. *[**G. Birkhoff, S. Kakutani**] Topološka grupa G je metrizabilna ako i samo ako zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Dokaz: Potreban uslov je jasan. Dokažimo dovoljan uslov.
Neka je $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza okolina neutralnog elementa e. Induktivno dobijamo niz $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ simetričnih otvorenih okolina elementa e tako da $U_n \subset W_n$ i $U_{n+1}^2 \subset U_n$. Dobijeni niz je takođe baza okolina neutralnog elementa. Na osnovu leme [3.1.8], postoji neprekidna prednorma takva da $B_N(1/2^n) \subset U_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Sledi da i otvoreni skupovi $B_N(1/2^n)$ formiraju bazu neutralnog elementa.

Za proizvoljne $x, y \in G$ definišemo $d_N(x, y) = N(xy^{-1})$. Pokazaćemo da je ovako definisano preslikavanje metrika na prostoru G. Iz propozicije [3.1.2] sledi dobra definisanost, to jest $d_N : G \times G \to [0, \infty)$. Za sve $x, y, z \in G$ važi:

M1: $d_N(x, y) = 0$ *akko* $x = y$
Zaista, ako je $x = y$, tada $d_N(x, x) = N(xx^{-1}) = N(e) = 0$. Obratno, ako je $d_N(x, y) = 0$, to jest $N(xy^{-1}) = 0$ sledi da $xy^{-1} \in B_N(1/2^n) \subset U_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $xy^{-1} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{e\}$ pa sledi da je $xy^{-1} = e$ to jest $x = y$.

M2: $d_N(x, y) = N(xy^{-1}) = N((xy^{-1})^{-1}) = N(yx^{-1}) = d_N(y, x)$.

M3:
$$d_N(x, y) = N(xz^{-1}zy^{-1}) \leq N(xz^{-1}) + N(zy^{-1}) = d_N(x, z) + d_N(z, y)$$

Primetimo da za metriku d_N i za sve $x, y, z \in G$ važi
$d_N(xz, yz) = d_N(x, y)$. Zaista,

$$d_N(xz, yz) = N(xzz^{-1}y^{-1}) = N(xy^{-1}) = d_N(x, y) \tag{9}$$

Tada je $\{x \in G : d_N(x, e) < \varepsilon) = \{x \in G : N(x) < \varepsilon\} = B_N(\varepsilon)$ otvorena lopta sa centrom u e poluprečnika ε određena metrikom d_N i na osnovu (9) za proizvoljni element $x \in G$, $B_N(\varepsilon) \cdot x$ otvorena lopta sa centrom u x.

Kako je G topološka grupa čija je topologija određena bazom okolina $B_N(1/2^n)$ elementa e i u proizvoljnoj tački $x \in G$ bazom okolina $B_N(1/2^n) \cdot x$

sledi da je topologija generisana metrikom jednaka topologiji grupe G. Dakle, prostor G je metrizabilan . $\square$

Definicija 3.2.2. Ako za metriku d na topološkoj grupi G važi da je za sve $x, y, z \in G$ zadovoljen uslov $d(xz, yz) = d(x, y)$ za meriku d kažemo da je *desno invarijantna.* Analogno, ako je $d(zx, zy) = d(x, y)$ za sve $x, y, z \in G$ kažemo da je d *levo invarijantna* metrika. Ako je metrika d i desno i levo invarijatna onda za d kažemo da je *invarijantna metrika.*

Posledica 3.2.3. *Na svakoj topološkoj grupi G sa prvom aksiomom prebrojivosti postoji desno invarijantna metrika d i levo invarijantna metrika l takve da obe generišu istu topologiju topološke grupe G.*

Dokaz: Posmatrajmo neprekidnu prednormu N na grupi G definisanu u teoremi [3.2.1] i definišimo za sve $x, y \in G$:

$$d(x, y) = N(xy^{-1}) \qquad i \qquad l(x, y) = N(x^{-1}y)$$

Već je pokazano da je d desno invarijantna metrika na G koja gereriše topologiju od G. Kako je operacija invertovanja homeomorfizam iz G u G jasna je i slična tvrdnja za l. $\square$

Za metrizabilnu topološku grupu ne mora da postoji invarijantna metrika koja bi generisala topologiju grupe. Da bi to bilo zadovoljeno potreban je dodatan slov, da topološka grupa bude uravnotežena.

