



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Ljiljana Josipović

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

-MASTER RAD-

Mentor: prof. dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2021.

SADRŽAJ

UVOD.....	2
1. ISTORIJSKA I TEORIJSKA OSNOVA MATEMATIČKIH SIMBOLA	4
1.1. Razvoj „promenljive“ u algebri.....	5
1.2. Značenja matematičkih simbola i skraćenica	8
1.2.1. Poteškoće u dekodiranju simbola	9
2. MATEMATIČKI SIMBOLI U NASTAVI MATEMATIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI – TRENUTNO STANJE	11
2.1. Peti razred	11
2.1.1. Algebarski simboli.....	12
2.1.2. Geometrijski simboli.....	16
2.2. Upotreba matematičkih simbola u šestom, sedmom i osmom razredu	20
2.3. Upotreba simbola na završnom ispitу iz matematike.....	23
3. EMPIRIJSKO ISTRAŽIVANJE	25
3.1. Metodologija	25
3.2. Rezultati istraživanja	27
4. PREDLOG NASTAVNIH AKTIVNOSTI.....	36
ZAKLJUČAK.....	43
LITERATURA.....	45
PRILOZI.....	46
BIOGRAFIJA.....	48

UVOD

Matematika zahteva aktiviranje velikog broja misaonih procesa. Pri tome, uglavnom je potrebno razmišljati o apstraktnim objektima. Zato je jedan od glavnih zadataka nastave matematike uopšte naučiti mlade da misle. Danas je dosta istraživanja posvećeno upravo traganjima za mogućnostima i načinima ostvarenja ovog zadatka. Sa druge strane, jedan od osnovnih ciljeva nastave matematike u nižim razredima osnovne škole je razvijanje intuitivnih predstava o raznim apstraktnim matematičkim pojmovima kao što su broj, tačka, prava, skup i tako dalje. Zbog toga je od velike važnosti shvatanje i razumevanje simbola koji reprezentuju određeni apstraktni pojam, tj. razumevanje matematičkog simbola koji predstavlja sinonim za odgovarajući koncept. Upravo će fokus ovog rada biti na matematičkim simbolima koji se koriste u osnovno školskom obrazovanju, kao i ispitivanju razumevanja istih.

U *prvom delu* rada je dat istorijski razvoj uvođenja matematičkih simbola, kao i osvrt na ulogu i značaj uvođenja simbola u matematiku. Dodatno, u okviru prvog dela rada biće detaljno prikazan razvoj „promenljive“ u algebri, ali i detaljna klasifikacija matematičkih simbola. Pored klasifikacije, ovaj deo rada će sadržati i eklatantne primere poteškoća u dekodiranju određenih simbola.

Naredni, *drugi deo* rada će obuhvatati detaljan pregled korišćenja matematičkih simbola u osnovnoj školi u Republici Srbiji, tj. trenututno stanje i prikaz simbola iz programa nastave za drugi ciklus osnovnog obrazovanja. Pored toga, biće dat prikaz uvođenja i korišćenja simbola u udžbenicima. Poglavlje će biti koncipirano prema razredima u okviru koji se analiziraju simboli koji se koriste u algebri i geometriji. Dodatno, obzirom da se u petom razredu učenicima po prvi put predstavljaju apstraktni geometrijski simboli (mere uglova, grčka slova i slično), na istom će se staviti poseban akcenat.

Treći deo rada će obuhvatati empirijsko istraživanje u okviru kog će biti testirani učenici osnovne škole. Za potrebe istraživanja biće razvijen instrument (anketa) za procenu korišćenja i razumevanja matematičkih simbola u osnovnoj školi. Testiranje će biti izvršeno na prigodnom uzorku učenika. Pored zbirnih prikaza rezultata i biće predstavljeni osnovni statistički pokazatelji raspodela odgovora kao i osnovni nalazi dobijeni na osnovu tetsiranja.

Četvrti, poslednje poglavlje rada će obuhvatati predlog unapređenja nastave matematike. U okviru ovog poglavlja biće pripremljena lista simbola za oblast matematike u osnovnoj školi sa predlogom metodičke obrade sa ciljem unapređenja nastavnog procesa.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Pre nego što odpočnu redovi ovog rada želela bih da iskažem izuzetnu zahvalnost svojoj mentorki prof. dr Zorani Lužanin koja mi je u svakom trenutku pružala pomoć, motivaciju, savete i razumevanje. Posebno joj se zahvaljujem na predloženoj temi koja je bila interesantna, inovativna i na znanjima koja mi je prenela tokom studiranja.

Zahvaljujem se prijateljima i kolegama koji su mi na bilo koji način pružili sugestije, pomoć i podršku u toku mog studiranja.

Posebno i najdublje se zahvaljujem svojoj porodici koji su mi pružali beskonačnu podršku i pomoć na mom putu usvajanja novih znanja.

Novi Sad, 2021. godine

Ljiljana Josipović

1. ISTORIJSKA I TEORIJSKA OSNOVA MATEMATIČKIH SIMBOLA

Matematički zapis simbola kakav danas poznajemo predstavlja koncizan i tačan oblik notacije koja je međunarodno priznata. Obzirom da je notacija matematičkih simbola precizna i dobro definisana, nastavnici matematike imaju tendenciju da je koriste svakodnevno. Upravo su simboli veoma važni u matematici, posebno u algebri i istoriji algebre, o čemu govori **Kieran**¹ (1992) definišući algebru kao „grana matematike koja se bavi sa simbolizovanjem opštih numeričkih odnosa i matematičkih struktura vršeći operacije nad tim strukturama“. Školska matematika bez tih simbola bi danas praktično bila nezamisliva. Dodatno, srednjoškolska matematika koristi obilje znakova poput znaka za sabiranje, oduzimanje, deljenje, određenih slova, zagrada, eksponenata, znakova za koren, znaka jednakosti, logaritamske notacije i mnogih drugih. [7]

Učenici često imaju problema sa upotrebom simbola. Kao rezultat toga, neki učenici (pa i studenti) smatraju algebru misterioznim poljem matematike. U nastavku poglavlja dat je kratak pregled konstatacija pojedinih naučnika u kontekstu korišćenja simbola u



matematici. **Whitehead**² (1911) to opisuje na sledeći način: „Matematika se često smatra teškom i misterioznom науком zbog korišćenja brojnih simbola. Naravno, ništa više nije nerazumljivije od simbola koje ne razumemo, pri čemu je takođe teško slediti simboliku koju delimično razumemo i nismo navikli na njenu upotrebu“. **Higgison** izražava sledeću zabrinutost: „Veliki deo moći matematike potiče iz snage njenih simbola. Međutim, postoji cena koju treba platiti za tu snagu. Simboli koji nekima služe kao visoko efikasno oruđe najgrublje su prepreke drugima.“ Davne 1842. godine **De Morgan**³ je izneo upozorenje protiv prekomerne upotrebe simbola: „Previše skraćenica može stvoriti zabunu i sumnju u značenju.“. Sa druge strane Blackhouse (1992) tvrdi da snaga matematike leži u upotrebi simbola. On takođe navodi: „Sa

¹ Carolyn Kieran je kanadski matematičar Univerziteta u Kvebeku koja je poznata po studijama u kojima opisuje kako studenti uče algebru.

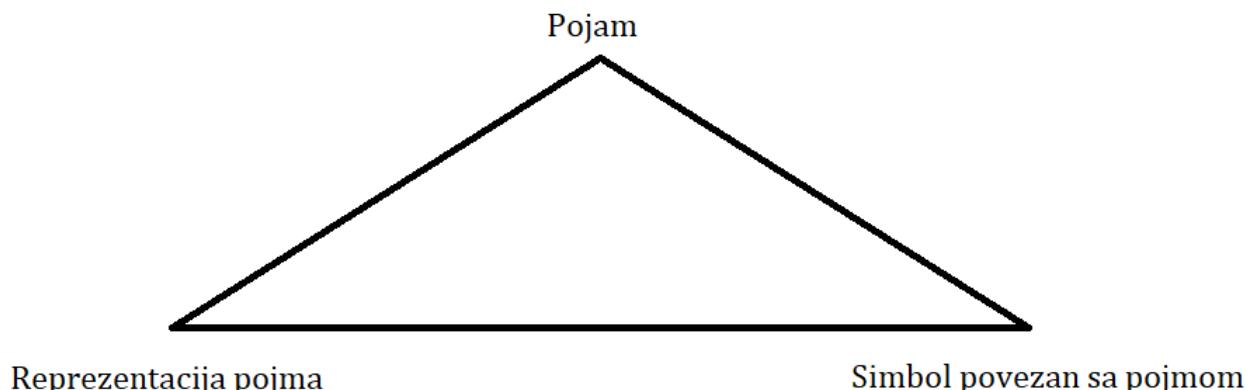
² Alfred North Whitehead (15. februar 1861 – 30. decembar 1947) je engleski matematičar i filozof. Njegov najpoznatiji rad se ogleda u tzv. procesnoj filozofiji, koja se danas primenjuje u širokom spektru disciplina kao što su ekologija, teologija, fizika i mnoge druge.

³ Augustus De Morgan (27. jun 1806 – 30. mart 1871) je bio britanski matematičar i logičar. On je formulisao De Morganov zakon i uveo pojam matematičke indukcije.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

slabim zapisima u oblasti aritmetike, stari Grci su malo napredovali sa aritmetikom i algebrrom iako je njihova studija o geometriji predstala procvat iste.“. [7]

Vergnaud (1998) predlaže teoriju *reprezentacije* u procesu učenja matematike. On tvrdi da je teorija *reprezentacije* dinamičan proces koji uključuje različite faktore a organizacija delovanja ima značajnu ulogu u procesu predstavljanja. Dakle, on se protivi metafori, koja je predstavljena na slici ispod, jer je metafora trougla previše statična i ne nudi nikakav uvid za predstavljanje odnosa. [6.]



Slika 1.1. Metafora trougla [6.]

Dakle, nameće se pitanje koliko i kada je racionalno koristiti simbole u nastavi matematike u osnovnoj školi. Stoga je osnovni cilj ovog dela rada da se predstavi (iz istorijske perspektive) koji simbolički zapis je od suštinske važnosti za upotrebu u osnovnoj školi.

Može se reći da je razvoj algebarskih simbola prošao kroz tri faze:

1. retorička faza,
2. sinkopirajuća faza i
3. simbolička faza.

Ove faze se istorijski protežu od 1700. godine p.n.e. do oko 1700. godine n.e. i odlikuju se sistematskim razvojem simbola i rešavanjem jednačina različitim metodama. [7]

1.1. Razvoj „promenljive“ u algebri

Retoričku fazu karakteriše odsustvo algebarskih simbola. Rešenja problema su pisana bez upotrebe skraćenica ili simbola, a kao rezultat takvog pristupa rešenja su bila veoma duga i

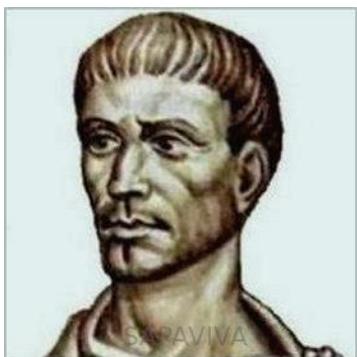
MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

teško ih je bilo kognitivni pratiti. Sledeći problem je eklatantan primer retoričkog problema izvedenog iz vavilonske algebre:

„Dužina, širina. Pomnožio sam dužinu sa širinom
da bih dobio površinu od 252. Dodao sam dužinu
na širinu: 32. Potrebna dužina i širina.“

Ovo je tipično za probleme pronađene na pločama od gline iz doba vladavine kralja Hamurabija, oko 1700. godine p.n.e. Ovi algebarski problemi su bili izraženi ali rešeni rečima. Reči kao što su *us* (dužina), *sag* (širina) i *aša* (površina) su se često koristile kao nepoznance jer je većina algebarskih problema nastala u geometrijskim kontekstima. Iako su vavilonski matematičari uspeli da reše širok spektar jednačina, nedostatak simbola ih je sprečio da formulišu opšta rešenja. Prema matematičkim papirusima (koji datiraju iz perioda pre nove ere) metode rešavanja starih Egipćana nisu toliko sofisticirane kao one kod Vavilonaca. Stari Egipćani su probleme rešavali procenom. Ovaj metod je poznat kao „*Pravilo lažnog položaja*“ pri čemu se još uvek koristio u XVI veku. Ograničena egipatska algebra gotovo da nije sadržala simbole, osim položaja čoveka koji hoda napred i nazad, pri čemu su se ti simboli koristili za sabiranje i oduzimanje, respektivno. Činjenica da koriste smer u algebi pokazuje snažnu vezu između geometrije i algebre u to vreme. [1, 6, 7]

Sinkopirajuću algebru karakteriše upotreba stenografskih skraćenica za veličine, odnose i proračune koji su se ponavljali. Dok su Vavilonci i Egipćani jednačine i rešenja pisali rečima, **Diophantus**⁴ (oko 250 godine p.n.e.) je uveo simboličke skraćenice za različite pojmove jednačine. Prekinuo je tradicionalnu upotrebu grčkih simbola radeći sa jednačinama u kojim je broj nepoznatih bio veći od 3. To znači da jednačine više ne mogu biti predstavljene



Diophantus

geometrijskim figurama (tj. u tri dimenzije). Diophantus je slavu stekao objavljinjem svoje knjige *Aritmetika* u kojoj je obrađivao neodređene jednačine, obično dve ili više jednačina sa različitim promenljivima, za koje postoji beskonačan broj racionalnih rešenja. U svom delu *Aritmetika*, Diophantus je koristio skraćenice za predstavljanje nepoznate, ali i za operacije nad datom nepoznatom. On je bio prvi koji je koristio slova za nepozate veličine. Time je izvršio prelaz sa aritmetike na algebru. Diophantus je nepoznati broj u algebi definisao kao neodređen broj jedinica i predstavio ga je sa

grčkim slovom ζ . Dakle, njegov najveći doprinos u razvoju algebre je bio korišćenje slova za predstavljanje nepoznatih veličina. Međutim, pored samog predstavljanja nepoznatih

