Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Dirihleov princip – obrada MTE-modelom nastave u osnovnoj školi

-master rad-

Mentor
Olga Bodroža-Pantić

Kandidat
Katarina Barišić

Novi Sad, 2021.

Sadržaj

Predgovor

U ovom master radu opisan je pokušaj da se jedan relativno novi model nastave nazvan MTE-model (Motivation-Teaching-Examination) implementira na časove obrade novog gradiva u okviru dodatne nastave.

Eksperiment, u okviru kojeg je sproveden predloženi model, je izveden u osnovnoj školi „Ivo Andrić“ u Beogradu, na temu „Dirihleov princip“, koja se obično obrađuje na časovima dodatne nastave i sproveden je u svim starijim razredima.

U radu je opisan predlog plana realizacije jednog ovakvog časa za sva četiri uzrasta posebno u specifičnim uslovima usled pandemije virusa COVID-19. Priloženi su testovi (M- i E-testovi) koji su korišćeni u realizaciji eksperimenta kao i rezultati i analiza postignuća učenika.

Zahvaljujem se profesorki dr Olgi Bodroži-Pantić na pomoći, razumevanju i strpljenju, kao i koleginici Ljiljani Rajčić na pomoći i podršci.

Takođe se zahvaljujem porodici, pre svega roditeljima i suprugu na razumevanju, strpljenju, pomoći i podršci tokom mog celokupnog studiranja.

1. Uvod

„U životu nema ništa lepše nego izučavati
i proučavati matematiku“
Poason[1]

Nastava kao složen i dinamičan proces, neprestano pokreće nova i zanimljiva pitanja. Zbog specifičnosti predmeta, nastava matematike zahteva od nastavnika dobro poznavanje metodike, kako se ne bi pretvorila u težak i neinteresantan predmet za većinu učenika, što je, nažalost, čest slučaj.

Zadatak i cilj nastave više nije u pukom memorisanju i reprodukovanju, već u shvatanju pojave i aktivnom učešću učenika. Glavni cilj nastave matematike ne sme biti kvantitet, već kvalitet dobijene informacije kao i razvoj pravilnog razmišljanja učenika. Najvažniji zadatak nastavnika matematike jeste da podstakne učenika da misli. Samo sticanje matematičke intuicije od velikog je značaja za dalji razvoj ličnosti. Stoga, u nastavi matematike treba što više koristiti rešavanje problemskih zadataka koji dopuštaju učeniku da samostalno istražuje, razvija logičko, stvaralačko i apstraktno mišljenje kao i da izgrađuje pozitivne osobine svoje ličnosti. Istraživači koji se bave motivacijom za učenje u oblasti školske matematike uglavnom ispituju odnos koji postoji između matematike kao socijalno izgrađenog polja i želje učenika za postizanjem uspeha.

Zadaci nastave matematike služe da učenici:

1. razviju logičko-apstraktno mišljenje
2. razviju sposobnost jasnog i preciznog izražavanja
3. razviju sposobnost određivanja i procene kvantitativnih veličina i njihovih odnosa
4. razlikuju geometrijske objekte i njihove uzajamne odnose i transformacije.

Jedan od najvažnijih faktora za učenje uopšte je motivacija. Motivacija je skup razloga koje pojedinac ima za određeno ponašanje u određenim situacijama. Motivi postoje kao deo nečijih ciljeva, ubeđenja u to šta je značajno i određuju da li će se neko upustiti u nešto ili ne.

Nastavnik je onaj koji u velikoj meri može podići motivaciju kod učenika. Polazeći od onoga što znaju, potom prolazeći kroz etape rešavanja zadataka i davanja odgovarajuće strategije učeniku, put do rešenja zadataka je zagarantovan, a njegova motivacija je veća. Učenicima koji vole ovaj pedmet, nastavnik treba da omogući da se detaljnije i dublje upoznaju sa lepotama matematike. Najčešće se to ostvaruje na časovima matematičke sekcije ili dodatne nastave. Ovakvi oblici nastave zahtevaju puno angažovanje, rad i trud,

[1] Siméon Denis Poisson (1781-1840), francuski matematičar

kako učenika tako i nastavnika. Formirani široki pogled na svet i svestrani razvitak ličnosti posledice su ulaganja u matematičko obrazovanje.

Postoje misaone operacije koje se tipično koriste u rešavanju zadataka. Zadatak možemo rešavati rastavljanjem i sastavljanjem njegovih elemenata, vraćanjem na definiciju nekih izraza, upotrebom pomoćnih izvora kao što su: specijalizacija, generalizacija i analogija.

Neke problemske zadatke je teško svrstati u određeni deo matematike, pa oni služe za razvijanje logičkog mišljenja. Pri njihovom rešavanju se najčešće mora dokazati postojanje objekata koji imaju određeno svojstvo.

U rešavanju različitih problema, naročito za dokazivanje postojanja objekata koji imaju neko svojstvo, često se primenjuje Dirihleov princip. Pomoću Dirihleovog principa možemo vrlo jednostavno rešiti zadatke iz različitih oblasti matematike, a i zadaci su često vrlo interesantni i mogu pomoći razvoju logičnog mišljenja.

U ovom radu Dirihleov princip je obrađen MTE-modelom nastave [5] u svim višim razredima osnovne škole. Iako je izostavljen na redovnim časovima nastave matematike i uglavnom se koristi za pripreme za takmičenja, želela sam da ispitam kako i u kojoj meri ga deca razumeju i prihvataju.

1.1. Dirihleov život i rad

Johan Peter Gustav Ležen Dirihle[2] je rođen 13. Februara 1805. godine na teritoriji današnje Nemačke u gradu Diren. Njegova porodica je iz grada Rihlet u Belgiji odakle i potiče njegovo prezime „Ležen Dirihle“. Otac mu je bio šef pošte u Direnu. Ček i pre nego što je pošao u Gimnaziju u Bonu, sa 12 godina, razvio je strast prema matematici i trošio je džeparac na kupovinu matematičkih knjiga. U Gimnaziji je važio za veoma pažljivog i lepo vaspitanog učenika koji se posebno bavio istorijom ali i matematikom.[3][32]

Nakon što je dve godine bio u Gimnaziji u Bonu, roditelji su odlučili da je bolje da pohađa jezuitski koledž u Kelnu. Tamo je učio od mnogih poznatih matematičara toga doba među kojima je bio i Džordž Om[4]. Do šesnaeste godine je Dirihle završio školu i bio spreman za upis na univerzitet. Pošto standardi nemačkih univerziteta u to vreme nisu bili visoki, Dirihle je odlučio da studira u Parizu. Nekoliko godina kasnije Dirihle će igrati ulogu u transformaciji nemačkih univerziteta na kojima će standardi biti jedni od najboljih u svetu.

Kažu da je Dirihle uz sebe uvek imao Gausovo delo „Dosquisitiones arithmeticae“. Maja 1822. godine u Parizu je oboleo od malih boginja ali ga to nije zadugo odvojilo od predavanja na Francuskom koledžu[5] i Fakultetu nauke[6]. Iskoristio je to što su mu nastavnici bili jedni od vodećih mateamtičara kao što su Furije[7], Laplas[8], Ležandr[9], Poason[10] i mnogi drugi.[34]

[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
[3] O Ore, Biogrephyin „Dictionary of Scientific Biography“, New York, 1970-1990.
[4] Georg Simon Ohm (1789-1854), nemački fizičar
[5] Collège de France
[6] Faeultè des Sciences
[7] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francuski matematičar
[8] Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749-1827), francuski matematičar
[9] Adrien-Marie Legendre (1752-1833), francuski matematičar
[10] Siméon Denis Poisson (1781-1840), francuski matematičar

Dirihleov prvi rad se ticao čuvene Fermaove[11] poslednje teoreme *(Ne postoje pozitivni celi brojevi* x, y, z *takvi da je* $x^n + y^n = z^n$*, gde je* n *prirodan broj veći od 2)*[35]. On je delimično dokazao slučaj za $n = 5$ i predstavio ga Pariskoj akademiji jula 1825. godine. Ležandr je taj dokaz završio i upotpunio. Kompletan dokaz je objavljen u septembru 1825. godine. Takođe, Dirihle je kasnije uspeo da dokaže i slučaj kada je $n = 14$.[35]

Krajem 1825. godine Dirihle odlučuje da se vrati u Nemačku da bi mogao da napreduje na univerzitetu. Univerzitet u Kelnu mu dodeljuje počasni doktorat i time mu omogućava da preda svoju hibilatacionu tezu o polinomima sa posebnom klasom osnovnih delitelja na univerzitetu u Vroclavu.

Od 1827. godine Dirihle je predavao u Vroclavu, ali je naišao na isti problem zbog kojeg je izabrao Pariz za svoje obrazovanje, tj. standardi na univerzitetu su bili niski. Preselio se u Berlin 1828. godine, gde je postavljen na Vojni koledž. Na Vojnom koledžu je imao dogovor da će moći da predaje i na Univerzitetu u Berlinu gde je ostao od 1828. do 1855. godine. Zadržao je položaj i na Vojnom koledžu što mu je dužnosti oko nastave i administracije učinilo znatno težim.

Dirihle je 1831. godine imenovan za Berlinsku akademiju. Iste godine se oženio Rebekom Anrijetom Mendelson Bartoldi, koja je bila unuka filozofa Mozesa Mendelsona, ćerka Abrahama Mendelsona Bartoldija i sestra kompozitora Feliksa Mendelsona Bartoldija i Fani Mendelson. Sa njom je imao dvoje dece Voltera (rođenog 1833. godine) i Floru (rođenu 1845. godine).[35]

Dirihleov glavni istraživački interes je bila teorija brojeva u kojoj je proizveo nekoliko bitnih rezultata i dokazujući ih uveo je set fundamentalnih alata. Pripisuje mu se moderna „formalna" definicija funkcije. 1837. godine je objavio Dirihleovu teoremu o aritmetičkoj progresiji, pri tome je koristeći koncepte matematičke analize da reši algebarski problem, kreirao granu analitičke teorije brojeva. Pri dokazivanju teoreme uveo je Dirihleove simbole u L-funkcije. U istom članku on je naglasio razliku između apsolutne i uslovne konvergencije reda. Takođe 1837. godine je predložio modernu definiciju funkcije, a 1838. i 1839. godine objavio je radove koji uvode Dirihleove serije i između ostalog određuju formulu za broj klase kvadratnih oblika. U mehanici je istraživao ravnotežu sistema i teoriju potencijala. Ova istraživanja je započeo 1839. godine radovima koji su davali metode za procenu višestrukih integrala, a on je to primenio na problem gravitacionog privlačenja elipsoida na tačkama i iznutra i spolja. Okrenuo se i Laplasovom problemu dokazivanja stabilnosti Sunčevog sistema i izgradio algoritam kojim je izbegnut problem korišćenja serijskog širenja uz zanemarivanje kvadratnih i viših članova. Ovaj rad ga je doveo do Dirihleovog problema koji se tiče harmonijskih funkcija sa datim graničnim uslovima. 1841. godine generalizovao je svoju teoremu analitičike progresije od celih brojeva do prstena celih brojeva $\mathbb{Z}[i]$.[7]

[11] Pierre de Fermat (1601-1665), francuski matematičar

Dirihleov veliki prijatelj Jakobi[12] je predavao u Kenigsbergu i njih dvojica su izvršili značajan uticaj jedan na drugog u svojim istraživanjima u teoriji brojeva. 1843. godine zajedno su putovali u Italiju i tamo proveli oko 18 meseci, gde su pristustvovali i matematičkom sastanku u Luki[13].

1852. godine Dirihle je proučavao problem sfere smeštene u nekompresibilnu tečnost. On je prvi tačno integrisao hidrodinamičke jednačine.[35]

Nakon Gausove[14] smrti 1855. godine, ponuđena mu je katedra u Getingenu, međutim nije odmah prihvatio ponudu. Pokušao je prvo da postigne bolje uslove za sebe u Berlinu, ali pošto nije bilo brzog odgovora na njegove skromne zahteve, prihvata Gausovo mesto. Nakon toga prusko Ministarstvo kulture pokušavalo je da mu ponudi poboljšane uslove i platu, ali ponuda je stigla prekasno.

U Getingenu Dirihle je imao više vremena za istraživanje i neke izuzetne studente istraživače. Dirihleovi najpoznatiji učenici su bili Ferdinand Ajzenštajn[15], Leopold Kroneker[16] i Rudolf Lipšic[17]. U leto 1858. godine držao je predavanje na konferenciji u Montreu[18], ali je za vreme boravka u Švajcarskoj doživeo srčani udar. Vratio se u Getingen i dok je bio teško bolestan doživeo je dodatnu tugu jer mu je supruga umrla od moždanog udara.

Dirihle je umro 5. maja 1859. Godine u Getingenu. Nakon njegove smrti, predavanja i ostale rezultate iz teorije brojeva skupio je, priredio i objavio njegov prijatelj i kolega matematičar Ričard Dedekin[19] (1863. godine) pod naslovom „Predavanje o teoriji brojeva”[20].

---

[12] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) , nemački i jevrejski matematičar
[13] Lucca, grad u Italiji
[14] Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855), nemački matematičar i naučnik
[15] Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852), nemački matematičar
[16] Leopold Kronecker (1823-1891), nemački matematičar
[17] R O S Lipschitz (1832-1903), nemački matematičar
[18] Montreux, grad u Švajcarskoj
[19] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1016), nemački matematičar
[20] Originalni naziv „Vorlesungen über Zahlentheorie“

1.2. Forme Dirihleovog principa

„Matematika je prava škola mišljenja“

Svima nam se dešavalo da nam se neki zadatak na prvi pogled učini besmislen. Posle kraćeg ili dužeg razmišljanja, odjednom nam sine ideja i ono što je na prvi pogled izgledalo besmisleno i nemoguće, postaje lepo i lako.

Veština rešavanja različitih zadataka i oštroumnost koja je za to potrebna, stiču se samo tokom duže prakse.

Primer 1 *„Ako sedam zečeva treba rasporediti u tri kaveza, tada se u nekom od tih kaveza nalaze makar tri zeca.“*

Način zaključivanja koji primenjujemo u prethodnom primeru poznat je pod nazivom Dirihleov princip. Osim tog u upotrebi je i šaljiv naziv „problem sedam zečeva“.

Dirihleov princip se često primenjuje u matematici kao efikasno sredstvo za dokazivanje postojanja objekata koji imaju traženu osobinu. Veština primenenjivanja ovog principa pri rešavanju zadataka svodi se na veštinu klasifikovanja posmatranih elemenata. Zanimljivo je da ovaj princip ima široku primenu u problemima koji, na prvi pogled, nemaju nikakve veze sa problemom zečeva i kaveza. Princip je primenljiv kako u aritmetici, tako i u geometriji i drugim oblastima matematike. Njegova primena se često sreće u takmičarskim zadacima za nivo učenika osnovnih i srednjih škola. U zadacima je, dakle, najvažnije prepoznati šta nam igra ulogu „zečeva“ a šta „kaveza“.

Dirihleov princip u svom nazivu sadrži reč „princip“ jer je tvrđenje toliko jednostavno da se često njegov dokaz ne izlaže. Ipak, mi to ovog puta činimo kako bismo istakli one delove koji su potrebni za pravilno razumevanje i usvajanje ovog principa kod učenika.

Popularna i najjednostavnija formulacija Dirihleovog principa glasi:

Tvrđenje 1 ***Ako se $n+1$ zečeva smešta u n kaveza, onda će bar dva zeca da se nađu u istom kavezu.***

Nešto drugačiji oblik:

Tvrđenje 2 ***Ako se m zečeva rasporedi u n kaveza i ako je $m > n$, tada će u bar jednom kavezu biti bar dva zeca.***

Dokaz Pretpostavimo suprotno da smo sve zečeve rasporedili u n kaveza i da pri tom ne postoji kavez koji sadrži bar dva zeca. Tada svaki od tih kaveza sadrži ili jednog zeca ili je prazan, pa je ukupan broj zečeva u svim kavezima,po principu zbira, najviše n. To je u kontradikciji sa pretpostavkom da je ukupan broj zečeva (m) veći od broja kaveza.■

Formalno gledano, tvrđenje 2 se može posmatrati kao preformulacija sledeće teoreme:

Tvrđenje 3 ***Ako su M i N konačni skupovi i $|M| > |N|$, onda ne postoji injektivno preslikavanje skupa M u skup N.***

Dokaz Neka je $|M| = m$, a $|N| = n$. Ako imamo m zečeva numerisanih brojevima 1, 2, ... , m u n kaveza numerisanih brojevima 1, 2, ... , n. Funkcijom $f: M \to N$, tako da je $f(i) = j$, ako je zec i smešten u kavez j, možemo predstaviti smeštanje zečeva u kaveze. Po Tvrđenju 2, ako je $m > n$, funkcija f ne može biti injekcija, jer postoje dve različite vrednosti i_1 i i_2 tako da je $f(i_1)= f(i_2)= j$, što znači da kutija j sadrži dva zeca i_1 i i_2.■

Sledeće tvrđenje je blago uopštenje osnovne verzije Dirihleovog principa:

Tvrđenje 4 ***Ako je u n kaveza smešteno $kn + 1$ zečeva, tada je u nekom kavezu smešten bar $k + 1$ zec.***

Dokaz Pretpostavimo suprotno. Neka u svakom kavezu ima najviše k zečeva. Tada zaključujemo da ukupan broj zečeva nije veći od $k + k + \cdots + k = kn$, a pretpostavka kaže da ih imamo $kn + 1$. Što nas dovodi do kontradikcije!■

Formalniji zapis uopštenog Dirihleovog principa:

Tvrđenje 5 ***Ako je S konačan skup kardinalnosti $|S| \geq nk + 1 (n, k \in \mathbb{N})$, tada u svakoj particiji (razbijanju) skupa S na n blokova postoji bar jedan blok sa bar $k + 1$ elemenata.***

Dokaz *Pretpostavimo suprotno: postoji paricija $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ skupa S ($S=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $B_i \cap B_j=\emptyset$, za sve $1 \leq i < j \leq n$)* za koju važi $(\forall i)$ $|B_i| \leq k$. Primenimo princip zbira:

$$nk + 1 \leq |S| = |B_1| + |B_2| + \dots + |B_n| \leq nk$$

što je kontradikcija. Zaključujemo da nije tačna pretpostavka, tj. da u svakoj particiji skupa S sa $\boldsymbol{n}$ blokova postoji bar jedan blok sa bar $k + 1$ elemenata.■

1.3. MTE model nastave

„Najbolji način da se nešto naučin jeste - da se samostalno otkrije“
D. Polja

S obzirom da je u današnje vreme sve manji broj dece motivisan da uči i istražuje, na nastavniku je da otkrije i istraži nove modele nastave koji mogu biti od koristi u nameri da na što bolji način približi nove sadržaje učenicima. Pošto učenici često imaju predrasude o matematici kao veoma teškoj i dosadnoj, a neretko je i ne vole, na nastavniku je još veći „pritisak“ da zadrži dečiju pažnju i zadobije njihovo interesovanje. Pogotovu je velika odgovornost nastavnika u osnovnim školama da kod dece razviju ljubav i interesovanje prema matematici kako oni ne bi osećali otpor i nailazili na veće poteškoće u savladavanju gradiva.