Podsetimo se, ako je G topološka grupa tada $A \subset G$ zovemo *invarijantan skup* ako važi $xAx^{-1} = A$ za sve $x \in G$.

Definicija 3.2.4. Neka je G topološka grupa sa neutralnim elementom e. Kažemo da je G *uravnotežena* topološka grupa ako i samo ako postoji baza okolina elementa e koju čine invarijantni skupovi. Takvu bazu okolina zovemo *invarijantna baza okolina.*

Na osnovu definicije jasno je da je svaka Abelova topološka grupa uravnotežena. Lako se pokazuje da važi i naredna lema.

Lema 3.2.5. *Topološka grupa G je uravnotežena ako i samo ako za svaku okolinu U neutralnog elementa e u G postoji okolina V neutralnog elementa takva da $xVx^{-1} \subset U$, za sve $x \in G$.*

Posledica 3.2.6. *Neka je G metrizabilna topološka grupa. Postoji invarijantna metrika koja generiše topologiju grupe G ako i samo ako je G uravnotežena.*

Dokaz: $\Rightarrow$) Neka je d invarijantna metrika na G koja generiše topologiju grupe G. Za svako $n \in \mathbb{N}$ posmatramo otvorene lopte

$$U_n = \{x \in G : d(x, e) < 1/n\}$$

Ako je $x \in U_n$ i $y \in G$ proizvoljan element, iz invarijantnosti metrike d sledi

$$d(e, yxy^{-1}) = d(y, yx) = d(e, x) < 1/n \Rightarrow yxy^{-1} \in U_n.$$

Sledi da $yU_ny^{-1} = U_n$ za sve $y \in G$ i sve $n \in \mathbb{N}$, na osnovu čega je $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ invarijantna baza okolina elementa e, to jest G je uravnotežena topološka grupa.

$\Leftarrow$) Neka je G uravnotežena. Kako G zadovoljava i prvu aksiomu prebrojivosti postoji baza okolina neutralnog elementa e, $\{U_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ čiji su elementi otvoreni, simetrični i invarijantni skupovi takvi da $U_{n+1}^2 \subset U_n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Na osnovu leme [3.1.8] postoji prednorma na grupi G koja zadovoljava uslov $(PN4)$ iz leme i važi $N(xyx^{-1}) = N(y)$ za sve $x, y \in G$. Tada je N neprekidna i otvorene lopte $B_N(1/n) = \{x \in G : N(x) < 1/n\}$ za $n \in \mathbb{N}$ formiraju bazu okolina neutralnog elementa e. Za metriku d na G definisanu sa

$$d(x, y) = N(x, y^{-1})$$

važi

$$d(x, y) = N(xy^{-1}) = N(y^{-1}xy^{-1}y) = N(y^{-1}x) = N(x^{-1}y) = l(x, y).$$

Na osnovu posledice [3.2.3] d je invarijantna metrika koja generiše topologiju grupe G. □

Jasno, kako je svaka Abelova topološka grupa G uravnotežena, tada ako ona zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti postoji invarijantna metrika koja određuje njenu topologiju. Primenjujući teoremu [3.1.9] na sličan način kao u dokazu teoreme [3.2.1], dobijamo za Abelove topološke grupe važan rezultat:

Definicija 3.2.7. Neka su G i H topološke grupe. Kažemo da je preslikavanje $f : G \to H$:

- *topološki homomorfizam* ako i samo ako je f neprekidno i homomorfizam grupa G i H;

- *topološki izomorfizam* ako i samo ako je f homeomorfizam i homomorfizam grupa G i H. Tada za topološke grupe G i H kažemo da su *topološki izomorfne*.

Teorema 3.2.8. *Svaka Abelova topološka grupa G je topološki izomorfna podgrupi proizvoda neke familije metrizabilnih Abelovih topoloških grupa.*

Dokaz: Tražimo X_i metrizabilne topološke grupe i preslikavanje $f : G \to \prod X_i$ takvo da je f homomorfizam i $f_{|G}$ homeomorfizam.