⁴ Diophantus je bio prvi grčki matematičar koji je prepoznao razlomak kao broj, zbog čega je dozvoljavao da pozitivni racionalni brojevi budu i koeficijenti i rešenja određenih jednačina.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

veličina, Diophantus je malo koristio simbole. Često je proračune opisivao rečima, koristeći samo jedan simbol. [1, 6, 7]

Nakon prve dve faze, za algebru je „sazrelo“ vreme za ulazak u *simboličku fazu*. Prvo merodavno algebarsko delo koje je štampano bilo je *Ars Magna* koje je napisao **Cardan**⁵ 1545. godine. Primarni fokus ove knjige bio je rešavanje jednačina (kvadratnih i kubnih). U ovom radu su korišćeni čak i kompleksni brojevi, što je bio prvi korak u pravcu moderne algebre. Francuski pravnik **Francois Viete**⁶ je 1591. godine napravio takva poboljšanja u simboličkoj algebri da ga često nazivaju i ocem algebre. Koristio je velika slova i samoglasnike kako bi naznačio nepoznate veličine, a suglasnicima je označavao poznate veličine. Iako su neki njegovi prethodnici takođe koristili velika slova kako bi predstavili opšte veličine, Viete je prvi to sistematski uradio. Dodatno, on je u isto vreme manipulisao i brojevima i slovima. U primeru iz *Opera Mathematica*, može se jasno videti kako koristi nepoznate:



Francois Viète
(1540. – 1603.)

$$I QQ - 15 QQ + 58 C - 225 Q + 274 N \text{ je izjednačeno sa } 120.$$

U modernoj algebarskoj notaciji prethodni izraz odgovara sledećem:

$$x^6 - 15x^4 + 58x^3 - 225x^2 + 274x = 120.$$

Ovakav zapis omogućio je Viete-u da rešava kvadratne jednačine uz pomoć analitičkih umesto geometrijskih metoda. On je samo delimično koristio modernu notaciju, ali je preduzeo važan korak dopuštajući da slova predstavljaju promenljive, što mu je omogućilo izbegavanje „verbognog“ pristupa svojih prethodnika. Upotreba slova za predstavljanje zadate veličine uspostavila je novi numerički koncept u matematici – koncept algebarskog broja. Ova uopštenja korišćena su za definisanje opštih tvrdnji npr. $a + b = b + a$. Jedan od prvih naučnika koji je koristio Viete-ova slova je bio Rene Descrates. On je korstio poslednja slova alfabeta kao što su x, y i z . U njegovoj knjizi *La Geometrie* iz 1673. godine može se uočiti sledeći izraz:

⁵ Gerolamo Cardano (24. septembar 1501. – 21. septembar 1576.) je bio italijanski matematičar. Bio je jedan od najuticajnijih matematičara u doba renesanse, i bio jedan od ključnih figura u uspostavljanju verovatnoće kao grane matematike.

⁶ Francois Viète (1540. godine – 1603. godine) je bio poznati francuski matematičar čiji je rad na algebri bio važan korak ka modernoj algebri. Po zanimanju je bio advokat i tajni savetnik francuskih vladara svog vremena.

$$x^3 - \sqrt{3}xx + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} \propto 0,$$

što podseća na današnji, moderan zapis. Descrates je koristio \propto kao znak jednakosti ($=$) i preferirao je x^3 u odnosu na xxx . [7]

Na osnovu svega navedenog, može se izvesti zaključak da je tokom simboličke faze algebarska notacija bila znatno izmenjena i usavršena.

1.2. Značenja matematičkih simbola i skraćenica

Upotreba simbola i skraćenica u matematici daju njenom „registru“ karakteristike jedinstvenosti i složenosti. Iako je učenicima moguće da matematički razmišljaju i bez upotrebe simbola, ideje pisane matematičke komunikacije se ne mogu postići sažeto bez korišćenja istih. Dodatno, potencijalni strah i nesklonost ka algebri se mogu pripisati nerazumevanju u potpunosti simbola svojstvenih ovoj oblasti matematike. Važno je razjasniti šta se podrazumeva pod matematičkim simbolima i skraćenicama. Mnogi simboli su poznati i najmladim učenicima, poput deset cifara (od 0 do 9). Drugi pak, simboli poput jednakosti, valutnih oznaka i četiri aritmetičke operacije ($=, \$, +, -, \cdot, \div$) se uvode u nešto kasnijoj dobi. Na kraju, u najstarijoj dobi (govoreći u kontekstu osnovne škole) se uvode slova poput grčkog alfabeta ali i simbola koji se koriste u kompleksnijim matematičkim izrazima ($\%, \sqrt{}, <, >, \pm, \infty$). U tom smislu učenici moraju biti sposobni da dekodiraju i verbalizuju čitav niz matematičkih simbola relevantnih za njihovu fazu matematičkih studija. Matematički simboli se mogu klasifikovati u sedam grupa:

1. **Brojevni simboli** – čine ih brojevi poput Hindu – Arapskih (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9) ali i drugi brojevni sistemi poput rimskih (I, V, X, D, C, L i M) i to su tipovi sistema koji se koriste u različitim kombinacijama, i predstavljaju brojeve svih vrsta.
2. **Operatori** – čine ih aritmetički operatori poput $+, -, \times, \div$ i njihovi „sinonimi“ kao što su „ \cdot “ (tačka) i „ $/$ “ (kosa crta), ali i operatori poput „ $\sqrt{}$ “ i „ $!$ “ koji se koriste u kasnijoj učeničkoj dobi.
3. **Uporedni simboli** – predstavljaju simbole koji se koriste kako bi se označila jednakost, nejednakost ali i neki drugi odnos: $=, <, >, \leq, \geq, \equiv, \approx, \subset$. U ovu grupu spadaju i suprotni oblici prethodno predstavljenih simbola (obično uključuje kosu crtu napisanu preko odgovarajućeg simbola): $\neq, \not\subset, \not\approx$ itd.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

4. **Simboli za grupisanje** – u ovu grupu simbola spadaju sve vrste zagrada poput običnih (), vitičastih {} i uglastih [].
5. **Slovni simboli** – u ovu grupu simbola spadaju nepoznate sa jedne strane i parametri sa druge strane. Mogu se predstaviti bilo kojim simbolom, ali se najčešće prikazuju velikim ili malim slovom abecede ili nekim od 24 slova grčkog alfabetra. Takođe u ovu grupu spadaju i standardi koji se koriste za predstavljanje određenih pojmoveva kao što su: gradijent (m), radius (r), masa (m), površina (P), zapremina (V) itd.
6. **Geometrijski simboli** – u ovu grupu se ubrajaju simboli poput Δ , \perp , \bowtie itd.
7. **Skraćene forme koje mogu biti skraćenice ili simboli** - u okviru ove grupe se može napraviti distinkcija na nekoliko podgrupa:
 - a. matematičke skraćenice ili simboli (%., ∵, ∞, $f()$, ±, ∀, ∃),
 - b. jedinica mere (\$, km, cm^3 , L, g, mL, s, h) i
 - c. upotreba opštih pojmoveva (3D, N, S, E, W).

Ova klasifikacija može pomoći učenicima da razumeju širok spektar različitih simbola koji se koriste u matematici, ali i njihovu različitu namenu. [6]

1.2.1. Poteškoće u dekodiranju simbola

Veoma važna prepostavka u korišćenju simbola jeste adekvatno tumačenje istih. Obzirom da različiti simboli mogu imati isto značenje dekodiranje simbola dobija na značaju. U ovom delu rada dati su pojedini primeri koji mogu stvoriti poteškoće u tumačenju simbola. U tom smislu, na primer dvanaest podeljeno sa tri se može prikazati kao:

$$12: 3 \qquad \frac{12}{3} \qquad 12/3$$

Takođe, postoje razni simboli koji su se koristili kako bi se predstavlo značenje „*približno jednak*“ poput: \approx , \doteq i \simeq .

Sa druge strane, neki simboli su vrlo slični po izgledu. Suptilne razlike između pojedinih simbola mogu biti oblik ili veličina, upotreba podebljanog ili iskošenog slova, izbor velikih ili malih slova, ili dodatne označke poput apostrofa ili tački. Oni se moraju eksplicitno naglasiti učenicima, kako bi mogli da ih pravilno dekodiraju i koriste. Primeri korišćenja simbola

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

sličnih po izgledu su: simbol za nulu „0“ i veliko ili malo slovo „O“, simbol koji predstavlja operaciju množenja "·" i promenljive x i slično.

Skraćenice poput onih koje se nalaze na „mernoj“ strani matematike imaju slične, suptilne razlike. Primer složenosti skraćenica jeste dužina koja se označava sa l (iskošeno), a čija je jedinica mere *metar* pri čemu se za tu jedinicu koristi oznaka m (neiskošeno). Ipak, kada se oznaka za metar iskosi (m) ono dobija potpuno drugo značenje. Tada ono može predstavljati oznaku za gradijent ili masu. Većina simbola koji predstavljaju određenu jedinicu se zapisuju malim slovima osim jedinica nazavnih po naučnicima: Watt – W , Newton – N i slično. Na višim nivoima školovanja, kompleksniji simboli i skraćenice se koriste poput m/s , što se takođe može zapisati i kao m.s^{-1} , ili m^2 što predstavlja mernu jedinicu za površinu.

Često su matematički „tekstovi“ (izrazi, jednačine, nejednačine itd.) gusti i precizni. To znači da ogromne se količine informacija mogu dati u maloj količini teksta. Na primer, izraz:

$$[2 + 6 \cdot \sqrt{4}]^2$$

je leksički gust, jer bi za opisivanje rečima ovog izraza bila potrebna čitava rečenica. Dok se svakodnevni tekst može razumeti uprkos netačnosti u pravopisu i netačnosti u upotrebi reči, slične greške u upotrebi matematičkih simbola mogu imati značajan uticaj na značenje. Male promene u upotrebi simbola mogu prouzrokovati velike promene u značenju. Na primer, prethodni izraz ima potpuno drugačije značenje (vrednost) u odnosu na sličan izraz:

$$[(2 + 6) \cdot \sqrt{4}]^2$$

Iako nisu neophodni za potrebe testiranja, nastavnici i učenici moraju biti u stanju da osmisle i neke nestandardne jedinice i alternativne skraćenice. Primeri nestandardne jedinice su „bar“ i „mmHg“ (milimetri živinog stuba) za pritisak. Sa druge strane neke skraćenice variraju od teksta do teksta. Na primer „sec“ se često koristi kao oznaka za sekundu, dok se u literaturi susreće i oznaka „s“. Isti primer je i skraćenica „cc“ koja se koristi za kubne centimetre umesto „cm³“. [6]

Na kraju, značenje određenih simbola se može razlikovati od države do države. Na primer, u Srbiji je standardan simbol za površinu „P“ dok je u državama sa engleskim govornim područjem ta oznaka „A“ (enl. *area*). Takođe, decimalni zarez i tačka imaju različita značenja u zavisnosti od država. U Australiji tačka se koristi kao simbol razdvajanja celih od ostalih delova u decimalnom broju, dok se zarez koristi kao simbol za segmentiranje hiljada u okviru velikih brojeva. Dodatno, skraćenica „N“ (eng. *north*) se koristi kao simbol za sever ali u zemljama sa engleskim govornim područjem, dok se ista skraćenica ne koristi van granica tih zemalja.

2. MATEMATIČKI SIMBOLI U NASTAVI MATEMATIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI – TRENUTNO STANJE

Jedan od zahteva nastave matematike je da se kod učenika razvija smisao za samostalan organizovan rad, sposobnost jasnog, logičkog i preciznog izražavanja i usvajanja osećaja odgovornosti i urednosti u izvršavanju školskih i drugih zadataka. Ono što je od suštinske važnosti u preciznom i logičkom izražavanju učenika jesu matematički simboli. U ovom delu rada dat je detaljan pregled korišćenja matematičkih simbola u osnovnoj školi. Dati pregled obuhvata upotrebu simbola u višim razredima osnovno-školskog uzrasta (od petog do osmog razreda). Poglavlje je koncipirano prema razredima u okviru koji se analiziraju simboli koji se koriste u *algebri* i *geometriji*.

2.1. Peti razred

Gradivo petog razreda je podeljeno u pet osnovnih celina:

1. skupovi,
2. geometrijski objekti,
3. deljivost,
4. razlomci i
5. osna simetrija.

Program obuhvata veliki broj novih pojmove, odnosa i postupaka koji su znatno složeniji od sličnih obrađivanih u prethodnim razredima. Dodatno, predviđeni sadržaji su mnogo apstraktniji i formalniji, što ovaj razred čini znatno zahtevnijim od programa nižih razreda osnovne škole.

Posmatrajući pet osnovnih gradivnih celina u petom razredu, u kontekstu simbola, celine „geometrijski objekti“ i „osna simetria“ se svrstavaju pod geometriju, dok preostale tri celine spadaju u algebru. U ovako definisanom konceptu u nastavku sledi pregled upotrebe geometrijskih i algebarskih simbola u okviru petog razreda. Svi simboli koji se koriste u petom razredu preuzeti su iz literature [5].