Implementiran u obradi zadate teme kojom se bavi ovaj rad MTE-model ima pre svega za cilj povećanje motivisanosti učenika. Ovaj model nastave je osmislila profesorka Olga Bodroža-Pantić (2005. godine) i prvi put je realizovan pu građevinskoj školi u Novom Sadu [5]. Kasnije je ovaj model primenjivan za obradu čitavog niza nastavnih jedinica kao što su: Određivanje površine i obima kruga i njegovih delova [12], Trigonometrijske funkcije oštrog ugla i Vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih oštrih uglova [6], Težište figure i sistema materijalnih tačaka [14],...

Ideja MTE-modela nastave je da se jedan školski čas podeli na tri dela tako da prvi deo predstavlja izradu motivacionog testa, takozvanog M-testa, u drugom deli nastavnik izlaže gradivo kroz rešavanje i objašnjavanje M-testa, dok se u trećem delu proverava nivo usvojenog znanja kroz izradu kontrolnog testa, tj. E-testa.

Prvi test (M-test) ima motivišući karakter. Ovaj test se radi oko 10 minuta (ukoliko se radi o jednom školskom času) i ima za cilj da se učenici sami podsete poznatih pojmova i tvrđenja vezanih za temu koja se obrađuje. Takođe, ima za cilj i da se učenici zainteresuju za temu. Uvodni test bi trebao da sadrži tri ili četiri zadatka različite težine.

U drugom delu časa, koji bi trebalo da traje oko 15 minuta, nastavnik radi zadatke iz M-testa, objašnjava ih i uvodi nove pojmove i oznake. Takođe, diskutuje sa učenicima i razrešava nejasnoće, ukoliko ih ima.

Treći deo časa je predviđen za proveru usvojenog znanja, traje oko 15 minuta i realizuje se pomoću E-testa. Zadaci iz E-testa podsećaju na zadatke iz M-testa. Na njemu učenici rešavaju nešto teže zadatke nego na prvom testu, ali su tokom prva dva dela časa upućeni na koji način da razmišljaju i koji su koraci za rešavanje takvog tipa zadataka.

2. Primene Dirihleovog principa

2.1. Komplikovanija tvrđenjima

Dirihleov princip se može primenjivati prilikom rešavanja zadataka iz različitih oblasti matematike kao što su kombinatorika, geometrija, teorija brojeva, algebra... Navešćemo neke od teorema u čijim dokazima koristimo Dirihleov princip:

Sa $\mathrm{S}^1 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 1\}$ je definisana jedinična kružnica u ravni.

<u>Teorema1</u> [9] ***Neka je*** α ***neki realan broj takav da*** $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$***. Dalje, neka je*** $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{S}^1 \to \boldsymbol{S}^1$ ***rotacija za ugao*** α ***i neka je P proizvoljna tačka na kružnici*** $\boldsymbol{S}^1$. ***Tada, za svaku tačku*** $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{S}^1$ ***i za svako*** $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ ***postoji prirodan broj*** $\mathbf{m}$ ***takav da je dužina luka*** $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{P})}$ ***manja od*** $\boldsymbol{\varepsilon}$.

<u>Dokaz</u> Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $\frac{2\pi}{n} < \varepsilon$. Za taj proizvoljan broj n podelimo kružnicu S^1 na n podudarnih poluotvorenih lukova tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

Posmatrajmo skup $Z = \{f^k(P) : k \in \mathbb{N}\}$. Kako je $\frac{\alpha}{2\pi}$ iracionalan broj, sve tačke iz skupa Z su različite. Zato, po Dirihleovom principu (svakoj tački skupa Z je pridružen jednoznačno određen luk, broj tačaka skupa Z je neograničen a broj lukova je konačan), postoje $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$, takvi da su $f^i(P)$ i $f^j(P)$ unutar istog luka. Drugim rečima, dužina luka između $f^i(P)$ i $f^j(P)$ je manja od $\frac{2\pi}{n}$.

Neka je $d = |i - j|$. Susedne tačke u nizu $P, f^d(P), f^{2d}(P)$, ... su udaljene (po luku) manje od $\frac{2\pi}{n} < \varepsilon$. Stoga će i tačka A upasti u neki luk određen susednim tačkama u nizu odakle sledi tvrđenje teoreme.■

Pored problema u kojima se Dirihleov princip neprimetno koristi (često i ne naglašava njegova primena), postoje i komplikovanija tvrđenja gde ovaj princip igra ključnu ulogu. Jedna od takvih je i teorema Erdeš[21]-Sekereš[22]:

<u>Teorema 2</u> [9]**(Erdeš-Sekereš)** ***Svaki niz od*** $\mathbf{mn+1}$ ***različitih realnih brojeva sadrži rastući podniz dužine bar*** $\mathbf{m+1}$ ***ili opadajući podniz dužine bar*** $\mathbf{n+1}$***.***

[21] Paul Erdös (1913-1996), mađarski matematičar
[22] George Szeheres (1911-2005), mađarski matematičar

Dokaz Pretpostavimo suprotno.Tada postoji niz $a_1, a_2, \dots, a_{mn}, a_{mn+1}$ različitih realnih brojeva takvih da je $l_i^+ \in \{1, 2, \dots, m\}$ i $l_i^- \in \{1, 2, \dots, n\}$ za sve $i \in \{1, 2, \dots, mn + 1\}$ gde je:

l_i^+ dužina najdužeg rastućeg podniza u onom nizu koji počinje sa a_i,

l_i^- dužina najdužeg opadajućeg podniza u onom nizu koji počinje sa a_i.

Neka je $f: \{a_1, a_2, \dots, a_{mn}, a_{mn+1}\} \to \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ definisana sa

$$f(a_i) = (l_i^-, l_i^+)$$

Na osnovu Dirihleovog principa (Tvrđenje 3) funkcija f nije „1-1“, pa sledi da

$$(\exists i)(\exists j)(f(a_i) = f(a_j) \wedge i < j) \qquad (1)$$

(dva originala imaju istu sliku).

Kako je $a_i \neq a_j$ imamo dva slučaja:

1° ako je $a_i < a_j$ sledi da je $l_i^+ > l_j^+$ a odatle sledi da je

$$f(a_i) = (l_i^-, l_i^+) \neq (l_j^-, l_j^+) = f(a_j)$$

2° ako je $a_i > a_j$ sledi da je $l_i^- > l_j^-$ a odatle sledi da je

$$f(a_i) = (l_i^-, l_i^+) \neq (l_j^-, l_j^+) = f(a_j)$$

U oba slučaja dobijamo da je $f(a_i) \neq f(a_j)$ što je u kontradikciji sa (1).■

Dirihleov princip možemo primeniti i na važan deo kombinatorike, Remzijevu[23] teoriju. Ova teorija se bavi prebrojavanjem podskupova sa specijalnim svojstvima u datom skupu. Osnovnu ideju možemo ilustrovati primerom koji se često pojavljuje i kao zadatak na matematičkim takmičenjima:

Primer 2 ***Dokazati da u grupi od 6 ljudi važi bar jedno od sledeće dva tvrđenja:***
a) postoje tri čoveka tako da se svaka dva poznaju
b) postoje tri čoveka tako da se nikoja dva među njima ne poznaju
Da li to mora da važi i za grupu od 5 ljudi?

Sledeće slično tvrđenja u grafovskoj interpretaciji koristi uopšteni Dirihleov princip.

[23] F P Ramsey (1093-1930), engleski matematičar

Primer 3 [28] **Grane kompletnog grafa koje imaju $a_n = n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)+1$ čvorova ofarbane su sa n boja. Dokazati da u tom grafu postoji jednobojni trougao.**

Dokaz Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom po n. Baza indukcije se lako proverava. Stoga pretpostavimo da je tvrđenje tačno za prirodan broj n i dokažimo da isto važi i za $n+1$.
Dakle, izaberimo proizvoljan čvor v od posmatranih

$$a_{n+1} = (n+1)!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)+1 = (n+1)(\,a_n-1)+1+1$$

čvorova. Grupišimo preostale čvorove (njih $(n+1)(\,a_n-1)+1$) prema boji grane (njih n+1) koja ih spaja sa izabranim čvorom. Sada, na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da postoji boja b sa bar $(\,a_n-1)+1 = a_n$ čvorova koji su sa uočenim čvorom v povezani tom bojom b. Posmatrajmo podgraf indukovan tim čvorovima. Ako u njemu postoji grana boje b, tada krajnji čvorovi te grane, zajedno sa uočenim čvorom v odredjuju temena istobojnog trougla sa granama boje b. Ako, pak, u tom indukovanom podgrafu ne postoji boja b , tada su sve grane tog indukovanog podgrafa (sa bar a_n čvorova) obojene sa najviše n boja. Tada, na osnovu induktivne pretpostavke postoji bar jedan istobojni trougao, što je i trebalo da se dokaže. ■

Sledeći primeri ilustruju primenu Dirihleovog principa u nekim složenijim zadacima.

Primer 4 [28] **Jedan matematičar je u toku tri meseca svaki dan rešio barem jedan zadatak, ali ne postoji sedmica tokom koje je uradio više od 12 zadataka. Dokazati da se u tom periodu može naći nekoliko uzastopnih dana u toku kojih je on rešio tačno 20 zadataka.**

Rešenje Dovoljno je posmatrati prvih 11 nedelja, tj. prvih 77 dana. Označimo sa S_i broj zadataka koji je rešio u toku prvih i dana $(1 \le i \le 77)$.

Kako je svakoga dana rešio bar jedan zadatak, to je niz vrednosti $S_1, S_2, \dots, S_{77}$ strogo monotono rastući, tj. svaka dva elementa niza $S_1, S_2, \dots, S_{77}$ su međusobno različita, a takođe i svaka dva elementa niza $S_1+20, S_2+20, \dots, S_{77}+20$ su međusobno različita. Takođe imamo $S_{77} \le 12 \cdot 11 = 132$, odnosno $S_{77}+20 \le 152$. Svakoj od navedenih 154 oznaka: $S_1, S_2, \dots, S_{77},\ S_1+20, S_2+20, \dots, S_{77}+20$ (zečeva) pridružujemo jednu vrednost (kavez) iz skupa $\{1,2,,\dots,152\}$. Kako je broj oznaka veći od broja elemenata skupa njima pridruženih vrednosti, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoje dve oznake različitog tipa (zbog monotonosti dva niza) S_i i S_j+20 $(1 \le j < i \le 77)$ za koje važi $S_i = S_j + 20$. Otuda zaključujemo da se može naći period od nekoliko uzastopnih dana (od (j+1)og do i-tog dana) tokom kojih je matematičar rešio tačno 20 zadataka.■

Primer 5 [28] **Učenik rešava zadatke u periodu od 5 nedelja. Tokom njih on svakoga dana reši bar jedan zadatak, ali ne više od 10 nedeljno. Dokazati da je tokom nekih uzastopnih dana**

a) rešio tačno 20 zadataka,
b) rešio tačno $\boldsymbol{n}$ zadataka gde je $\mathbf{21 \leq n \leq 26}$.

Rešenje a) Slično kao u prethodnom primeru važi da su svaka dva elementa niza $S_1, S_2, \dots, S_{35}$ međusovno različita (S_i označava broj zadataka koji je rešio u toku prvih i dana, $1 \leq i \leq 35$). Isto važi i za niz $S_1 + 20, S_2 + 20, \dots, S_{35} + 20$. Svakoj oznaci $S_1, S_2, \dots, S_{35}$, $S_1 + 20, S_2 + 20, \dots, S_{35} + 20$ pridružujemo broj iz skupa {1, 2, ... , 70}. Kako je u ovom slučaju i broj oznaka (zečeva) i broj pridruženih vrednosti (kaveza) isti, ne možemo (za sad) primeniti Dirihleov princip da bismo zaključili da postoje dve oznake članova različitih nizova kojima je pridružena ista vrednost! Stoga prelazimo na analizu po slučajevima:

I slučaj:

Postoji indeks i, $(1 \leq i \leq 35)$ takav da je S_i=20. Ovim je dokazano tvrđenje.

II slučaj:

Svim oznakama $S_1, S_2, \dots, S_{35}$, $S_1 + 20, S_2 + 20, \dots, S_{35} + 20$ su pridruženi brojevi iz skupa {1, 2, ... , 70}\{20}. Kako je broj oznaka (70) veći od broja njima pridruženih vrednosti (69) na osnovu Dirihleovog principa dobijamo jednakost pridruženih vrednosti za dve oznake, tj. $S_i = S_j + 20, (1 \leq j < i \leq 35)$ te zaključujemo da je učenik tokom nekih uzastopnih dana rešio tačno 20 zadataka.

b) U ovom slučaju ne možemo primeniti ideju iz rešenja pod a). Naime, oznaka (zečeva) bismo imali i dalje 70 ($S_1, S_2, \dots, S_{35}$, $S_1 + n, S_2 + n, \dots, S_{35} + n$) ali bi skup pridruženih vrednosti (kaveza) brojao $50 + n - 1 > 69$ vrednosti, te ne bismo mogli da primenimo Dirihleov princip (za sad)! No, poslužićemo se novom idejom. Obzirom da želimo da pokažemo jednakost dva člana raličitih nizova, primetimo da jedan od tih članova sigurno ne može biti među poslednjim članovima drugog niza. (Naime, svi članovi $S_{30} + n, S_{31} + n, \dots, S_{35} + n$ su veći ili jednaki broju 30+21=51, a najveći elemenat prvog niza je $S_{35} \leq 50$.) Stoga ćemo smanjiti broj posmatranih „zečeva“ tako da nam se broj „kaveza“ još više smanji. Dakle, posmatrajmo oznake $S_1, S_2, \dots, S_{35}$, $S_1 + n, S_2 + n, \dots, S_{21} + n$. Pretpostavimo da među prvih 35 oznaka nemamo pridružen broj n (u suprotnom, zadatak je rešen). Broj tih oznaka iznosi 56 a pridruženi skup vrednosti je {1, 2, ... , 30+26}\{n} kardinalnosti 55. Stoga na osnovu Dirihleovog principa imamo jednakost dva člana različitih nizova, odakle sledi da postoji niz uzastopnih dana za koje je učenik rešio tačno n zadataka. ■

Zadaci za osnovce čije rešavanje zahteva korišćenje Dirihleovog principa

Priloženi spisak zadataka sadrži takmičarske zadatke i zadatke iz zbirki u čijem rešavanju se primenjuje Dirihleov princip. Oni su poslužili kao osnova za izradu zadataka M- i E- testa.

1. **Može li se tvrditi da u odeljenju sa više od 32 učenika postoje bar dva učenika čija prezimena počinju istim slovom?** [17]

   <u>*Rešenje*</u> Neka slova azbuke igraju ulogu „kaveza“, a učenici „zečeva“. Kako je slova azbuke 30, a to je manje od 32 (broja učenika), to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoje bar dva učenika čija prezimena počinju istim slovom.■

2. **U jednoj školi ima 800 učenika. Dokazati da bar tri učenika imaju rođendan istog datuma.** (Opštinsko takmičenje 2007, 6. razred) [4]

   <u>*Rešenje*</u> Rasporedimo 800 učenika u 366 grupa (maksimalni broj dana u godini), pri čemu istoj grupi pripadaju oni učenici koji slave rođendan istog datuma. Kako je $800 = 366 \cdot 2 + 68$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da bar jedna grupa sadrži bar 3 učenika, tj. oni imaju rođendan istog datuma.■

3. **U jednoj školi uči 1100 učenika. Dokazati da u toj školi postoje bar dva učenika koji imaju identične inicijale.** [16]

   <u>*Rešenje*</u> Broj svih mogućih različitih kombinacija za niz od dva slova slova je $30 \cdot 30 = 900$. Kako je $900 < 1100$, to na osnovu Dirihleovg principa zaključujemo da u školi postoje bar dva učenika koja imaju identične inicijale.■

4. **Ako sedam zečeva treba smestiti u tri kaveza, onda mora postojati kavez u koji će biti smeštena bar tri zeca.** [21]

   <u>*Rešenje*</u> Kako je $7 = 3 \cdot 2 + 1$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da postoji kavez u koji će biti smeštena bar tri zeca.■

5. **U kutiji se nalaze olovke dve različite boje: crvene i plave. Koliko najmanje olovki treba uzeti iz kutije ne gledajući, da bi među njima sigurno bile dve olovke iste boje?** [2]

   <u>*Rešenje*</u> Ukoliko bi uzeli npr. dve olovke, moglo bi se desiti da obe budu različite boje. Prema tome, moramo uzeti bar tri olovke. Ako uzmemo $3 = 1 \cdot 2 + 1$ olovke, na osnovu

uopštenog Dirihleovog principa dobijamo da su bar dve olovke iste boje. Dakle, zaključujemo da je tri najmanji broj olovaka koje treba uzeti da bi ispunili uslov zadatka.■

6. **Da li se kvadratna tabela 3×3 može popuniti brojevima 1, 2 i 3 tako da zbir brojeva u svakoj koloni, vrsti i dijagonali bude različit?** [2]

   Rešenje Imamo 7 različitih vrednosti sve moguće vrednosti zbira tri broja iz skupa {1, 2, 3}: 1+1+1=3, 1+1+2=4, 1+2+2=5, 2+2+2=6, 2+2+3=7, 2+3+3=8, 3+3+=9. Kako je ukupan broj kolona, vrsta i dijagonala u tabeli 3+3+2=8, tj. veći od broja različitih njima pridruženih zbirova, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da je nemoguće upisati brojeve iz skupa {1, 2, 3} na traženi način.■

7. **Da li se u kvadrat 3×3 mogu upisati brojevi iz skupa {-1, 0, 1} tako da zbirovi brojeva po kolonama, vrstama i dijagonalama budu različiti (svaka dva)?** (Opštinsko takmičenje 2009, 6. razred) [4]

   Rešenje Imamo 7 različitih vrednosti sve moguće vrednosti zbira tri broja iz skupa {-1, 0, 1}: (-1)+(-1)+(-1)=-3, -1+(-1)+0=-2, -1+0+0=-1, 0+0+0=0, 0+0+1=1, 0+1+1=2, 1+1+1=3. Kako je ukupan broj kolona, vrsta i dijagonala u tabeli 3+3+2=8, tj. veći od broja različitih njima pridruženih zbirova, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da je nemoguće upisati brojeve iz skupa {-1, 0, 1} na traženi način.■

8. **Tablica 5×5 popunjena je na proizvoljan način brojevima iz skupa {-1, 0, 1}. Posmatraju se svi zbirovi tih brojeva po vrstama, kolonama i obe dijagonale tablice. Dokazati da među njima bar dva moraju biti jednaka.** (Opštinsko takmičenje 2006, 6. razred) [4]

   Rešenje Ispitujemo sve moguće vrednosti zbira pet sabiraka iz skupa {-1, 0, 1}: (-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-5, (-1)+(-1)+(-1)+(-1)+0=-4, -1+(-1)+(-1)+0+0=-3, . . . , 1+1+1+1+1=5. Vidimo da je moguće dobiti 11 različitih zbirova. Kako ukupan broj vrsta, kolona i dijagonala u tablici iznosi 5+5+2=12, a $11 < 12$, to na osnovu Drihleovog principa bar dva zbira moraju biti jednaka.■

9. **U odeljenju ima 30 učenika. Na pismenom iz matematike neki od učenika su napravili 8 grešaka, a ostali manje. Dokazati da u odeljenju postoje bar četiri učenika koji su napravili jednak broj grešaka na pismenom.** [21]

   Rešenje Broj mogućih grešaka koji su učenici napravili je iz skupa {8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0}. Kako je $30 = 9 \cdot 3 + 3$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da postoje barem četiri učenika koja su napravila jednak broj grešaka.■

10. **Dokaži da se od proizvoljih 6 celih brojeva uvek mogu izabrati dva čija je razlika deljiva sa 5.** [2]

Rešenje Mogući ostaci pri deljenju nekog celog broja brojem 5 su iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Na osnovu toga sve cele brojeve možemo rasporediti u 5 klasa prema ostatku. Kako je broj klasa (5) manji od 6, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da se bar dva cela broja nalaze u istoj klasi, pa je onda njihova razlika deljiva sa 5.■

11. **Dokaži da među 100 proizvoljnih prirodnih brojeva postoji bar 34 broja koja pri deljenju sa 3 imaju isti ostatak.** [2]

    Rešenje Mogući ostaci pri deljenju prirodnih brojeva brojem 3 su iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Na osnovu toga brojeve možemo rasporediti u 3 klase. Kako je $100 = 33 \cdot 3 + 1$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da postoji bar 34 broja koja pri deljenju sa 3 imaju isti ostatak.■

12. **Dato je 8 parnih brojeva. Dokaži da među njima postoje dva čija je razlika deljiva sa 14.** [3]

    Rešenje Broj je deljiv sa 14 ukoliko je deljiv sa 2 i 7. Kako su svih 8 brojeva parni, onda su oni deljivi sa 2, pa je i razlika svaka dva među njima deljiva sa 2. Pri deljenju sa 7 mogući ostaci su iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Na osnovu toga naših 8 brojeva možemo smestiti u 7 klasa. Kako je $7 < 8$, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da se bar dva od ovih osam brojeva nalazi u istoj klasi te je i njihova razlika deljiva sa 7.■

13. **Dokazati da od 100 celih brojeva možemo izabrati 15 takvih da je razlika svaka dva deljiva sa 7.** [23]

    Rešenje 100 celih brojeva rasporedimo u 7 klasa na osnovu ostatka koji dobijamo pri deljenju sa brojem 7. Kako je $100 = 14 \cdot 7 + 2$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da postoji bar 15 brojeva koji imaju isti ostatak pri deljenju sa 7, tj. njihova razlika je deljiva sa 7.■

14. **U kvadrat stranice 44 *cm* raspoređeno je 2013 tačaka. Dokaži da postoji kvadrat stranice 1 *cm* u kome su bar dve tačke.** (Opštinsko takmičenje 2013, 6. razred)[26][33]

    Rešenje Kvadrat stranice 44 *cm* ima površinu $44 \cdot 44 = 1936\ cm^2$. Podelimo ga na 1936 manjih kvadrata. Kako je broj raspoređenih tačaka veći od broja kvadrata, to na osnovu Dirihleovog principa sledi tvrđenje zadatka.■

15. **U kvadrat stranice 5 *cm* na proizvoljan način razmeštene su 52 tačke. Da li se može konstruisati kvadrat stranice 1cm^2 unutar koga se nalaze bar tri tačke**? [2]

    Rešenje Podelimo kvadrat na 25 malih kvadrata stranice 1 *cm*. Kako je $52 = 25 \cdot 2 + 2$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da postoji kvadrat unutar koga se nalaze bar tri tačke.■

16. **U pravougaoniku čije su stranice dužine 22 cm i 26 cm na slučajan način se biraju 144 tačke. Dokaži da pri ma kakvom izboru tih tačaka postoje dve čije je rastojanje manje od 3 cm.** [3]

Rešenje Podelimo pravougaonik na 143 kvadrata stranice 2 cm. Kako je $143 < 144$, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoji kvadrat u kojem se nalaze dve tačke i to su baš one dve koje zadovoljavaju uslov zadatka.■

17. **Dat je pravougaonik čije su stranice 10 cm i 67 cm. U unutrašnjosti pravougaonika na slučajan način je raspoređeno 2011 tačaka. Dokaži da pri ma kom rasporedu tačaka postoje četiri tačke koje pripadaju jednom istom kvadratu stranice 1 cm.** (Okružno takmičenje 2011, 6. razred)[4]

Rešenje Podelimo dati pravougaonik na 670 kvadratića stranice 1 cm. Kako je broj tačaka $2011 = 670 \cdot 3 + 1$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa sledi tvrđenje zadatka.■

18. **U jednakostraničnom trouglu stranice 4 cm na slučajan način je raspoređeno 17 tačaka. Dokaži da postoje dve tačke čije je rastojanje manje od 1 cm.** (Opštinsko takmičenje 2010, 6. razred)[4][25]

Rešenje Jednakostranični trougao stranice 4 cm možemo podeliti na 16 jednakih jednakostraničnih trouglova stranice 1 cm kao što je prikazano na Slici 1. Na ovaj način svakoj tački (jednoj od 17) pridružujemo trougao (jedan od 16). Kako je broj tačaka veći od broja trouglova, to na osnovu Dirihleovog principa postoji trougao u kome su bar dve tačke. Te dve tačke su na rastojanju manjem od 1 cm.■

Slika 1

19. **Na prvenstvu škole u košarci 10 ekipa igra svaka sa svakom. Da li u svakom trenutku takmičenja postoje dve ekipe sa istim brojem odigranih utakmica**? [3]

Rešenje Ako postoji ekipa koja nije igrala još ni jednu utakmicu onda je u tom trenutku mogući broj odigranih utakmica za neku ekipu iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, a ako su sve ekipe igrale bar jednu utakmicu onda je taj skup mogućnosti {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Kako je broj mogućnosti u oba slučaja manji od broja ekipa, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoje dve ekipe sa istim brojem odigranih utakmica.■

20. **Na šahovskom turniru, na kome svaki igrač igra sa svakim po jendu partiju, učestvuje 12 igrača. Dokazati da u svakom trenutku postoje bar dva učesnika turnira koji su do tog trenutka završili jednak broj partija**. [20]

Rešenje Ukoliko postoji igrač koji nije igrao još ni jednu patiju mogući broj partija za nekog igrača je iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, a ako su svi igrači igrali bar jednu partiju onda je taj skup mogućnosti {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}. Kako je u oba slučaja broj mogućnosti manji od broja igrača, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoje dva igrača koja su završila jednak broj partija.■

21. **Na jednom sastanku učestvuje 83 učenika. Dokazati da među njima postoje bar dva učenika među učesnicima sastanka koji imaju isti broj poznanika. (Ako učenik A poznaje učenika B, smatra se da i učenik B poznaje učenika A)** [20]

Rešenje Ako postoji učenik koji ne poznaje ni jednog drugog učenika, onda je moguće da drugi učenik poznaje 0, 1, 2, 3, ... , ili 81 učenika. Ukoliko postoji učenik koji poznaje barem jendog od preostalih učenika, onda je moguće da drugi poznaje 1, 2, 3, 4, ... , ili 82 učenika. Kako je u oba slučaja broj mogućnosti manji od broja učenika, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoje bar dva učenika koja imaju isti broj poznanika.■

22. **Dato je 999 različitih prostih brojeva. Dokaži da među njima ima bar 250 brojeva koji se završavaju istom cifrom.** (Opštinsko takmičenje 2014, 6. razred)[27][33]

Rešenje Prosti brojevi mogu da se završavaju jednom od cifara 1, 3, 7 ili 9 i postoji po jedan prost broj koji se završava cifrom 2 i cifrom 5. Odatle zaključujemo da se bar $999 - 2 = 997$ od 999 brojeva završava nekom od cifara 1, 3, 7 ili 9. Kako je $997 = 249 \cdot 4 + 1$, po uopštenom Dirihleovom principu zaključujemo da se bar 250 od tih brojeva završavaju istom cifrom.■

23. **Dato je 2007 različitih prostih brojeva. Dokazati da se bar 502 od tih brojeva završavaju istom cifrom.** (Državno takmičenje 2007, 6. razred)[4][22]

Rešenje Kao u zadatku 25 zaključujemo da se bar $2007 - 2 = 2005$ od 2007 datih brojeva završavaju nekom od cifara 1, 3, 7 ili 9. Kako je $2005 = 501 \cdot 4 + 1$, po Dirihleovom principu zaključujemo da se bar 502 od tih brojeva završavaju istom cifrom.■

24. **Na matematičkom takmičenju učestvovalo je 2010 učenika. Dokaži da se među njima može izabrati 45 učenika takvih da su ili svi iz istog grada ili svi iz različitih gradova**. (Državno takmičenje 2010, 6. razred)[4]

Rešenje Ako je broj gradova veći od 44 tada je ispunjen drugi deo tvrđenja (mogu se izabrati 45 učenika iz različitih gradova). Stoga, pretpostavimo da su na takmičenju učenici iz najviše 44 grada. Kako je $2010 \geq 44 \cdot 4\ 4 + 1$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa sledi tvrđenje zadatka.■

25. **Na jednom testiranju 67 učenika rešavalo je 6 zadataka. Odgovori na sva pitanja su DA ili NE. Za tačno rešen zadatak pod rednim brojem k ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) učenik dobija k poena, a za netačno rešen zadatak oduzima mu se k poena.**
   a) **Dokaži da je bar četvoro učenika ostvarilo isti broj poena na testiranju.**
   b) **Dokaži da je bar dvoje učenika imalo iste odgovore na svakom od šest zadataka.**
   (Državno takmičenje 2014, 7. razred)[33]

Rešenje a) Konačan broj bodova nekog učenika je broj oblika $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6$ tj. iz skupa {-21, -19, -17, . . . , 17, 19, 21} koji ima 22 elementa. Kako je $67 = 3 \cdot 22 + 1$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da je bar četvoro učenika ostvarilo isti broj poena na testiranju.

b)Mogućih rasporeda odgovora učenika po zadacima ima koliko i odabira predznaka $\pm$, tj. $2^6=64< 67$, pa na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da su bar dva učenika dala iste odgovore na svakom od šest zadataka.■

26. **Unutar kvadrata stranice 1*cm* data je 51 tačka. Dokazati da postoji krug čiji je poluprečnik $\frac{1}{7}$ *cm* unutar koga se nalaze bar 3 date tačke.** [19]

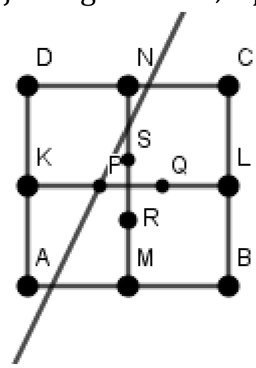
Rešenje Podelimo dati kvadrat na 25 manjih kvadrata stranice $\frac{1}{5}$ *cm*. Kako je $51 = 25 \cdot 2 + 1$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da se u jednom od tih malih kvadrata nalaze bar tri tačke. Poluprečnik kruga opisanog oko tog malog kvadrata je $r = \frac{\sqrt{2}}{10}$ *cm*. Kako je $r < \frac{1}{7}$ zaključujemo da je krug poluprečnika $\frac{1}{7}$ koncentričan sa krugom koji je opisan oko uočenog kvadrata koji sadrži bar tri od datih tačaka.■

27. **Dat je jednakostranični trougao čija je stranica 31 *dm*, unutar koga je na proizvoljan način raspoređeno 1989 tačaka. Dokazati da postoji krug, poluprečnika 6 *cm*, unutar koga se nalaze bar tri tačke datog skupa.** (Republičko takmičenje 1989, 8. razred)[29]

Rešenje Dati trougao podelimo na jednakostranične trouglove stranice 1 *dm*. Njih ima $1+3+5+ \ldots +61 = 961$. Kako se u trouglu nalazi $1989 = 961 \cdot 2 + 67$ tačaka, po uopštenom Dirihleovom principu, postoji najmanje 1 mali trougao u kome se nalaze bar 3 tačke. Kako je poluprečnik kruga opisanog oko malog trougla $\frac{\sqrt{3}}{3}\ dm < \frac{1,8}{3}\ dm = 6\ cm$, to postoji i krug poluprečnika 6 *cm* unutar koga se nalaze bar 3 tačke datog skupa.■

28. **Dat je kvadrat i devet različitih pravih u njegovoj ravni. Svaka od ovih pravih deli kvadrat na 2 trapeza, čije se površine odnose kao 2 : 3. Dokaži da među datim pravama postoje 3 koje imaju zajedničku tačku.** (SFRJ, Savezno takmičenje 1989, 8. razred) [33]

Rešenje Neka je ABCD dati kvadrat, neka su tačke M, L, N, K središta stranica AB, BC, CD i DA redom, a p_1 jedna od datih pravih (Slika 2). Površina trapeza je P $= m \cdot h$, gde je m srednja linija trapeza, a h visina trapeza. Površine P_1 i P_2 trapeza određenih pravom p_1 daju jednakost $P_1 : P_2 = 2 : 3$, tj. $(m_1 \cdot a) : (m_2 \cdot a) = 2 : 3$, visine ovih trapeza su jednake stranici kvadrata, a m_1 i m_2 su dužine njihovih srednjih linija. Primetimo da je $m_1 + m_2 = a$ i da je $m_1 : m_2 = 2 : 3$. Dakle, date tražene prave moraju proći kroz tačku P sa duži KL, za koju je KP : PL = 2 : 3 ili kroz tačku Q sa duži KL, za koju je LQ : QK = 2 : 3 (P, Q ∊ KL) ili kroz tačku R sa duži MN, za koju je MR : RN = 2 : 3 ili kroz tačku S sa duži MN, za koju je NS : SM = 2 : 3 (R, S ∊ MN). Svakoj od $9 = 4 \cdot 2 + 1$ pravih pridružujemo po jednu od tačaka {P, Q, R, S} te na osnovu uopštenog Dirihleovog principa sledi da najmanje tri moraju proći kroz jednu od ovih tačaka (tačke igraju ulogu kaveza, a prave ulogu zečeva).■



Slika 2

29. **U ravni je dato 50 tačaka, od kojih nikoje tri ne pripadaju istoj pravoj. Svaka od tih tačaka je obojena jednom od četiri date boje. Dokazati da postoji boja i najmanje 130 raznostraničnih trouglova čija su temena obojena tom bojom**. (Jedanaesta juniorska balkanska matematička olimpijada 2007, Šumen (Bugarska)) [15]

Rešenje Kako je $50 = 4 \cdot 12 + 2$, zaključujemo, na osnovu uopštenog Dirihleovog principa, da postoji najmanje 13 tačaka obojenih istom bojom. Neka $n \geq 13$ označava broj tačaka obojenih istom bojom. Pronađimo maksimalan broj jednakokrakih trouglova čija su temena neke tri od datih 50 tačaka. Izdvajanjem dve od tih n tačaka, možemo dobiti najviše 2 jednakokraka trougla kojima izabrane tačke određuju osnovicu. Zato je broj jednakokrakih trouglova manji ili jednak

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1)$$

Otuda dobijamo da je broj raznostranih trouglova barem

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6} \quad , n > 8.$$

Za $n = 13$ dobijamo $\frac{13 \cdot 12 \cdot 5}{6} = 130$, pa dakle postoji najmanje 130 raznostraničnih trouglova čija su temena obojena istom bojom.■

2.2. Zadaci koji „liči“ na prethodne ili se mogu modifikovati na prethodne

Sledeći zadaci samo na prvi pogled deluju da u svom rešavanju možda koriste Dirihleov princip i po svojoj formi liče na slične zadatke koji za rešavanje koriste Dirihleov princip. No, njih često možemo dopuniti i podzadatkom (pod b) koji koristi i Dirihleov princip. Međutim, i bez dopunjavanja oni često mogu dobro poslužiti za vežbu indirektnog dokaza.

30. **Tepih dimenzija $4m \times 4m$ progrizli su moljci i napravili 15 rupa zanemarljive veličine. Može li se iseći komad tepiha dimenzija $1m \times 1m$ na kome nema rupa**? [18]

Rešenje

NAPOMENA: Zadatak smo naveli onako kako je dat u originalu. Međutim, nedovoljno jasna formulacija zadatka može zbuniti rešavaoca istog. Naime, „*rupa zanemarljive veličine*“ predstavlja tačku. Postavlja se pitanje da li takva tačka, ako pripada rubu kvadrata koji predstavlja komad tepiha dimenzija $1m \times 1m$ se smatra da pripada tom tepihu ili ne?
(U prvom slučaju zadatak bi bio mnogo komplikovaniji.) Autor ovog zadatka je verovatno očekivao da će čitaoc usvojiti ovu drugu opciju (tačka na rubu malog tepiha sigurno ne narušava izgled istog).

U tom slučaju podelimo tepih na 16 kvadrata dimenzije $1m \times 1m$. Svakoj rupi koja se našla na nekom malom tepihu formata $1m \times 1m$ (dakle, ne na njegovom rubu!) pridružujemo taj mali tepih. Kako imamo više kvadrata nego rupa pridruženih tim kvadratima (uzimajući u obzir gornju napomenu broj rupa koje pridružujemo malim kvadratima može biti i manji od 15), zaključujemo da postoji komad tepiha na kome nema rupa (kardinalnost kodomena je veći od kardinalnosti domena, te se može uspostaviti bijekcija izmedju domena i pravog podskupa kodomena, tj. navedeno preslikavanje nije sirjektivno) .

NAPOMENA: U prvom slučaju (ako usvojimo da tačke ruba malog tepiha pripadaju istom) ovo razbijanje velikog kvadrata ne pomaže kod dokazivanja našeg tvrđenja (mogli bismo postaviti čak 9 tačaka tako svaki mali kvadrat sadrži bar jednu od njih!)

Ukoliko bismo u prethodnom zadatku stavili 17 umesto 15 rupa i pitali „Da li postoji komad tepiha dimenzija $1m \times 1m$ na kojem se nalaze bar dve rupe?“, dobili bi modifikovanu verziju zadatka pri čijem rešavanju se koristi Dirihleov princip.

Modifikovan zadatak 30. **Tepih dimenzija $4m \times 4m$ progrizli su moljci i napravili 17 rupa zanemarljive veličine. Da li postoji komad tepiha dimenzija $1m \times 1m$ na kojem se nalaze bar dve rupe? (Ako rupa pripada rubu kvadrata koji predstavlja komad tepiha dimenzija $1m \times 1m$ smatra se ona ne pripada tom tepihu.)**

Rešenje Podelimo tepih na 16 kvadrata stranice $1m$. Kako je $16 < 17$, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoji komad tepiha na kojem se nalaze bar dve rupe.■

31. **Tepih dimenzija $45dm \times 45dm$ pregrizli su moljci i napravili 2006 rupa zanemarljive veličine. Može li se iseći komad tepiha dimenzija $1dm \times 1dm$ na kojem nema rupa**? [18]

Rešenje Podelimo tepih na $45\times 45 = 2025$ kvadrata stranice $1dm$. Uzimajući u obzir napomenu iz prethodnog zadatka (usvajamo da tačke ruba malog kvadrata-tepiha ne pripadaju tom kvadratu-tepihu). Svakoj rupi koja nije na rubovima ovih tepiha pridružujemo mali tepih na kome se nalazi. Kako je broj kvadrata na koji smo podelili tepih veći od broja tih rupa (kojih je najviše 2006), zaključujemo da se može iseći komad tepiha na kojem nema rupa (preslikavanje nije sirjektivno).

Ukoliko bismo u 31. zadatku stavili 2026 umesto 2006 za broj rupa i pitali „Može li se iseći komad tepiha na kojem postoje bar dve različite rupe?“, dobili bi modifikovnu verziju ovog zadatka pri čijem rešavanju se koristi Dirihleov princip.

Modifikovan zadatak 31. **Tepih dimenzija $45dm \times 45dm$ pregrizli su moljci i napravili 2026 rupa zanemarljive veličine. Može li se iseći komad tepiha dimenzija $1dm \times 1dm$ na kojem postoje barem dve rupe? (Ako rupa pripada rubu kvadrata koji predstavlja komad tepiha dimenzija $1m \times 1m$ smatra se ona ne pripada tom tepihu.)**

Rešenje Podelimo tepih na 2025 kvadrata dimenzija $1dm \times 1dm$. Kako je $2025 < 2026$, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da postoji komad tepiha na kojem ima barem dve rupe.

32. **Kvadrat 19×19 podeljen je na jedinične kvadrate (polja). Obojeno je 95 polja. Dokaži da postoji pravougaonik 5×3 (koji se sastoji od 15 polja) u kome se nalaze najviše tri obojena polja.** (Državno takmičenje 2010, 8. razred)[4]

Rešenje Podelimo kvadrat na 24 pravougaonika 3×5 i na jedan kvadrat formata 1×1. (To je moguće učiniti jer se navedeni kvadrat može podeliti i na 4 pravougaonika formata 9×10 i na jedan kvadrat formata 1×1.) Pretpostavimo suprotno, tj. da se u svakom od tih 24 pravougaonika nalazi bar po 4 obojena polja. Tada ukupan broj obojenih polja iznosi bar $4 \cdot 24 = 96$, a to nije moguće po uslovu zadatka (imamo 95 obojenih polja), pa zaključujemo da nije tačna naša pretpostavka, tj. bar u jednom od pravougaonika nema više od 3 obojena polja.■

Ukoliko bismo u prethodnom zadatku stavili 98 umesto 95 polja i malo korigovali pitanje, dobili bismo modifikovanu verziju zadatka pri čijem rešavanju se koristi uopšteni Dirihleov princip.

Modifikovan zadatak 32. **Kvadrat 19 × 19 podeljen je na jedinične kvadrate (polja). Obojeno je 98 polja. Dokaži da postoji pravougaonik 5 ×3 (koji se sastoji od 15 polja) sa bar pet obojenih polja.**

Rešenje Podelimo kvadrat na 24 pravougaonika 3 × 5 i na jedan kvadrat formata 1 × 1. Tada 24 pravougaonika pokrivaju bar 97 obojenih polja. Dokažimo traženo tvrđenje indirektno. Dakle, pretpostavimo suprotno, tj. da se u svakom od pravougaonika nalazi najviše 4 obojena polja. Kako je $97 = 4 \cdot 24 + 1$, to na osnovu uopštenog Dirihleovog principa zaključujemo da postoji pravougaonih sa bar 5 obojenih polja.■

33. **U kutiji se nalazi 10 belih i 7 crvenih kuglica. Koliko najmanje kuglica treba uzeti iz kutije (bez gledanja) da bi među njima sigurno bile 3 crvene kuglice**? [3]

Rešenje
Ako uzmemo n ($n \geq 10$) kuglica, tada su barem njih n-10 crvene. (U suprotnom, ako bi broj crvenih bio manji od n-10, tada bismo imali više od 10 belih kuglica. Kontradikcija.) Stoga treba uzeti barem $n=13$ kuglica. ■

Modifikovan zadatak 33.
U kutiji se nalazi 10 belih i 7 crvenih kuglica. Koliko najmanje kuglica treba uzeti iz kutije (bez gledanja) da bi među njima sigurno bile
- ***a)*** **3 istobojne kuglice,**
- ***b)*** **i 3 bele i 3 crvene kuglice?**

Rešenje a) Ako ne insistiramo na boji, tada ovaj zadatak može poslužiti kao primer primene uopštenog Dirihleovog principa. Tražimo najmanju kardinalnost podskupa datog skupa kuglica tako da garantujemo da će pri bilo kojoj podeli tog skupa na dva bloka (imamo dve boje, te se kuglice grupišu u blokove spram boje) postojati blok kardinalnosti barem 3. Jasno, traženi broj je 5, tj. ako imamo barem $2 \cdot 2+1$ kuglica u tom podskupu koji je podeljen na dva bloka, tada imamo na osnovu uopštenog Dirihleovog principa da barem $2+1=3$ kuglice su u istom bloku.

Rešenje b) Ovde tražimo da i broj *n bude dovoljno velik da i* n-10 i n-7 budu barem 3, te je rešenje ponovo $n=13$. ■

34. **Grupa od 64 dečaka je podelila 2015 klikera medjusobno. Da li postoje dva dečaka sa istim brojem klikera bez obzira na način podele (mogući dobitak je i nula klikera)**?[16]

Rešenje Pretpostavimo suprotno, tj. da je svaki dečak dobio različit broj klikera. Tada je ukupan broj klikera barem $0 + 1 + 2 + ... + 63 = 2016$, što je u kontradikciji sa uslovom zadatka (činjenicom da dečaci treba da podele 2015 klikera). Zaključujemo da nije tačna pretpostavka, tj. postoje dva dečaka sa istim brojem klikera.■

35. **Grupa od 21 dečaka treba da podeli 200 oraha. Da li će se ma kako oni to činili uvek naći dva sa istim brojem dobijenih oraha. Objasni odgovor.** [2][30]

Rešenje Ukoliko bi svaki dečak dobio različiti broj oraha, tada bi ukupan broj oraha bio barem $0 + 1 + 2 + ... + 20 = 210$, što je u kontradikciji sa činjenicom da dečaci treba da podele 200 oraha. Zaključujemo da postoje dva dečaka sa istim brojem dobijenih oraha.■

36. **Brojevi 1, 2, ... , 9 su podeljeni u tri grupe. Da li bar u jednoj od tih grupa proizvod brojeva nije manji od 72?** [24]

Rešenje Pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakoj grupi proizvod brojeva manji od 72. Tada bi proizvod brojeva u ove tri grupe bio najviše $71^3 = 35911$. Međutim, proizvod brojeva od 1 do 9 je 362880, a to je više od 357911. Dakle, naša pretpostavka nije tačna. Zaključujemo da postoji grupa u kojoj proizvod brojeva nije manji od 72.■

37. **Dato je 50 pozitivnih realnih brojeva čiji je zbir 100. Dokazati da među njima postoje tri broja čiji zbir nije manji od 6.** [31]

Rešenje Obeležimo date brojeve sa $a_1, a_2, \dots, a_{50}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je zbir bilo koja tri broja manji od 6. Tada je $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + ... + (a_{46} + a_{47} + a_{48}) < 16 \cdot 6$, pa je $a_{49} + a_{50} > 4$. Slično se dobija da je $a_{48} + a_{50} > 4$ i $a_{48} + a_{49} > 4$. Odatle sledi da je $2(a_{48} + a_{49} + a_{50}) > 12$, odnosno $a_{48} + a_{49} + a_{50} > 6$. Ovo je kontradikcija sa našom pretpostavkom, pa sledi da postoje tri broja čiji zbir nije manji od 6.■

Iako je Dirihleov princip veoma jednostavan, često se dešava da se naprave previdi pri upotrebi ovog principa. Naime, mora se jasno utvrditi koje preslikavanje imamo (skup zečeva preslikavamo u skup kaveza) i tek kada se ustanovi da je domen veće kardinalnosti od kodomena, tada se može zaključiti da to preslikavanje nije „1-1“. Takođe, nekada samo deluje da se ovaj princip pojavljuje u dokazima iako to nije slučaj. Tako npr. u jednom master radu „Primena Dirihleovog principa kroz različite nivoe obrazovanja“ [11] navedeno je da se Dirihleov princip koristi pri dokazivanju male Fermaove[24] teoreme. Sledi teorema i dati deo dokaza:

[24] Pjer de Ferma (1607-1665), francuski matematičar i pravnik u tuluskom parlamentu

Teorema 5 [11] ***Ako je p prost i $\boldsymbol{a}$ ceo broj uzajamno prost sa p, onda važi $\boldsymbol{a^{p-1} \equiv 1}$ (mod p).***

Dokaz [11] *Mogući ostaci pri deljenju sa p su $0, 1, 2, \dots, p-1$. Posmatrajmo niz brojeva $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$. Ostataka pri deljenju sa p ima p, a članova niza ima $p-1$, pa iz Dirihleovog principa važi da postoje dva člana niza tako da je $ai \equiv aj \pmod{p}$ za neko $0 \leq i < j \leq p-1$, tako da imamo $i \equiv j \pmod{p}$...*

U ovom dokazu se navodi primena Dirihleovog principa primenjenog na skup ostataka pri deljenju brojem p i na skup članova niza $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ (kojih ima manje). Ovde imamo preslikavanje skupa članova niza u skup ostataka (svakom članu niza pridružujemo tačno jedan ostatak pri deljenju sa p). Međutim, domen nije veće kardinalnosti od oblasti vrednosti funkcije da bismo mogli da primenimo ovaj princip (niti možemo posmatrati preslikavanje skupa ostataka u skup članova niza). Zapravo, poenta u zadatku je da se uspostavi bijekcija između domena i skupa ostataka pri deljenju sa p bez nule (za šta i nije potrebna upotreba Dirihleovog principa).

3. Eksperiment

3.1. Plan i način obrade Dirihleovog principa

U ovom delu rada je opisan plan i način obrade Dirihleovog principa pomoću MTE modela nastave. Pored obrade Dirihleovog principa i osnovnog i uopštenja cilj ovih časova je da se ukaže i na mogućnost dokazivanja indirektnim putem, tj. svođenjem na kontradikciju. Takođe, pojedini delovi M-testa sadrže i delove u kojima se obrađuju ili samo podsećaju na matematičke sadržaje iz programa nastave matematike za taj uzrast (kao što su deljivost brojeva, izračunavanje površine pravougaonika i kvadrata, izračunavanje dužine dijagonale kvadrata, izračunavanje poluprečnika kruga opisanog oko kvadrata ili jednakostraničnog trougla i dr...). Dakle cilj ovih časova je i ponavljanje gradiva, ali i povezivanje starog gradiva sa novim. Takođe, ukazuje se i na važnost pravilnog zapisivanja obrazloženja, tj. izvođenja dokaza.

M-testovi sadrže više teksta od E-testova zato što M-testom želimo da sugerišemo učenicima gde treba usmeriti pažnju, nagovestiti im ka čemu se ide, ukazati im na koji način da upotrebe ono što već znaju da bi došli do rešenja. Na taj način oni bi mogli samostalno odraditi ceo zadatak. Kada odrade te zadatke uz te sugestije prvo samostalno, a zatim zajedno sa nastavnikom, smatramo da su oni spremni da pokušaju samostalno (bez sugestija) da odrade zadatke iz E-testa. Otuda ovi zadaci ne sadrže instrukcije.

Pre prvog zadatka u M-testu je data sličica koja asocira na formulaciju Dirihleovog principa sa začevima a koju nastavnik koristi u formulisanju ovog principa na početku časa. Formulacija se daje samo u formi n kaveza i $n+1$ ili više zečeva kao i obrazloženje putem indirektnog dokaza bez naglašavanja da se radi o indirektnom dokazu (što se ostavlja za kasnije tokom časa).

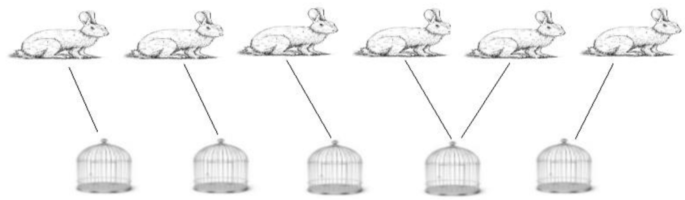
Objasniti im da se to tvrđenje naziva „princip“ zbog očiglednosti, tj. jednostavnosti obrazloženja (dokaza). Naime, ako pretpostavimo suprotno: da je u svakom od kaveza najviše jedan zec, dobili bismo (na osnovu principa zbira) da imamo najviše n zečeva u svim kavezima zajedno, što dovodi do takozvane „kontradikcije“ („nešto što ne štima“-netačan iskaz) obzirom da je u n kaveza smešteno svih $n+1$ (ili više) zečeva (naglašava se da je kontradikcija u „imamo <u>najviše</u> n zečeva u svakom kavezima zajedno“ i „imamo <u>bar</u> $n+1$ zečeva u svim kavezima“). Odavde sledi zaključak da nismo dobro pretpostavili da je u svakom kavezu najviše jedan zec, već da postoji kavez sa bar dva zeca (tvrđenje zadatka).

Pri zajedničkoj izradi M-testa nastavnik prati i beleži reakcije učenika (utiske zapisujemo posle časa): da li su i u kojem broju učenici (veći/manji broj ili niko) povezali sličicu sa tim zadatkom pre priče nastavnika, da li je neko već čuo za Dirihleov princip (nastavnik traži da upišu pored sličice naziv principa). Ukazuje im kako se zadaci mogu preformulisati i kako kod izrade zadataka oni mogu da se pozovu na navedeni princip (đaci vežbaju i ispisivanje rešenja zadatka što jasnije i preciznije).

Posle E-testa (na času ili kasnije, kad se slegnu utisci) nastavnik deli anketne listiće o mišljenju učenika o nastavi ovim putem. Tim putem pita ih šta su naučili, traži da procene procentualno koliko je to novih stvari za njih. U anketnim listićima na početku se rezimira šta je to novo što su radili (da li je to za njih bilo novo, podsećanje ili staro gradivo), da li imaju utisak da su još nešto naučili ili ne.

3.1.1. M-test za peti razred

Ime i prezime: ______________________________



1. **Da li u odeljenju od 32 učenika postoje dva učenika čije ime počinje istim slovom?**

   Odgovor: DA / NE (zaokruži)

- Koliko ima slova azbuke (koja mogu biti početno slovo imena)?________________
- Da li ima više đaka ili slova?______________________________
- Šta zaključuješ na osnovu toga? Obrazloži odgovor. ____________________

____
____
____
____

2. **Tepih dimenzija $4m \times 4m$ progrizli su moljci i napravili 15 rupa zanemarljive* veličine. Može li se iseći komad tepiha dimenzija 1m x 1m na kome nema rupa?**

   Odgovor: DA / NE (zaokruži)

- Na koliko kvadrata dimenzija 1m × 1m možemo podeliti tepih? ______________
- Da li ima više ovih malih kvadrata ili rupa? ______________________________
  Šta zaključuješ na osnovu toga? Obrazloži odgovor.

____
____
____
____

*ako se rupa nalazi na rubu (ivici) kvadrata, tretiramo da taj kvadrat ne sadrži rupu.

3. **a) Sedam zečeva je smešteno u dva kaveza.**

   b) Deset zečeva je smešteno u tri kaveza.

   Da li mora da postoji kavez u kome se nalaze bar četiri zeca?
   Odgovor a) ___________________
   Obrazloženje
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

   Odgovor b) ___________________
   Obrazloženje
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

4. **a) U kutiji se nalaze olovke dve različite boje: crvene i plave. Koliko najmanje olovki treba uzeti iz kutije ne gledajući, da bi među njima sigurno bile dve olovke iste boje?**

   b) U kutiji se nalaze olovke četiri različite boje: crvene, plave, žute i zelene. Koliko najmanje olovki treba uzeti iz kutije ne gledajući, da bi među njima sigurno bilo pet olovaka iste boje? Obrazloži odgovor.

   Odgovor a) ___________________
   Obrazloženje
   ____
   ____
   ____

   Odgovor b) ___________________
   Obrazloženje
   ____
   ____
   ____

Plan rada

1. Prvi zadatk M-testa ima za svoj izvorni zadatak zadatak broj 1. Izvršena je korekcija u odnosu na izvorni zadatak: umesto „prezime“ stoji „ime“.

   Nastavnik ukazuje na mogućnost preformulacije zadatka: kroz sugestivna potpitanja nastavnik ukazuje da se umesto zečeva mogu posmatrati učenici, a umesto kaveza slova azbuke (imenuje se po koji zec imenima, npr. Marko, Ivan, Ava i sl.), a ispod numeracije kaveza ispišu se pojedina slova i pojedini zečevi se povežu strelicama sa pridruženim kavezima. Na ovaj način nastavnik neformalno (samo na intitivnom nivou) uvodi pojam funkcije koristeći samo reč „pridruživanje“.

   Nastavnik ukazuje na više mogućih načina zapisivanja dokaza, tj. davanja obrazloženja odgovora. Npr.

   -*Odgovor je „može“. Obrazloženje: „ U suprotnom, ako bi prezimena svih učenika počinjala različitim slovom, onda bi broj slova bio bar 32, a imamo ih svega 30. Kontradikcija. Zaključujemo da nije tačno da prezimena svih učenika počinju različitim slovom, tj. postoje bar dva kojima je pridruženo isto slovo.“* (indirektni dokaz, svođenjem na kontradikciju)

   ili

   -*Odgovor je „DA, postoje dva sa istim slovom“. Obrazloženje: „ Koristićemo Dirihleov princip. Kako imamo 32 učenika (zečeva) a 30 slova (kaveza) i kako je broj učenika veći od broja kaveza, to na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da su bar dva zeca u istom kavezu, tj. da su bar dva učenika istog početnog slova u imenu“.* (direktni dokaz)

2. Izvorni zadatak za drugi zadatak sa M-testa je zadatak 30 sa spiska. On na prvi pogled deluje sličnih zahteva kao prvi (primetimo da ovde nije u pitanju Dirihleov princip!). I u ovom zadatku se takođe kroz potpitanja dolazi do rešenja. Uloga (svrha) ovog zadatka nije samo vežba indirektnog dokaza već i ukazivanje na zadatke koji samo „liče“ na ove u kojima se primenjuje Dirihleov princip a to nisu.

   -*Odgovor je „može“. Obrazloženje: „ U suprotnom, ako bi svi kvadrati dimenzije 1m×1m bili sa bar jednom rupom, onda bi broj rupa bio bar 16, a nemamo toliko rupa. Kontradikcija. Zaključujemo da nisu svi kvadrati sa rupama, tj. postoji mali kvadrat formata 1m×1m bez rupa“.*

   Nastavnik treba da uoči (i pribeleži) da li je neki učenik pokušao da zadatak poveže sa Dirihleovim principom. U tom slučaju ukazati da se u zadatku ne možemo pozvati na Dirihleov princip jer bismo u suprotnom morali kvadrate formata

$1m \times 1m$, kojih ima više od rupa, tretirati kao zečeve, a rupe kao kaveze. Dirihleovim principom mogli bismo jedino zaključiti da postoji rupa zajednička za bar dva kvadrata (a to se ne traži u zadatku). Međutim, ono na šta se mora obratiti pažnja je PRESLIKAVANJE skupa veće kardinalnosti u skup manje kardinalnosti. Svakom zecu se pridružuje jednoznačno određen kavez. U slučaju kvadrata i rupa to nemamo. Nije svakom kvadratu jednoznačno pridružena rupa. Moglo bi se uspostaviti preslikavanje svih rupa koje ne pripadaju ivicama kvadrata na skup svih kvadrata, ali tada domen nije veće kardinalnosti! Na ovo prethodno nastavnik treba da ukaže.

3. Treći zadatak je jednostavni zadatak sa uopštenim Dirihleovim principom (očekujemo da će učenici analiziranjem svih mogućnosti direktno doći do pozitivnog odgovora). Zadatku broj 4 sa spiska, koji predstavlja izvorni zadatak, dodata je verzija pod b) kako bi bio što ilustrativniji za obradu uopštenog Dirihleovog principa. Korigovan je i tekst kako ne bi bio zbunjujući (reči „treba smestiti" ukazuju da imamo mogućnost raspoređivanja što nije slučaj te su zamenjena sa „je smešteno").

Nastavnik zadatak pod a) najpre radi direktno, analiziranjem svih mogućnosti i ukazuje da rešavanje zadatka pod b) na ovaj način je moguće ali iziskuje više vremena.

3.a) (direktan dokaz po slučajevima)

Dokazujemo da je odgovor pozitivan. Ako je broj zečeva u prvom kavezu $k \geq 4$ *(I slučaj), tada je tvrđenje ispunjeno (postoje 4 zeca u nekom kavezu). Ako je, pak,* $k \leq 3$ *(II slučaj), tada je broj zečeva u drugom kavezu* $7 - k \geq 7 - 3 = 4$*, te je opet tvrđenje ispunjeno.*

3.a) (indirektni dokaz - svođenjem na kontradikciju)

Dokažimo da je odgovor pozitivan, tj . da postoje 4 zeca u istom kavezu. Pretpostavimo suprotno, da je u oba kaveza najviše tri zeca. Tada je ukupan broj zečeva najviše $3 + 3 = 6$ *što je u kontradikciji sa činjenicom da je broj zečeva 7.*

Nastavnik zatim izlaže indirektan dokaz za potvrdan odgovor i u zadatku pod b) bez uvođenja oznaka naglašavajući bitne delove u zaključivanju (i podsećajući ih da se radi o indirektnom dokazu)

3.b)

Pretpostavimo suprotno, tj. ako ne bi bilo tako (da su bar 4 zeca u nekom od kaveza), onda bi u svakom kavezu bilo najvise 3 zeca. Ukupno u svim kavezima bi bilo najviše $3 \cdot 3 = 9$ *zečeva, što je u suprotnosti sa činjenicom da je 10 zečeva smešteno u tim kavezima (kontradikcija).*

Kroz obradu ovog zadatka, ukazujući na mogućnost još jednog zapisa obrazloženja uvodeći i koristeći oznake, nastavnik faktički dokazuje (neprimetno) uopšteni Dirihleov princip (koji ne pominje).

Sada ćemo objasniti kako još možemo zapisati, na drugi način, obrazloženje (tj. dokaz) pozitivnog odgovora. Posle potvrdnog odgovora pišemo: „ Pretpostavimo suprotno, da nije tačno da postoje 4 zeca u istom kavezu, tj. da je k_1,k_2 *i* k_3 *broj zečeva koji se nalaze u prvom, drugom i trećem kavezu redom i* $k_1 \leq 3$ *i* $k_2 \leq 3$ *i* $k_3 \leq 3$*. Tada bi ukupan broj zečeva (10) bio* $k_1+k_2+k_3 \leq 9$*. Dobili bismo kontradikciju (netačan iskaz)* $10 \leq 9$*. Dakle, nije tačna naša pretpostavka već je bar jedna od vrednosti* k_1, k_2 *ili* k_3 *je veća od 3."*

4. Jednostavni izvorni zadatak sa M-testa je zadatak broj 5 sa spiska, takođe dopunjen sa zadatkom „pod b)" (brojne vrednosti malo modifikujemo: umesto dve imamo sada četiri boje, umesto dve sada tražimo da pet olovaka budu iste boje).

Nastavnik naglašava da nije dovoljno dati samo odgovor i dokazati da za taj broj uzetih olovaka (a)3; b)17) se nalazi sigurno traženi broj olovaka iste boje već je potrebno i dokazati da je to najmanji mogući broj:

„*Ako bismo imali manje od 17 olovaka , moglo bi se desiti da u svakom kavezu (u svakoj boji) imamo najviše po 4 olovke, te ne bismo mogli tvrditi da su bar pet olovaka iste boje*".

3.1.2. E-test za peti razred

Ime i prezime: ______________________________

1. U jednoj školi uči 1100 učenika. Dokazati da u toj školi postoje bar dva učenika koji imaju identične inicijale. *(Inicijali su niz od dva slova: početno slovo imena na koje je nadovezano početno slovo prezimena.)*

2. Tepih dimenzija $45dm \times 45dm$ pregrizli su moljci i napravili 2006 rupa zanemarljive veličine. Može li se iseći komad tepiha dimenzija $1dm \times 1dm$ na kojem nema rupa? Obrazložiti odgovor.

3. U odeljenju ima 30 učenika. Na pismenom iz matematike neki od učenika su napravili 8 grešaka, a ostali manje. Dokazati da u odeljenju postoje bar četiri učenika koji su napravili jednak broj grešaka na pismenom.

4. U kutiji se nalazi 10 belih i 7 crvenih kuglica. Koliko najmanje kuglica treba uzeti iz kutije (bez gledanja) da bi među njima sigurno bile
   a) 3 crvene kuglice?
   b) 3 bele kuglice?

   Obrazložiti odogovor.

Instrukcije

Svi zadaci sa E-testa su po formulaciji slični zadacima sa M-testa, malo komplikovaniji u odnosu na njih jer su u prva dva zadatka veći brojevi i nema dodatnih instrukcija.

1. Prvi zadatak za svoj izvorni ima zadatak broj 3 sa spiska, samo je dopunjen sa preciziranjem pojma inicijala kao uređenog para slova.

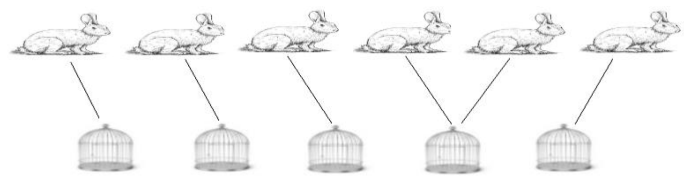
2. Izvorni zadatak za drugi zadatak E-testa je zadatak broj 31 sa spiska koji je dopunjen sa „Obrazloži odgovor“.

3. Treći zadatak je isti kao izvorni koji je na spisku pod rednim brojem 9.

4. Četvrti zadatak za svoj izvorni ima zadatak broj 33 sa spiska i dopunjen je zadatkom pod b) i sa „Obrazloži odgovor.“

3.1.3. M-test za šesti razred

Ime i prezime: ______________________________



1. Da li se kvadratna tabela 3×3 može popuniti brojevima 1, 2 i 3 tako da zbir brojeva u svakoj koloni, vrsti i dijagonali bude različit? Obrazložiti odgovor.

Odgovor: DA / NE (zaokruži)

Obrazloženje:

Koliko različitih zbirova po tri (ne obavezno različita) broja iz skupa {1, 2, 3} možeš sačiniti? (1+1+1=?,1+1+2=?,….,3+3+3=?) _______________

Koliki je ukupan broj kolona, vrsta i dijagonala zajedno? _________

Svakoj vrsti, koloni ili dijagonali je pridružen jedinstven zbir tri upisana broja (kao zecu kavez).

Pošto imamo <u>više/manje</u> (zaokruži tačno) vrsta, kolona i dijagonala zajedno *(zečeva)* od broja mogućnosti za zbirove upisanih elemenata u njima (*kaveza*), zaključujemo da kako god popunjavali tablicu, uvek će (nastavi) _______________

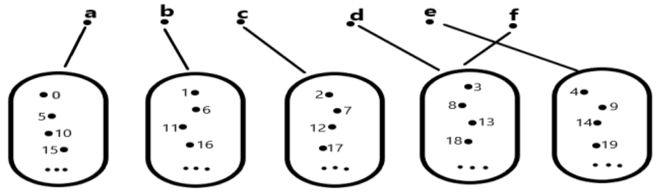
Primenili smo tzv. _____________ princip (upisati naziv tvrdjenja-principa ako znaš).

2. Dokaži da se od proizvoljih 6 celih brojeva uvek mogu izabrati dva čija je razlika deljiva sa 5.

Ako *dva cela broja imaju isti ostatak pri deljenju sa 5,* ***onda*** *je njihova razlika deljiva sa 5. Važi i* ***obrnuto: ako*** *je razlika dva cela broja deljiva sa 5,* ***onda*** *oba broja daju isti ostatak pri deljenju sa 5. Kraće pišemo:*

D*va cela broja imaju isti ostatak pri deljenju sa 5* ***ako i samo ako*** *je njihova razlika deljiva sa 5.*

Ili ***D****va cela broja imaju isti ostatak pri deljenju sa 5* ***akko*** *je njihova razlika deljiva sa 5.*



Koji su mogući ostaci pri deljenju nekog celog broja sa 5? ______________________________

Na koliko klasa prema tom ostatku možemo podeliti skup celih brojeva? __________

Označimo sa a,b,c,d, e i f datih 6 celih brojeva. Treba da dokažemo da medju njima postoje dva čija je razlika deljiva sa 5, tj. da daju isti ostatak pri deljenju sa 5, tj. da pripadaju istoj klasi. Svakom broju je jednoznačno pridružena jedna od navedenih klasa (kao zečevima kavezi: svakom zecu tačno jedan kavez).

Kako broj posmatranih brojeva (a,b, ...,f) iznosi_____ što je veće/manje (*zaokruži tačno*) od broja klasa (___), zaključujemo na osnovu ____________principa (ako je broj zečeva __________ od broja kaveza u koje ih smeštamo, postojaće kavez sa bar ___ zeca) da ________________________

____

3. **Grupa od 64 dečaka je podelila 2015 klikera medjusobno. Da li postoje dva dečaka sa istim brojem klikera bez obzira na način podele (mogući dobitak je i nula klikera)? Obrazložiti odgovor.**

Ako bi svaki dečak dobio različit broj klikera, tada bi ukupan broj klikera bio barem 0+1+2+3+...+63= ________________________________

(mala pomoć: odrediti najpre zbir (0+63) + (*1*+62) + (2+61) +...+ (62 +1) +(63+0)=______)

Šta ne štima? ____

Da li je naša pretpostavka (o tome da svi dečaci imaju različit broj klikera) tačna? ______

Dakle, zaključujemo ____

4. **U kvadrat stranice 31*cm* raspoređena je 2021 tačka. DOKAŽI da POSTOJI kvadrat stranice 1*cm* u kojem su bar tri tačke.**

Ako izdelimo veliki kvadrat na male kvadrate stranice 1*cm*, dobijamo_______________kvadratića (*upisati površinu velikog kvadrata*). ***Ako bi pretpostavili da važi suprotno*** (od onoga što treba dokazati), tj. da ***NE POSTOJI kvadratić sa BAR 3 tačke),*** *tada bi* U SVAKOM kvadratiću bilo NAJVIŠE __________tačke, te bi ukupno, u svim kvadratićima, a time i u velikom kvadratu, imali NAJVIŠE________________tačaka, što je u ***kontradikciji*** (nesaglasnosti, netačnost) sa datom činjenicom da imamo ____________ datih tačaka u velikom kvadratu. Dakle, zaključujemo da ne važi navedena pretpostavka, tj. da važi tvrdjenje zadatka.

Plan rada

1. Prvi zadatak M-testa za šesti razred je dopunjen sa „Obrazložiti odovor“ u odnosu na izvorni zadatak koji je na spisku zadataka pod rednim brojem 6. Nastavnik sugeriše učenicima da prvo ispitaju koliko različitih zbirova po tri (ne obavezno različita broja) iz slupa {1, 2, 3} mogu sačiniti, a zatim i koliki je ukupan broj kolona, vrsta i dijagonala zajedno. Zatim, nastavnik ukazuje da se svakoj vrsti, koloni ili dijagonali može pridružiti jedinstven zbir tri uzastopna broja (kao zecu kavez). Kako imamo više vrsta, kolona i dijagonala zajedno (zečeva) od broja mogućnosti za zbirove upisanih elemenata u njima (kaveza), zaključujemo da kako god popunjavali tablicu, uvek će se neki od zbira tri broja ponoviti u nekoj vrsti, koloni ili dijagonali.

2. Izvorni zadatak je zadatak broj 10 sa spiska zadataka. Kroz obradu drugog zadatka nastavnik podseća učenike na deljivost celih brojeva brojem 5. Takođe, nastavnik objašnjava učenicima da ako dva cela broja imaju isti ostatak pri deljenju sa 5, da je onda njihova razlika deljiva sa 5. Važi i obratno tvrđenje, da ako je razlika dva broja deljiv sa 5, onda oba broja daju isti ostatak pri deljenju sa 5. Nastavnik upućuje učenike na nešto drugačiji zapis istog tvrđenja koristeći izraz „*ako i samo ako*“ ili skraćenicu „*akko*“.

   Dakle, mogući ostaci pri deljenju nekog broja sa 5 su 0, 1, 2, 3 ili 4. Prema tome, skup celih brojeva možemo podeliti u 5 klasa. Označimo sa a,b,c,d, e i f datih 6 celih brojeva. Treba da dokažemo da medju njima postoje dva čija je razlika deljiva sa 5, tj. da daju isti ostatak pri deljenju sa 5, tj. da pripadaju istoj klasi. Svakom broju je jednoznačno pridružena jedna od navedenih klasa (kao zečevima kavezi: svakom zecu tačno jedan kavez). Kako broj posmatranih brojeva iznosi 6 što je više od broja klasa kojih je 5, zaključujemo na osnovu Dirihleovog principa da postoje dva broja koja pri deljenju sa 5 imaju isti ostatak i onda je njihova razlika deljiva sa 5. Kroz rešenje ovog zadatka „provučena“ je i formulacija Dirihleovog principa na koji se pozivamo („*ako je broj zečeva veći od broja kaveza u koje ih smeštamo, postojaće kavez sa bar dva zeca*“).

3. Treći zadatak M-testa za svoj izvorni zadatak ima zadatak 34 sa spiska i dopunjen je sa „Obrazložiti odgovor“. Pre početka rešavanja zadataka nastavnik ponavlja sa učenicima sabiranje prvih n brojeva, pri tome daje i pomoć učenicima. Prvo pretpostavimo da je svaki dečak dobio različit broj klikera, u tom slučaju ukupan broj klikera bi bio 0+1+2+...+63= $\frac{1}{2}$(0+63)+(1+62)+...+(62+1)+(63+0)= $\frac{63\cdot 64}{2}$ =2016 klikera. Pitamo učenike „*Šta ne štima?*“. Odgovor bi trebalo da glasi: „*Ako bi svi dobili različit broj klikera, onda bi trebalo da imaju barem 2016 klikera, a to je više od broja klikera koje imaju (2015).*“ Zaključujemo da naša pretpostavka nije tačna i da postoje dva dečaka koja su dobila isti broj klikera.

Nastavnik ukazuje na to da je ovaj dokaz „indirektan“. Naglasiti da u zapisu, radi preciznosti, mora da stoji: „*Odgovor je...*“. Zatim sledi „*U suprotnom...*“ tj. „*Ako bi bilo...*“ ili „*Pretpostavimo suprotno: neka je...*“ što dovodi do neslaganja. Poželjno je zapisati reč „kontradikcija“ ili bar jasno ukazati na neslaganje. Jasno zapisati zaključak da ona pretpostavka ne može biti tačna navodeći je, te da sledi zaključak kao u odgovoru.

4. U četvrtom zadatku nastavnik povezuje kombinatoriku i geometriju. Izvorni zadatak koji je pod rednim brojem 14 na spisku je „osavremenjen“: broj tačaka je promenjen da bude 2021 kao godina u kojoj se zadatak radi, a samim tim je promenjena i dužina stranice kvadrata da bude 31*cm*. Kroz odgovor uvežbava se ispravan zapis indirektnog dokaza. Prvo se sugeriše učenicima da veliki kvadrat površine 31·31=961cm^2 podele na male kvadrate stranice 1*cm*, tada dobijaju 961 kvadratić. „***Ako bi pretpostavili da važi suprotno*** *(od onoga što treba dokazati), tj. da* ***NE POSTOJI kvadratić sa BAR 3 tačke),*** *tada bi U SVAKOM kvadratiću bilo NAJVIŠE 2 tačke, te bi ukupno, u svim kvadratićima, a time i u velikom kvadratu, imali NAJVIŠE 1922 tačaka, što je u* ***kontradikciji*** *(nesaglasnosti, netačnost) sa datom činjenicom da imamo 2021 datih tačaka u velikom kvadratu. Dakle, zaključujemo da ne važi navedena pretpostavka, tj. da važi tvrdjenje zadatka.“*

3.1.4. E-test za šesti razred

Ime i prezime: ______________________________

1. Tablica 5×5 popunjena je na proizvoljan način brojevima iz skupa { -1, 0, 1 }. Posmatraju se zbirovi tih brojeva po vrstama, kolonama i obe dijagonale tablice. Dokazati da među njima bar dva moraju biti jednaka.

2. Dokaži da među 100 proizvoljnih prirodnih brojeva postoji bar 34 broja koja pri deljenju sa 3 imaju isti ostatak.

3. Grupa od 21 dečaka treba da podeli 200 oraha. Da li će se ma kako oni to činili uvek naći dva sa istim brojem dobijenoh oraha. Objasni odgovor.

4. U kvadrat stranice 5cm na proizvoljan način razmeštene su 52 tačke. Da li se može konstruisati kvadrat stranice 1cm^2 unutar koga se nalaze bar tri tačke?

Instrukcije

Svi zadaci sa E-testa su po formulaciji slični zadacima sa M-testa i rade se po istom principu, tj. način rešavanja zadataka je isti, samo što kod zadataka sa E-testa nema dodatnih instrukcija.

1. Izvorni zadatak prvi zadatak E-testa je 8. zadatak sa spiska i kao takav je dat.

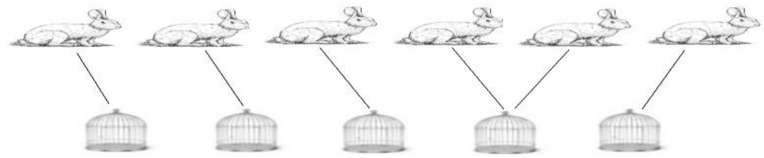
2. Drugi zadatak za svoj izvorni ima zadatak 11 sa spiska.

3. Za treći zadatak E-testa je uzet kao izvorni zadatak 35 sa spisaka zadataka.

4. Izvorni zadatak za četvrti zadatak je zadatak 15 sa spiska zadataka.

3.1.5. M-test za sedmi razred

Ime i prezime: ______________________________________

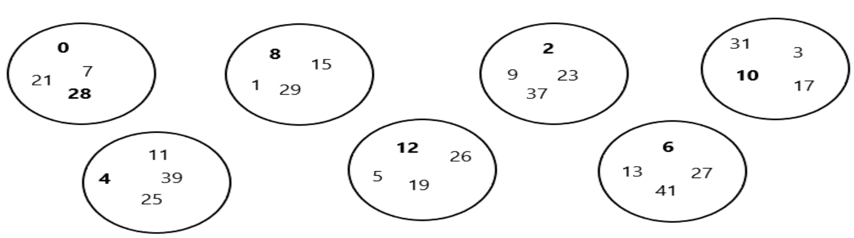


1. **U pravougaoniku čije su stranice dužine 22cm i 26cm na slučajan način se biraju 144 tačke. Dokaži da pri ma kakvom izboru tih tačaka postoje dve čije je rastojanje manje od 3cm.**

Ako dati pravougaonik podelimo na kvadrate stranice 2cm dobijamo ____________ mala kvadrata. Najveće moguće rastojanje između dve tačke u jednom takvom kvadratu jednako je _____ (to rastojanje je _________ od 3cm). Kako se birane _____ tačke nalaze unutar _____ uočena kvadrata, na osnovu Dirihleovog principa postoji kvadrat koji sadrži bar dve od izabranih 143 tačaka. Te dve tačke su one koje smo tražili, jer je njihovo rastojanje _______ od dijagonale kvadrata koje je _____ od 3cm.

2. **Dato je 8 parnih prirodnih brojeva. Dokaži da među njima postoje dva čija je razlika deljiva sa 14.**

Broj je deljiv sa 14 ako je deljiv sa___ i ____. Naših 8 parnih brojeva su svi deljivi sa ___.
Pa je i razlika svaka dva medju njima deljiva sa ___.
Dokažimo da je ta razlika deljiva i sa ___.
Pri deljenju proizvoljnog broja sa tim brojem mogući ostaci su:_____________________.



Grupišimo sve cele brojeve prema ostatku koji daju pri deljenju sa __.

Ovih 8 brojeva je smešteno u tih ____klasa. Kako je 8 veće/manje (zaokruži) od broja klasa (sad se povežete sa zečevima…) to na osnovu _________ principa zaključujemo da se bar dva od ovih osam brojeva nalazi u istoj klasi te je njihova razlika deljiva sa ____.

3. **Na prvenstvu škole u košarci 10 ekipa igra svaka sa svakom. Da li u svakom trenutku takmičenja postoje dve ekipe sa istim brojem odigranih utakmica? Obrazloži odgovor.**

Odgovor: Da (postoji)/ Ne (ne postoji)

Ako postoji ekipa koja nije igrala još ni jednu utamicu, onda je u tom trenutku mogući broj odigranih utakmica za neku ekipu iz skupa {__________________} (popuni). Ako su sve ekipe igrale bar jednu utakmicu, onda je taj skup mogućnosti {____________________}. Kako je broj mogućnosti u oba slučaja ________ veći/manji (zaokruži) od broja ekipa, to na osnovu _____________ principa zaključujemo da postoje ____.

4. **U odeljenju ima 30 učenika. Na pismenom iz matematike neki su od učenika napravili 8 grešaka a ostali učenici manje. Dokazati da u odeljenju postoje bar 4 učenika koji su napravili jednak broj grešaka na pismenom.**

Broj grešaka koji je neki učenik napravio je iz skupa {____________________} (navesti sve mogućnosti).
Grupišimo učenike sa istim brojem grešaka. Dokažimo da postoji grupa sa **bar** ______ učenika.
Ako bi bilo suprotno, tada bi u svakoj grupi imali **najviše** _____ učenika, pa bi ukupno imali _____·______=______, a to je **nemoguće (kontradikcija)**. Dakle, ____.

Plan rada

1. Prvi zadatak na M-testu za sedmi razred zahteva osnovno predznanje iz geometrije i razvija logičko razmišljanje. Kao izvorni zadatak je uzet zadatak 16 sa spiska zadataka. Nastavnik da bi motivisao i uputio učenike na način razmišljanja u ovakvim zadacima „ponudio“ je skicu rešenja, a učenici su trebali da popune prazna mesta. Prvo ih je uputio da dati pravougaonik podele na kvadrate stranice 2 cm, tada se dobije $11 \cdot 13 = 143$ mala kvadrata. Zatim se određuje najveće moguće rastojanje između dve tačke u tom kvadratu, a ono je jednako dijagonali kvadrata koja ima dužinu $2\sqrt{2}$ cm (što je manje od 3 cm). Kako imamo 144 tačke koje nam sada igraju ulogu zečeva, a 143 kvadrata koji igraju ulogu kaveza, zaključujemo na osnovu Dirihleovog principa da postoji kvadrat koji sadrži bar dve od izabranih 144 tačaka. Te dve tačke su one koje se traže u zadatku jer je njihovo rastojanje manje, ili u najgorem slučaju jednako, od dijagonale kvadrata čija dužina je manja od 3 cm.

2. Kroz drugi zadatak za svoj izvorni ima zadatak 12 sa spiska. Nastavnik podseća učenike na deljivost složenim brojem. Prvo ih pita: *„Kada je broj deljiv sa 14?“* Kao odgovor očekuje: *„Ako je deljiv sa 2 i sa 7.“* Kako su naših 8 brojeva datih u zadatku parni, zaključujemo da su svi deljivi sa 2 pa je onda i razlika svaka dva među njima deljiva sa 2. Ostaje da se dokaže da postoje dva broja čija je razlika deljiva sa 7. Mogući ostaci pri deljenju nekog celog broja brojem 7 su {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Nastavnik podseća učenike da je razlika dva cela broja deljiva sa 7 ukoliko oba broja imaju isti ostatak pri deljenju sa 7, ali i da važi obrat tog tvrđenja. Zatim, nastavnik crta 7 skupova i u njih upisuje brojeve tako da svi koji se nalaze u istom skupu imaju isti ostatak pri deljenju sa brojem 7, parne podebljava. Nakon grupisanja svih celih brojeva prema ostatku koji daju pri deljenju sa 7, smeštamo 8 brojeva u 7 klasa. Kako je broj brojeva veći od broja klasa (povežemo ih sa zečevima i kavezima) na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da se bar dva od ovih 8 brojeva nalazi u istoj klasi, te je njihova razlika deljiva sa 7, a kako je deljiva i sa 2, sledi da je deljiva i sa 14.

3. Treći zadatak je, u odnosu na izvorni koji je na spisku pod rednim brojem 19, dopunjen sa „Obrazloži odgovor.“ U zadatku se podstiče razvoj logičkog razmišljanja. Nastavnik navodi učenike da ispišu skupove mogućnosti broja odigranih utakmica ako postoji ekipa koja nije igrala još ni jednu utakmicu ({0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}) i ako su sve ekipe igrale bar jednu utakmicu ({1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}). Na osnovu toga zaključuje se da je broj mogućnosti u oba slučaja 9 što je manje od broja ekipa, pa na osnovu Dirihleovog principa zaključuje se da postoje dve ekipe sa istim brojem odigranih utakmica.

4. Izvorni zadatak za četvrti zadatak je zadatak broj 9 sa spiska zadataka. Radimo ga pomoću indirektnog dokaza uvežbavajući ispravan zapis. Prvo nastavnik navodi sve mogućnosti za broj grešaka, a to su vrednosti iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} što je 9 mogućnosti. Zatim grupiše učenike sa istim brojem grešaka i zapisuje šta treba da se dokaže: *„Dakle, dokažimo*

da postoji grupa sa ***bar*** *4 učenika."* Zatim sledi zapis onoga što je suprotno i to zapisujemo: *„Ako bi bilo suprotno, tada bi u svakoj grupi imali najviše 3 učenika, pa bi prema tome imali najviše 3·9=27 učenika što je nemoguće jer u odeljenju ima 30 učenika."* Nastavnik objašnjava pojam „kontradikcija" i nakon toga zapisujemo zaključak: *„Postoji bar 4 učenika u odeljenju koji su napravili isti broj grešaka."* Ponovi učenicima da se ovaj način zaključivanja naziva indirektan dokaz ili dokaz svođenja na kontradikciju.

3.1.6. E-test za sedmi razred

Ime i prezime: ______________________________

1. U jednakostraničan trougao stranice 4 *cm* na slučajan način je raspoređeno 17 tačaka. Dokaži da postoje dve tačke čije je rastojanje manje od 1*cm*.

2. Dokazati da od 100 celih brojeva možemo izabrati 15 takvih da je razlika svaka dva deljiva sa 7.

3. Na šahovskom turniru, na kome svaki igrač igra sa svakim po jednu partiju, učestvuje 12 igrača. Dokazati da u svakom trenutku postoje bar dva učesnika turnira koji su do tog trenutka završili jednak broj partija.

4. Dato je 2007 različitih prostih brojeva. Dokazati da se bar 502 od tih brojeva završavaju istom cifrom.

Instrukcije

Nijedan zadatak sa E-testa ne sadrži dodatne instrukcije pa je to „otežavajuća“ okolnost za učenike.

1. Prvi zadatak sa E-testa kao svoj izvorni ima zadatak broj 18 sa spiska zadataka. Od prvog zadatka sa M-testa se razlikuje po tome što umesto u pravougaonik tačke raspoređujemo u jednakostraničan trougao.

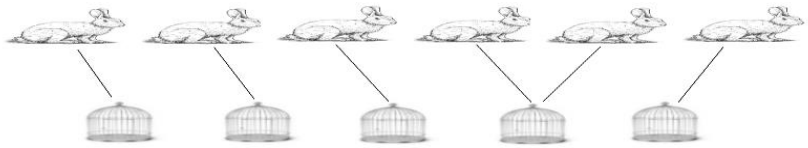
2. Izvorni zadatak za drugi zadatak je zadatak 13 sa spiska zadataka. Radi se slično kao i drugi zadatak sa M-testa.

3. 20. zadatak sa spiska zadataka je izvorni zadatak za treći zadatak sa E-testa. Po formulaciji je sličan trećem zadatku sa M-testa.

4. Četvrti zadatak za svoj izvorni ima zadatak broj 23 sa spiska zadataka. Nije sličan po formulaciji četvrtom zadatku sa M-testa, pa ih može možda zbuniti, ali se radi na isti način.

3.1.7. M-test za osmi razred

Ime i prezime: ____



1. **Na šahovskom turniru, na kome svaki igrač igra sa svakim po jednu partiju, učestvuje 12 igrača. Da li u svakom trenutku postoje bar dva učesnika turnira koji su do tog trenutka završili jednak broj partija?**

Odgovor: Da (postoje)/ Ne (ne postoje)

Ako postoji igrač koji još nije igrao ni jednu partiju onda je u tom trenutku mogući broj odigranih partija za nekog igrača iz skupa {__________________________} (popuni), a ako su svi igrači igrali bar jednu partiju onda je taj skup mogućnosti {_____________________}. Kako je taj broj mogućnosti u oba slučaja ______ veći/manji (zaokruži) od broja igrača, to na osnovu______________principa zaključujemo da postoje____________________________________ ____.

2. **Dato je 999 različitih prostih brojeva. Dokaži da među njima ima bar 250 brojeva koji se završavaju istom cifrom.**

Prosti brojevi mogu da se završavaju jednom od cifara 1, 3, 7 ili 9 i postoji po jedan prost broj koji se završava cifrom 2 i cifrom 5. Odatle zaključujemo da se bar _______________od ____ brojeva završava nekom od cifara 1, 3, 7 ili 9. Stoga, ______ brojeva možemo podeliti u _____ klase. Grupišimo brojeve koji se završavaju istom cifrom. Dokažimo da postoji klasa sa **bar** ______ brojeva.

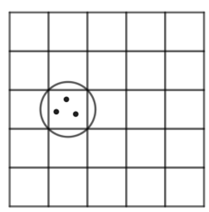
Ako bi bilo suprotno, tada bi u svakoj klasi imali najviše ________ brojeva, pa bi ukupno imali ____·____=______, to je nemoguće (kontradikcija). Dakle, ____.

3. Brojevi 1, 2, ... ,9 su podeljeni u tri grupe. Da li bar u jednoj od tih grupa proizvod brojeva nije manji od 72 ?

Odgovor: Da (nije manji)/ Ne (manji je)

Pretpostavimo da je odgovor NE, tj. ____.
Tada bi proizvod brojeva bio manji ili jednak ______. Prema tome proizvod brojeva u ove tri grupe bi bio manji ili jednak od $71^3 =$ _____________. Međutim, proizvod brojeva od 1 do 9 je _________________________, a to je manje/više od ________(kontradikcija). Dakle, naša pretpostavka ________ tačna. Zaključujemo da _______ grupa u kojoj proizvod brojeva nije manji od 72.

4. Unutar kvadrata stranice 1*cm* data je 51 tačka. Dokazati da postoji krug čiji je poluprečnik $\frac{1}{7}$ *cm* unutar koga se nalaze bar 3 date tačke.



Podelimo dati kvadrat na 25 manjih kvadrata čija je stranica $\frac{1}{5} = 0.2$. Tada je 51 tačka raspoređena u tih 25 kvadrata. Pretpostavimo da je u svakom od kvadrata najviše dve tačke. Tada bi imali najviše __________ tačaka, a to je više/manje (zaokruži) od 51(kontradikcija). Zaključujemo da se u jednom od tih malih kvadrata nalaze bar _____ tačke.

Opišimo krug K oko jednog takvog kvadrata (sa bar ____ tačaka). Dijagonala malog kvadrata je_____, pa je poluprečnik kruga opisanog oko njega r = _____. Kako je $r^2 =$ _____ = _____ < _____= $(\frac{1}{7})^2$, to je i $\frac{1}{7}$ _____ r.

Prema tome krug poluprečnika $\frac{1}{7}$ koji je koncentričan sa krugom K pokriva mali kvadrat i sadrži bar ______ od datih tačaka.

Plan rada

1. Prvi zadatak se rešava primenom osnovne („jednostavne“) forme Dirihleovog principa. Izvorni zadatak za ovaj zadatak je zadatak 20 sa spiska zadataka. Nastavnik upućuje učenike da napišu skupove mogućnosti ukoliko postoji igrač koji nije igrao ni jednu partiju ({0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}) i ako su svi igrači igrali bar jednu partiju ({1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}). U oba slučaja broj mogućnosti je 11, što je manje od broja igrača (povezujemo sa zečevima i kavezima, broj mogućnosti bi bili kavezi, a igrači bi igrali ulogu zečeva pri tome se akcenat stavlja na pridruživanje, tj. preslikavanje), pa bi na osnovu Dirihleovog principa zaključili da postoje dva igrača koji su završili isti broj partija.

   Kroz ostale zadatke M-testa za osmi razred, pored Dirihleovog principa, uvežbava se indirektan dokaz i takav način razmišljanja.

2. Izvorni zadatak je zadatak 22 sa spiska zadataka. U drugom zadatku učenici treba da se prisete prostih brojeva. Kreće se od činjenice da prosti brojevi mogu da se završavaju jednom od cifara 1, 3, 7 ili 9 i da postoji po jedan prost broj koji se završava cifrom 2 i cifrom 5. Ako bi se među datih 999 prostih brojeva baš našli broj 2 i broj 5, ostali bi nam 999-2=997 brojeva koji se završavaju nekom od cifara 1, 3, 7 ili 9. Stoga, 997 brojeva možemo podeliti u 4 klase. Grupišemo brojeve koji se završavaju istom cifrom, a potom zapišemo šta želimo da dokažemo: „*Tvrdimo da postoji klasa sa **bar** 250 brojeva.*“ Krećemo od suprotnog u odnosu na ono što se tvrdi: „*Ako bi bilo suprotno, tj. ako bi u svakoj klasi imali 249 brojeva, tada bi ukupno imali 249·4=996 brojeva, što je u kontradikciji sa tim da imamo 997 brojeva*.“ Potom zapisujemo zaključak: „*Od 999 različitih prostih brojeva bar 250 se završava istom cifrom.*“

3. U trećem zadatku, koji za svoj izvorni ima zadatak 36 sa spiska zadataka, ponovo koristimo indirektan dokaz pri rešavanju. Nastavnik sugeriše učenicima da krenu od suprotne pretpostavke: da je u svakoj grupi proizvod brojeva manji od 72. Tada bi u svakoj grupi proizvod brojeva bio manji ili jednak od 71. Prema tome u sve tri grupe proizvod brojeva bi bio najviše 71^3=357911. Ukoliko bi pomnožili sve brojeve od 1 do 9 dobili bi rezultat 362880, a to je više od 357911, pa naša pretpostavka nije tačna i dolazi se do zaključka da postoji grupa u kojoj proizvod brojeva nije manji od 72.

4. U četvrtom zadatku je prikazana primena Dirihleovog principa i indirektnog dokaza u geometriji. Izvorni zadatak je zadatak broj 26 sa spiska zadataka. Dokaz tvrđenja (bez sitnih detalja, tj. sitnog računa) se daje u rešenju originalnog zadatka u spisku zadataka koji prethodi M-testu. Nastavnik do detalja ukazuje (što se vidi iz instrukcije u M-testu) da postoji krug zadatog poluprečnika koji poktiva mali kvadrat sa bar 3 zadate tačke.

3.1.8. E-test za osmi razred

Ime i prezime: ______________________________

1. Na jednom sastanku učestvuje 83 učenika. Dokazati da među njima postoje bar dva učenika među učesnicima sastanka koji imaju isti broj poznanika. (Ako učenik A poznaje učenika B, smatra se da i učenik B poznaje učenika A)

2. Dato je 2021 različitih prostih brojeva. Dokazati da se bar 504 od tih brojeva završavaju istom cifrom.

3. Dato je 50 pozitivnih realnih brojeva čiji je zbir 100. Dokazati da među njima postoje tri broja čiji zbir nije manji od 6.

4. Dat je jednakostranični trougao čija je stranica 31 *dm*, unutar koga je na proizvoljan način raspoređeno 1989 tačaka. Dokazati da postoji krug, poluprečnika 6 *cm*, unutar koga se nalaze bar tri tačke datog skupa.

Instrukcije

1. Prvi zadatak E-testa za svoj izvorni ima zadatak broj 21 i sa spiska zadataka. Po načinu rešavanja je sličan prvom zadatku sa M-testa. Komplikovaniji je jer nema dodatnih indtrukcija.

2. Drugi zadatak kao svoj izvorni ima zadatak broj 23 sa spiska zadataka koji je „osavremenjen“: umesto „2007“ stoji „2021 različitih prostih brojeva“, a umesto 502 treba dokazati da se bar 504 završava istom cifrom. Po formulaciji je sličan drugom zadatku M-testa, tj. razlikuje se samo u brojevima.

3. Izvorni zadatak za treći zadatak je zadatak 37 sa spiska. Teži je od trećeg zadatka sa M-testa jer se trebalo setiti da se umesto proizvoda brojeva (koji se upoređivao u zadatku sa M-testa) posmatraju zbirovi od tri broja.

4. 27. zadatak sa spiska zadataka je izvorni za četvrti zadatak E-testa. Radi se na sličan način kao četvrti zadatak sa M-testa. Komplikovaniji je jer nema dodatnih instrukcija i posmatra se jednakostranični trougao umesto kvadrata.

3.1.9. Anketni listić

1. Kojom ocenom bi ocenio/ocenila današnji čas?

1) Veoma dosadan
2) Dosadan
3) Nemam nikakav stav
4) Interesantan
5) Veoma interesantan

2. Uporedi ga sa ranijim časovima:

a) Manje mi se dopada nego inače
b) Kao i inače je
c) Interesantnije mi je nego inače

3. Da li si danas naučio/naučila nešto novo? DA NE

4 . Da li si ranije čuo/čula za Dirihleov princip?

a) Totalno mi je bio nepoznat
b) Čuo/čula sam ali nisam znao/znala o čemu se radi
c) Dobro mi je bio poznat

5. Da li si nakon časa razumeo/razumela Dirihleov princip?

a) I dalje mi nije jasno
b) Delimično (nisam siguran/sigurna kako se primenjuje)
c) Potpuno sam razumeo/razumela

6. Da li si ranije čuo/čula za indirektan dokaz?

a) Totalno mi je bio nepoznat
b) Čuo/čula sam ali nisam znao/znala o čemu se radi
c) Dobro mi je bio poznat

7. Da li si razumeo/razumela kako rešavamo zadatke korišćenjem indirektnog dokaza?

a) I dalje mi nije jasno
b) Delimično (nisam siguran/sigurna kako se primenjuje)
c) Potpuno sam razumeo/razumela

8. Popuni tabelu (1- ne slažem se, 2 – delimično se ne slažem, 3 – nisam siguran/sigurna, 4 – delimično se slažem, 5 - potpuno se slažem)

Na času si naučio/naučila:					
Dirihleov princip	1	2	3	4	5
Da ga primenjujemo	1	2	3	4	5
Da dokazujemo tvrđenja indirektnim putem	1	2	3	4	5
Da preformulišemo zadatak u poznati	1	2	3	4	5
Da uvodimo i koristimo nove oznake radi lakšeg zapisa rešenja	1	2	3	4	5
Da pravilno ispišemo dokaz	1	2	3	4	5

9. Formuliši Dirihleov princip. ____

____

10. Objasni šta je to kontradikcija. ____

____

11. Svojim rečima objasni šta je to indirektan dokaz.

____

____

3.2. Realizacija eksperimenta

U ovom delu rada je opisan plan i način obrade Dirihleovog principa pomoću MTE modela nastave po kome je početkom drugog polugodišta školske 2020/21. godine realizovan eksperiment u osnovnoj školi „Ivo Andrić“ u Beogradu sa učenicima koji idu na dodatnu nastavu od 5. do 8. razreda.

Pošto već godinu dana traje pandemija virusa COVID-19 i učenici viših razreda nastavu pohađaju po kombinovanom modelu, tj. svako odeljenje je podeljeno u dve grupe (A i B) i jednog dana nastavu u školi pohađa grupa A, dok grupa B nastavu prati onlajn, a sledećeg dana je obrnuto, morala sam ovaj model nastave da prilagodim uslovima rada. Kako sam učenike viđala „uživo“ svakog drugog dana na časovima koji traju 30 minuta, eksperiment sam izvela tako što sam im M-test podelila na jednom od časova i objasnila im o čemu se radi ne bi li ih privolela da nešto, od onoga što ne spada u obavezno gradivo, urade. Oni su nakon toga trebali kod kuće samostalno da pokušaju da reše zadatke.

Testove sam podelila na redovnim časovima: za peti razred ukupno 60 M-testova, od kojih mi je vraćeno 20; za šesti razred sam podelila 55 testova, a vraćeno mi je 15; za sedmi razred podelila sam ukupno 50 testova, od toga mi je vraćeno samo 10; dok sam sa učenicima osmog razreda podelila 45 testova, ali mi je samo njih dvoje vratilo, pa sam na času zamolila još njih da učestvuje u ralizaciji eksperimenta (prijavilo se još njih 8), tako da ih je na kraju M-test radilo 10 učenika.

Na posebnom času u školi za svaki razred posebno, nakon što su predali urađene M-testove, podelila sam im neispisane listove sa M-testom i sa istim zadacima kao ranije, koji su oni sada zajedno samnom rešavali tokom časa (a te listove su zadržali).

Učenici petog i šestog razreda su bili mnogo motivisaniji za rad iako mnogi od njih nikada do tada nisu čuli za Dirihleov princip. Jedna devojčica iz šestog razreda je i ranije čula za Dirihleov princip i prepoznala ga je, dok su se ostali prvi put susreli sa takvim zadacima. Što se tiče učenika sedmog i osmog razreda, oni su uglavnom čuli za Dirihleov princip, ali nisu znali njegovu primenu. Skoro svima su zadaci bili zanimljivi kao i način na koji smo ih obrađivali.

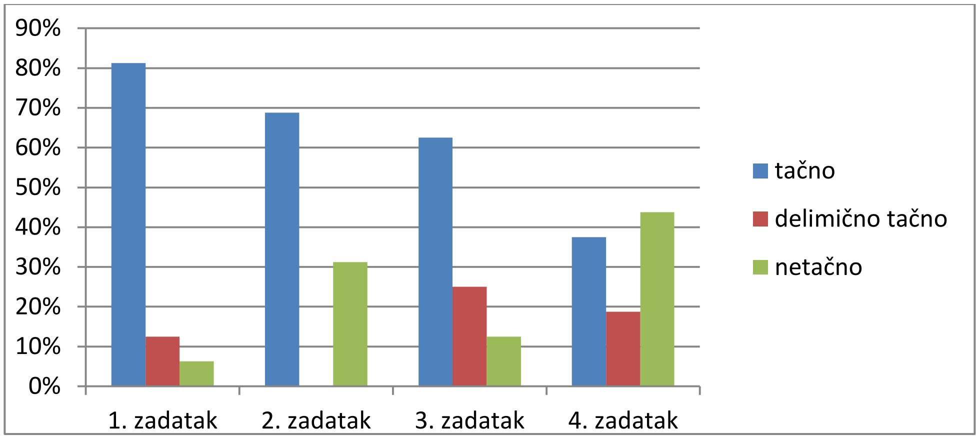
Nakon obrade zadataka sa M-testa učenicima sam podelila E-testove i ankete koje su, kao i M-testove, nosili kući da rade samostalno. Svi učenici koji su vratili M-test, dobili su i E-test i nakon dva dana su mi svi iste vratili (peti razred - 20 testova, šesti razred - 15 testova, sedmi razred - 10 testova, osmi razred - 10 testova).

3.3. Rezultati i analiza eksperimenta

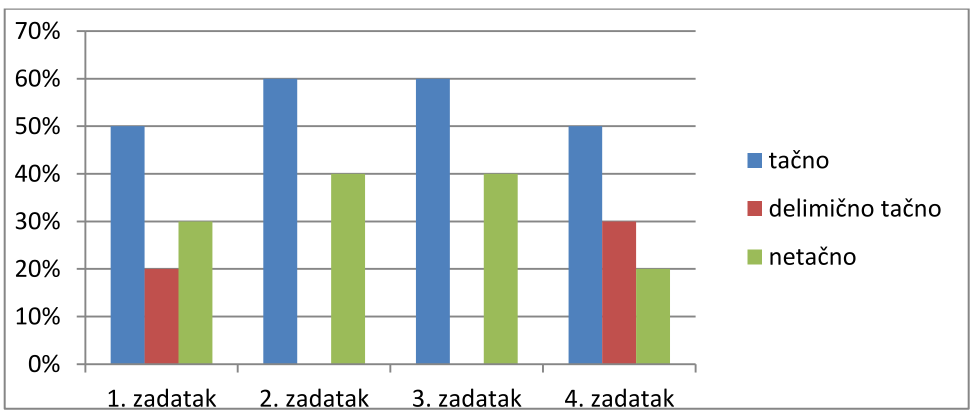
Na grafikonima koji slede je predstavljen broj tačnih, netačnih i delimično tačnih odgovora u testovima izraženo u procentima.

3.3.1. Rezultati testova učenika petog razreda

M-test



E-test



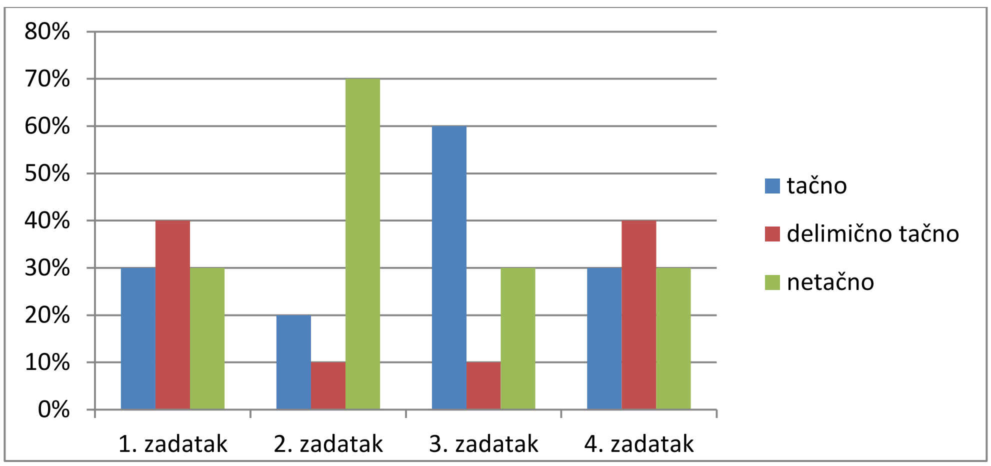
U eksperimentu je učestvovalo 20 učenika. Iz priloženog vidimo da je učenicima petog razreda bilo malo teže samostalno, bez dodatne pomoći i sugestija, da reše zadatke E-testa. Učenici su bolje od očekivanog rešili prvi zadatak M-testa, što je i dobro, jer su dobili dodatni motiv da rade dalje, dok im je prvi zadatak E-testa bio nešto teži iako se radio po istom principu, pa su stoga i rezultati lošiji ali u granicama očekivanih. Drugi zadatak, u kojem je trebalo računati površine tepiha, učenici su ili uradili tačno ili netačno, nije bilo delimično tačnih odogovora. U drugom zadataku M-testa neki od učenika su dali interesantne odgovore koje bih mogla da svrstam u „bisere“: *„Zaključujemo da moljci nisu mnogo pregrizli tepih“, „Možemo iseći tepih na sitne rupe da se ne vidi razlika“, „Zaključujemo da su moljci vrlo dosadne bube“.* Treći zadatak je približno jednak broj učenika na oba testa uradio tačno, ali oni učenici koji su delimično uradili treći zadatak na

M-testu, na E-testu su ga uradili netačno. Imam utisak da se nisu dosetili da treba povezati učenike i broj grešaka sa zečevima i kavezima, a i ispisivanje samog indirektnog dokaza im „nije išlo od ruke“. Četvrti zadatak su očekivano bolje uradili na E-testu (50%) nego na M-testu (38%), čak je i broj delimično tačnih odgovora na E-testu (30%) viši u odnosu na M-test (19%). Na času kada su mi predavali M-testove većina njih je rekla da im je najteži bio četvrti zadatak.

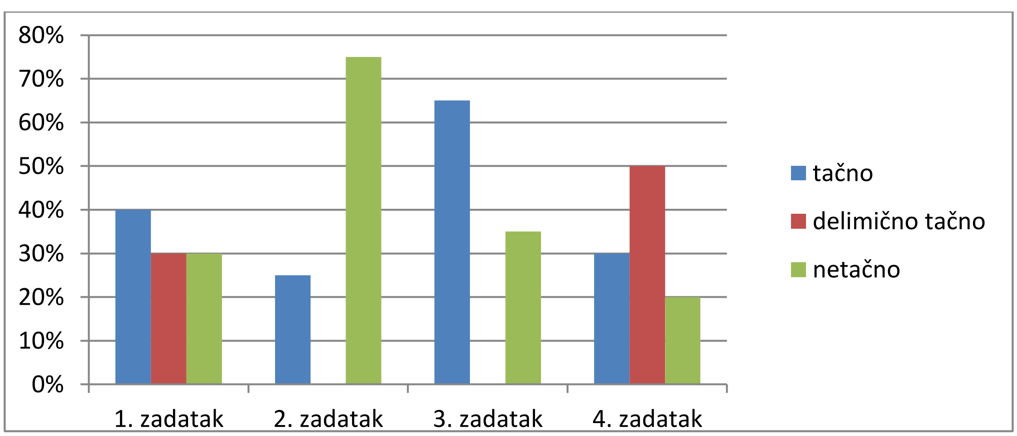
S obzirom da se radi o učenicima petog razreda, koji se sa ovakvim zadacima i Dirihleovim principom susreću prvi put, moglo bi se reći da su reultati zadovoljavajući i u granicama očekivanih. Komentari tokom izrade i obrade zadataka na času su bili pozitivni, zadaci su im bili interesantni i svideli su im se.

3.3.2. Rezultati testova učenika šestog razreda

M-test



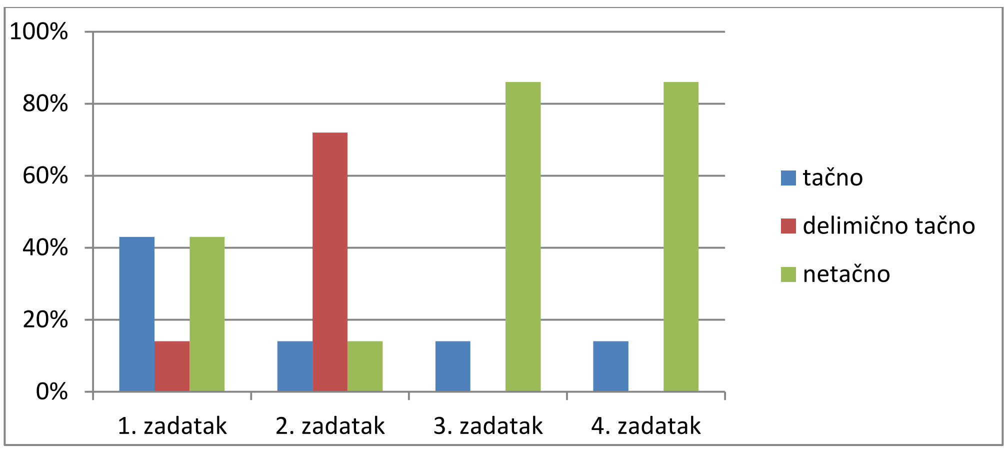
E-test



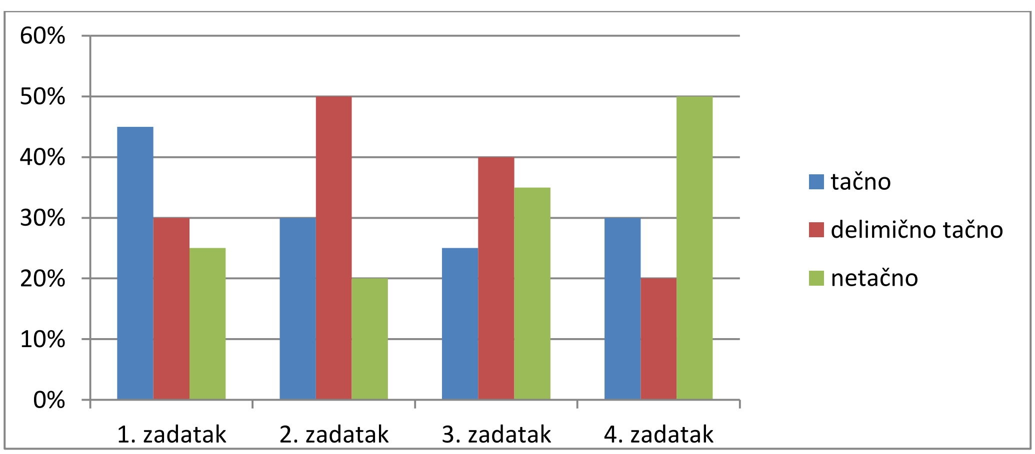
U eksperimentu je učestvovalo 15 učenika. Učenici šestog razreda su dosta dobro uradili prvi zadatak na oba testa, očekivano nešto bolje na E-testu (10% učenika više je uradilo tačno). U prvom zadatku M-testa njih 40% je tačno napisalo naziv principa koji se koristi. Drugi zadatak, gde je trebalo primeniti znanje iz petog razreda i prisetiti se deljivosti brojeva „pravio im je problem“. Na oba testa visok je procenat netačno urađenih zadataka (oko 70%). Treći zadatak su, na moje veliko iznenađenje, uradili veoma dobro, visok je procenat učenika koji su tačno uradili zadatak, posebno na E-testu (65%). Kao i kod učenika petog razreda u drugom zadatku, bilo je interesantnih odgovora. Četvrti zadatak je na oba testa urađen približno isto, učenici koji su ga tačno uradili na M-testu, uradili su ga tačno i na E-testu, jedino je na E-testu bio malo veći procenat onih koji su delimično tačno uradili zadatak. Komentari tokom časa su bili vrlo pozitivni, zadaci su im bili interesantni, bili su vrlo kooperativni. Način izlaganja i sam metod obrade novog gradiva im se svideo.

3.3.3. Rezultati testova učenika sedmog razreda

M-test



E-test

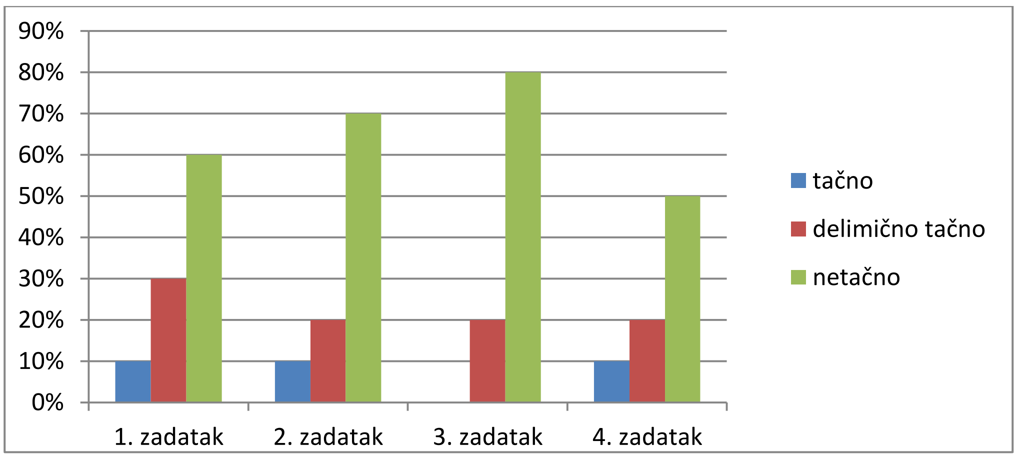


U eksperimentu je učestvovalo 10 učenika. Učenike sedmog razreda je bilo vrlo teško motivisati i zainteresovati da urade nešto što nije obavezno za nastavu. Inače u sedmom razredu ima samo tri od 128 učenika koja su zainteresovana za dodatnu nastavu matematike, stoga i rezultati nisu iznenađujuće „loši“ sobzirom da sam pored njih uključila u eksperiment i ostale učenike.

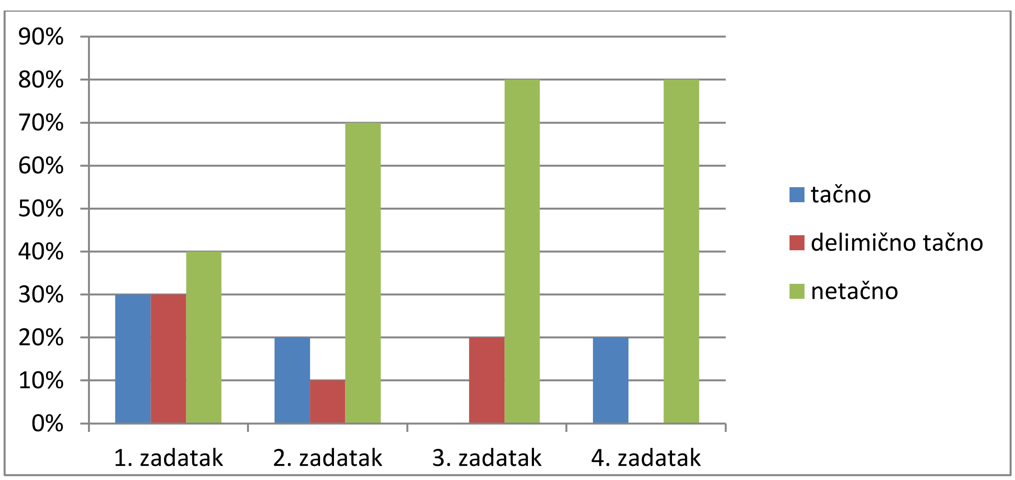
Prvi zadatak su učenici uradili relativno dobro i rezultati su očekivani, približno isti procenat učenika uradio ga je tačno na oba testa, dok je više njih na E-testu uradilo delimično tačno. U drugom zadatku se trebalo podsetiti deljivosti brojeva iz petog razreda pa je na M-testu veoma mali broj učenika tačno rešio zadatak (14%). Međutim, rezultat na E-testu je bio mnogo bolji, pošto smo obnovili taj deo na času obrade i nakon što su se podsetili pravila deljivosti. Treći i četvrti zadatak su na M-testu samo 4 učenika rešila tačno, neki od učenika nisu ni pokušali da urade, a ostali su uradili netačno. Nakon što sam im objasnila kako se zadaci rade, koji je način razmišljanja, učenici su bolje uradili zadatke sa E-testa.

3.3.4. Rezultati testova učenika osmog razreda

M-test



E-test



Kao i učenike sedmog razreda i učenike osmog je bilo vrlo teško inspirisati i motivisati za nešto što nije vezano za redovnu nastavu i nešto za šta neće biti formalno ocenjeni. U celoj generaciji nema učenika koji su zainteresovani za dodatnu nastavu matematike pa je eksperiment realizovan na jednom od redovnih časova, jer je samo dva učenika vratilo urađen M-test (od 45 podeljenjih) koji su trebali da urade kod kuće, stoga i ne iznenađuju izuzeno loši rezultati na testovima, naročito na M-testu. Učestvovalo je 10 od 15 učenika. Prvi i drugi zadatak su učenici još i pokušali da urade, ali treći i četvrti mnogi od njih nisu ni pokušali, imam utisak da nisu ih ni pročitali. Kada sam ih pitala zašto nisu ni pokušali nešto barem, odgovor je uglavnom bio: „Nisam znao/znala.“. Ubrzo nakon što sam dobila rezultate M-testa i E-testa, stigli su i rezultati probnog završnog ispita iz matematike koji su bili veoma loši, stoga me rezultati koje sam ja dobila nisu mnogo iznenadili.

3.3.5. Rezultati ankete

Anketu su uradili svi učenici koji su uradili i oba testa (20 učenika petog razreda, 15 učenika šestog razreda, po 10 učenika sedmog razreda i osmog razreda). 90% učenika petog i šestog razreda se izjasnilo da im je čas bio veoma interesantan, dok je ostalima bio interesantan, dok je 50% učenika sedmog i osmog razreda se izjasnilo da im je čas bio veoma interesantn, a 50% da im je bio interesantan. U odnosu na ranije časove 60% učenika je reklo da im je čas bio interesantniji nego inače, a 40% da im je bio kao i inače u svim razredima. Svi učenici petog, šestog i sedmog razreda su se izjasnili da su naučili nešto novo, dok je kod učenika osmog razreda nešto malo drugačija situacija, 90% njih je reklo da su na času naučili nešto novo a 10% da nisu. Po jedan učenik šestog, sedmog i osmog razreda se izjasnio da mu je Dirihleov princip bio dobro poznat, svi učenici petog razreda su se izjasnili da im je Dirihleov princip bio totalno nepoznat, dok su ostali učenici šestog, sedmog i osmog razreda se izjasnili da su čuli ranije ali nisu znali o čemu se radi (90%) . Na pitanje *„Da li si nakon časa razumeo/razumela Dirihleov princip?“* u svim razredima je rezultat anketiranja bio isti: 50% je dalo odgovor *„Delimično (nisam siguran/sigurna kako se primenjuje)“,* dok je 10% dalo odgovor da im i dalje nije jasno a ostali su potpuno razumeli. Indirektan dokaz je totalno bio nepoznat za sve učenike petog razreda i 70% učenika šestog, dok je 10% anketiranih učenika šestog razreda dobro bilo upoznato sa indirektnim dokazom, ostali su samo čuli za njega. Učenici sedmog i osmog razreda su odgovorili da su čuli za indirektan dokaz (80%), dok se 20% njih izjasnilo da su dobro upoznati. Kada je razumevanje rešavanja zadataka korišćenjem indirektnog dokaza u pitanju, rezultati anketiranja u svim razredima su isti: 25% je reklo da im i dalje nije jasno, 35% delimično, dok je 40% reklo da su potpino razumeli.

Rezultati 8. pitanja na anketi gde je trebalo da se zaokruži u tabeli koliko se slažu sa određenim tvrđenjem, predstavljeni su sledećom tabelom:

Peti razred:

Na času smo naučili:	1	2	3	4	5
Dirihleov princip	0%	0%	0%	10%	90%
Da ga primenjujemo	0%	0%	10%	10%	80%
Da dokazujemo tvrđenja indirektnim putem	0%	10%	10%	10%	70%
Da preformulišemo zadatak u poznati	0%	0%	10%	30%	60%

Da uvodimo i koristimo nove oznake radi lakšeg zapisa rešenja	0%	0%	0%	50%	50%
Da pravilno ispišemo dokaz	0%	0%	20%	20%	60%

Šesti razred:

Na času smo naučili:	1	2	3	4	5
Dirihleov princip	0%	0%	10%	10%	80%
Da ga primenjujemo	0%	10%	20%	10%	60%
Da dokazujemo tvrđenja indirektnim putem	0%	10%	40%	10%	40%
Da preformulišemo zadatak u poznati	0%	0%	10%	30%	60%
Da uvodimo i koristimo nove oznake radi lakšeg zapisa rešenja	0%	10%	0%	45%	45%
Da pravilno ispišemo dokaz	0%	0%	20%	40%	40%

Sedmi razred:

Na času smo naučili:	1	2	3	4	5
Dirihleov princip	0%	10%	20%	30%	40%
Da ga primenjujemo	0%	10%	40%	10%	40%
Da dokazujemo tvrđenja indirektnim putem	0%	10%	30%	20%	40%
Da preformulišemo zadatak u poznati	0%	0%	10%	30%	60%
Da uvodimo i koristimo nove oznake radi lakšeg zapisa rešenja	0%	0%	10%	45%	45%
Da pravilno ispišemo dokaz	0%	0%	20%	30%	50%

Osmi razred:

Na času smo naučili:	1	2	3	4	5
Dirihleov princip	10%	10%	10%	30%	40%
Da ga primenjujemo	10%	10%	30%	10%	40%
Da dokazujemo tvrđenja indirektnim putem	0%	10%	40%	10%	40%
Da preformulišemo zadatak u poznati	0%	0%	10%	30%	60%
Da uvodimo i koristimo nove oznake radi lakšeg zapisa rešenja	10%	0%	0%	45%	45%
Da pravilno ispišemo dokaz	0%	0%	25%	25%	50%

Dve trećine učenika petog i šesog razreda i polovina učenika sedmog i osmog razreda je umelo da formuliše Dirihleov princip. Približno dve trečine da objasni šta je to kontradikcija u svim razredima, dok je oko jedne trećine učenika umelo svojim rečima da objasni šta je to indirektan dokaz.

4. Zaključak

S obzirom da Dirihleov princip za nastavu matematike ima dva važna svojstva: jednostavnost i očiglednost, njegova primena je moguća veoma rano. Cilj nastave matematike je svakako da učenici što više razvijaju logičko mišljenje i zaključivanje, a uvođenje Dirihleovog principa u nastavi bi svakako tome doprinelo.

U trenutnim uslovima, usled pandemije virusa COVID-19, kada učenici u školu idu po kombinovanom modelu, motivacija učenika, naročito sedmog i osmog razreda opada, tj. veoma je teško privoleti ih da rade i redovnu nastavu, a kamo li dodatnu nastavu. Motivacija učenika je veoma važna u učenju matematike i MTE-model može umnogome biti od pomoći. .MTE-model nastave se i ovog puta pokazao kao uspešan za obradu nove oblasti.

Ovi časovi koje sam izdvojila za obradu Dirihleovog principa su bili izuzetno lepo prihvaćeni kod učenika petog i šestog razreda i njima veoma interesantni, tako da mi je veoma žao što model nismo mogli da primenimo u „normalnim“ uslovima rada (da M-test rade na času).

Iako nastavnik ima više posla sa pripremom za ovakav čas (po MTE-modelu) nego za jedan „tradicionalni“ čas (zbog odabira zadataka za M-test i E-test), verujem da ovaj model nastave motiviše učenike za veću aktivnost, čak i u uslovima kada se nastava ne održava redovno.

Literatura

[1] V Andrić, *Diofantove jednačine*, Društvo matematičara Srbije, Megatrend univerzitet Beograd, Valjevo (2008)

[2] V Andrić, *Matematika X=1236 PRIRUČNIK ZA MATEMATIČKA TAKMIČENJA*, Krug, Beograd, 29, 37, 38, 63 (2006)

[3] V Andrić, *Matematika 7**, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 110-113 (2019)

[4] V Andrić, Đ Baralić, J B Varga, N Vulović, M Đorić, Diana Zuma, A Ilić, V Jocković, M Katić, Z Kadelburg, S Milosavljević, B Popović, R Tošić, *1100 zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola 2006-2015. godine*, Društvo matematičara Srbije, Beograd (2015)

[5] O Bodroža-Pantić, S Matić-Kekić, B Jakovljev, Đ Marković, *On MTE-Model of Mathematics Teaching: Studying the Problems Related to a Plane Division Using the MTE-model*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39(2), 197-213 (2008)

[6] R Čorba, *Mogućnost prezentovanja nekih obaveznih i nekih naprednih sadržaja iz matematike MTE-modelom nastave u prvom razredu srednje škole*, master rad, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad (2014)

[7] J Elstrodt, *The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)*, Clay Mathematics Proceedings Volume 7 (2007)

[8] M Ilić-Dajović, V Mićić, A Zelić, M Mrmak, LJ Čukić, J Vukadinović, B Đerasinović, Mitrović, *Matematički priručnik za dodatnu nastavu V-VI razred osnovne škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd (1980)

[9] D Jojić, *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Banja Luka (2011)

[10] E E Kummer, P G L Dirichlet, in L Kronecker and L Fuchs, *G Lejeune Dirichlets Werke*, Berlin (1889-97)

[11] B Kuzović, *Primene Dirihleovog principa kroz različite nivoe obrazovanja*, master rad, Matematički fakultet, Beograd (2014)

[12] S Marmila, *Motivisanost učenika na času utvrđivanja gradiva u nastavi matematike za 7. razred - Određivanje površine i obima kruga i njegovih delova*, diplomski rad, PMF, Novi Sad (2009)

[13] O Ore, *Biography in Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, New York (1970-1990)

[14] A Pustai, *Težište figure i sistema materijalnih tačaka - mogućnosti izlaganje nekih delova ovog sadržaja u nastavi matematike u osnovnoj školi*, master rad, PMF, Novi Sad (2015)

[15] V Stojanović, *Matematika inostranih takmičenja za osnovce*, Matematiskop, Beograd (2010)

[16] V Stojanović, *Priručnik za šampione V i VI razred OŠ*, Matematiskop, Beograd, 24-25 (2017)

[17] Matematički list, *Dijagonala*, broj 1, Udruženje nastavnika matematike Crne Gire, Podgorica, 4-5 (2018)

[18] *Matematički list*, broj 2, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 3 (1999)

[19] *Matematički list*, broj 4, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 135 (1995)

[20] *Matematički list*, broj 5, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 133-134 (1987)

[21] *Matematički list*, broj 5, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 133-134 (1974)

[22] Državno takmičenje 2007. godine, 6. razred, Društvo matematičara Srbije

[23] Matematička olimpijada 2005. godine, Manhattan

[24] Opštinsko takmičenje 2006. godine, 7. razred, Društvo matematičara Srbije

[25] Opštinsko takmičenje 2010. godine, 6. razred, Društvo matematičara Srbije

[26] Opštinsko takmičenje 2013. godine, 6. razred, Društvo matematičara Srbije

[27] Opštinsko takmičenje 2014. godine, 6. razred, Društvo matematičara Srbije

[28] Ispit iz Kombinatorike 2021, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad

[29] Republičko takmičenje 1989. godine, 8. razred, Društvo matematičara Srbije

[30] Republičko takmičenje 1993. godine, 7. razred, Društvo matematičara Srbije

[31] Republičko takmičenje 2006. godine, 8. razred, Društvo matematičara Srbije

[32] http://www.britannica.com/biography/Peter-Gustav-Lejeune-Dirichlet

[33] https://dms.rs

[34] https://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet

[35] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet/

Kratka biografija

Rođena sam 06.07.1989. u Kraljevu. Osnovnu školu sam završila u Žiči u školi „Živan Maričić“. Srednje obrazovanje sam stekla u Kraljevu u Gimnaziji (prirodno-matematički smer).

Osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu sam upisala 2008. godine. Nakon dve godine sam se razbolela i veći deo vremena sam provela u bolnici na ispitivanjima. Nakon pauze od pet godina, 2015. godine, studije sam nastavila u Novom Sadu na Prirodno-matematičkom fakultetu, smer profesor matematike. U međuvremenu sam postala mama dečaka koji sada ima četiri godine. 2018. godine, kada se na departmanu otovrio novi studijski program (Master profesor matematike), prešla sam na njega.

Od prvog razreda osnovne škole do polazka na fakultet sam aktivno igrala folklor u kulturno-umetničkom društvu „Abrašević“ u Kraljevu. A u periodu od 2004. do 2013. godine profesionalno sam se bavila suđenjem fudbala.

Radim kao nastavnik u osnovnoj školi „Ivo Andrić“ u Beogradu oko dve godine, dok sam ranije predavala matematiku kao nastavnik na zameni.

Katarina Barišić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *master rad*
VR
Autor: *Katarina Barišić*
AU
Mentor: *dr Olga Bodroža-Pantić*
MN
Naslov rada: *Dirihleov princip–obrada MTE modelom nastave u osnovnoj školi*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *srpski/engleski*
JI
Zemlja publikovanja: *Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2021.*
GO
Izdavač: *autorski replikant*
IZ
Mesto i adresa: *Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad*
MA
Fizički opis rada (broj poglavlja/strana/fotografija/slika/literatura/tabela/grafika): *4/70/1/11/35/5/8*
FO
Naučna oblast: *matematika*
NO
Naučna disciplina: *metodika nastave matematike*
ND
Ključne reči: Dirihleov princip, motivacija, indirektan dokaz
PO
UDK
Čuva se: *Biblioteka Departmana za matematiku, PMF, Novi Sad*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: *implenetacija MTE-modela na časove matematike u osnovnoj školi*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *16.10.2020.*
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije: *predsednik: dr Jelena Aleksić, redovni profesor, PMF, Novi Sad*
KO *mentor: dr Olga Bodroža-Pantić, redovni profesor, PMF, Novi Sad*
član: dr Petar Đapić, vanredni profesor, PMF, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OD SCIENCE
DEPARTMENT OF MATEMATICS AND INFORMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *monograph type*
DT
Type of record: *printed text*
TR
Contents Code: *master thesis*
CC
Author: *Katarina Barišić*
AU
Mentor: *dr Olga Bodroža-Pantić*
MN
Title: *DIRICHLET'S PRINCIPLE PROCESSED BY THE MTE MODEL OF TEACHING IN PRIMARY SCHOOL*
TI
Language of text: *Serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *Serbian/English*
LA
Country of publication: *Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2021.*
PY
Publisher: *Author's reprint.*
PU
Publication place: *Faculty od Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad, Serbia*
PP
Phisical description (chapters/pages/photographs/pictures/references/tables/charts): *4/70/1/11/35/5/8*
PD
Scientific field: *Mathematics*
SF
Scientific discipline: *Metodic of Mathematics*
SD
Key words: *Dirichlet's principle, motivation, indirect proof*
SKW
UC
Holding data: *Library of Department of Mathematics, Faculty of Science, Novi Sad*
HD
Note:
N
Abstract: *inplementation of MTE-model in Mathematics Teaching in primary school*
AB
Accepted by the Scientific Board on: *November 16th 2020.*
ABS
Defnded on:
DE
Thesis defend board: *President: dr Jelena Aleksić, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad*
DB *Mentor: dr Olga Bodroža-Pantić, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad*
Member: dr Petar Đapić, Associate Professor, Faculty of Science, Novi Sad