Neka je U otvorena okolina neuralnog elementa e od G. Na osnovu teoreme [3.1.9] možemo fiksirati N_U neprekidnu prednormu na G tako da jedinična lopta $B_{N_U} = \{x \in G : N_U(x) < 1\} \subset U$. Definišimo skup

$$H_U = \{x \in G : N_U(x) = 0\}.$$

H_U je zatvoren skup u G jer je $N_U : G \to [0, \infty)$ neprekidna i $\{0\}$ zatvoren u prostoru $[0, \infty)$ sa nasleđenom uobičajenom topologijom skupa $\mathbb{R}$. Iz uslova definicije prednorme sledi da je H_U podgrupa grupe G. Zaista, za sve $a, b \in H_U$ važi:

$$0 \leq N(ab^{-1}) \leq N(a) + N(b^{-1}) = N(a) + N(b) = 0$$

$$\Rightarrow N(ab^{-1}) = 0 \Rightarrow ab^{-1} \in H_U$$

Kako je G Abelova grupa, H_U je njena normalna podgrupa i odgovarajuća faktor grupa $G_U = G_{/H_U}$ je takođe Abelova.
Označimo sa π_U prirodno (faktor) preslikavanje $G \to G_U$, $\pi_U(a) = aH_U$ za sve $a \in G$. Definišimo preslikavanje $P_U : G_U \to [0, \infty)$ sa :

$$P_U(xH_U) = N_U(x).$$

Definicija preslikavanja je dobra jer $P_U(xH_U) \geq 0$ i ne zavisi od izbora predstavnika koseta. Zaista, iz osobina prednorme N_U važi:

$$\begin{aligned} xH_U = yH_U &\Leftrightarrow y^{-1}x \in H_U \ \wedge\ x^{-1}y \in H_U \\ &\Leftrightarrow N_U(y^{-1}x) = 0 \ \wedge\ N_U(x^{-1}y) = 0 \\ &\Leftrightarrow N_U(x) \leq N_U(y) \ \wedge\ N_U(y) \leq N_U(x) \\ &\Leftrightarrow N_U(x) = N_U(y) \\ &\Leftrightarrow P_U(xH) = P_U(yH) \end{aligned}$$

Lako se pokazuje da je ovako definisano preslikavanje P_U prednorma na G_U i da je $P_U(xH) = 0$ ako i samo je $xH = H$ to jest $x \in H$.
Iz osobina prednorme sledi da je familija

$$B_{P_U}(1/n) = \{xH_U \in G_U : P_U(xH_U) < 1/n\},\ n \in \mathbb{N}$$

baza topologije $\mathcal{O}_U$ na G_U sa kojom je G_U topološka grupa i preslikavanje π_U neprekidno. Primetimo, G_U zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti na osnovu čega je i metrizabilna.

Dalje, pokažimo da familija neprekidnih preslikavanja $\{\pi_U : G \to G_U : U \in \mathscr{U}\}$, gde je $\mathscr{U}$ otvorena baza okolina neutralnog elementa e u G razdvaja tačke i zatvorene skupove. Na osnovu homogenosti topološke grupe G dovoljno je pokazati da za neutralni elemenent e i zatvoren skup $F \subset G$ takav da $e \notin F$ postoji $U \in \mathscr{U}$ tako da $\pi_U(e) \notin \overline{\pi_U[F]}$. Iz regularnosti topološke grupe postoji otvorena okolina $U \in \mathscr{U}$ tako da $e \in U \subset G \setminus F$. Kako je π_U otvoreno preslikavanje imamo da je skup $\pi_U[U]$ otvorena okolina elementa $\pi_U(e) = H_U$ u G_U. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da $B_{P_U}(1/n) \subset \pi_U[U]$. Jasno $\pi(e) = H_U \subset B_{P_U}(1/n)$. Pretpostavimo da postoji $x \in B_{P_U}(1/n) \cap \pi_U[F]$. Neka je $y \in F$ da $\pi_U(y) = yH_U = x$. Tada imamo da $yH_U \in B_{P_U}(1/n)$ iz čega sledi da $N_U(y) = P_U(yH_U) < 1/n$ odnosno $y \in B_{N_U} \subset U$ to je nemoguće jer $F \cap U = \emptyset$. Dakle, $\pi_U(e) \notin \overline{\pi_U[F]}$.

Imamo da je sirjektivna restrikcija dijagonalnog proizvoda $\triangle \pi_U$ neprekidnih preslikavanja familije $\{\pi_U : G \to G_U : U \in \mathscr{U}\}$, gde je $\mathscr{U}$ otvorena baza okolina neutralnog elementa e u G topološki izomomorfizam grupe G i podgrupe proizvoda $\prod_{U \in \mathscr{U}} G_U$.