2.1.1. Algebarski simboli

Prva nastavna celina koja će biti predstavljena jesu **skupovi**. Osnovni cilj obrade gradiva vezanih za skupove i njihove elemente jeste izgrađivanje kod učenika svest o potrebi uvođenja opšteg apstraktnog pojma – skupa, i sticanje znanja o prikazivanju skupa matematičkim simbolima. Sa druge strane obrazovni zadaci se sastoje u tome da učenici treba da usvoje pojam matematičkog skupa, pojam praznog skupa, značenje reči „pripada“ i „ne pripada“ kao i usvajanje odgovarajućih simbola. Učenicima je takođe neophodno napomenuti pravilo oznake skupova: veliko pisano latinično slovo. Dakle:

Simbol	Značenje
{	početak nabranja elemenata skupa
}	kraj nabranja elemenata skupa
\in	pripada
\notin	ne pripada
\emptyset	prazan skup
N_0	skup prirodnih brojeva uključujući i nulu

Tabela 2.1. Osnovni simboli vezani za skupove

Primer: Neka je dat skup $A = \{a, e, i, o, u\}$. Obzirom da elemenat „a“ pripada skupu A , data činjenica se zapisuje u oznaci $a \in A$, dok elemenat „b“ ne pripada skupu A , te se data činjenica zapisuje u oznaci $b \notin A$.

Pored skupova, učenici u ovoj gradivnoj celini usvajaju i pojmove vezane za podskupove. U skladu sa tim, učenici treba da usvoje pojam podskupa i jednakosti skupova, te upotrebu odgovarajućih simbola predstavljenih u sledećoj tabeli:

Simbol	Značenje
\subset	podskup
$\not\subset$	nije podskup
$=$	jednakost

Tabela 2.2. Simboli vezani za podskupove

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Dakle, učenici treba da steknu navike korišćenja skupovne simbolike, što ujedno predstavlja i osnovni funkcionalni zadatak.

Primer: Obzirom da je prazan skup podskup svakog skupa, pa i skupa A iz prethodnog primera, upotrebom simbola se data činjenica zapisuje na sledeći način: $\emptyset \subset A$.

Nakon usvajanja osnovne skupovne simbolike, u nastavnom programu petog razreda je predviđena obrada osnovnih skupovnih operacija: unija, presek i razlika skupova. Dodatni pojam koji se koristi u ovoj celini jeste komplement skupa. Kao obrazovni zadatak ovog dela ističe se usvajanje pojma unije, preseka i razlike kao binarnih skupovnih operacija, svojstva operacija i usvajanje simbola koji odgovaraju pomenutim operacijama ali i adekvatnog simbola koji označava komplement skupa. Odgovarajući simboli i njihovo značenje su dati u tabeli ispod:

<i>Simbol</i>	<i>Značenje</i>
\cup	unija
\cap	presek
\setminus	razlika
$C_A(B)$	komplement skupa B u odnosu na A

Tabela 2.3. Simboli vezani za skupovne operacije

Primer: Neka je dat skup $A = \{a; e; i; o; u\}$ i $B = \{1; 4\}$. Tada je unija skupova A i B skup koji se označava sa $A \cup B$, njihov presek je skup koji se označava sa $A \cap B$ i na kraju njigova razlika je skup koji se označava sa $A \setminus B$. Dakle, $A \cup B = \{a; e; i; o; u; 1; 4\}$, $A \cap B = \emptyset$ (jer ne postoji ni jedan element koji se nalazi u oba skupa) i $A \setminus B = \{a; e; i; o; u\}$.

Sa druge strane, u okviru nastavne oblasti *skupovi*, neophodno je sa učenicima petog razreda ponoviti osnovne relacije i operacije nad skupom prirodnih brojeva, koje su obrađivane u prethodnim razredima. U tom kontekstu, simboli koji se koriste pri poređenju i rešavanju izraza u okviru skupa prirodnih brojeva jesu:

<i>Simbol</i>	<i>Značenje</i>
$+$	sabiranje
$-$	oduzimanje
\cdot	množenje
$:$	deljenje

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

(otvorena zagrada
)	zatvorena zagrada
>	veće
\geq	veće ili jednako
<	manje
\leq	manje ili jednako

Tabela 2.4. Osnovne operacije na skupu prirodnih brojeva

Napomena: Obzirom da postoje slični simboli koji se koriste, a u svrhu boljeg razumevanja istih, dato je dodatno pojašnjenje sledeća tri simbola:

Simbol	Značenje
.	tačka
,	razdvajanje decimala od celih brojeva
;	razdvajanje elemenata skupa

Tabela 2.5. Objašnjenje simbola tačka, zarez, tačka-zarez

Primer: Izračunati dati brojevni izraz:

$$2 + 12 : 3 - 3 + (36 - 10 : 5) = 2 + 4 - 3 + (36 - 2) = 6 - 3 + 34 = 37$$

Druga nastavna celina koja će biti predstavljena u okviru algebarskih simbola petog razreda jeste **deljivost**. Uvodni časovi iz ove oblasti obuhvataju obnavljanje postupka deljenja u skupu N_0 , svojstva deljivosti i deljenje sa ostatom. U kontekstu deljivosti učenicima treba da usvoje pravila deljivosti kako sa dekadnim jedinicama tako i sa određenim karakterističnim brojevima poput 2, 3, 4, 5, 9, 25, 50 i 75. Kako bi se adekvatnije približio pojam „deli“ (u kontekstu da broj a deli broj b) ali i skupa svih delioca nekog broja, uvedeni su simboli dati u tabeli ispod:

Simbol	Značenje
	deli
D_a	skup delioca broja a

Tabela 2.6. Simbol deljivosti

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Primer: Obzirom da je poznato da je svaki paran broj deljiv sa 2, datu činjenicu simbolima možemo predstaviti kao $2|n, n = 2, 4, 6 \dots$ Sa druge strane, neka je dat broj 8. Skup svih delioca broja 8 je $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$.

U okvirnu ove nastavne teme obrađuju se i pojmovi prostih i složenih brojeva, pa se učenici susreću i sa pojmom Eratostenovog sita. Dati pojmovi se koriste pri obradi nastavnih jedinica *najveći zajednički delilac* i *najmanji zajednički sadržalac*. Nekonvencionalni simboli za prethodno pomenuta dva pojma dati su u tabeli ispod:

Simbol	Značenje
NZD	najveći zajednički delilac
NZS	najmanji zajednički sadržalac

Tabela 2.7. Simbol deljivosti

Poslednja nastavna celina koja će biti predstavljena u okviru algebarskih simbola petog razreda jesu **razlomci**. U okviru ove nastavne teme neophodno je da se učenici najpre upoznaju sa pojmom razlomka oslanjajući se na opažajno saznavanje. Učenici otkrivaju pored skupa prirodnih brojeva, dodatni skup a to je skup racionalnih brojeva za čiju oznaku se koristi simbol \mathbb{Q}_0^+ . Osnovni simbol koji se koristi u okviru elementarnog upoznavanja sa razlomcima jeste „–“. Dati simbol zamenjuje operaciju deljenja („:“). Dakle, učenici treba da, koristeći se odgovarajućim svojstvima prirodnih brojeva, shvate pojam razlomaka kao količnik dva prirodna broja. Nakon upoznavanja sa pojmom razlomka i elementima istog (brojilac i imenilac), učenici treba da savladaju njihovo proširivanje i skraćivanje. Proširivanje i skraćivanje razlomaka se vrši upotrebom operacija množenja i deljenja (brojilaca i imenilaca) adekvatnim brojem. Kako bi se upotpunila osnovno razumevanje razlomaka, neophodno je sprovesti njihovo poređenje. U tom smislu, u kontekstu simbola koriste se osnovne relacije navedene u Tabeli 2.4. Na dalje, neophodno je učenike upoznati sa pojmom decimalnog zapisa razlomka, kao i prevođenje razlomka u decimalan broj i obrnuto. Poređenje decimalnih brojeva upotrebom relacija navedenih u Tabeli 2.4. predstavlja sastavni deo ove nastavne teme. Nakon utvrđivanja pojma razlomaka i decimalnih brojeva, uvode se osnovne operacije koje se primenjuju u radu sa istim. Operacije koje se koriste jesu sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje. Dodatno, nakon savladavanja osnovnih operacija sa razlomcima i decimalnim brojevima, učenici se upoznaju sa postupkom rešavanja jednačina i nejednačina u skupu racionalnih brojeva. Učenicima se uvodi pojam nepoznate u oznaci malog latiničnog slova. Poslednji, ali ne i manje važan deo ove nastavne teme, predstavljaju brojevni izrazi u okviru koje učenici primenjuju stečena

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

znanja o razlomcima i decimalnim brojevima. Pregled simbola koji se (pored simbola datih u Tabeli 2.4.) upotrebljavaju u okviru nastavne teme „razlomci“ dat je u tabeli ispod:

Simbol	Značenje
Q_0^+	skup pozitivnih racionalnih brojeva
$\frac{a}{b}$	oznaka za razlomak

Tabela 2.8. Simbol razlomaka i njihovog skupa

2.1.2. Geometrijski simboli

Posmatrajući peti razred u kontekstu geometrije, prva nastavna tema (oblast) jesu **geometrijski objekti**. Kroz ovu nastavnu temu, učenici najpre spoznaju osnovne geometrijske pojmove. U tom smislu, obrazovni zadatak predstavlja neophodost da učenici usvoje pojam tačke, prave i ravni kao osnovnih geometrijskih pojmoveva, ali i da formiraju pojmove prave i ravni kao beskonačnih skupova tačaka. Sa druge strane, funkcionalne zadatke figurira potreba da učenici razviju naviku tačnog obeležavanja geometrijskih pojmoveva. Obzirom da su polazni (osnovni) pojmovi geometrije tri skupa tačaka: tačka (jednočlani skup, čiji je element tačka), prava (beskonačni skup, čiji su elementi tačke) i ravan (beskonačni skup, čiji su elementi tačke) neophodno je definisati (predstaviti pravilo) njihov zapis kao i upotrebu simbola koji se koriste u tom, konvencionalnom zapisu. U tom smislu, u tabeli ispod predstavljeni su simboli kojima se obeležavaju osnovni geometrijski pojmovi:

Simbol	Značenje
$A, B, C, D, \dots, P, Q, \dots$	obeležavanje tačaka
$a, b, c, d, \dots, p, q, \dots$	obeležavanje pravih
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \pi, \rho, \dots$	obeležavanje ravni

Tabela 2.9. Simboli koji se koriste pri označavanju tačke, prave i ravni

Primer: Da tačka A pripada pravoj a označavamo sa $A \in a$. Ako tačka A ne pripada pravoj a , to se zapisuje sa $A \notin a$. Sa druge strane, da je prava a podskup ravni α označava se sa $a \subset \alpha$, a ukoliko prava a nije podskup ravni α to se označava sa $a \not\subset \alpha$.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Nakon usvajanja osnovnih geometrijskih pojmoveva, neophodno je da se učenici upoznaju sa izvedenim geometrijskim pojmovima – duž, poluprava i poluravan. Obzirom da se pomoću osnovnih pojmoveva definišu prethodno pomenuti (izvedeni) pojmovi, potrebno je iste adekvatno označiti. Simboli koji se koriste u označavanju duži, poluprave i poluravnih su dati u tabeli ispod:

Simbol	Značenje
AB, FE, \dots	obeležavanje duži
$Oa, Bb, Oc, \dots, Fp, \dots$	obeležavanje polupravih
$p\alpha, q\beta, \dots$	obeležavanje poluravnih

Tabela 2.10. Simboli koji se koriste pri označavanju duži, poluprave i poluravnih

Napomena: Važno je učenicima razjasniti upotrebu simbola "..." u nabrajanju. Naime, postoje dve potencijalne situacije u kojima se dati simbol upotrebljava. Prvi scenario predstavlja nabrajanje beskonačnog broja elemenata nekog skupa. To na primer može biti nabrajanje elemenata skupa prirodnih brojeva tj. $N = \{1; 2; 3; \dots\}$. Obzirom da se radi o beskonačnom broju elemenata, simbol "..." se stavlja na kraju ne navodeći elemente nakon njega. Drugi scenario upotrebe predstavljenog simbola je nabrajanje konačnog broja elemenata nekog skupa. Na primer, neka je dat dvadesetougao. Dati dvadesetougao sadrži dvadeset stranica. Kako se ne bi nabrajale svake od stranica, njihovo nabrajanje se može izvesti na sledeći način: a_1, a_2, \dots, a_{20} . Uočimo da se posle simbola "..." nabraja poslednji elemenat datog skupa.

Nadalje, u nastavnoj temi *geometrijski objekti*, učenici se upoznavaju i sa kružnicom i krugom. U tom smislu, učenici treba da usvoje pojmove kružnice i kruga kao i njihove elemente: centar, poluprečnik, prečnik, tetiva i tangenta. Veoma bitan funkcionalni zadatak u okviru geometrijskih objekata jeste da učenici stiču naviku korišćenja matematičkih simbola. Za datu nastavnu jedinicu, kružnicu i krug, u tabeli ispod je dat detaljan pregled simbola koji se koriste za njihove označke, ali i za označke njihovih elemenata.