Kako je svaka G_U metrizabilna Abelova grupa dokaz je završen. $\square$

Birkhoff-Kakutani teorema ima važnu primenu na faktor grupama.

Posledica 3.2.9. *Neka je f otvoren topološki homomorfizam metrizabilne topološke grupe G u topološku grupu H. Tada je H metrizabilna.*

Dokaz: Kako je f otvoreno i neprekidno, a grupa G zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti tada i grupa H zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti pa je na osnovu teoreme [3.2.1] H metrizabilna topološka grupa. $\square$

Naredna propozicija predstavlja uopštenje posledice [3.2.9] za faktor grupe metrizabilne topološke grupe:

Propozicija 3.2.10. *Neka je H zatvorena normalna podgrupa metrizabilne topološke grupe G. Tada je faktor grupa $G_{/H}$ metrizabilna.*

Dokaz: Na osnovu posledice [3.2.3] postoji desno invarijantna metrika d na G koja generiše topologiju topološke grupe G. Za proizvoljne $x, y \in G$ definišemo

$$D(xH, yH) = \inf\{d(xh_1, yh_2) : h_1, h_2 \in H\}.$$

Ovako definisano preslikavanje je metrika na $G_{/H}$. Zaista, kako je d desno invarijantna metrika sledi dobra definisanost: za sve $x, y \in G$ važi

$$D(xH, yH) = d(x, yH) \geq 0.$$

Pokažimo da D zadovoljava uslove metrike :

$$(M1) \qquad D(xH, yH) = 0 \Leftrightarrow d(x, yH) = 0 \Leftrightarrow x \in yH, \ (H \text{ je zatvoren})$$
$$\Leftrightarrow xH = yH$$

$$(M2) \qquad \begin{aligned} D(yH, xH) = d(y, xH) &= \inf_{h\in H} d(y, xh) = \inf_{h\in H} d(yh^{-1}, x) \\ &= \inf_{h\in H} d(x, yh^{-1}) = d(x, yH) \\ &= D(xH, yH) \end{aligned}$$

$(M3)$ Za proizvoljne $x, y, z \in G$ i $\varepsilon > 0$ na osnovu definicije za D, možemo pronaći $h_1, h_2 \in H$ tako da $d(x, yh_1) < D(xH, yH) + \varepsilon/2$ i $d(y, zh_2) < D(yH, zH) + \varepsilon/2$. tada imamo:

$$\begin{aligned} D(xH, zH) &\leq d(x, zh_2h_1) \\ &\leq d(x, yh_1) + d(yh_1, zh_2h_1) = d(x, yh_1) + d(y, zh_2) \\ &< D(xH, yH) + D(yH, zH) + \varepsilon \end{aligned}$$

Kako je ε proizvoljan pozitivan broj, iz gornje nejednačine sledi nejednakost trougla, to jest $D(xH, zH) \leq D(xH, yH) + D(yH, zH)$. Za kraj, treba pokazati da D generiše topologiju topološke grupe $G_{/H}$. Za $x \in G$ i $\varepsilon > 0$ definišemo :

$$L_\varepsilon(x) = \{y \in G : d(x, y) < \varepsilon\}$$

i

$$B_\varepsilon(xH) = \{yH : y \in G,\ D(xH, yH) < \varepsilon\}.$$

Posmatramo prirodno preslikavanje $\pi : G \in G_{/H}$, $\pi(x) = xH$ za sve $x \in G$. Na osnovu definicije metrike D sledi da $\pi[O_\varepsilon(x)] = B_\varepsilon(x)$ za sve $x \in G$ i $\varepsilon > 0$. Kako $L_\varepsilon(x)$ generišu topologiju grupe G, i prirodno preslikavanje π je neprekidno i otvoreno sledi da skupovi $B_\varepsilon(xH)$ generišu topologiju faktor grupe $G_{/H}$. $\square$

Pretpostavimo da je H zatvorena normalna podgrupa topološke grupe G i $G_{/H}$ odgovarajuća faktor grupa. Tada G zovemo *proširenje* grupe H za $G_{/H}$.