Simbol	Značenje
O	centar kruga/kružnice
k	kružnica
K	krug
r	poluprečnik kruga/kružnice

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

t	tangenta
AB, CD, EF, \dots	tetiva
$k(O, r)$	kružnica k sa centrom u tački O i poluprečnikom r
$K(O, r)$	krug K sa centrom u tački O i poluprečnikom r

Tabela 2.11. Simboli koji se koriste pri označavanju kružnice, kruga i njihovih elemenata

Sastavni i vrlo važan deo geometrijskih objekata jesu uglovi. Konveksni i nekonveksni uglovi predstavljaju osnovnu podelu istih. U samom početku obrade uglova, učenici treba da upoznaju načine obeležavanja i zapisivanja uglova. Obzirom da se ugaona linija sastoji od dve poluprave, čije je teme (tačka) zajednička, intuitivno se dolazi do jednog od načina zapisivanja uglova. Dakle, simbol koji figurira ugao jeste \angle , pri čemu se u nastavku navode oni geometrijski elementi koji čine taj ugao. Na primer, ukoliko se ugao sastoji od dve poluprave tada se pored prethodno pomenutog znaka navode i simboli te dve poluprave. Sa druge strane, ukoliko se radi o centralnom uglu (ugao čije je teme centar kruga, a kraci odgovarajuće tetive) tada se pored \angle navode i temena. U oba slučaja centralni simbol u oznaci ugla zauzima teme tog ugla. Sa druge strane, pored \angle , za označavanje uglova koriste se i grčka slova. Dakle:

Simbol	Značenje
$\angle aOb, \angle aBb, \dots$	ugaona linija
$\angle AOB, \angle COD, \dots$	centralni ugao
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$	uglovi

Tabela 2.12. Simboli koji se koriste u oznaci ugla

Pri obradi ove nastavne jedinice, učenici takođe uče i da manipulišu uglovima tj. da ih prenose. Pored manipulacije sa uglovima, učenici treba da savladaju i sabiranje i oduzimanje uglova kako putem konstrukcije, tako i putem mernih jedinica. Merne jedinice uglova jesu stepeni, minuti i sekunde, a matematički simboli kojima se ove jedinice predstavljaju su:

Simbol	Značenje
\circ	stepen
$,$	minut
$''$	sekund

Tabela 2.13. Simboli koji se koriste u oznaci mernih jedinica ugla

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Primer: Neka je dat ugao α koji ima 54 stepena, 32 minuta i 45 sekundi. Zapis ovako definisanog ugla je $\alpha = 54^\circ 32' 45''$.

Pored konveksnih i konkavnih uglova, ova nastavna tema obuhvata podelu uglova prema veličini ugla. U toj podeli se izdvajaju sledeći uglovi poređani od najmanjeg ka najvećem: oštar, prav, tup i opružen. Za svaki od navedenih uglova se koriste posebni simboli pri čemu su isti navedeni u tabeli ispod:

Simbol	Značenje
\triangleleft	oštar ugao
\square	prav ugao
\triangleright	tup ugao
\squaredash	opružen ugao

Tabela 2.14. Simboli koji se koriste u oznaci različitih uglova

Ugao od 90° jeste prav ugao. Dakle, ukoliko se dve prave seku pod uglom od 90° one obrazuju prav ugao, a simbol koji označava da se dve prave seku pod pravim uglom jeste \perp .

Primer: Ukoliko se prave a i b seku pod pravim uglom, tada se data situacija opisuje kao $a \perp b$, i one obrazuju četiri prava ugla. Neka je presečna tačka pravih a i b tačka D tj. $a \cap b = \{D\}$, tada tačka D deli pravu a na dve poluprave, a_1 i a_2 , i deli pravu b na dve poluprave b_1 i b_2 . Date četiri poluprave i tačka D formiraju prethodno pomenuta četiri prava ugla tj. $\angle a_1Db_1, \angle b_1Da_2, \angle a_2Db_2$ i $\angle b_2Da_1$.

Poslednja nastavna celina koja će biti predstavljena u okviru geometrijskih simbola petog razreda jeste **osna simetrija**. U upoznavanju sa ovom nastavnom celinom, cilj časa jeste uvođenje pojma osne simetrije. U tom smislu, učenici se upoznaju sa zadatom pravom koja predstavlja osu simetrije. Pored osne simetrije, učenici se upoznaju i sa simetralom duži i simetralom ugla. U narednoj tabeli dat je detaljan pregled svih simbola koji se koriste u nastavnoj temi **osna simetrija**.

Simbol	Značenje
a, b, c, \dots, s, \dots	osa simetrije
s_{AB}	simetrala duži AB
s_α	simetrala ugla α

Tabela 2.15. Simboli koji se koriste u osnoj simetriji

2.2. Upotreba matematičkih simbola u šestom, sedmom i osmom razredu

U ovom delu rada dat je detaljan pregled upotrebe adekvatnih matematičkih simbola neophodnih za usvajanje nastavnih tema šestog, sedmog i osmog razreda. Svi simboli koji se koriste u petom razredu preuzeti su iz literature [2, 3, 4].

1. Matematički simboli - šesti razred

Oblast	Simbol	Značenje
Algebra	Z	skup celih brojeva
	Z^-	skup negativnih celih brojeva
	Z^+	skup pozitivnih celih brojeva
	$ a $	apsolutna vrednost broja a
	\neq	različito (nije jednako)
	Q^+	skup pozitivnih racionalnih brojeva
	Q^-	skup negativnih racionalnih brojeva
	$\%$	procenat
Geometrija	Δ	trougao
	A, B, C, \dots	temena trougla i četvorougla
	AB, AC, BC, \dots ili a, b, c, d, \dots	stranice trougla i četvorougla
	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ili $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \dots$	unutrašnji uglovi trougla i četvorougla
	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \dots$	spoljašnji uglovi trougla i četvorougla
	\cong	podudarnost (trouglova)
	$=>$	implikacija
	r_o	poluprečnik opisane kružnice
	r_u	poluprečnik upisane kružnice
	h_a, h_b, h_c, \dots	visine trougla
	H	ortocentar trougla
	t_a, t_b, t_c, \dots	težišne duži trougla
	T	težište trougla
	$:$	razmera
	\parallel	paralelnost dve prave
	\perp	ortogonalnost dve prave
	d	dijagonala u pravouglom četvorouglu
	d_1 i d_2	dijagonale u kosouglom četvorougлу

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

	m	srednja linija trapeza
	O	obim
	P	površina

Tabela 2.16. Simboli koji se koriste u šestom razredu osnovne škole

2. Matematički simboli - sedmi razred

Oblast	Simbol	Značenje
Algebra	a^2, b^2, \dots	kvadratni stepen
	$\sqrt{}$	kvadratni koren
	I	skup iracionalnih brojeva
	$+\infty$	beskonačnost
	$-\infty$	negativna beskonačnost
	\approx	približna vrednost
	a^n	stepen broja a (a – osnova; n – stepen)
	$\uparrow\uparrow$ ili $\downarrow\downarrow$	smer direktne proporcionalnosti
	$\uparrow\downarrow$ ili $\downarrow\uparrow$	smer obrnute proporcionalnosti
Geometrija	k	koeficijent proporcionalnosti
	D_n	broj dijagonala n –tougla
	S_n	zbir unutrašnjih uglova n –tougla
	$T(x, y)$	tačka u koordinatnom sistemu (x –apscisa; y – ordinata)
	π	konstanta (3,14), ne koristi se za oznaku prave
	l	dužina kružnog luka
	Pkp	površina kružnog prstena
	Pki	površina kružnog isečka
	\sim	sličnost

Tabela 2.17. Simboli koji se koriste u sedmom razredu osnovne škole

3. Matematički simboli - osmi razred

Oblast	Simbol	Značenje
Algebra	ρ	gustina
	m	masa
	T	tačno
	\perp	netačno
	(,)	otvoren interval

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Geometrija	$[,]$	zatvoren interval
	$(,]$ ili $[,)$	poluotvoren interval
	y, a, b, \dots ili $f(x), g(x), \dots$	funkcija
	k	koeficijent pravca prave
	n	odsečak na y – osi
	S	srednja vrednost
	M_e	medijana
	\Leftrightarrow	ekvivalentnost
	\perp	ortogonalnost
	T	broj temena poliedra
	I	broj ivica poliedra
	S	broj strana poliedra
	V	zapremina
	m	masa
	Pdp	dijagonalni presek
	D	dijagonala prizme
	H	visina prizme
	B	baza
	M	omotač
	s	bočna ivica
	xOy	koordinatni sistem
	Pop	osni presek
	s	izvodnica kupe
	R	poluprečnik lopte
	$L(O, R)$	lopta sa centrom u tačko O i poluprečnikom R

Tabela 2.18. Simboli koji se koriste u sedmom razredu osnovne škole

Kao jedan od primera upotrebe nekih od prethodno navedenih simbola dat je zadatak koji se pojavio na završnom ispitu iz matematike na kraju osnovnog obrazovanja i vaspitanja za školsku 2020/2021. godinu.

Primer: Rajko je kupio njivu kvadratnog oblika površine 2 hektara (20000 kvadratnih metara). Kako Rajko može da izračuna dužinu njive u metrima. Oboj kružić ispred tačnog odgovora.

- Podeliće 20000 sa 100.
- Podeliće 20000 sa 4.
- Podeliće 20000 sa 1000.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

- Pomnožiće 2 sa 1000.
- Izračunaće kvadrat broja 2.
- Izračunaće kvadratni koren broja 20000.
- Izračunaće kvadrat broja 20000.
- Izračunaće koliko ari ima u dva hektara. [8]

Rešenje. Najpre učenici treba da uoče da se radi o kvadratnoj površini njive koja je izražena u hektrarima. Iz toga proizilazi da je dužina i širina njive jednaka. Dodatno, olakšavajuća okolnost je data mera u kvadratnim metrima pa učenici nemaju potrebe da hektare pretvaraju u metre kvadratne. Neophodnost rada sa kvadratnim metrima proizilazi iz pitanja datog u zadatku tj. određivanje dužine u metrima. Obzirom da su dužina i širina njive iste (zbog njenog kvadratnog oblika), sledi da se data površina računa putem sledeće formule:

$$P = a \cdot a = a^2.$$

Korišćeni simboli u datoј formuli su nam poznati (P – površina i a – stranica kvadrata). Obzirom da je po uslovu zadatka površina data, sledi:

$$20000 = a^2$$

$$a = \sqrt{20000}$$

Sa druge strane, svaki od ponuđenih odgovora učenik treba da zapiše odgovarajućim simbolima:

20000: 100	20000: 4	20000: 1000	2 · 1000
2^2	$\sqrt{20000}$	20000^2	$2ha = 200a$

Očigledno, poređenjem dobijenog rešenja i ponuđenih odgovora zaključak je da se koristi simbol kvadratnog korena, pa je rešenje zadatka „Izračunaće kvadratni koren broja 20000“.

2.3. Upotreba simbola na završnom ispitу iz matematike

Nakon predstavljenih simbola koji se koriste u nastavi matematike (od petog do osmog razreda), u ovom delu rada dat je pregled upotrebe simbola korišćenih na završnom ispitу iz matematike. Zadaci kod kojih je sprovedena analiza upotrebe simbola jesu oni koji se pojavljuju na završnom ispitу 2019. godine. Detaljan pregled upotrebljenih simbola na pomenutom ispitу dat je u tabeli ispod.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Redni broj zadatka	Oblast standarda	Standard ⁷	Upotrebљени simboli u postavci zadatka											
1.	Brojevi i operacije sa njima	MA.1.1.2.	—	,										
2.	Brojevi i operacije sa njima	MA.1.1.4.	—	+	·	:	,							
3.	Brojevi i operacije sa njima	MA.1.1.5.												
4.	Algebra i funkcije	MA.1.2.1.	+	x	=		,							
5.	Geometrija	MA.1.3.1.	°											
6.	Geometrija	MA.1.3.2.	A	B	C									
7.	Merenje	MA.1.4.3.												
8.	Obrada podataka	MA.1.5.1.	x	y	A									
9.	Obrada podataka	MA.1.5.2.												
10.	Brojevi i operacije sa njima	MA.2.1.1.	—											
11.	Brojevi i operacije sa njima	MA.3.1.1.	,	—	=	·	+	a	b	c	()			
12.	Algebra i funkcije	MA.2.2.2.	—	,	x	$\sqrt{ }$								
13.	Algebra i funkcije	MA.2.2.3.												
14.	Geometrija	MA.2.3.5.	+	—	·	=	a	A	B	C				
15.	Geometrija	MA.2.3.6.												
16.	Obrada podataka	MA.2.5.3.	,											
17.	Algebra i funkcije	MA.3.2.1.	+	—	·	()	—	x						
18.	Geometrija	MA.3.3.3.												
19.	Geometrija	MA.3.3.6.	A	B	C	D	E	AC	DE	DB	AB			
20.	Obrada podataka	MA.2.5.4.	+	%										

Tabela 2.19. Upotreba matematičkih simbola u postavci zadataka na završnom ispitu iz matematike 2019. godine

Prilikom rešavanja pomenutih zadataka, upotreba simbola je veća. Dodatno, zadaci koji u svojoj postavci nemaju ni jedan simbol, najčešće su za učenike komplikovaniji uzimajući u obzir da iste najpre moraju da prevedu na matematički zapis, a potom da krenu u rešavanju istog.

⁷https://ceo.edu.rs/wp-content/uploads/obrazovni_standardi/kraj_obaveznog_obrazovanja/Matematika.pdf

3. EMPIRIJSKO ISTRAŽIVANJE

Kako je u prethodnim poglavljima rada pokazano, u nastavi matematike u osnovnoj školi široka je upotreba simbola. Za potrebe ovog rada sprovedeno je empirijsko istraživanje putem ankete koja je data u prilogu rada. Obuhvat učenika koji su učestvovali u anketiranju jesu učenici prvog i drugog razreda srednje škole. Sa druge strane, elementarni cilj istraživanja je bio ispitivanje u kojoj meri učenici srednjih škola poznaju i kako percipiraju matematičke simbole sa kojima su se susreli još u osnovnoj školi. Obzirom da anketa nije bila anonimna, pored zadatih pitanja prikupljeni su i sledeći podaci:

1. ime i prezime učenika,
2. razred,
3. zaključna ocena na polugodištu i
4. najteža oblast iz matematike.