Posledica 3.2.11. *[N.Ya. Vilenking] Neka je G topološka grupa i $H \subset G$ zatvorena metrizabilna normalna podgrupa takva da faktor grupa $G_{/H}$ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Tada je G metrizabilna.*

Dokaz: H je metrizabilna pa zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Tada na osnovu posledice [2.5.7] i G zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti to jest G je i metrizabilna. $\square$

Posledica 3.2.12. *Neka je G topološka grupa i $H \subset G$ zatvorena normalna podgrupa koja zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, takva da faktor grupa $G_{/H}$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Tada G takođe zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.*

Dokaz: Kako H i $G_{/H}$ zadovoljavaju drugu aksiomu prebrojivosti tada oni zadovoljavaju i prvu aksiomu prebrojivosti. Iz prethodne posledice G je metrizabilna. Iz teoreme [2.5.9] G je i separabilan prostor, što implicira da G zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. □

Posledicu [3.2.11] možemo preformulisati i reći da proširenje topološke grupe čuva metrizabilnost. Slično, propozicija [2.5.5] implicira da proširenje topološke grupe čuva kompaktnost. Specijalno, proširenje kompaktne metrizabilne topološke grupe sa topološkom grupom koja takođe ima te osobine je kompaktna i metrizabilna topološka grupa. Ovo nas navodi za prirodnim uopštenjem za kompaktne metrizabilne potprostore topološke grupe (teorema [3.2.16] koju dajemo u nastavku). Prethodno predstavljamo rezultate potrebne za dokaz.

Sledeću lemu navodimo bez dokaza, za više upućujemo na [6].

Lema 3.2.13. *Kompaktan topološki prostor X je metrizabilan ako i samo ako je dijagonala $\triangle_X$ u proizvodu $X \times X$ G_δ-skup, tj. presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova.*

Lema 3.2.14. *Neka je G topološka grupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

a) svaki kompaktan potprostor prostora G zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti;

b) svaki kompaktan potprostor prostora G je metrizabilan.

Dokaz: Dovoljno je dokazati $(a \Rightarrow b)$. Neka je X neprazan kompaktan podskup od G. Posmatrajmo neprekidno preslikavanje $f : G \times G \to G$ definisano sa $f(x, y) = xy^{-1}$. Kako je i skup $X \times X \subset G \times G$ kompaktan iz neprekidnosti preslikavanja f imamo da je $F = f[X \times X]$ kompaktan podskup od G koji sadrži neutralni element e od G. Po pretpostavci, $\mathcal{X}(e, F) \leq \aleph_0$. Neka je $\{U_n : n \in N\}$ baza okolina elementa e u F. Označimo sa h sirjektivnu restrikciju $h = f_{|X \times X} : X \times X \to F$. Tada je $h^{-1}[e] = \triangle_X$ dijagonala u $X \times X$. Jasno $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \triangle_X$ i na osnovu leme [3.2.13] sledi da je X metrizabilan. □

Lema 3.2.15. *Neka su X i Y regularni topološki prostori i $f : X \to Y$ zatvoreno i neprekidno preslikavanje. Ako za $x \in X$ važi $\mathcal{X}(f(x), Y) \leq \aleph_0$ i $\mathcal{X}(x, C) \leq \aleph_0$, gde je $C = f^{-1}[\{f(x)\}]$ tada je $\mathcal{X}(x, X) \leq \aleph_0$.*

Dokaz: Neka je $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza okolina tačke x u prostoru $C = f^{-1}[\{f(x)\}]$ i neka je $\{V_k : k \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza okolina tačke $y = f(x)$ u prostoru Y. Regularnost je nasledna osobina pa za svako $n \in \mathbb{N}$ možemo izabrati otvorenu okolinu O_n tačke x u prostoru X da

$$x \in O_n \cap C \subset \overline{O_n} \cap C \subset U_n$$

Stav: Kolekcija $\mathcal{B} = \{O_n \cap f^{-1}[V_k] : k, n \in \mathbb{N}\}$ je baza okolina tačke x u prostoru X.

Za sve $k, n \in \mathbb{N}$ iz neprekidnosti preslikavanja f imamo da je $f^{-1}[V_k]$ otvorena okolina tačke x, pa je i $O_n \cap f^{-1}[V_k]$ otvorena okolina tačke x u prostoru X.

Dalje, neka je $U \in \mathcal{U}(x)$ otvorena okolina u X. Imamo da je $U \cap C$ otvorena okolina tačke x u prostoru C, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da $U_n \subset U \cap C$. Skup $F = \overline{O_n} \setminus U$ je zatvoren u X jer $F = \overline{O_n} \setminus U = \overline{O_n} \cap (X \setminus U)$. Važi $F \cap C = \emptyset$. Zaista, $F \cap C = \overline{O_n} \setminus U \cap C = (\overline{O_n} \cap C) \setminus U \subset U_n \setminus U = \emptyset$. Iz zatvorenosti preslikavanja f imamo da je $f[F]$ zatvoren skup u Y, a kako $y \notin f[F]$ iz regularnosti prostora Y postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da $V_k \cap f[F] = \emptyset$. Tada je i $f^{-1}[V_k] \cap f^{-1}[f[F]] = \emptyset$ pa imamo

$$x \in O_n \cap f^{-1}[V_k] \subset O_n \setminus F = O_n \cap U \subset U$$

na osnovu čega je dokazan Stav. Sledi $\mathcal{X}(x, X) \leq |\mathcal{B}| \leq \aleph_0$.

$\square$

Teorema 3.2.16. *Neka je H zatvorena normalna podgrupa topološke grupe G takva da su svi kompaktni potprostori od H i $G_{/H}$ metrizabilni. Tada su svi kompaktni potprostori od G metrizabilni.*

Dokaz: Posmatrajmo prirodno preslikavanje $\pi : G \to G_{/H}$, $\pi(x) = xH$.
Stav: Svi kompaktni potprostori prostora $\pi^{-1}[y]$, za sve $y \in G_{/H}$ su metrizabilni. Zaista, neka je $y \in G_{/H}$ proizvoljno. Izaberimo $x \in G$ tako da $\pi(x) = y$. Tada je $\pi^{-1}[\{y\}] = xH$ homeomorfan sa grupom H, na osnovu čega sledi stav.

Neka je $X \subset G$ proizvoljan kompaktan skup i neka je f sirjektivna restrikcija prirodnog preslikavanja na skup X. Tada je $f[X] \subset G_{/H}$ kompaktan pa je po pretpostavci teoreme i metrizabilan. Kako $f^{-1}[\{y\}] \subset \pi^{-1}[\{y\}]$ prema stavu sledi da su svi kompaktni potprostori prostora $f^{-1}[\{y\}]$ metrizabilni, za sve $y \in f[X]$. Iz leme [3.2.15] sledi da X zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Tada je na osnovu leme [3.2.14] X metrizabilan. $\square$

Označimo sa $\mathscr{P}$ topološku ili algebarsku osobinu. Kažemo da je $\mathscr{P}$ *osobina tri prostora* ako za proizvoljnu topološku grupu G i zatvorenu normalnu podgrupu $H \trianglelefteq G$ važi :

$$\text{Ako } H \text{ i } G_{/H} \text{ imaju osobinu } \mathscr{P} \text{ onda i } G \text{ ima osobinu } \mathscr{P}.$$

Iz dokazanog sledi da su: metrizabilnost, druga aksioma prebrojivosti i metrizabilnost kompaktnih podskupova osobine tri prostora.

4 Zaključak

U radu smo se bavili topološkim grupama i vezom topološke i algebarske strukture topološke grupe. Bavili smo se metrizabilnošću topoloških grupa i primenom teoreme Birkhoff-Kakutani na faktor grupe topološke grupe.

Najpre smo uveli pojam topološke grupe i dali primere topologija koje poznate grupe kao što su aditivna grupa realnih brojeva, jedinična kružnica u kompleksnoj ravni, opšta linearna grupa stepena n nad $\mathbb{R}$ i grupa kvaterniona pretvaraju u topološke grupe. Svaka grupa trivijalno može postati topološka grupa sa definisanom diskretnom topologijom. U cilju topologizacije proizvoljne grupe netrivijalnom topologijom dokazali smo osnovna svojstva topoloških grupa. Dokazali smo da je svaka topološka grupa homogen prostor, što znači da je topološka struktura ista u svakoj tački prostora. Zatim smo teoremom [2.2.7] za otvorenu bazu okolina neutralnog elementa e topološke grupe G dokazali osobine koje zadovoljava i dokazali da svakom familijom podskupova proizvoljne grupe G koja zadovoljava uslove teoreme možemo definisati homogenu T_1 topologiju sa kojom G postaje topološka grupa. Ovim načinom topologizacije smo definisali topologiju grupe $\Omega_{[r]}$ $r-$adičkih brojeva. Dokazali smo da je svaka topološka grupa regularan prostor, što za posledicu ima da je svaka topološka grupa takođe i Hauzdorfov prostor.