3.1. Metodologija

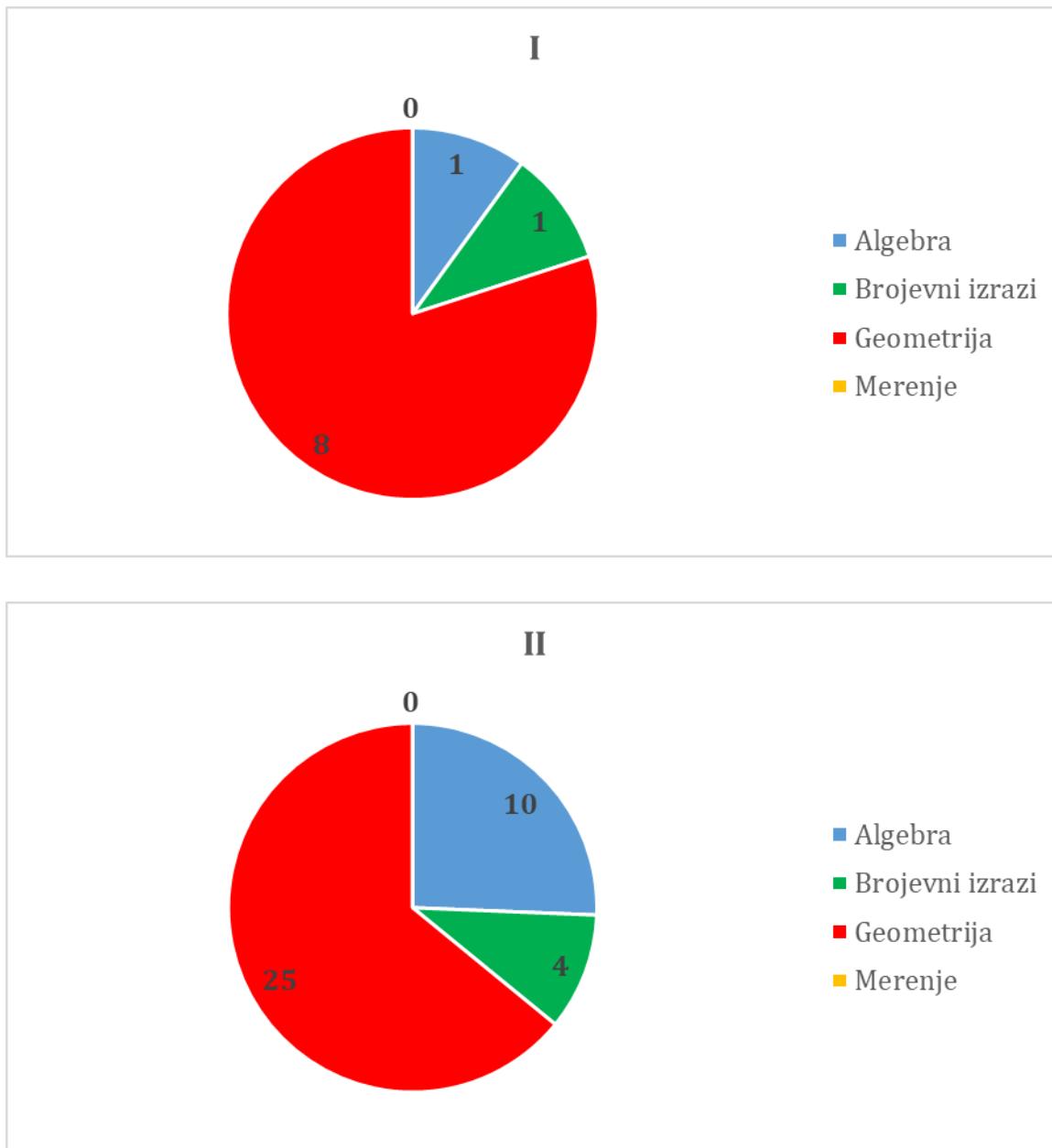
U anketiranju je učestvovalo 49 učenika srednje škole „Sveti Sava“ iz Loznice, od čega 10 anketiranih učenika pohađa prvi razred, dok preostalih 39 pohađa drugi razred predstavljene škole. Svi učenici su anketirani u toku redovnog časa, uz prisustvo nastavnika matematike, pri čemu je anketiranje trajalo 15 minuta. Upitnik se sastojao iz dva dela. Prvi deo obuhvata opšte informacije o učeniku (ime i prezime, razred, zaključnu ocenu na polugodištu kao i najtežu oblast). Cilj opšteg dela ankete jeste prikazivanje distribucije prema različitim karakteristikama učenika. Drugi deo ankete obuhvata pet pitanja koja se koriste za potrebe ispitivanja u kontekstu razumevanja i korišćenja matematičkih simbola. Za potrebe ovog israživanja kreirana je anketa od strane autora rada. Kako bi se predstavio uzorak nad kome je sprovedena anketa, u nastavku rada je dat pregled i distribucija anketiranih učenika u zavisnosti od pola i razreda kome učenici pripadaju:

Razred\Pol	Dečak	Devojčica
I	3	7
II	4	35

Tabela 3.1. Prikaz raspodele anketiranog uzorka prema polu i razredu

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Dodatno, učenici su zamoljeni da odgovore na pitanje koja oblast iz matematike im je najteža. Ponuđene oblasti u anketi su: geometrija, algebra i funkcije, brojevi i operacije sa njima i merenja. Pored najteže oblasti, učenici su takođe dali odgovor na zaključnu ocenu. Distribucija uzorka prema zaključnoj oceni i najtežoj oblasti predstavljena je na grafiku ispod.



Grafik 3.1. Prikaz raspodele anketiranog uzorka prema razredu i najtežoj oblasti

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Očigledno, na osnovu grafika se može zaključiti da u svakom razredu većina učenika definiše geometriju kao najtežu oblast iz matematike. Sa druge strane, oblast matematike pod nazivom merenje ni jedan učenik nije obeležio kao najtežu. Ovakva situacija je i očekivana obzirom da geometrija pokriva najveći deo apstraktnih pojmove, dok je merenje intuitivno za učenike uzimajući u obzir da se svakodnevno susreću sa raznim problemima koji se tiču merenja.

Nakon prikaza anketiranog uzorka u nastavku rada sledi prikaz rezultata sprovedene empirijske analize.

3.2. Rezultati istraživanja

U ovom delu rada biće predstavljeni rezultati empirijske analize obrađujući redom pitanja, dok će u okviru svakog pitanja analiza biti sprovedena prema razredima.

Prvo pitanje

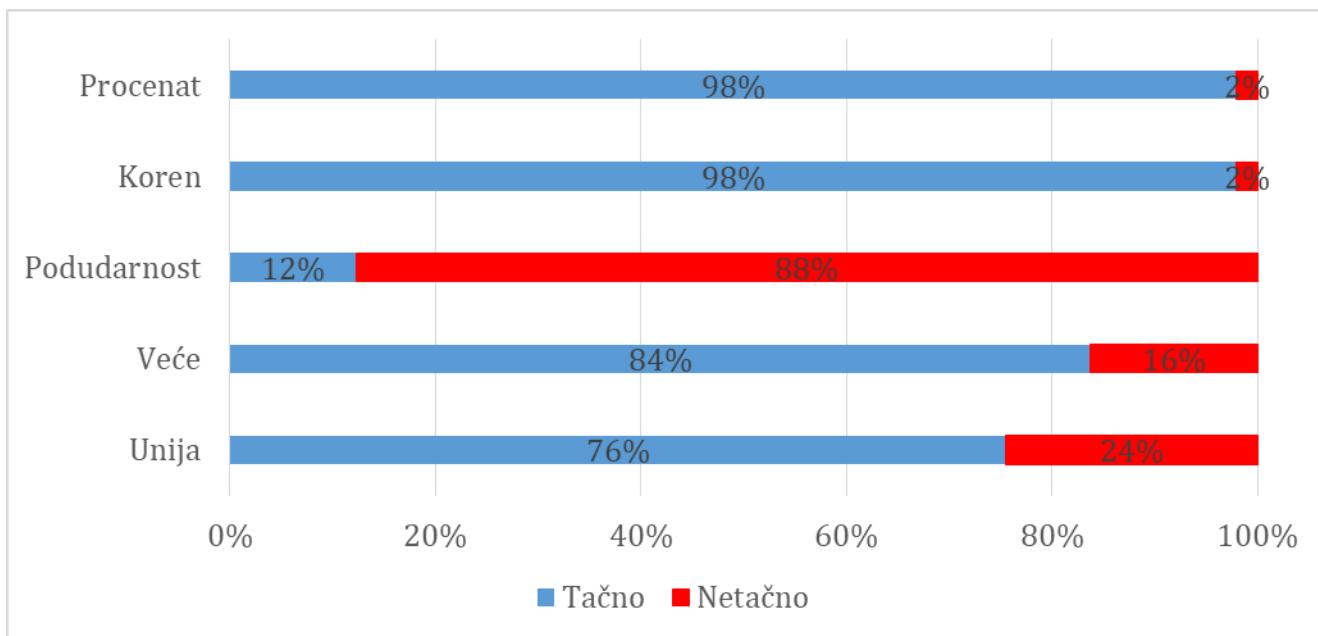
U okviru prvog pitanja u anketi data su dva simbola kao primeri popunjavanja značenja istih, pri čemu su učenici trebali da napišu značenje preostalih pet simbola. Adekvatni odgovori na prvo pitanje za datih pet simbola, respektivno, jesu: „unija“, „veće“, „podudarnost“, „koren“ i „procenat“. U nastavku rada predstavljen je tabelarni i grafički prikaz odgovora učenika prvog i drugog razreda srednje škole.

Razred	Odgovor	% tačnosti
I <i>n=10</i>	Unija	50%
	Veće	60%
	Podudarnost	40%
	Koren	90%
	Procenat	90%
II <i>n=39</i>	Unija	82%
	Veće	90%
	Podudarnost	5%

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Koren	100%
Procenat	100%

Tabela 3.2. Prikaz raspodele anketiranog uzorka prema tačnim odgovorima u prvom pitanju



Grafik 3.2. Prikaz raspodele tačnih i netačnih odgovora u okviru prvog pitanja u anketi (na celokupnom uzorku)

Analizirajući tabelu iznad, tj. odgovore učenika na prvo pitanje u anketi, može se reći da učenicima generalno, i u prvom i u drugom razredu najteže predstavlja obeležavanje u geometriji, tj. simbol kojim se označava podudarnost. Upravo ova teza korelira sa odgovorima iz tabele u prethodnom delu rada u kome je većina učenika navela da im je najteža oblast upravo geometrija.

Sa druge strane, najveći procenat tačnih odgovora se vezuje za simbol kojim se obeležava operacija korenovanja i procentualna vrednost. Ova teza se može potkrepliti činjenicom da operaciju korenovanja češće koriste u odnosu na preostale operacije, dok procentualno obeležavanje brojeva razumeju uzimajući u obzir svakodnevne primere pojavljivanja ovog simbola (npr. sniženja u prodavnicama).

Ono što je iznenađujuće jeste činjenica da je relativno mali procenat tačnih odgovora vezanih za simbol „veće“. Učenici u prvom razredu su mahom davali odgovore „manje“. To nas upućuje da čak 40% učenika prvog razreda ne razlikuje simbol „veće“ od simbola „manje“.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Drugo pitanje

U okviru drugog pitanja u anketi data su dva primera popunjavanja značenja izraza ispisanih simbolima, pri čemu su učenici trebali da napišu značenje preostalih pet. Adekvatni odgovori na drugo pitanje za datih pet izraza, respektivno, jesu:

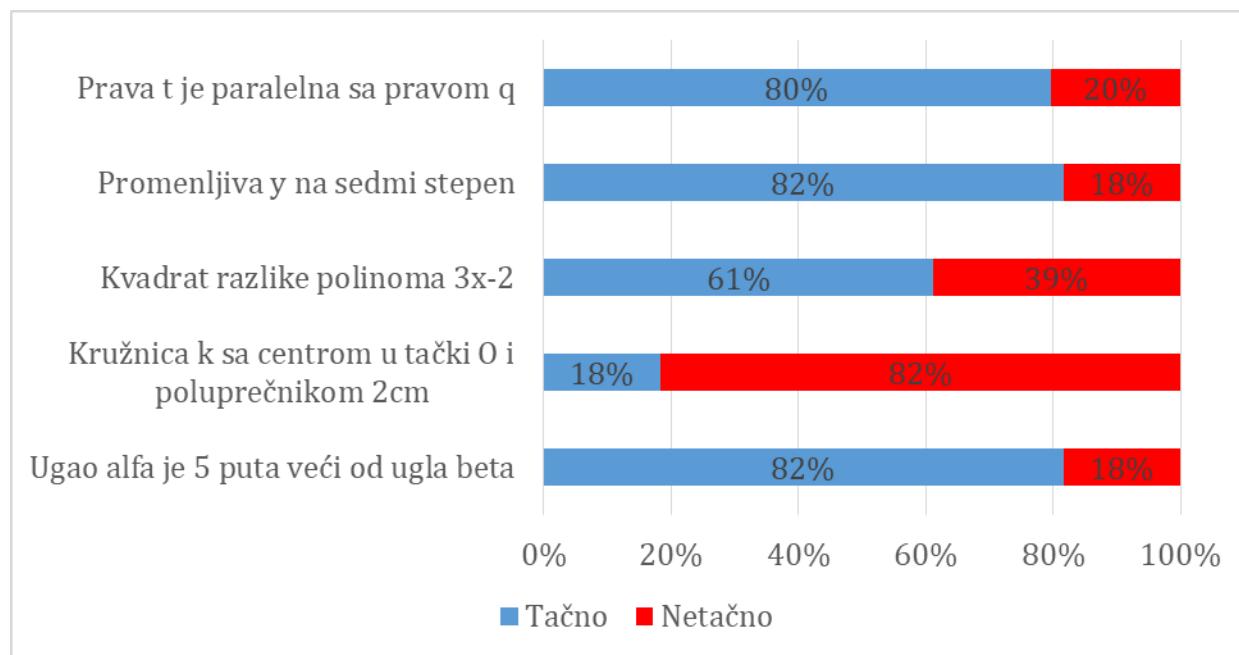
1. Ugao α je pet puta veći od ugla β ,
2. Kružnica k sa centrom u tački O i poluprečnikom $2cm$,
3. Kvadrat razlike polinoma $3x - 2$,
4. Promenljiva y na sedmi stepen,
5. Prava t je paralelna pravoj q .