Dalje smo se bavili vezom topološke i algebarske strukture topološke grupe. Dokazali smo da je: proizvod otvorenog skupa i proizvoljnog skupa u topološkoj grupi otvoren skup, adherencija skupa A presek svih proizvoda tog skupa sa elementima baze okolina neutralnog elementa grupe, proizvod kompaktnog i zatvorenog skupa zatvoren skup, proizvod dva kompaktna je kompaktan skup dok proizvod dva zatvorena skupa ne mora biti zatvoren skup.

Dalje smo se bavili podgrupama topološke grupe. Dokazali smo da je svaka otvorena podgrupa i zatvorena. Adherencija (normalne) podgrupe je takođe (normalna) podgrupa. Dokazali smo da je svaka lokalno-kompaktna podgrupa zatvorena. Kao ilustraciju osobina podgrupa predstavili smo karakterizaciju zatvorenih podgrupa aditivne grupe realnih brojeva. Dalje smo pokazali da je komponenta povezanosti neutralnog elementa grupe zatvorena normalna podgrupa i da su sve diskretne podgrupe povezane topološke grupe sadržane u centru grupe. Pokazali smo da je grupa unitarnih matrica $U(n) \leq GL(n, \mathbb{C})$ povezana topološka grupa.

Za topološku grupu G faktor grupe su definisane u odnosu na zatvorenu normalnu podgrupu. Pokazali smo da je faktor grupa takođe topološka grupa sa faktor topologijom u odnosu na prirodno preslikavanje $\pi : G \to G_{/H}$ za koje smo dokazali da osim što je homomorfizam grupa je i faktor preslikavanje. Pokazali smo ako je zatvorena normalna podgrupa H takva da ona i odgovarajuća faktor grupa $G_{/H}$ zadovoljavaju prvu aksiomu prebrojivosti (su separabilne, kompaktne) tada i G zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti (je separabilna, kompaktna).

Za kraj smo se bavili metrizabilnošću topološke grupe i dokazali teoremu *Birkhoff- Kakutani* koja tvrdi da je dovoljan uslov da topološka grupa G bude metrizabilna da G zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Definisali smo preslikavanje koje zovemo prednorma pomoću kojeg smo na topološkoj grupi koja zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti definisali metriku koja indukuje topologiju topološke grupe. Dokazali smo i neke posledice ove teoreme, a jedna od njih je da je svaka Abelova topološka grupa topološki izomorfna podgrupi proizvoda neke familije metrizabilnih Abelovih grupa.

Literatura

[1] M. Tkachenko i A. Arhangel'skii: *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Paris; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008

[2] L. Pontrjagin: *Topological groups* , Princeton University Press, 1946

[3] Linus Kramer: *Locally Compact Groups and Lie groups*, lecture notes, 2020

[4] Adhikari M. R.: *Basic algebraic topology and its applications* , India, Springer, 2016.

[5] Kurilić M.: *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, 1998.

[6] Engelking R. : *General topology*, PWN, Warszawa, 1997; Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[7] Dolinka I. : *Predavanja iz teorije grupa*, 2018. skripta predavanja

Biografija

Tanja Malinović je rođena 10. 09. 1992. u Travniku. U istom gradu je završila osnovnu školu "Nova Bila" 2007. godine i gimnaziju "KŠC Petar Barbarić" 2011. godine. Osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu-smer Primenjena matematika, modul Tehno-matematika je završila 2015. godine. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom integrisanih akademskih studija-Master profesor matematike, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu u aprilskom roku 2021. godine.