U nastavku rada predstavljen je tabelarni i grafički prikaz odgovora učenika prvog i drugog razreda srednje škole:

Razred	Odgovor	% tačnosti
I $n=10$	Ugao α je pet puta veći od ugla β	40%
	Kružnica k sa centrom u tački O i poluprečnikom $2cm$	20%
	Kvadrat razlike polinoma $3x - 2$	80%
	Promenljiva y na sedmi stepen	70%
	Prava t je paralelna sa pravom q	70%
II $n=39$	Ugao α je pet puta veći od ugla β	92%
	Kružnica k sa centrom u tački O i poluprečnikom $2cm$	18%
	Kvadrat razlike polinoma $3x - 2$	56%
	Promenljiva y na sedmi stepen	85%
	Prava t je paralelna sa pravom q	82%

Tabela 3.3. Prikaz raspodele anketiranog uzorka prema tačnim odgovorima u drugom pitanju

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI



Grafik 3.3. Prikaz raspodele tačnih i netačnih odgovora u okviru drugog pitanja u anketi (na celokupnom uzorku)

Analizirajući odgovore učenika na drugo pitanje u anketi, može se reći da učenicima generalno, i u prvom i u drugom razredu najteže predstavlja obeležavanje u geometriji, tj. simbol kojim se označava kružnica sa parametrima koji definišu istu (centrom i poluprečnikom). Kao i u prethodnom pitanju, ova teza korelira sa odgovorima iz tabele u prethodnom delu rada u kome je većina učenika navela da im je najteža oblast upravo geometrija.

Sa druge strane, najveći procenat tačnih odgovora u okviru prvog razreda se vezuje za simbole kojima se obeležava razlika kvadrata određenog polinoma. Analizirajući drugi razred, uočava se drugačija situacija. Naime, najveći procenat tačnih odgovora vezuje se za stepenovanje određene promenljive.

Treće pitanje

U okviru trećeg pitanja u anketi učenicima nisu dati primeri rešavanja, međutim uputstva pri popunjavanju je dao nastavnik. Treće pitanje sadrži tri rečenice koje učenici treba da „prevedu“ matematičkim simbolima. Adekvatni odgovori na treće pitanje za data tri izraza, respektivno, jesu:

1. $f(x)$,
2. $F \in p$,

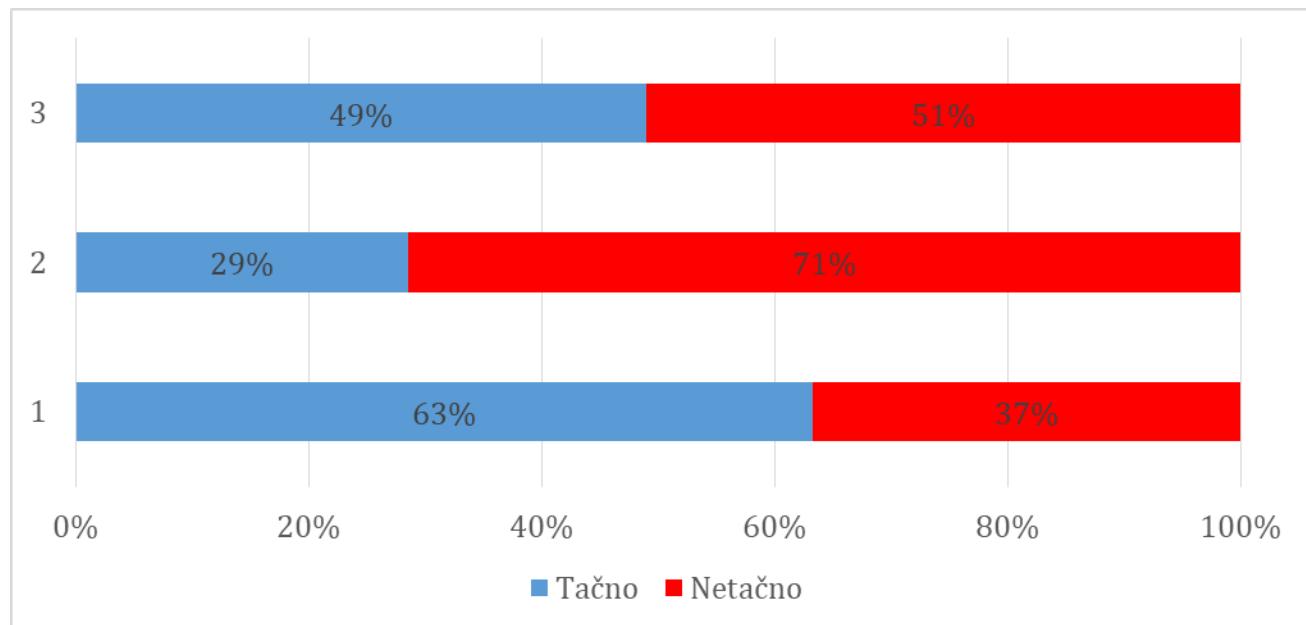
MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

3. $T \setminus O$

U nastavku rada predstavljen je tabelarni i grafički prikaz odgovora učenika prvog i drugog razreda srednje škole:

Razred	Odgovor	% tačnosti
I <i>n=10</i>	$f(x)$	50%
	$F \in p$	20%
	$T \setminus O$	30%
II <i>n=39</i>	$f(x)$	67%
	$F \in p$	31%
	$T \setminus O$	54%

Tabela 3.4. Prikaz raspodele anketiranog uzorka prema tačnim odgovorima u trećem pitanju



Grafik 3.4. Prikaz raspodele tačnih i netačnih odgovora u okviru trećeg pitanja u anketi (na celokupnom uzorku)

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Analiziranjem odgovora u okviru trećeg pitanja može se zaključiti da je dato pitanje do sada najteže uzimajući u obzir distribuciju tačnih odgovora. Očigledno je da i u prvom i u drugom razredu odnos tačke i prave ima problematično razumevanje kod učenika. Dodatno, u okviru prvog razreda, ni jedan izraz nema iznad 50% tačnosti što može dati jasan signal na nerazumevanje datih simbola.

Sa druge strane, najveća tačnost i u prvom i u drugom razredu dobijena je na prvom izrazu koji se odnosi na funkcije, ali ipak i dalje je veoma nizak procenat tačnih odgovora.

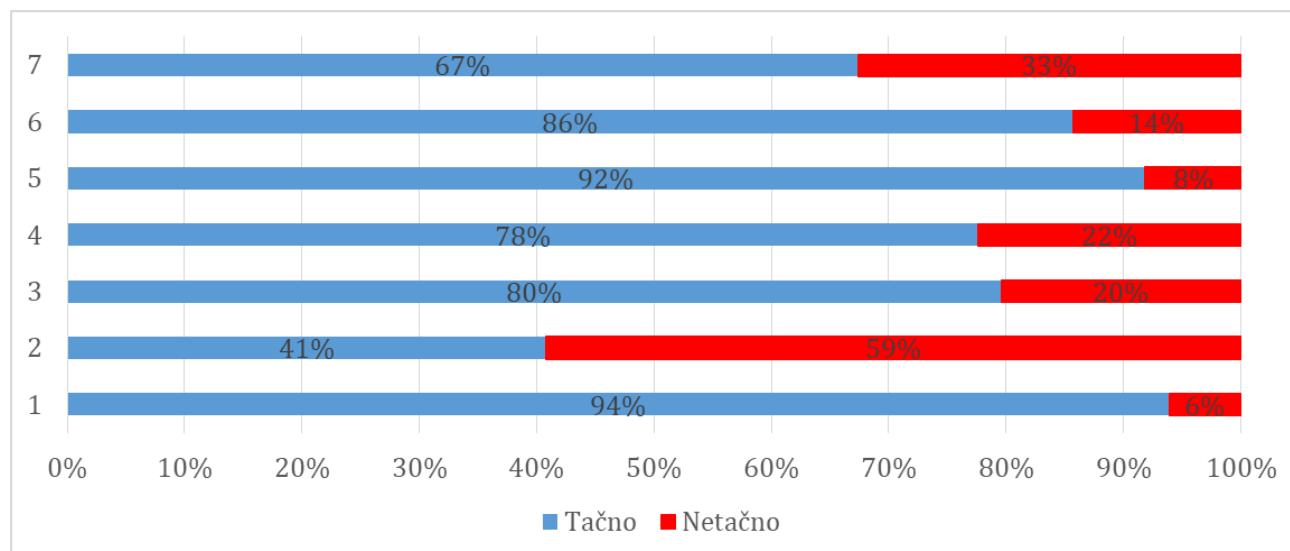
Četvrto pitanje

U okviru pretposlednjeg pitanja u anketi učenicima nisu dati primeri rešavanja. Pitanje je koncipirano na osnovu sedam izjava i ponuđenih odgovora. Učenici treba da od dva potencijalna odgovora (po izjavi) zaokruže tačnu grupu simbola koji predstavljaju datu izjavu. Sledi tabelarni i grafički prikaz odgovora učenika na četvrto pitanje iz ankete date u prilogu rada.

Razred	Odgovor	% tačnosti
I <i>n=10</i>	$ -10 $	80%
	$\Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$	40%
	'	80%
	$A \cap B$	70%
	5: 3: 1	90%
	$p \parallel q$	80%
	δ	50%
II <i>n=39</i>	$ -10 $	97%
	$\Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$	41%
	'	79%
	$A \cap B$	79%
	5: 3: 1	92%
	$p \parallel q$	87%
	δ	72%

Tabela 3.5. Prikaz raspodele anketiranog uzorka prema tačnim odgovorima u četvrtom pitanju

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI



Grafik 3.5. Prikaz raspodele tačnih i netačnih odgovora u okviru četvrtog pitanja u anketi (na celokupnom uzorku)

Analiziranjem odgovora u okviru pretposlednjeg pitanja iz ankete može se zaključiti da je dato pitanje do sada najbolje popunjeno uzimajući u obzir distribuciju tačnih odgovora. Sva pitanja su popunjena sa preko 50% tačnosti, osim pitanja koje se odnosi na simbol sličnosti dva trougla. Dakle, najmanja tačnost kod prethodno pomenutog pitanja potvrđuje činjenicu da je najveći broj učenika odgovorilo da im je geometrija najteža oblast matematike.

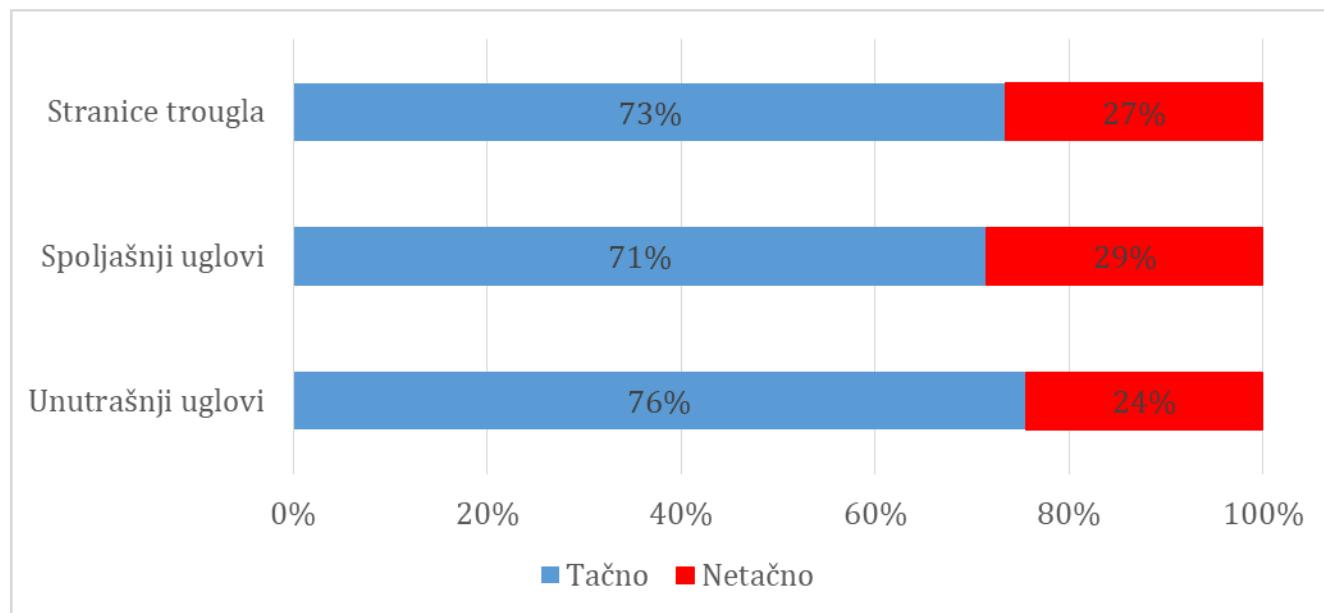
Peto pitanje

Poslednje ali ne i manje važno pitanje u anketi se odnosi na geometriju. Pitanje je koncipirano na osnovu slike na kojoj je predstavljen trougao sa unutrašnjim i spoljašnjim uglovima kao i sa obeleženim stranicama. Na osnovu date slike, učenici treba da svaki od simbola napišu njegovo značenje. Sledi tabelarni i grafički prikaz odgovora učenika na poslednje pitanje iz ankete date u prilogu rada.

Razred	Odgovor	% tačnosti
I <i>n=10</i>	Unutrašnji uglovi	60%
	Spoljašnji uglovi	70%
	Stranice trougla	70%
II <i>n=39</i>	Unutrašnji uglovi	79%
	Spoljašnji uglovi	72%
	Stranice trougla	74%

Tabela 3.6. Prikaz raspodele anketiranog uzorka prema tačnim odgovorima u četvrtom pitanju

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI



Grafik 3.6.Prikaz raspodele tačnih i netačnih odgovora u okviru petog pitanja u anketi (na celokupnom uzorku)

Analiziranjem odgovora u okviru poslednjeg pitanja iz ankete može se zaključiti da je dato pitanje do najbolje popunjeno uzimajući u obzir distribuciju tačnih odgovora. Sva pitanja su popunjena sa preko 60% tačnosti u okviru svakog razreda. Dodatno, posmatrajući kompletan anketiran uzorak, tačnost ide preko 70% po svakom pitanju. Visoka tačnost u obeležavanju uglova i stranica trougla može se objasniti čestom upotrebom istih u okviru svakog razreda, pa se konstantnim ponavljanjem datih simbola tačnost tumačenja povećava.

Na kraju rezultata istraživanja bitno je napomenuti da je prosek zaključnih ocena u prvom razredu 2,80, dok je prosek zaključnih ocena u drugom razredu 3,41. Dakle, prosek zaključnih ocena implicira bolje matematičko znanje učenika drugog razreda u odnosu na prvi. Sa druge strane, ukoliko se posmatra prosečan broj osvojenih poena na anketi po razredima, rezultati pokazuju da je prosek ostvarenih poena u okviru prvog razreda 14 bodova, dok prosečan broj ostvarenih poena na anketi u okviru drugog razreda iznosi 16,36. Očekivano, prosečan broj ostvarenih poena na anketi jeste pozitivno korelisan sa prosekom zaključne ocene prema razredima. Detaljan pregled zaključnih ocena i prosečno ostvarenih poena na anketi prema razredima dat je u tabeli ispod.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Zaključna ocena \ Razred	I	II
2	10.25	12.70
3	15.50	16.00
4	18.50	18.10
5		19.25
Ukupno	14.00	16.36

Tabela 3.7. Prikaz zaključnih ocena i prosečno osvojenih poena na anketi prema razredima

4. PREDLOG NASTAVNIH AKTIVNOSTI

Savremena metodika nastave matematike, osim vaspitne i naučne zasnovanosti, svrstava interaktivnost i individualizaciju u prioritetne uslove za kvalitetnu nastavu i učenje matematike. Navedeni uslovi za kvalitetnu nastavu veoma su složeni i teško dostižni, a realizuju se u najboljoj meri korišćenjem svih didaktičko-metodičkih resursa. U tom smislu, na profesorima je da dobrom i zanimljivom organizacijom časa više motivišu i podstaknu učenike na razmišljanje o upotrebi simbola tokom nastave matematike. Drugim rečima, decu treba na konkretnim primerima uveriti o koristi i primeni matematičkih simbola u rešavanju svakodnevne logičke problematike. Dodatno, treba osmišljavati zadatke iz praktičnog života dece i odraslih, stvarati nastavne situacije u kojima će učenici praktičnim aktivnostima uvideti potrebu poznавања, prepoznavanja i primene kako matematičkih zakonitosti tako i simbola. U kontekstu dobrog razumevanja i adekvatnog korišćenja matematičkih simbola u okviru ovog poglavlja biće predstavljen deo simbola korišćenih pri obračunu određenog izraza, a uz pomoć kalkulatora (digitrona) kao i uz pomoć softverskog paketa *Excel*.

Decimalni separator je simbol koji se koristi za razdvajanje celobrojnog od decimalnog dela broja. Različite zemlje imaju različite simbole za oznaku decimalnog separatora. Izbor simbola decimalnog separatora utiče na simbol separatora hiljada koji se koristi u grupisanju cifara. Najčešći decimalni separatori jesu decimalna tačka i decimalni zarez. Sa druge strane, 2003. godine definisani su trenutni standardi na 22. Generalnoj konferenciji za tegove i mere. Na toj konferenciji je utvrđeno da simbol za decimalni znak treba da bude tačka ili zarez, pri čemu je potvrđeno da se brojevi mogu podeliti u grupe od tri cifre kako bi se olakšalo čitanje, a da u razmacima formiranih grupa ne treba umetati ni tačku ni zarez. To konkretno znači da se na primer milion prema datim standardima može zapisati kao 1 000 000. Ova upotreba



je preporučena od strane tehničkih organizacija, kao što je Nacionalni institut za standarde i tehnologiju. Takođe, grupisanjem cifara pomoću razmaka dobijena je veća sloboda u odabiru simbola decimalnog separatora.

Većina računarskih operativnih sistema i softvera omogućuje izbor decimalnog separatora. Najčešće korišćeni softverski Microsoft-ov paket *Excel* daje mogućnost promene decimalnog separatora. Tako npr. ukoliko je Excel podešen tako da mu je decimalni separator tačka, to znači da simbol koji grupiše cifre pre pomenutog separatora jeste zarez. Ukoliko pak je korisniku alata Excel intutitivnije korišćenje zareza kao decimalnog separatora, korisnik lako može da promeni default-na

pre pomenutog separatora jeste zarez. Ukoliko pak je korisniku alata Excel intutitivnije korišćenje zareza kao decimalnog separatora, korisnik lako može da promeni default-na

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

podešavanja, te postavi zarez kao separator. U tom momentu, tačka postaje onaj simbol koji grupiše cifre pre decimalnog separatora. Pored decimalnog separatora postoji niz matematičkih simbola koji se koriste u softveru *Excel*, pri čemu se prikaz istih razlikuje od konvencionalnog zapisa (zapisu koji se koristi u redovnoj nastavi matematike). U okviru pomenutog softvera, za neke od simbola je neophodno koristiti i ugrađene funkcije kako bi se određeni izraz obračunao (određeni simbol upotrebio). U narednoj tabeli dat je pregled pojedinih simbola koji se koriste u nastavi matematike a koje je moguće predstaviti:

1. putem određene funkcije ili
2. drugačijom simbolikom u softveru Excel.

Značenje	Konvencionalan simbol	Softverski paket Excel	
		Simbol	Funkcija
manje ili jednako	\leq	\leq	
veće ili jednako	\geq	\geq	
različito (nije jednako)	\neq	\neq	
množenje	\cdot	*	
deljenje	:	/	
aposlutna vrednost broja	$ a $		$abs(a)$
kvadratni koren	\sqrt{a}		$sqrt(a)$
steponovanje	a^n	a^n	$power(a, n)$
broj Pi	π		$PI()$
tačno	T		$true$
netačno	⊥		$false$
medijana	M_e		$median(niz)$

Tabela 4.1. Predstavljanje određenih matematičkih simbola u softverskom paketu Excel

Očigledno, postoji razlika između standardne upotrebe matematičkih simbola u nastavi i njihove upotrebe putem softverskog paketa *Excel*. Dodatno, pri upotrebi ovog softvera, neophodno je da nastavnik objasni specifičnosti upotrebe istog. Na primer, simbol " \geq " se u *Excel-u* zapisuje kao " \geq " pri čemu je redosled predstavljenih simbola veoma bitan. Ukoliko bi učenik napisao dati simbol kao " $=>$ ", u datom softveru bi se pojavila greška.

Sa druge strane, postoje i određeni simboli kod kojih je zapis u *Excel-u* i nastavi isti. Neki od takvih simbola su dati u tabeli ispod.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Značenje	Konvencionalan simbol = prikaz u Excel-u
sabiranje	+
oduzimanje	-
jednako	=
manje	<
veće	>

Tabela 4.2. Predstavljanje određenih matematičkih simbola u softverskom paketu Excel



Pored Excel-a, kalkulator je jedan od najčešće korišćenih uređaja za računske operacije. I kalkulatori imaju različite decimalne separatore. U tom kontekstu veoma je bitno napomenuti učenicima da postoje postoje kalkulatori koji koriste tačku, ali i zarez, kao decimalni separator. Tokom pripreme časa, nastavnik bi trebao da poseduje dva kalkulatora (sa decimalnim separatorom tačke i zareza) na kojima bi eksperimentalno pokazao učenicima formalno različit zapis, ali suštinski jednakog i istog decimalnog broja. Drugim rečima, ukoliko se recimo radi o broju π , nastavnik na jednom kalkulatoru ga prikazuje kao 3.14, dok je na drugom njegov prikaz 3,14. Dakle, dve forme, isto značenje. Neke od zemalja koje koriste decimalan zarez kao separator jesu Srbija, Francuska, Nemačka itd. Sa druge strane, neke od zemalja koje koriste decimalnu tačku kao separator jesu Indija, Izrael, Japan, Kina itd.

Pored decimalnog separatora, na kalkulatorima se često mogu uvideti i različiti simboli (u odnosu na konvencionalne) za operacije množenja i deljenja. Najčešći simbol koji predstavlja operaciju deljenja a nalazi se na tabli kalkulatora jeste \div , dok najčešći simbol koji predstavlja množenje jeste \times . Dakle, nastavnik bi trebao da objasni učenicima da ukoliko uoče ovakve simbole na kalkulatoru, nekom softveru ili u literaturi, da isti predstavljaju njima već poznate operacije množenja i deljenja.

Kako bi se upotpunio predlog nastavnih aktivnosti u nastavku rada su data tri zadatka koje bi nastavnik mogao dati učenicima. Naime, ideja je da se učenici jednog razreda podele u dve grupe koje će rešavati date zadatke i to na sledeći način:

1. grupa I rešava date zadatke upotrebom olovke i papira,
2. grupa II rešava date zadatke upotrebom softverskog paketa Excel.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Obzirom na enorman napredak u informaciono-tehnološkom sektoru, jačanje digitalne pismenosti je od velike važnosti. Sprovođenjem datih predloga nastavnik dodatno radi na međupredmetnoj kompetenciji, digitalnoj pismenosti i korišćenju informacionih tehnologija. Predlog zadataka koji bi nastavnici dali učenicima kao i njihovo rešenje su dati u nastavku.

Zadatak 1. Ako je: $a = -1,25$, b broj koji je suprotan broju a , c recipročna vrednost razlike $a - b$, izračunaj vrednost izraza $(2a + b) \cdot c + |a - c|$.

Zadatak 2. Izračunaj vrednost izraza:

$$\sqrt{169 - 25} \cdot \sqrt{\frac{(-3)^2}{16}}.$$

Zadatak 3. Izračunaj vrednost izraza:

$$1,1 + \frac{2,3 \cdot 1,8}{3,5 - 2,7}$$

Rešenje Zadatka 1.

Grupa I

Kako bi se dati zadatak rešio postupnom kalkulacijom (uz korišćenje olovke i papira), najpre je neophodno da učenik izračuna vrednost izraza b i c (a je dato po uslovu zadatka). Simboli koji se pojavljuju u ovom zadatku jesu: $+$; $-$; $| \quad |$; (\quad) ; \cdot .

Dakle:

$$a = -1,25$$

$$b = -a = -(-1,25) = 1,25$$

$$c = \frac{1}{a - b} = \frac{1}{-1,25 - 1,25} = \frac{1}{-2,5} = -\frac{1}{25} = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5} = -0,4$$

Tek nakon obračuna veličina b i c može se krenuti u postupak kalkulacije izraza:

$$\begin{aligned}(2a + b) \cdot c + |a - c| &= (2 \cdot (-1,25) + 1,25) \cdot (-0,4) + |-1,25 - (-0,4)| \\ &= (-2,50 + 1,25) \cdot (-0,4) + |-1,25 + 0,4|\end{aligned}$$

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

$$\begin{aligned} &= -1,25 \cdot (-0,4) + |-0,85| \\ &= 0,5 + 0,85 \\ &= 1,35 \end{aligned}$$

Grupa II

Kako bi se dati zadatak rešio kalkulacijom kroz softverski paket *Excel*, neophodno je da učenik izračuna vrednost izraza b i c (a je dato po uslovu zadatka). Svaki od izraza je neophodno upisati u posebnu ćeliju. Obzirom da se izraz b računa preko vrednosti a (drugim rečima b zavisi od a), nije neophodno unositi suprotnu vrednost broja a , već je potrebno pozvati se na ćeliju u kojoj je pomenuta vrednost upisana, u kombinaciji sa simbolom „ $-$ “. Simboli koji predstavljaju operacije sabiranja, oduzimanja i množenja imaju identičan prikaz u *Excel-u*, a apsolutne zagrade se u pomenutom paketu predstavljaju upotrebom funkcije „*abs*“, dok se razlomačka crta predstavlja simbolom „ $/$ “ . Dakle:

Izraz [odgovarajuća ćelija]	Vrednost [odgovarajuća ćelija]	Formula u <i>Excel-u</i>
a [A1]	$-1,25$ [B1]	Unosi se vrednost parametra a
b [A2]	$1,25$ [B2]	$b = -a = -B1$
c [A3]	$-0,4$ [B3]	$c = 1/(a - b) = 1/(B1 - B2)$
$(2a + b) \cdot c + a - c $ [A4]	$1,35$ [B4]	$\frac{(2 * a + b) * c + \text{abs}(a - c)}{(2 * B1 + B2) * B3 + \text{abs}(B1 - B3)}$

Rešenje Zadatka 2.

Grupa I

Kako bi se dati zadatak rešio postupnom kalkulacijom (uz korišćenje olovke i papira), neophodno je da učenik „prati“ izraz, tj. vodi računa o operacijama koje imaju prednost. Simboli koji se pojavljuju u ovom zadatku jesu: $-$; $-$; $\sqrt{}$. Dakle, postupak i rešenje koje bi učenici trebali da napišu jeste:

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

$$\sqrt{169 - 25} \cdot \sqrt{\frac{(-3)^2}{16}} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{\frac{9}{16}} = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9$$

Grupa II

Kako bi se dati zadatak rešio kalkulacijom kroz softverski paket *Excel*, najpre je neophodno da učenici primene adekvatne simbole i funkcije koje u datom paketu menjaju simbole koji se pojavljuju u zadatku. Dakle, za simbol "√" koristiće se funkcija „*sqrt*“, dok će se za kvadrat koristiti funkcija *power*. Sa druge strane, simbol „–“ se u *Excel*-u identično predstavlja, dok je operaciju množenja, tj. simbol „·“ neophodno zameniti sa simbolom „*“, a razlomačku crtu zamenjena simbolom „/“. Dakle, rešenje drugog zadatka je oblika:

$$\sqrt{169 - 25} \cdot \sqrt{\frac{(-3)^2}{16}} = \text{sqrt}(169 - 25) * \text{sqrt}(\text{power}(-3; 2)/16)$$

Rešenje Zadatka 3.

Grupa I

Kako bi se dati zadatak rešio postupnom kalkulacijom (uz korišćenje olovke i papira) neophodno je da učenik „prati“ izraz, tj. vodi računa o operacijama koje imaju prednost. Simboli koji prezentuju sabiranje, oduzimanje, množenje i razlomačku crtu pojavljuju se u datom zadatku. Dakle, detaljan postupak za izradu zadatka je:

$$1,1 + \frac{2,3 \cdot 1,8}{3,5 - 2,7} = 1,1 + \frac{4,14}{0,8} = 1,1 + 5,175 = 6,275$$

Grupa II

Kako bi se dati zadatak rešio kroz softverski paket *Excel*, najpre je neophodno da učenici primene adekvatne simbole koji se nalaze u datom izrazu. Međutim, bitno je napomenuti da u ovom primeru treba primeniti i dodatne simbole. Naime, za očekivati je da učenici najčešće prave greške prilikom predstavljanja drugog dela izraza tj. razlomka. Dati izraz učenici najčešće unose u program na sledeći način:

$$1,1 + \frac{2,3 \cdot 1,8}{3,5 - 2,7} \neq 1,1 + 2,3 * 1,8 / 3,5 - 2,7$$

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Obzirom da u zadatku nisu eksplisitno navedene zagrade kod imenioca i broioca, neophodno je iste uvesti pri rešavanju u pomenutom softveru. Dakle, tačno rešenje ovog zadatka u *Excel*-u je:

$$1,1 + \frac{2,3 \cdot 1,8}{3,5 - 2,7} = 1,1 + (2,3 * 1,8) / (3,5 - 2,7)$$

ZAKLJUČAK

Matematika zauzima posebno mesto u sistemu nauka po tome što se ne bavi nijednom konkretnom materijom, već odnosima po sebi, apstrahovanom od materijalne podloge – da bi se ovoj vratila u fazi primene. Ranije shvatanje da je matematika nauka o prostornim oblicima realnog sveta i njihovim količinskim odnosima nepotpuno je, jer postoje mnoge matematičke discipline koje apstrakcijom prevazilaze tako definisan predmet. Međutim, i najapstraktnije matematičke teorije vremenom mogu da nađu svoje primene u praksi.

U matematici je prikazivanje apstraktnih matematičkih pojmove najvažnije. Matematički zapis simbola kakav danas poznajemo predstavlja koncizan i tačan oblik notacije koja je međunarodno priznata. Obzirom da je notacija matematičkih simbola precizna i dobro definisana, nastavnici matematike imaju tendenciju da je koriste svakodnevno. Sa druge strane, učenici često imaju problema sa upotrebotom simbola. Kao rezultat toga, neki učenici (pa i studenti) smatraju algebru i geometriju misterioznim poljima matematike. U skladu sa tim, glavni fokus rada jeste analiza uvođenja i upotrebe matematičkih simbola koji se danas koriste u nastavi u osnovnim školama kao i detaljno objašnjenje sa jedne strane njihovog značenja, a sa druge, mesta njihove upotrebe.

Rad se sastoji iz četiri poglavlja, od kojih prva dva predstavljaju teorijsku podlogu, odnosno istorijski razvoj matematičkih simbola, kao i njihova trenutna upotreba u osnovnim školama. U radu su navedeni svi simboli, sa njihovim značenjem, koji se upotrebljavaju u nastavi matematike od petog do osmog razreda. Dodatno, u ovim poglavlјima rada je predstavljena detaljna podela svih matematičkih simbola na sedam celina. Takođe, predstavljene su određene poteškoće sa kojima se učenici susreću u toku školovanja, a koje su vezane za upotrebu matematičkih simbola.

Preostala dva poglavlja se fokusiraju na praktično ispitivanje i predloge unapređenja nastave matematike. U empirijskoj analizi korišćena je anketa koja je sprovedena nad učenicima prvog i drugog razreda srednje škole. Uzorak se sastojao od 49 učenika. Dodatno, empirijska analiza sadrži pregled primenjene metodologije korišćene u anketiranju kao i detaljne rezultate istraživanja. Pokazana je pozitivna korelacija između zaključne ocene i broja ostvarenih poena u okviru ankete. Pored emirijskog istraživanja, rad sadrži i pojedine predloge unapređenja nastave matematike. U okviru tog poglavlja predstavljeni su različiti simboli koji imaju isto značenje. Dat je primer decimalnog separatora koji se u zavisnosti od države različito obeležava (tačka/zarez). Sa druge strane, fokus ovog poglavlja je bio predstavljanje upotrebe određenih simobla u softverskom paketu *Excel*. U tom smislu dati su primeri pojedinih matematičkih simbola koji se upotrebljavaju u osnovnoj školi i njihovo korišćenje kroz pomenuti softver. Takođe dati su primeri simbola koji se isto predstavljaju

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

kako u nastavi matematike tako i u softveru *Excel*, ali i primeri onih simbola koji imaju potpuno različito obeležavanje u pomenutom softveru u odnosu na konvencionalno predstavljanje istih.

LITERATURA

- [1.] Cajori F (1998). A History of Mathematical Notations, Two Volumes Bounded As One. *Dover Publications, INC. New York, USA.*
- [2.] Ikodinović, N., Dimitrijević, S. (2011). Matematika 6, udžbenik za šesti razred osnovne škole. *Klett, Beograd.*
- [3.] Ikodinović, N., Dimitrijević, S. (2011). Matematika 7, udžbenik za sedmi razred osnovne škole. *Klett, Beograd.*
- [4.] Ikodinović, N., Dimitrijević, S. (2011). Matematika 8, udžbenik za osmi razred osnovne škole. *Klett, Beograd.*
- [5.] Ikodinović, N., Dimitrijević, S., Milojević, S., Vulović, N. (2011). Matematika 5, udžbenik za peti razred osnovne škole. *Klett, Beograd.*
- [6.] Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST), 9(1), 1-21.*
- [7.] Obrazovni standardi za kraj obaveznog obrazovanja za nastavni predmet Matematika (2010), *Ministarstvo prosvete Republike Srbije, Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja, Beograd.*
- [8.] Quinnell, L., Merilyn, C (2012). Greek or not: The use of symbols and abbreviations in mathematics. *Australian Mathematics Teacher, 68(2), 34-40.*
- [9.] Stols, G. (2011). The importance of using and not using symbols in school mathematics. *ISTE International Conference on Mathematics, Science and Technology Education, Mopani Camp in Kruger National Park, Limpopo, South Africa, 255-264.*
- [10.] http://ceo.edu.rs/wp-content/uploads/publikacije/zavrsni/ZI-2021/2_Matematika/Testovi/1_Matematika%20na%20srpskom.pdf (15.07.2021)

PRILOZI

Anketa za učenike osmog razreda osnovne škole: provera znanja matematičkih simbola

Ime i prezime: _____

Razred: _____

Zaključna ocena: _____

- Zaokružite najtežu oblast iz matematike:
1. geometrija,
 2. brojevi i operacije sa njima,
 3. algebra i funkcije,
 4. merenje

1. Objasni simbole date u tabeli ispod:

Simbol	Značenje
+	sabiranje
U	
>	
\cong	
$\sqrt{}$	
%	
\emptyset	prazan skup

2. Zapiši simbolima pojmove date u tabeli ispod:

Značenje	Simbol
Broj a je za 3 veći od broja b	$a = 3 + b$
	$\alpha = 5 \cdot \beta$
	$k(O, 2\text{cm})$
	$(3x - 2)^2$
	y^7
	$t q$
Četiri cela i pet šestina	$4\frac{5}{6}$

3. Dopuni rečenice tako da one budu tačne:

- a) Funkcija f koja zavisi od promenljive x se označava simbolom:

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

b) Tačka F se nalazi na pravoj p se označava kao:

c) Razlika skupova T i O se označava kao:

4. Zaokruži tačan simbol koji odgovara datom iskazu:

Apsolutna vrednost broja -10

$[-10]$

$|-10|$

Sličnost trougla ABC i $A_1B_1C_1$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

$\Delta ABC \approx \Delta A_1B_1C_1$

Minut kao mera ugla

,

"

Presek skupova A i B

$A \cup B$

$A \cap B$

5 na prema 3 na prema 1

$5 : 3 : 1$

$5 : 3 : 1$

Paralelnost pravih p i q

$p \parallel q$

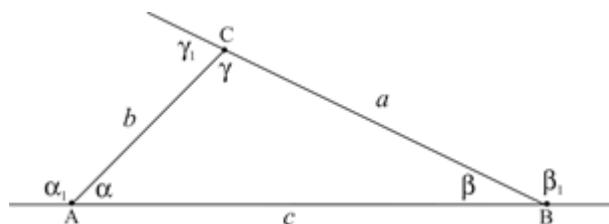
$p \perp q$

Ugao

α

α

5. Na slici koja je data ispod ispisati značenje svih simbola:



BIOGRAFIJA



Ljiljana Josipović, rođena je 4. juna 1994. godine u Lozniči. U istoimenom gradu je 2001. godine upisala Osnovnu školu „Vuk Karadžić“, koju završava 2009. godine gde je stekla Vukovu diplomu. Iste godine upisuje Gimnaziju „Vuk Kradžić“, društveno-jezički smer. Četiri godine kasnije, 2013. godine, nakon zavrešene srednje škole upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. Posle završenih ispita sa pomenutog smera prebacuje se na smer Master profesor matematike, gde završava ispite u septembru 2020. godine sa prosečnom ocenom 7,39 i time stiče uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, 2021.

Ljiljana Josipović

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: master rad
VR

Autor: Ljiljana Josipović
AU

Mentor: Prof. dr Zorana Lužanin
MN

Naslov rada: Matematički simboli u osnovnoj školi
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2021.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Mesto i adresa:

MA

Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

Fizički opis rada:

FOR

4/49/18/28/3/6/1

(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast:

NO

Matematika

Naučna disciplina:

ND

Metodika matematike

Predmetne odrednice, ključne reči:

PO, UDK

Simboli, osnovna škola, razvoj promenljive, nastava matematike, udžbenik matematike za osnovnu školu

Čuva se:

ČU

Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno – matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena:

VN

Fokus rada je analiza upotrebe matematičkih simbola koji se danas koriste u nastavi u osnovnim školama. U prvom delu rada je dat istorijski razvoj uvođenja matematičkih simbola, kao i osvrt na ulogu i značaj uvođenja simbola u matematiku. Drugi deo rada obuhvata detaljan pregled korišćenja matematičkih simbola u osnovnoj školi u Republici Srbiji. Treći deo rada obuhvatata emirijsko istraživanje u okviru kog će biti testirani učenici srednje škole. Poslednje poglavlje rada obuhvatata predlog unapređenja nastave matematike.

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN 06.05.2021.

veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,

Mentor: dr Zorana Lužanin, redovni profesor, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

Član; dr Mirjana Štrboja, vanredni profesor, Prirodno – matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

Monograph type

DT

Type of record:

Printed text

TR

Contents code:

Master's thesis

CC

Author:

Ljiljana Josipović

AU

Menthor:

Zorana Lužanin, Ph.D.

MN

Title:

Mathematical symbols in primary school

TI

Language of text:

Serbian (Latin)

LT

Language of abstract:

Serbian/English

LA

Country of publication:

Republic of Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2021.

PY

Publisher:

Author's reprint

PU

MATEMATIČKI SIMBOLI U OSNOVNOJ ŠKOLI

Publication place:	Novi Sad, Department of Mathematics and Infomatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
Physical description:	4/49/18/28/3/6/1 (chapters/pages/literature/tables/pictures/add. lists)
Science field:	Mathematics
Science discipline:	Teaching of Mathematics
Subject key word:	Symbols, primary school, variable development, mathematics teaching, mathematics textbook for primary school
Subject key word:	SKW
Holding data:	The library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
Holding data:	HD
Note:	The focus of the paper is the analysis of the using of mathematical symbols in teaching in primary schools. The first part of the paper gives the historical development of the introduction of mathematical symbols, as well as a review of the role and importance of the introduction of symbols in mathematics. The second part of the paper includes a detailed overview of the use of mathematical symbols in primary school in the Republic of Serbia. The third part of the paper includes empirical research, where high school students were tested. The last chapter of the paper includes a proposal for improving the teaching of mathematics.
Note:	N
Abstract:	
Abstract:	AB
Accepted by the Scientific Board on:	06.05.2021.
Accepted by the Scientific Board on:	AS
Defended:	
Defended:	DE
Thesis defended board:	President: Petar Đapić Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad, Mentor: Zorana Lužanin Ph.D., Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad. Member: Mirjana Štrboja Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad.
Thesis defended board:	DB