Novi Sad, 2021. Tanja Malinović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
BF

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Tanja Malinović
AU

Mentor: dr Boriša Kuzeljević
MN

Naslov rada: Topološke grupe
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2021.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku,
Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3/64/7/0/0/0/0)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Topologija
ND

Ključne reči: topološka grupa, homogen topološki prostor, (normalne) podgrupe topoloških grupa, unitarna grupa matrica, faktor grupa, prednorma, teorema Birkhoff-Kakutani, invarijantna metrika, uravnotežena grupa, metribazilne topološke grupe
PO
UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ
U ovom master radu bavili smo se topološkim grupama i vezom topološke i algebarske strukture topološke grupe. Pravilo koje opisuje vezu između topologije i algebarske operacije je da operacija mora biti neprekidna. Svaka grupa trivijalno može postati topološka grupa sa definisanom diskretnom topologijom, a cilju topologizacije proizvoljne grupe netrivijalnom topologijom dokazali smo osnovna svojstva topoloških grupa. Dokazali smo da svaka familija podskupova proizvoljne grupe G koja zadovoljava uslove teoreme [2.2.7] definiše homogenu T_1 topologiju sa kojom G postaje topološka grupa. Dokazali smo da je svaka topološka grupa regularan prostor, što za posledicu ima da je svaka topološka grupa i Hauzdorfov prostor. Dalje smo se bavili podgrupama topološke grupe. Dokazali smo da je svaka otvorena podgrupa i zatvorena. Adherencija (normalne) podgrupe je takođe (normalna) podgrupa. Dokazali smo da je svaka lokalno-kompaktna podgrupa zatvorena. Kao ilustraciju osobina podgrupa predstavili smo karakterizaciju zatvorenih podgrupa aditivne grupe realnih brojeva. Dalje smo pokazali da je komponenta povezanosti neutralnog elementa grupe zatvorena normalna podgrupa i da su sve diskretne podgrupe povezane topološke grupe sadržane u centru grupe. Za topološku grupu G faktor grupe su definisane u odnosu na zatvorenu

normalnu podgrupu. Pokazali smo da je faktor grupa takođe topološka grupa sa faktor topologijom u odnosu na prirodno preslikavanje $\pi : G \to G_{/H}$ za koje smo dokazali da osim što je homomorfizam grupa je i faktor preslikavanje. U trećem delu smo se bavili metrizabilnošću topološke grupe i dokazali teoremu *Birkhoff- Kakutani* koja tvrdi da je dovoljan uslov da topološka grupa G bude metrizabilna da G zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Definisali smo preslikavanje koje zovemo prednorma pomoću kojeg smo na topološkoj grupi koja zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti definisali metriku koja indukuje topologiju topološke grupe.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 22.06.2021.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Boriša Kuzeljević, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Igor Dolinka, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Master thesis
CC

Author: Tanja Malinović
AU

Mentor: Boriša Kuzeljević, Ph.D.
MN

Title: Topological groups
XI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2021.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (3/64/7/0/0/0/0)
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Topology
SD

Subject/Key words: topological group, homogenous space, (normal) subgroup of topological group, unitary group, quotient group, prenorm, theorem Birkhoff-Kakutani, invariant metric, balanced group, metrizable topological group
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

In this master thesis we are dealing with a topological groups and relationship of topology and algebraic structure of topological groups. Relationship between topology and algebraic operations is described by the rule that operations must be continuous. Every group can be turned into a topological group by providing it with the descrete topology. In order to define non-trivial topology, which makes group into a topological group, we have given basic properties of topological group. We have given a result about endowing an arbitrary group G with homogenous T_1 topology, which turnes a group G into a topological group. We have proven that every topological group is a regular space, which implies that every topological group is also a Hausdorff's space. By analyzing subgroups of a topological group we have shown that every open subgroup is also closed; the closure of a (normal) subgoup is also a (normal) subgroup; every locally-compact subgroup is closed. To ilustrate properties of a subgroup, we have presented characterization of closed subgroups of aditive group $\mathbb{R}$. We have shown that a connected component of neutral element is a closed normal subgroup and that every descrete subgroup of topological group is contained in the center of the group. We have defined quotient groups regarding closed normal subgroups, which are also topological groups endowed by quotient topology, with respect to the natural mapping $\pi : G \to G_{/H}$, $\pi(a) = aH$ for all $a \in G$. In the last section we have dealt with metrizability of a topological group, and proven theorem *Birkhoff- Kakutani* which claimes

that a topolofical group is metrizable if and only if it is first countable. We have defined mapping called prenorm which is used for defining metric on a first countable topological group that generates the original topology on a group.

Accepted by the Scientific Board on: 22.06.2021.

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Dr. Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Dr. Boriša Kuzeljević, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Dr. Igor Dolinka, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad