UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nikolina Dimitrov

Konike u projektivnoj geometriji i konstrukcije u afinoj ravni

Master rad

Mentor:
dr Milica Žigić

Novi Sad, 2021.

Sadržaj

Predgovor

Početak izučavanja konika datira još iz perioda stare Grčke. Pojava projektivne geometrije značajno je doprinela razvoju teorije konika.

Sa pojmovima elipse, hiperbole i parabole i nekim njihovim osobinama upoznajemo se tokom srednje škole, ali iz ugla analitičke geometrije. U projektivnoj geometriji sve konike su međusobno ekvivalentne, ne postoji podela na elipsu, hiperbolu i parabolu. Cilj ovog rada je da se prikažu konike u svetu projektivne geometrije. Sintetičkom metodom, predstavićemo konike i njihove osobine u realnoj projektivnoj ravni, zatim ćemo ih definisati i u afinoj ravni i rešiti nekoliko konstruktivnih problema.

Rad se sastoji iz 5 glava. U prvom poglavlju daćemo kratak istorijski uvod o projektivnoj geometriji i osnovne pojmove i teoreme projektivne geometrije potrebne za razumevanje ostatka rada.

Drugo poglavlje sastoji se od četiri potpoglavlja. Počinjemo kratkim istorijskim uvodom o konikama, zatim ćemo dati tri definicije konika u projektivnoj geometriji. Nakon toga definišemo polaritet indukovan konikom i njegove osobine. Ovo poglavlje završavamo Štajnerovom teoremom.

Treće poglavlje posvećeno je važnim teoremama projektivne geometrije koje prikazuju značajne osobine konika, Paskalovoj, Brijanšonovoj i Dezargovoj involutivnoj teoremi. Ovde ćemo definisati i tri tipa pramena konika u projektivnoj ravni, kao i harmonijsku konjugovanost tačaka na konici.

U četvrtom poglavlju prvo definišemo projektivno preslikavanje na konikama i njegove osobine. A u drugom delu ovog poglavlja opisaćemo involuciju na konikama.

Poslednje, peto poglavlje, posvećeno je konikama u afinoj ravni. Definisaćemo podelu konika u odnosu na broj zajedničkih tačaka sa beskonačnom pravom. Rad završavamo primerima konstruktivnih problema na konikama afine ravni koje rešavamo primenom Paskalove i Brijanšonove teoreme.

Na početku svakog poglavlja navedene su reference na koje se oslanja, kao i izvori slika u tom poglavlju.

Želim da se zahvalim svom mentoru dr Milici Žigić na pomoći, strpljenju i stručnim sugestijama tokom pisanja ovog rada.

Zahvaljujem se i članovima komisije dr Sanji Konjik i dr Jeleni Stojanov na vremenu izdvojenom za realizaciju odbrane ovog rada.

Takođe, hvala i mojoj porodici, prijateljima i mojim đacima na razumevanju i podršci tokom svih godina studija.

Novi Sad, 2021.

Nikolina Dimitrov

Glava 1

Uvod

Ovo poglavlje počinje kratkom istorijom o projektivnoj geometriji, a zatim navodimo osnovne pojmove i teoreme potrebne za razumevanje ostatka rada. Literatura korišćena prilikom sastavljanja ovog poglavlja: [3], [4] i [6]. Slika je napravljena u programu GeoGebra.

1.1 Istorijski uvod o projektivnoj geometriji

Motivacija za razvoj projektivne geometrije dolazi iz likovne umetnosti izučavanjem tehnike crtanja iluzije prostorne dubine (linearne (geometrijske) perspektive u umetnosti), kao što realno vidimo, koja se zasniva na prirodnom zakonu da je smanjivanje likova srazmerno povećanju njegove udaljenosti od posmatrača. Tako, u doba rane renesanse u Italiji, otkrivanjem geometrijske perspektive, nastaje projektivna geometrija. Izumiteljem geometrijske perspektive smatra se italijanski arhitekta Bruneleski[1], ali velike zasluge pripisuju se i njegovom savremeniku Albertiju[2] koji je analizirao prirodu slikanja i istraživao elemente perspektive i kompozicije.

Osnivačem projektivne geometrije smatra se francuski matematičar Dezarg[3]. Njegova knjiga o konusnim presecima, prva je knjiga iz projektivne geometrije uopšte. Za razvoj projektivne geometrije krajem 18. veka zaslužan je Monž[4] koji je izdvojio nacrtnu geometriju kao posebnu matematičku disciplinu.

Uspon i buđenje projektivne geometrije počinju početkom 19. veka. Kako je koncept geometrije našeg vizuelnog sveta bliži projektivnom nego euklidskom prostoru, lepota projektivne geometrije postepeno je privukla

[1]Filippo Brunelleschi (1377-1446), italijanski arhitekta, vajar i inženjer
[2]Leon Battista Alberti (1404-1472), italijanski arhitekta, slikar i filozof
[3]Girard Desargues (1591-1661), francuski matematičar i inženjer
[4]Gaspard Monge (1746-1818), francuski matematičar

matematičare. Počeli su sve više da veruju u beskonačno daleku tačku, a zaboravljene geometrijske ideje koje potiču još iz 17. veka ponovo su počeli dublje da istražuju.

Osnivač moderne projektivne geometrije bio je Ponsel[5], koji je 1822. godine u svom *Traktatu* izučavao osobine koje ostaju invarijantne prilikom projektivnih preslikavanja. Ovaj rad sadrži i osnovne pojmove karakteristične za projektivnu geometriju kao što su involucija, perspektivna i projektivna preslikavanja, harmonijska četvorka. Uveo je i pojam beskonačno daleke prave.

Projektivna geometrija postala je sinonim za modernu geometriju 19. veka.

Sledeći, veoma značajan korak za razvoj projektivne geometrije bilo je uvođenje homogenih koordinata, kasnih dvadesetih godina 19. veka. Za ovo su, sasvim nezavisno, bili zaslužni Mebijus[6], Fojerbah[7], Bobijije[8] i Pliker[9]. Homogene koordinate omogućile su primenu analitičkih metoda u projektivnoj geometriji, pa se sada projetkivnoj geometriji može pristupiti na dva načina sintetički i analitički.

Švajcarski matematičar Jakob Štajner[10] sistemski i sintetički je izgradio projektivnu geometriju i postavio joj temelje kao samostalnoj nauci. Nakon toga, nemački matematičar fon Štaut[11] je u potpunosti prihvatio strogi pristup i pokušao da teoriju zasnuje samo na aksiomama incidencije.

Razvoj projektivne geometrije gotovo potpuno je zaokružen krajem 19. veka radovima koje su dali italijanski matematičari Pjeri[12] i Fano[13] kojima su, po uzoru na Štauta, aksiomatski zasnovali projektivnu geometriju.

Razvoju projektivne geometrije na našim prostorima veoma je doprinela profesorka Mileva Prvanović[14].

1.2 Uvodni pojmovi

Neka je $\mathcal{T}$ skup tačaka, a $\mathcal{P}$ skup pravih. Uvedimo na ova dva skupa relaciju incidencije $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{P}$.

[5] Jean-Victor Poncelet (1788-1867), francuski inženjer i matematičar
[6] August Ferdinand Möbius(1790-1868), nemački matematičar
[7] Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), nemački matematičar
[8] Étienne Bobillier (1798-1840), francuski matematičar
[9] Julius Plücker (1801-1868), nemački matematičar
[10] Jakob Steiner (1796-1863), švajcarski matematičar
[11] Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867), nemački matematičar
[12] Mario Pieri (1860-1913), italijanski matematičar
[13] Gino Fano (1871-1952), italijanski matematičar
[14] Mileva Prvanović (1929-2016), srpska geometričarka i akademik

Za tačku A i pravu a za koje važi $(A, a) \in \mathcal{I}$ kažemo da je tačka A **incidentna** sa pravom a ili ekvivalentno, da je prava a incidentna sa A. Takođe možemo reći i da tačka A pripada pravoj a $(A \in a)$ i da prava a sadrži tačku A.

Tačke incidentne sa nekom pravom čine **niz tačaka** na toj pravoj i kažemo da su te tačke **kolinearne**. Prave incidentne sa nekom tačkom čine **pramen pravih** sa centrom u toj tački. Te prave su **konkurentne** u toj tački.

Pravu koja sadrži neke tačke A, B označavamo sa $p(A, B)$, a presek proizvoljne dve prave p i q sa $p \cdot q$.

Definicija 1.1. ***Projektivna ravan*** *je uređena trojka* $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ *koja zadovoljava sledeće tri aksiome:*

A_1. *Za svake dve tačke postoji jedinstvena prava koja je sa njima incidentna;*

A_2. *Postoji jedinstvena tačka koja je incidentna sa dve različite prave;*

A_3. *Postoje četiri tačke takve da među njima nikoje tri nisu kolinearne.*

U projektivnoj geometriji važi **princip dualiteta**. Naime, zahvaljujući simetričnosti relacije incidencije, ako neko tvrđenje koje se odnosi na incidenciju tačkaka i pravih može da se dokaže, onda važi i trvrđenje koje se od datog dobija tako što reči "tačka" i "prava" međusobno zamene mesta. Kao i reči "kolinearno" i "konkurentno", "pripada" i "sadrži" ukoliko se nalaze u tvrđenju. Novodobijeno tvrđenje naziva se **dualno tvrđenje**.

Bilo koji skup tačaka i pravih projektivne ravni predstavlja **figuru**.

Definicija 1.2. *Figura koja se sastoji od tri nekolinearne tačke i tri prave određene ovim tačkama naziva se* ***trotemenik****. Date tačke su* ***temena****, a prave njima određene su* ***stranice*** *tog trotemenika.*

Definicija 1.3. *Figura koja se sastoji od četiri tačke, od kojih nikoje tri nisu kolinearne i od šest pravih koje su njma određene naziva se* ***potpuni četvorotemenik****.*

Date tačke su njegova temena, a prave stranice. Par strana koji se ne seče u njegovom temenu je ***par naspramnih strana*** *ovog četvorotemenika.*

Tačke preseka tri para naspramnih strana potpunog četvorotemenika nazivaju se ***dijagonalne tačke*** *tog četvorotemenika.*

Definicija 1.4. ***Prost šestotemenik*** *je ravna figura koja se sastoji od šest tačaka datih u određenom cikličnom redosledu tako da nikoje tri uzastopne nisu kolinearne. Prave određene parovima susednih temena su stranice tog prostog šestotemenika.*

Naspramne strane prostog šestotemenika $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ dobijamo tako što se preskoči jedno teme između dva para susednih, parovi naspramnih strana ovog šestotemenika su: $p(A_1, A_2)$ i $p(A_4, A_5)$; $p(A_2, A_3)$ i $p(A_5, A_6)$; $p(A_3, A_4)$ i $p(A_6, A_1)$.

Figure dualne definisanim u prethodne tri definicije su **trostranik**, **potpuni četvorostranik** i **prost šetostranik**.

Relacija razdvojenosti parova tačaka regulisana je aksiomama rasporeda. Ovde navodimo samo notaciju i jednu od aksioma koja će nam biti potrebna prilikom dokaza Teoreme 2.6, a preostale aksiome i više osobina te relacije mogu se pogledati u [3] od jedanaeste do petnaeste strane (drugo potpoglavlje prvog poglavlja).

Da par tačaka A, B **razdvaja** par tačaka C, D zapisujemo: $A, B \times C, D$. Na osnovu treće aksiome rasporeda, za različite kolinearne tačke A, B, C, D važi jedna i samo jedna od relacija:

$$A, B \times C, D;\ A, C \times B, D;\ A, D \times B, C. \tag{1.1}$$

Definicija 1.5. *Par tačaka P, Q je **harmonijski konjugovan** paru tačaka R, S, u oznaci $H(P, Q; R, S)$, ako postoji potpuni četvorotemenik takav da su P i Q njegove dijagonalne tačke, a S i T pripadaju pravoj $p(P, Q)$ i onim stranama koje određuju treću dijagonalnu tačku.*

Sada ćemo da definišemo ***perspektivna i projektivna preslikavanja*** i neke njihove osobine.

Prvo definišemo tri tipa perspektivnih preslikavanja jednodimenzionih mnogostrukosti. **Jednodimenzione mnogostrukosti** su nizovi tačaka i pramenovi pravih.

Definicija 1.6. *Uzajamno jednoznačna korespondencija između pravolinijskih nizova tačaka $A, B, C, ...$ i $A', B', C', ...$, sa nosačima p i p', takva da je svaki par odgovarajućih tačaka kolinearan sa istom tačkom S, naziva se **perstpektivno preslikavanje sa centrom** S i zapisujemo*

$$p(A, B, C, ...) \overset{S}{\overline{\wedge}} p'(A', B', C', ...).$$

Definicija 1.7. *Uzajamno jednoznačna korespondencija između pramena pravih $a, b, c, ...$ sa centrom P i pramena pravih $a', b', c', ...$ sa centrom P', takva da je svaki par odgovarajućih pravih konkurentan sa istom pravom s, nazivamo **perspektivno preslikavanje sa osom** s i zapisujemo*

$$P(a, b, c, ...) \overset{s}{\overline{\wedge}} P'(a', b', c', ...).$$

Definicija 1.8. *Ako je uzajamno jednoznačna korespondencija između pravolinijskog niza tačaka $A, B, C, ...$ sa nosačem p i pramena pravih $a, b, c, ...$ sa središtem P takva da su odgovarajući elementi međusobno incidentni, to preslikavanje nazivamo* ***perspektivno*** *i zapisujemo*

$$p(A, B, C, ...) \overline{\overline{\wedge}}\, P(a, b, c, ...).$$

Iz navedenih definicija možemo uočiti da se perspektivno preslikavanje označava sa $\overline{\overline{\wedge}}$.

Za sva tri tipa perspektivnih preslikavanja važi da su i direktno i inverzno preslikavanje istog tipa.

Teorema 1.1. *Prilikom perspektivnog preslikavanja harmonijska konjugovanost i razdvojenost parova elemenata ostaju očuvane.*

Definicija 1.9. ***Projektivno preslikavanje jednodimenzionih mnogostrukosti*** *je proizvod konačnog broja pespektivnih preslikavanja. Oznaka za projektivno preslikavanje je $\overline{\wedge}$.*

Kako se projektivno preslikavanje sastoji od niza perspektivnih sledi da Teorema 1.1 važi i za projektivna preslikavanja. Takođe, kako je proizvod konačnog broja projektivnih preslikavanja zapravo proizvod konačnog broja perspektivnih preslikavanja, sledi da je i to preslikavanje projektivno.

Definicija 1.10. *Elementi koji se prilikom nekog preslikavanja preslikavaju sami na sebe nazivaju se* ***dvojni elementi*** *tog preslikavanja.*

Osnovna teorema projektivne geometrije. *Svako projektivno preslikavanje jednodimenzione mnogostukosti može se predstaviti kao proizvod dva, odnosno tri perspektivna preslikavanja i jednoznačno je određeno sa tri para odgovarajućih elemenata.*

Teorema 1.2. *Ako postoji projektivna korespondencija između dva pravolinijska niza tačaka sa različitim nosačima takva da zajednički element ova dva niza odgovara sam sebi, onda je to preslikavanje perspektivno.*

Dokaz. Neka je C zajednička tačka datih nizova tačaka. Uvek postoji perspektivno preslikavanje takvo da $p(A, B, C) \overline{\wedge}\, p(A', B', C)$. Svako perspektivno preslikavanje je i projektivno, a projektivno preslikavanje je, prema Osnovnoj teoremi projektivne geometrije, jednoznačno određeno sa tri para odgovarajućih elemenata. Dakle, ovo projektivno preslikavanje je jedinstveno, i čini ga samo jedno perspektivno preslikavanje, pa je i samo perspektivno. □

Narednu teoremu navodimo bez dokaza, dokaz se može pogledati u [3], Teorema 37 na strani 37.

Teorema 1.3. *Ako projektivno preslikavanje jednodimenzione mnogostrukosti na samu sebe ima tri dvojna elementa, onda je svaki element dvojni.*

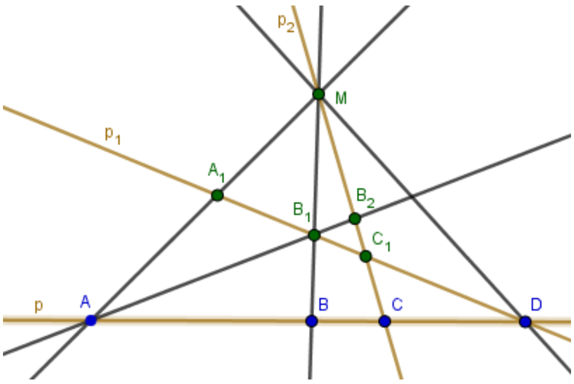
Teorema 1.4. *Neidentičko projektivno preslikavanje jednodimenzione mnogostrukosti na samu sebe može imati najviše dve dvojne tačke.*

Projektivno preslikavanje nazivamo **eliptično, parabolično ili hiperbolično** u zavisnosti od toga da li ne postoji dvojni element, postoji jedan ili postoje dva dvojna elementa tog preslikavanja.

Opis dokaza Teoreme 1.4 i dokazi postojanja ova tri tipa projektivnih preslikavanja može se pogledati u [3] na stranama 40 i 41.

Teorema 1.5. *Uvek postoji projektivno preslikavanje četiri proizvoljne tačke tako da tačke u parovima međusobno zamene mesta.*

Dokaz. Neka su A, B, C, D proizvoljne kolinearne tačke. Treba da pokažemo da postoji projektivno preslikavanje takvo da $p(A, B, C, D) \barwedge p(B, A, D, C)$.



Slika 1.1. Teorema 1.5

Neka je p_1 proizvoljna prava koja sadrži D, i tačka M van pravih p i p_1. Preseke pravih $p(A, M), p(B, M), p(C, M)$ sa pravom p_1 označimo sa A_1, B_1, C_1 (redom). Pravu $p(M, C)$ označimo sa p_2, a tačku preseka te prave i prave $p(A, B_1)$ sa B_2, kao na Slici 1.1.

Uočimo sada sledeći niz perspektivnih preslikavanja

$$p(A, B, C, D) \overset{M}{\overline{\overline{\wedge}}} p_1(A_1, B_1, C_1, D) \overset{A}{\overline{\overline{\wedge}}} p_2(M, B_2, C_1, C) \overset{B_1}{\overline{\overline{\wedge}}} p(B, A, D, C).$$

Ovaj konačan niz perspektivnih preslikavanja je projektivno preslikavanje

$$p(A, B, C, D) \barwedge p(B, A, D, C).$$

$\square$

Definicija 1.11. ***Involucija*** *je preslikavanje jednodimenzione mnogostrukosti na samu sebe čiji kvadrat je identičko preslikavanje.*

Definicija 1.12. *Neka je π preslikavanje jednodimenzione mnogostrukosti na samu sebe i A, A' par odgovarajućih elemenata tog preslikavanja. Ako je $\pi(A) = A'$ i $\pi(A') = A$, onda ovaj par tačaka nazivamo* ***par dvostruko odgovarajućih elemenata****.*

Teorema 1.6. *Ako pri projektivnom preslikavanju jednodimenzione mnogostrukosti na samu sebe postoji jedan par dvostruko odgovarajućih elemenata, onda je to preslikavanje involucija.*

Dokaz. Neka je π projektivno preslikavanje takvo da

$$p(A, A', B, B') \barwedge p(A', A, B', D).$$

Na osnovu Teoreme 1.5 postoji i projektivno preslikavanje

$$p(A', A, B', D) \barwedge p(A, A', D, B').$$

Pa, kao proizvod ova dva preslikavanja dobijamo projektivno preslikavanje

$$p(A, A', B, B') \barwedge p(A', A, B', D) \barwedge p(A, A', D, B')$$

koje ima tri dvojne tačke, pa je na osnovu Teoreme 1.3 identičko. Dakle, važi $B \equiv D$, pa smo dobili da za tačku B važi $\pi(B) = B'$ i $\pi(B') = B$. Kako je B bila proizvoljna tačka to znači da je svaki par odgovarajućih elemenata dvostuko odgovarajući, dakle π je involucija. $\square$

Posledica 1.7. *Involucija na jednodimenzionoj mnogostrukosti jednoznačno je određena pomoću dva para dvostruko odgovarajućih elemenata.*

Definicija 1.13. *Ravno polje tačaka (skup svih tačaka jedne ravni) i ravno polje pravih (skup svih pravih jedne ravni) nazivamo* ***dvodimenzione mnogostrukosti****.*

Definicija 1.14. *Obostrano jednoznačno preslikavanje između dvodimenzionih mnogostrukosti je projektivno ako i samo ako prilikom tog preslikavanja relacija incidencije ostaje očuvana.*

Definicija 1.15. *Projektivno preslikavanje dvodimenzione mnogostrukosti na dvodimenzionu mnogostrukost koje menja prirodu elemenata, odnosno preslikava kolinearne tačke na konkurentne prave i obrnuto, naziva se* ***korelacija****.*

Definicija 1.16. *Neka je ρ korelacija. Tačka A je konjugovana sa tačkom A' ako $A' = \rho(A) \cdot \rho^{-1}(A)$, a prava a' je konjugovana sa pravom a u odnosu na datu korelaciju ako $a' = p(\rho(a), \rho(a^{-1}))$.*

Definicija 1.17. *Tačka A je* ***dvojna tačka*** *korelacije ρ ako $\rho(A) = \rho^{-1}(A)$, a njoj odgovarajuća prava je $\rho(A) = \rho^{-1}(A)$.*

Ako je $\rho(a) = \rho^{-1}(a)$, prava a je ***dvojna prava*** *korelacije ρ, a njoj odgovarajuća tačka je $\rho(a) = \rho^{-1}(a)$.*

Definicija 1.18. ***Polaritet*** *je korelacija ravni na samu sebe takva da je svaka tačka dvojna i svaka prava dvojna. Prava $\pi(A)$ je* ***polara*** *tačke A u odnosu na polaritet π, a tačka $\pi(b)$ je* ***pol*** *prave b u odnosu na taj polaritet.*

Teorema 1.8. *Polaritet na svakoj pravoj koja nije incidentna sa svojim polom određuje involuciju konjugovanih tačaka.*

Definicija 1.19. ***Autopolarni trotemenik*** *je trotemenik čije je svako teme pol naspramne strane.*

Sa $(ABC)(Pp)$ označavamo polaritet određen autopolarnim trotemenikom ABC, tačkom P i njenom polarom p.

Definicija 1.20. ***Autokonjugovana tačka*** *je tačka koja je incidentna sa svojom polarom. Prava incidentna sa svojim polom naziva se* ***autokonjugovana prava****.*

Teorema 1.9. *Ako je prava incidentna sa dvema autokonjugovanim tačkama ona ne može biti autokonjugovana.*

Teorema 1.10. *Sa svakom pravom mogu biti incidentne najviše dve autokonjugovane tačke.*

Na dvema stranama trotemenika indukovane su hiperbolične, a na trećoj eliptična involucija konjugovanih tačaka.

Sada ćemo navesti analitički izraz polariteta i uslov da tačke budu konjugovane. Detaljnije o ovome može se pročitati u [1] na strani 182.

Neka je data tačka $X = (x_1, x_2, x_3)$ i njena polara $\pi(X) = (X_1, X_2, X_3)$. Jednačine polariteta u projektivnoj ravni su:

$$X_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j,\ i = 1, 2, 3, \tag{1.2}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} X_j,\ i = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

gde je $A_{ij}(i, j \in 1, 2, 3)$ kofaktor elementa a_{ij} u matrici (a_{ij}). Prvom jednačinom dobijamo koordinate polare date tačke X, a drugom koordinate pola prave čije su koordinate (X_1, X_2, X_3).

Tačke $X = (x_1, x_2, x_3)$ i $Y = (y_1, y_2, y_3)$ su konjugovane, ako X pripada polari $\pi(Y) = (Y_1, Y_2, Y_3)$, dakle ako važi jednakost

$$\sum_{i=1}^{3} x_i Y_i = 0,$$

to jest

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0.$$

U nastavku definišemo afinu ravan.

Afina ravan nastaje od projektivne ravni uklanjanjem proizvoljne prave, tu pravu nazivamo beskonačno daleka prava, l_∞.

Definicija 1.21. *Prave afine ravni čija tačka preseka pripada pravoj l_∞ su* ***paralelne prave****.*

Potpuni četvorotemenik čija se dva para naspramnih strana seku na pravoj l_∞, odnosno dve njegove dijagonalne tačke pripadaju toj pravoj, naziva se **paralelogram**.

Dijametar parabole koji je normalan na sistem paralelnih pravih koje su sečice te parabole naziva se **osa parabole**, a tačka preseka parabole i njene ose je **teme parabole**.

Tangenta na parabolu u njenom temenu normalna je na osu.

Glava 2

Definicija i osnovne osobine konika

Ovo poglavlje čine četiri potpoglavlja. Počinjemo kratkim istorijskim uvodom o konikama, zatim navodimo tri definicije konika u projektivnoj geometriji. U trećem potpoglavlju definišemo polaritet indukovan konikom i njegove osobine. Nakon toga, ovo poglavlje završavamo Štajnerovom teoremom. Literatura korišćena prilikom sastavljanja ovog poglavlja: [1], [2] i [3]. Sve slike u ovom poglavlju pravljene su u programu GeoGebra.

2.1 Istorijski uvod o konikama

Proučavanje konika počinje u staroj Grčkoj 430. godine pre nove ere, pojavom problema udvostručenja kocke. Prema legendi u Atini je oko 430. godine pre nove ere harala kuga, pa su Atinjani pomoć potražili u proročištu u Delosu. Tamo su dobili odgovor da će kugu pobediti samo ako uspeju da udvostuče oltar Apolonu (koji je bio oblika kocke). Rešavanje ovog Delskog problema dovelo je do otkrića konika i njihovih osobina. Algebarski, Delski problem se svodi na rešavanje problema:

$$x^3 = 2 \cdot a^3 \text{ odnosno } \frac{x}{a} = \sqrt[3]{2}$$

gde a i x označavaju stranice početne i novodobijene (duplirane) kocke. Hipokrat[1] je pojednostavio ovaj problem, sveo ga je na problem pronalaženja vrednosti x i y koje zadovoljavaju sledeću jednakost:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2 \cdot a}.$$

[1]Hippocrates of Chios (470. p.n.e.-410. p.n.e.), grčki matematičar

Menehmo[2] je oko 340. godine p.n.e. dao dva rešenja ove Hipokratove verzije Delskog problema, jedno pomoću dve parabole $y^2 = 2 \cdot a \cdot x$ i $x^2 = a \cdot y$, a drugo koristeći presek druge parapole i hiperbole $x \cdot y = 2 \cdot a^2$. Smatra se da je on (rešavajući ovaj problem) prvi otkrio, definisao i opisao konike, krive dobijene presekom ravni i kružnog konusa. Dvodimenzionu konstrukciju ovih krivih osmislili su njegovi naslednici. A prema Zojtenu[3], smatra se da je Euklid[4] prvi konstruisao konus kao geometrijsko mesto tačaka čija je udaljenost od fiksne tačke (fokusa) proporcionalna udaljenosti od fiksne prave (direktrise). Nazive elipsa, hiperbola i parabola i velik doprinos razvoju konika dao je Apolonije[5]. Od oko 300. godine narednih 12 vekova istorija konika je prazna. Značajnijih doprinosa u izučavanju konika nema sve do 1522. godine kada je Vernjer[6] iz Nirnberga otkrio neke osobine konika, projektujući krug. Naredna tri veka, osim Keplera[7], Njutna [8], Maklaurina[9] i Brekendridža[10] veliki doprinos za razvoj konika dali su i francuzi: Dezarg[11], Paskal[12], Midorž[13], La Ir[14], Žergon[15], Brianšon[16], Ponsel[17] i Šasl[18]. Kepler je pokazao da je parabola istovremeno granični oblik elipse i hiperbole. Prva nemetrička konstrukcija konika pripisuje se Brekendridžu i Maklaurinu. Za novija otkrića (18. vek) u izučavanju konika, među najzaslužnijima su švajcarski i nemački matematičari Jakob Štajner[19] i fon Štaut[20] čije definicije konika će biti prikazane u nastavku.

[2]Menaechmus (380. p.n.e.-320. p.n.e.), grčki matematičar
[3]Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920), danski matematičar
[4]Euclid of Alexandria (325. p.n.e.-265. p.n.e.), grčki matematičar
[5]Apollonius of Perga (262. p.n.e.-190. p.n.e.), grčki matematičar
[6]Pierre Vernier (1584-1638), francuski matematičar
[7]Johannes Kepler (1571-1630), nemački matematičar, astronom i astrolog
[8]Isaac Newton (1643-1727), engleski matematičar, fizičar, astronom, alhemičar
[9]Colin Maclaurin (1698-1746), škotski matematičar
[10]William Braikenridge (1700-1762), škotski matematičar i teolog
[11]Girard Desargues (1591-1661), francuski matematičar
[12]Blaise Pascal (1623-1662), francuski matematičar, fizičar i filozof
[13]Claude Mydorge (1585-1647), francuski matematičar
[14]Philippe de La Hire (1640-1718), francuski matematičar
[15]Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), francuski matematičar
[16]Charles Julien Brianchon (1783-1864), francuski matematičar
[17]Jean Victor Poncelet (1788-1867), francuski matematičar
[18]Michel Chasles (1793-1880), francuski matematičar
[19]Jakob Steiner (1796-1863), švajcarski matematičar
[20]Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867), nemački matematičar

2.2 Tri definicije konika

U ovom delu ćemo predstaviti tri definicije konika u projektivnoj geometriji: fon Štautovu (preko hiperboličkog polariteta), Štajnerovu i analitičku definiciju (jednačina konike).

Prvo navodimo definiciju po fon Štaut-u i neke osobine konika.

Definicija 2.1. *(fon Štautova)* ***Konika*** *je skup autokonjugovanih tačaka (pravih) hiperboličkog polariteta.*

Definicija 2.2. *Polara svake tačke konike je autokonjugovana prava, to je* ***tangenta*** *konike u toj tački.*

Dualno, pol svake prave konike je autokonjugovana tačka, to je ***tačka dodira*** *konike i te prave.*

Na osnovu Teoreme 1.10 i Definicije 2.1. sledi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.1. *Sa pravom mogu biti incidentne najviše dve tačke konike.*

Dakle, prava i konika mogu da imaju jednu (tada pravu zovemo tangenta), nijednu ili dve zajedničke tačke. Prvi slučaj smo definisali, sada ćemo i preostala dva slučaja i neke osobine tih pravih.

Definicija 2.3. *Prava je* ***sečica*** *ili* ***spoljašnja prava*** *konike u zavisnosti od toga da li polaritet na toj pravoj određuje hiperboličnu ili eliptičnu involuciju.*

Definicija 2.4. *Tačka je* ***spoljašnja*** *ili* ***unutrašnja*** *za koniku u zavisnosti od toga da li polaritet u toj tački određuje hiperboličku ili eliptičnu involuciju.*

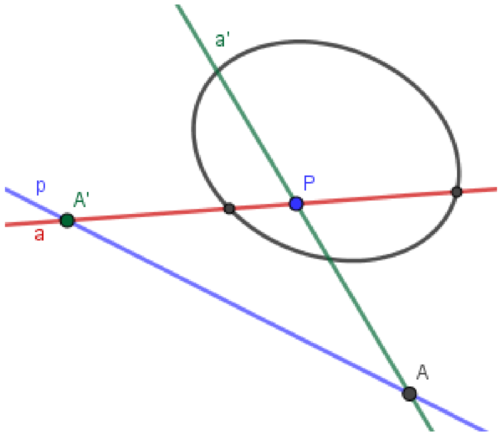
Kako za svaku tačku važi da polaritet u toj tački i na njenoj polari određuje involuciju istog tipa, važe sledeće teoreme:

Teorema 2.2. *Pol spoljašnje prave je unutrašnja tačka.*

Teorema 2.3. *Pol sečice je spoljašnja tačka.*

Teorema 2.4. *Prava koja sadrži unutrašnju tačku konike je njena sečica.*

Dokaz. Neka je P unutrašnja tačka konike i p njena polara, koja je spoljašnja prava. Neka je a prava incidentna sa tačkom P, a tačka A' presek pravih a i p. Polaru tačke A', pravu $p(A,P)$, obeležimo sa a' (Slika 2.1). Dobijeni trostranik apa' je autopolaran. Sada, kako hiperbolični polaritet na dvema stranama autopolarnog trotemenika (trostranika) indukuje hiperbolične, a na trećoj eliptičnu involuciju i kako je prava p spoljašnja prava, pa je na njoj indukovana eliptična involucija. Sledi da je na pravoj a indukovana hiperbolična involucija, dakle ona je sečica konike. □



Slika 2.1. Teorema 2.4

Teorema 2.5. *Svaka tačka spoljašnje prave je spoljašnja tačka za tu koniku.*

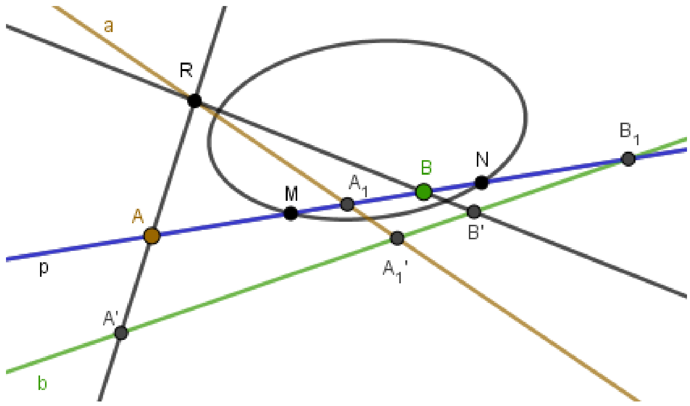
Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. da postoji tačka koja je unutrašnja za tu koniku i data spoljašnja prava je sa njom incidentna. Tada, na osnovu prethodne teoreme, sledi da je data prava sečica ove krive, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je ona spoljašnja prava. Dakle, važi navedeno tvrđenje. □

Teorema 2.6. *Sa svakom sečicom incidentne su i spoljašnje i unutrašnje tačke konike.*

Dokaz. Neka je p data sečica i neka su M i N tačke preseka sa konikom. Pretpostavimo da postoji tačka A koja je spoljašnja tačka konike i incidentna je sa pravom p. Pokažimo da postoji i unutrašnja tačka koja je incidentna sa p (mogli smo da krenemo i od pretpostavke da data sečica sadrži unutrašnju tačku konike, pa istom metodom da pokažemo da sadrži i spoljašnju).

Polaru tačke A obeležimo sa a (Slika 2.2). Kako je A spoljašnja tačka, sledi da je a sečica, pa je na njoj indukovana hiperbolična involucija. Neka je R dvojna tačka te involucije. Prava $p(A, R)$ je tada dvojna prava involucije indukovane u pramenu sa središtem A. Za par AA_1 dvostruko odgovarajućih tačaka involucije konjugovanih tačaka važi $A, A_1 \times M, N$.

Neka je tačka $B \in [MA_1N]$. Neka je b njena polara i $B_1 = b \cdot p$. Tada, za par B, B_1, važi $B, B_1 \times M, N$. Kako tada $\neg(A, B_1 \times A_1, B)$ i $\neg(A, A_1 \times B, B_1)$, sledi da važi $A, B \times A_1, B_1$ (ovo važi jer u suprotnom, kada bi pretpostavili da $\neg(A, B \times A_1, B_1)$ došli bismo u kontradikciju sa trećom aksiomom rasporeda tj. sa (1.2)). A, zbog perspektivnog preslikavanja, važi i $A', B' \times A_1', B_1$, gde je A' pol prave $p(B, R)$. Kako je A_1' pol prave p, sledi da je par A_1', B_1 par



Slika 2.2. Teorema 2.6

konjugovanih tačaka. Dakle, na pravoj b involucija konjugovanih tačaka je eliptična, pa je tačka B unutrašnja, a važi i $B \in p$. Dakle, sečica p sadrži i unutrašnju i spoljašnju tačku konike. □

Sada ćemo navesti Štajnerovu definiciju.

Definicija 2.5. *(Štajnerova)* ***Konika*** *je skup svih tačaka preseka odgovarajućih pravih dva projektivna pramena pravih koji nisu perspektivni.*

U sledećem poglavlju ćemo navesti i dokazati teoreme koje pokazuju da je svaka Štajnerova konika istovremeno i fon Štautova i obratno. Dakle, Štajnerova i fon Štautova definicija su ekvivalentne.

Preostalo nam je da damo još analitičku definiciju konika.

Kako je konika skup autokonjugovanih tačaka hiperboličkog polariteta, njenu jednačinu ćemo izvesti iz analitičkog izraza za polaritet uz uslove da je tačka $X = (x_1, x_2, x_3)$ autokonjugovana za taj polaritet i da je on hiperbolički.

Tačka X je autokonjugovana za polaritet definisan jednačinama (1.2) i (1.3) ako zadovoljava jednakost $\sum_{i=1}^{3} x_i X_i = 0$, a dati polaritet je hiperbolički ako ova jednačina ima nenula rešenje.

Dakle, konika je skup svih tačaka koje su rešenje jednakosti

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0,$$

tj. njena jednačina je:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

2.3 Polaritet indukovan konikom

Na osnovu fon Štautove definicije videli smo da hiperbolički polaritet indukuje koniku, a sada posmatramo polaritet indukovan konikom. U ovom potpoglavlju biće opisane neke osobine polariteta i konjugovanih tačaka u odnosu na koniku.

Prve tri teoreme navodimo bez dokaza.

Teorema 2.7. *Bilo koje dve konjugovane tačke na sečici PQ su harmonijski konjugovane u odnosu na P i Q.*

Obratno,

Teorema 2.8. *Tačke na sečici PQ koje su harmonijski konjugovane u odnosu na P i Q su par konjugovanih tačaka u odnosu na koniku.*

Važi i dualno,

Teorema 2.9. *Bilo koje dve konjugovane prave incidentne sa spoljašnjom tačkom, harmonijski su konjugovane u odnosu na tangente iz te tačke.*

Neka je C spoljašnja tačka i a i b tangente na koniku iz te tačke. Prave harmonijski konjugovane u odnosu na a i b su par konjugovanih pravih u odnosu na datu koniku.

Pre nego što opišemo konstrukciju polare date tačke i tangente, navešćemo teoreme na osnovu kojih će slediti ta konstrukcija.

Teorema 2.10. *Dijagonalni trotemenik potpunog četvorotemenika upisanog u koniku je autopolaran.*

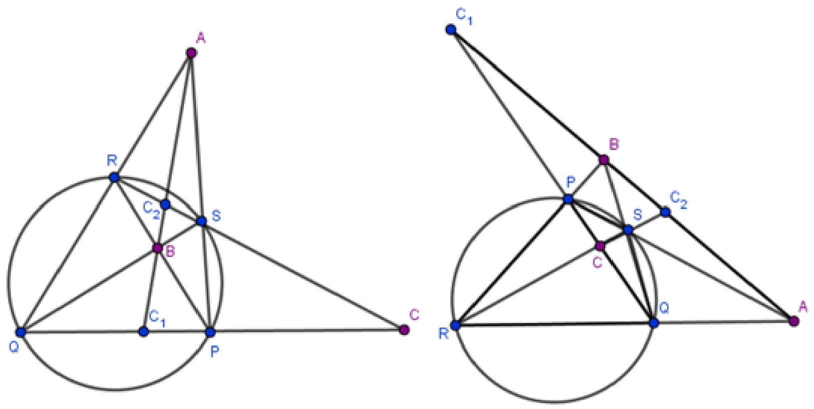
Dokaz. Neka je $PQRS$ dati potpuni četvorotemenik upisan u koniku i neka su, kao na Slici 2.3, njegove dijagonalne tačke

$$A = p(P,S) \cdot p(Q,R),\ B = p(Q,S) \cdot p(R,P),\ C = p(R,S) \cdot p(P,Q).$$

Preseci prave $p(A,B)$ i strana PQ i RS su tačke C_1 i C_2 (redom), takve da važi $H(P,Q;C,C_1)$ i $H(R,S;C,C_2)$. Kako su C, C_1 tačke sečice $p(P,Q)$ koje su harmonijski konjugovane u odnosu na P i Q, na osnovu Teoreme 2.8 sledi da je C_1 konjugovano sa C. Isto važi i za tačke C, C_2 sečice $p(R,S)$. Dakle, tačke C_1 i C_2 su obe konjugovane sa tačkom C, pa je polara tačke C prava sa kojom su te tve tačke incidentne, a to je $p(A,B)$.

Slično, posmatranjem preostala dva para naspramnih strana polaznog četvorotemenika i odgovarajućih tačaka, slediće da je polara tačke A prava $p(B,C)$, a polara tačke B prava $p(A,C)$.

Dakle, dijagonalni trotemenik ABC četvorotemenika $PQRS$ je autopolaran, što je i trebalo pokazati. □



Slika 2.3. Teorema 2.10

Važi i dualna

Teorema 2.11. *Dijagonalni trostranik potpunog četvorostranika čije strane su tangente konike je autopolaran.*

Na osnovu ove dve teoreme i osobina polariteta, sledi:

Teorema 2.12. *Potpuni četvorotemenik koji je upisan u koniku i potpuni četvorostranik koji je oko nje opisan tako da su njegove stranice polare odgovarajućih temena upisanog, imaju zajednički dijagonalni trotemenik.*

Dokaz. Neka su $PQRS$ i $pqrs$ dati potpuni četvorotemenik i četvorostranik i neka su

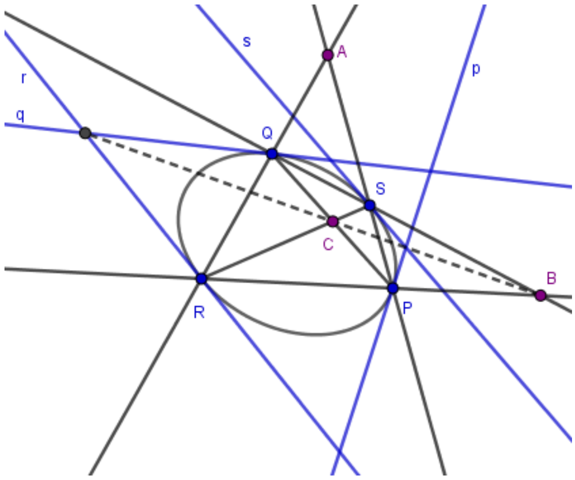
$$A = p(S,P) \cdot p(Q,R),\ B = p(R,P) \cdot p(Q,S),\ C = p(R,S) \cdot p(P,Q)$$

dijagonalne tačke tog četvorotemenika (Slika 2.4). Tačka A je incidentna sa polarama tačaka $q \cdot r$ i $p \cdot s$ (jer su to $p(Q,R)$ i $p(P,S)$), pa je polara tačke A prava određena sa te dve tačke. Dakle, polara tačke A je dijagonala $(q \cdot r)(p \cdot s)$ četvorostranika $pqrs$, što se poklapa sa $p(B,C)$.

Analogno, kako B pripada polarama tačaka $q \cdot s$ i $r \cdot p$, njena polara će biti dijagonala $(q \cdot s)(r \cdot p)$, što je upravo $p(A,C)$. Isto, kako je tačka C incidentna sa polarama od $r \cdot s$ i $q \cdot p$, njena polara je dijagonala $(r \cdot s)(q \cdot p)$ četvorostranika $pqrs$, što se poklapa sa $p(A,B)$.

Dakle, trotemenik ABC je zajednički dijagonalni trotemenik za četvorotemenik $PQRS$ i četvorostranik $pqrs$. □

Naredne dve teoreme opisuju konstrukcije polare date tačke (koja ne pripada krivoj) i tangente, u odnosu na polaritet indukovan konikom. Koniku posmatramo kao skup autokonjugovanih tačaka.



Slika 2.4. Teorema 2.12

Teorema 2.13. *Da bismo konstruisali polaru date tačke C, koja ne pripada konici, konstruišemo dve sečice $p(P,Q)$ i $p(R,S)$ iz te tačke. Polara tačke C je prava koja sadrži tačke preseka $p(P,S) \cdot p(Q,R)$ i $p(R,P) \cdot p(Q,S)$.*

Dokaz. Konstruišimo dve sečice na koniku iz date tačke C. Neka su P, Q i R, S tačke preseka tih sečica sa konikom. Kako su P, Q, R, S tačke konike, njihove polare su tangente na koniku u tim tačkama, neka su to p, q, r, s, redom.

Sada, ovako dobijeni četvorotemenik $PQRS$ i četvorostranik $pqrs$, na osnovu prethodne teoreme imaju zajednički dijagonalni trotemenik. Primetimo, $C = p(P,Q) \cdot p(R,S)$ pa je to jedna dijagonalna tačka četvorotemenika $PQRS$. Konstruišimo i preostale dve dijagonalne tačke tog četvorotemenika. Neka su to

$$A = p(P,S) \cdot p(Q,R), \; B = p(Q,S) \cdot p(P,R),$$

kao na Slici 2.4 iz dokaza prethodne teoreme. Dobijeni trotemenik ABC je zajednički dijagonalni trotemenik za $PQRS$ i $pqrs$.

Kako je četvorotemenik $PQRS$ upisan u koniku i ABC je njegov dijagonalni trotemenik, na osnovu Teoreme 2.10 sledi da je trotemenik ABC autopolaran i polara tačke C je prava koja sadrži stranicu AB. Odnosno, na osnovu definicije tačaka A i B, polara tačke C je prava koja sadrži tačke preseka $p(P,S) \cdot p(Q,R)$ i $p(R,P) \cdot p(Q,S)$. $\square$

Pol date prave konstruiše se kao tačka preseka polara dve proizvoljne tačke te prave.

Teorema 2.14. *Tangenta u tački P na konici konstruiše se spajanjem te tačke sa polom bilo koje sečice kroz P.*

Dokaz. Konstruišemo tri sečice koje sadrže datu tačku, neka su to $p(P, Q)$, $p(P, S)$ i $p(P, R)$. Označimo dijagonalne tačke dobijenog četvorotemenika $PQRS$ sa

$$A = p(S, Q) \cdot p(R, P),\; B = p(R, Q) \cdot p(S, P),\; C = p(S, R) \cdot p(Q, P).$$

Kako je P tačka konike, njena polara je tražena tangenta, dakle treba konstruisati polaru tačke P.

Posmatrajmo sečice $p(P, Q)$ i $p(P, S)$, polovi datih sečica, biće tačke preseka polara njihove dve proizvoljne tačke.

Pa će tako, pol sečice PQ biti presek polara njenih tačaka C i P. Na osnovu prethodne teoreme znamo da je polara tačke C prava $p(A, B)$, a polaru tačke P označimo sa p.

Sada je tačka $X = p \cdot p(A, B)$ pol sečice $p(P, Q)$.

Slično, pol sečice PS biće tačka $Y = p \cdot p(A, C)$, gde je na osnovu prethodne teoreme $p(A, C)$ polara tačke B incidentne sa ovom sečicom.

Primetimo da je tačka $A = p(A, B) \cdot p(A, C)$, a kako ove prave seku polaru p u tačkama X i Y sledi da $A = X = Y$. Dakle, polara tačke P je $p(A, P)$. Tačka A je teme autopolarnog trotemenika ABC, pa je pol sečice određene tačkama B, C. □

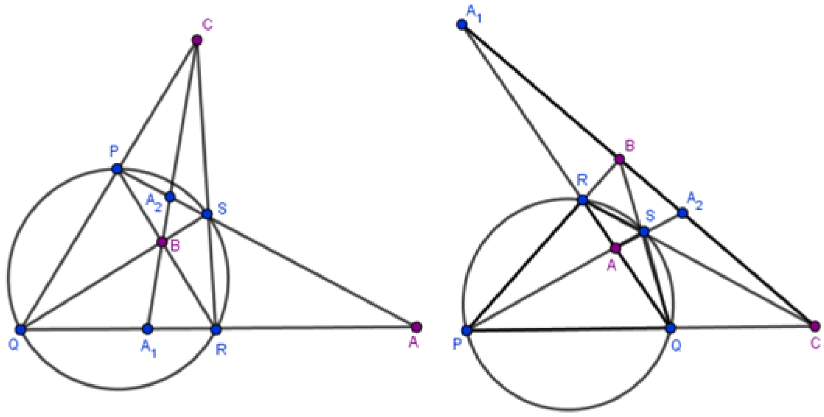
2.4 Štajnerova teorema

U ovom delu osim Štajnerove teoreme, date su i teoreme koje opisuju na koje načine je konika jedinstveno određena i naglašeno je koje teoreme predstavljaju potreban i dovoljan uslov ekvivalentnosti Štajnerove i fon Štautove konike.

Prvo ćemo pokazati teoremu koja opisuje vezu između konjugovanih tačaka i konjugovanih pravih.

Teorema 2.15. *(Zajdevic[21]) Prava konjugovana sa jednom stranom trotemenika upisanog u koniku, seče druge dve njegove strane u paru konjugovanih tačaka.*

Dokaz. Neka je PQR dati trotemenik. Prava konjugovana sa stranom ovog trotemenika je polara proizvoljne tačke te strane. Uočimo tačku C strane PQ trotemenika PQR, kao na Slici 2.5. Polara c ove tačke konjugovana je



Slika 2.5. Teorema 2.15

sa PQ. Dakle, treba da odredimo polaru ove tačke i da pokažemo da seče preostale dve strane trotemenika u paru konjugovanih tačaka.

Neka je tačka S drugi presek prave $p(R, C)$ i konike. Tačka C je jedna dijagonalna tačka dobijenog četvorotemenika $PQRS$, a neka su preostale dve $A = p(P, S) \cdot p(Q, R)$ i $B = p(Q, S) \cdot p(P, R)$. Na osnovu Teoreme 2.10 ovaj trotemenik ABC je autopolaran i polara tačke C je prava $p(A, B)$. Primetimo, konjugovane tačke A i B upravo su tačke preseka polare c i strana QR i RP datog trotemenika PQR. $\square$

Teorema 2.16. *(Štajnerova) Neka dve proizvoljne prave x i y promenljivoj tački konike pridružuju dve fiksne tačke iste konike. Za ovo preslikavanje na konici uspostavljeno između dva pramena pravih važi: $x \barwedge y$.*

Dokaz. Neka je $R = x \cdot y$ promenljiva, a P i Q fiksne tačke date konike. Tačku preseka tangenti p i q u tačkama P i Q obeležimo sa D i neka je c fiksna prava koja sadrži tačku D i seče prave x i y u tačkama B i A (redom), kao na Slici 2.6.

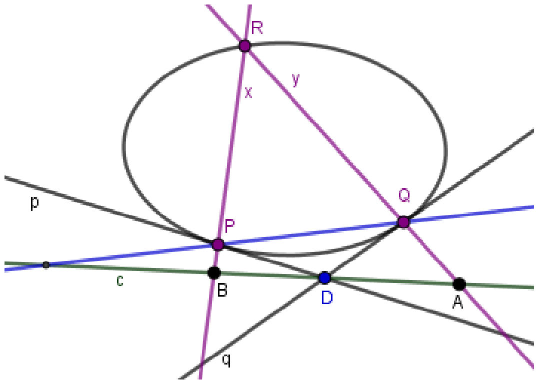
Bez obzira na položaj tačke R, trotemenik PQR je upisan u datu koniku, a tačka D je pol njegove strane $p(P, Q)$. Dakle, prava c je konjugovana sa stranom $p(P, Q)$ trotemenika PQR, pa na osnovu prethodne teoreme c seče preostale njegove strane $p(P, R)$ i $p(Q, R)$ u paru konjugovanih tačaka B i A.

Dakle, kada se involucija konjugovanih tačaka $p(B, ...) \barwedge p(A, ...)$ projektuje iz P odnosno Q, dobija se traženo projektivno preslikavanje

$$x \barwedge B \barwedge A \barwedge y.$$

$\square$

[21] Franz Seydewitz (1807-1852), nemački matematičar



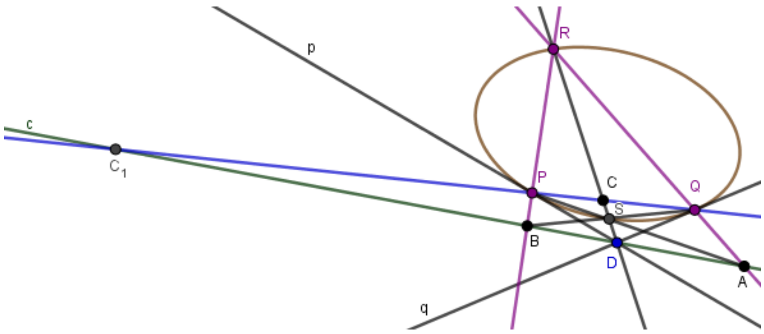
Slika 2.6. Teorema 2.16

Na osnovu ove teoreme, svaka fon Štautova konika je istovremeno i Štajnerova.

Pre nego što navedemo obrnutu Štajnerovu teoremu, na osnovu koje je svaka Štajnerova konika fon Štautova, prvo pokazujemo lemu koja se koristi u njenom dokazu.

Lema 2.17. *Konika je određena sa tri svoje tačke i tangentama u dvema od njih.*

Dokaz. Neka su P, Q, R date tačke, p, q tangente u P i Q i $D = p \cdot q$. Konstruišemo tačku $C = p(P, Q) \cdot p(R, D)$ i njoj harmonijski konjugovanu



Slika 2.7. Lema 2.17

tačku C_1 u odnosu na P i Q. Neka je, c prava koja sadrži tačke C_1 i D i seče prave $p(R, P)$ i $p(R, Q)$ u A i B. Tražena konika dobija se kao skup autokonjugovanih tačaka polariteta $(ABC)(Pp)$.

Primetimo, dobijeni autopolaran trotemenik ABC je dijagonalni trotemenik četvorotemenika $PQRS$ upisanog u dobijenu koniku, Slika 2.7. $\square$

Teorema 2.18. *(obrnuta Štajnerova) Neka su x i y predstavnici dva pramena pravih sa središtima u tačkama P i Q tako da $x \barwedge y$ i nije $x \doublebarwedge y$. Tada sve tačke preseka $x \cdot y$ pripadaju konici kroz P i Q.*

Dokaz. Označimo pravu $p(P, Q)$ sa d. Kako dato projektivno preslikavanje $x \barwedge y$ nije perspektivno, d se ne slika samo u sebe. Dakle, postoje prave p i q, tako da se ovim projektivnim preslikavanjem p slika u d i d u q.

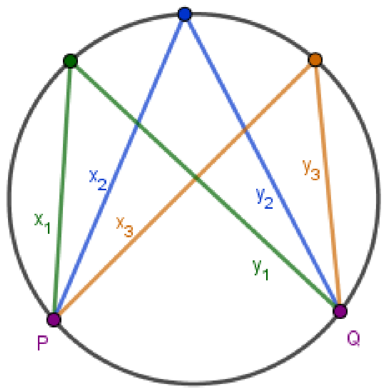
Na osnovu Leme 2.17, postoji konika takva da sadrži tačke P, Q i proizvoljnu tačku $x' \cdot y'$ (predstavnik promenljivih tačaka $x \cdot y$) i prave p i q su njene tangente u tačkama P i Q. Sada, na osnovu Teoreme 2.16 ova konika određuje projektivno preslikavanje između pramena pravih sa centrima P i Q, a kako pri tom preslikavanju pravama x', p, d prvog pramena odgovaraju prave y', d, q drugog pramena, sledi da je to baš dato projektivno preslikavanje $x \barwedge y$. □

Posledica 2.19. *Ako projektivno, ali ne i perspektivno, preslikavanje između dva pramena pravih x i y sa centrima u tačkama P i Q ima osobinu da $xsd \barwedge ysq$ (gde $s = p(P, Q)$), tada su p i q tangente u P i Q na koniku određenu tačkama $x \cdot y$.*

Sledeća teorema predstavlja još jednu karakterizaciju konike.

Teorema 2.20. *Konika je jedinstveno određena sa pet svojih tačaka, takvih da među njima nema tri kolinearne.*

Dokaz. Neka su date tačke P i Q i prave x_1, x_2, x_3 i y_1, y_2, y_3 tako da su x_i elementi pramena pravih sa centrom u tački P, a y_i predstavnici pramena pravih sa centrom u Q $(i \in 1, 2, 3)$. Na osnovu Teoreme 2.18, projektivno



Slika 2.8. Teorema 2.20

preslikavanje određeno ovim elementima, $x_1x_2x_3 \barwedge y_1y_2y_3$, određuje koniku kroz pet tačaka (P, Q i tačke $x_1 \cdot y_1,\ x_2 \cdot y_2,\ x_3 \cdot y_3$).

Ako je X proizvoljna tačka ove konike, različita od polaznih pet tačaka, neka su $x = p(X, P)$ i $y = p(X, Q)$ prave koje povezuju ovu tačku sa centrima pramena. Tada na osnovu Teoreme 2.16 važi $xx_1x_2x_3 \barwedge yy_1y_2y_3$. Dakle, tačke P, Q i $x_1 \cdot y_1,\ x_2 \cdot y_2,\ x_3 \cdot y_3$ određuju jedinstvenu koniku. □

Lema 2.17. je specijalan slučaj ove teoreme kada se dva para od datih pet tačaka poklapaju.

Važe i teoreme koje su dualne teoremi Zajdevica i Štajnerovoj.

Teorema 2.21. *(dualna Zajdevic) Svaka tačka konjugovana sa temenom trotemenika opisanog oko konike, sa ostalim temenima povezana je sa parom konjugovanih pravih.*

Teorema 2.22. *(dualna Štajnerova) Sve prave određene elementima dva projektivna, ali ne i perspektivna pravolinijska niza tačaka, pripadaju istoj konici kao i nosači tih pravolinijskih nizova.*

Glava 3

Važne teoreme

Ovo poglavlje posvećeno je važnim teoremama projektivne geometrije koje prikazuju značajne osobine konika: Paskalovoj, Brijanšonovoj i Dezargovoj involutivnoj teoremi. Definisaćemo i tri tipa pramena konika u projektivnoj ravni i harmonijsku konjugovanost kačaka na konici. Na početku svakog potpoglavlja navedene su korišćene reference i izvori slika u tom potpoglavlju.

3.1 Paskalova i Brijanšonova teorema

U ovom potpoglavlju pokazaćemo teoreme koje imaju veliki značaj posebno u konstruktivnim problemima, Brijanšonovu[1] i Paskalovu[2] teoremu i njihove inverze. Ove dve teoreme su međusobno dualne, ali su ih Brijanšon i Paskal dokazali potpuno nezavisno. Paskal je njegovu teoremu dokazao 1640. godine, a teoremu dualnu ovoj pokazao je Brijanšon 1806. godine, ne koristeći princip dualiteta, u to vreme princip dualiteta je tek počinjao da se prepoznaje. Literatura korišćena prilikom sastavljanja ovog potpoglavlja: [2], [3] i [4]. Slike 3.2 i 3.5 preuzete su iz [4], a preostale su napravljene u GeoGebri.

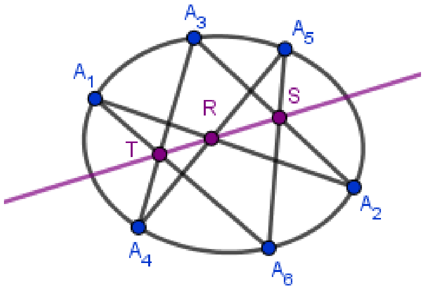
Teorema 3.1. *(Paskalova) Ako je prost šestotemenik $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ upisan u koniku, tačke preseka*

$$R = p(A_1, A_2) \cdot p(A_4, A_5),\ S = p(A_2, A_3) \cdot p(A_5, A_6),\ T = p(A_3, A_4) \cdot p(A_6, A_1)$$

tri para njegovih naspramnih stranica su kolinearne.

[1] Charles-Julien Brianchon (1783-1864), francuski matematičar

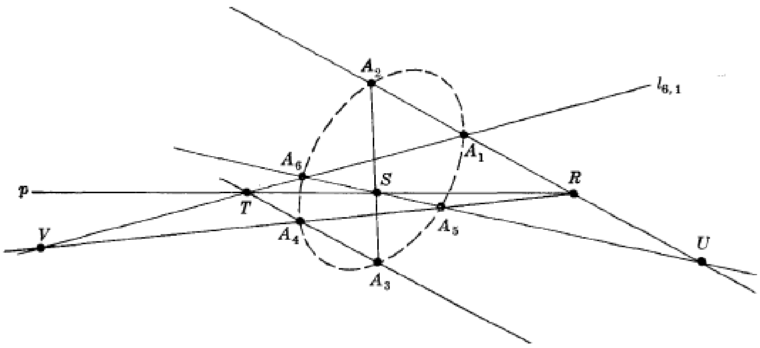
[2] Blaise Pascal (1623-1662), francuski matematičar, fizičar i filozof



Slika 3.1. Paskalova teorema

Dokaz. Na osnovu Štajnerove teoreme, za pramenove pravih sa centrima u tačkama A_2 i A_4, važi

$$(p(A_2, A_1), p(A_2, A_3), p(A_2, A_5), p(A_2, A_6)) \barwedge \\ \barwedge (p(A_4, A_1), p(A_4, A_3), p(A_4, A_5), p(A_4, A_6)).$$



Slika 3.2. Teorema 3.1

Neka $p(A_1, A_2) \cdot p(A_5, A_6) = U$ i $p(A_1, A_6) \cdot p(A_4, A_5) = V$, kao na Slici 3.2.

Sada iz

$$(U, S, A_5, A_6) \overline{\overline{\wedge}} (p(A_2, A_1), p(A_2, A_3), p(A_2, A_5), p(A_2, A_6)) \barwedge \\ \barwedge (p(A_4, A_1), p(A_4, A_3), p(A_4, A_5), p(A_4, A_6)) \overline{\overline{\wedge}} (A_1, T, V, A_6),$$

sledi $(U, S, A_5, A_6) \barwedge (A_1, T, V, A_6)$.

Kako prilikom ovog projektivnog preslikavanja između dva pravolinijska niza tačka zajednički element odgovara sam sebi, sledi (na osnovu Teoreme 1.2 iz uvoda) da je ovo preslikavanje perspektivno. Dakle, postoji tačka iz koje su ova dva pravolinijska niza tačaka perspektivna, pa su prave $p(A_1, U), p(S, T)$ i $p(A_5, V)$ konkurentne, odnosno prava $p(S, T)$ sadrži presek pravih $p(A_1, U)$ i $p(A_5, V)$. A kako je $p(A_1, U) \cdot p(A_5, V) = R$, sledi da su R, S, T kolinearne tačke. □

Prava $p(R, S, T)$ iz ove teoreme naziva se *Paskalova prava* šestotemenika $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Teorema 3.2. *(Obrnuta Paskalova) Ako su tačke preseka tri para naspramnih strana prostog šestotemenika kolinearne, temena tog šestotemenika pripadaju istoj konici.*

Dokaz. Neka je $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ dati šestotemenik i

$$R = p(A_1, A_2) \cdot p(A_4, A_5),\ S = p(A_2, A_3) \cdot p(A_5, A_6),\ T = p(A_3, A_4) \cdot p(A_6, A_1)$$

tačke preseka njegovih naspramnih strana. Neka su i

$$U = p(A_1, A_2) \cdot p(A_5, A_6), V = p(A_1, A_6) \cdot p(A_4, A_5),$$

tačke kao na Slici 3.2 iz prethodne teoreme.

Sada, kako $(U, S, A_5, A_6) \overset{R}{\overline{\overline{\wedge}}} (A_1, T, V, A_6)$, kada se ova dva pravolinijska niza tačaka projektuju iz tačaka A_2 i A_4 (redom), dobićemo projektivno preslikavanje odgovarajućih pramenova pravih

$$\begin{aligned}&(p(A_2, A_1), p(A_2, A_3), p(A_2, A_5), p(A_2, A_6)) \,\overline{\wedge} \\ &\quad \overline{\wedge}\, (p(A_4, A_1), p(A_4, A_3), p(A_4, A_5), p(A_4, A_6)).\end{aligned}$$

A na osnovu obrnute Štajnerove teoreme (Teorema 2.18), sledi da se centri ova dva pramena, tačke A_2 i A_4, kao i preseci odgovarajućih parova pravih ova dva perspektivna pramena, što su preostale tačke šestotemenika, pripadaju istoj konici.

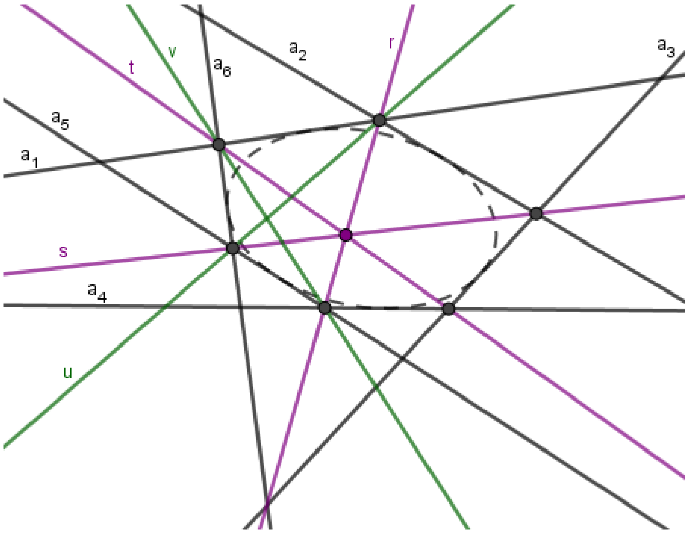
□

Teorema 3.3. *(Brijanšonova) Ako je prost šestostranik $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ opisan oko konike, prave*

$$r = (a_1 \cdot a_2)(a_4 \cdot a_5),\ s = (a_2 \cdot a_3)(a_5 \cdot a_6),\ t = (a_3 \cdot a_4)(a_6 \cdot a_1),$$

određene sa tri para naspramnih temena su konkurentne.

Dokaz. Kako je ova teorema dualna Paskalovoj i dokaz će teći dualno dokazu Teoreme 3.1.



Slika 3.3. Teorema 3.3

Neka su prave $a_1, a_2, a_3, a_4, a_4, a_5, a_6$ strane datog šestostranika opisanog oko konike i r, s, t prave određene parovima njegovih naspramnih temena definisane kao u definiciji teoreme. Definišimo i pomoćne prave (Slika 3.3)

$$u = (a_1 \cdot a_2)(a_5 \cdot a_6),\ v = (a_1 \cdot a_6)(a_4 \cdot a_5).$$

Sada iz

$$(u, s, a_5, a_6)\overline{\overline{\barwedge}}(a_2{\cdot}a_1, a_2{\cdot}a_3, a_2{\cdot}a_5, a_2{\cdot}a_6)\overline{\barwedge}(a_4{\cdot}a_1, a_4{\cdot}a_3, a_4{\cdot}a_5, a_4{\cdot}a_6)\overline{\overline{\barwedge}}(a_1, t, v, a_6),$$

sledi $(u, s, a_5, a_6) \barwedge (a_1, t, v, a_6)$.

Kako prilikom ovog projektivnog preslikavanja zajednički element odgovara sam sebi, ovo preslikavanje je perspektivno. Pa su $a_1 \cdot u$, $s \cdot t$ i $a_5 \cdot v$ kolinearne tačke na pravoj r, dakle presek pravih s i t nalazi se na pravoj r, odnosno r, s, t su konkurentne. □

Tačka $r \cdot s \cdot t$ iz ove teoreme naziva se *Brijanšonova tačka* šestostranika $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.

Teorema 3.4. *(Obrnuta Brijanšonova) Ako su prave koje su određene pomoću tri para naspramnih temena prostog šestostranika konkurentne, strane tog šestostranika pripadaju istoj konici.*

Ove teoreme imaju velik praktičan značaj. Sada ćemo navesti nekoliko primera njihove primene. Paskalova i obrnuta Paskalova teorema omogućavaju jednostavnu konstrukciju preostalih tačaka konike, što ćemo videti u prva dva primera. Takođe dualni problemi ovima, rešavaju se primemom Brijanšonove i obrnute Brijanšonove teoreme.

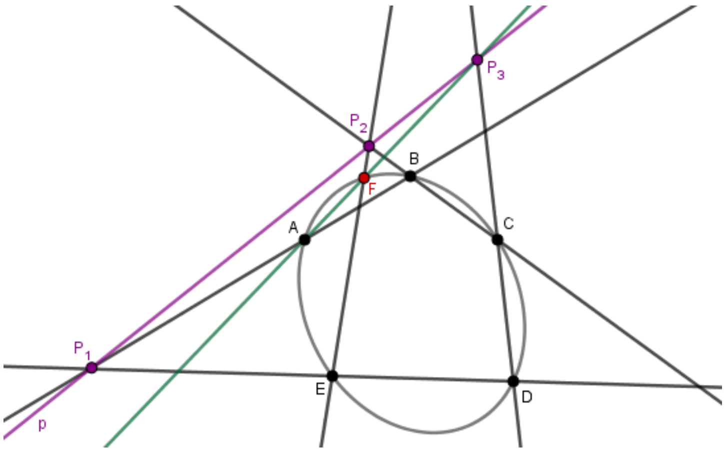
Primer 3.5. *Data je konika sa svojih pet različitih tačaka. Konstruisati ostale tačke ove konike.*

Dokaz. Neka su A, B, C, D, E date tačke i pretpostavimo da su one pet od šet temena šestotemenika upisanog u koniku. Povucimo pravu koja sadrži tačku A i ne sadrži ni jednu od preostale četiri. Odredimo položaj druge tačke preseke ove prave i konike, neka to bude šesto teme tog šestotemenika i obeležimo ga sa F.

Naspramne strane ovog šestotemenika $ABCDEF$ upisanog u datu koniku, seku se u tačkama

$$P_1 = p(A, B) \cdot p(D, E),\ P_2 = p(B, C) \cdot p(E, F),\ P_3 = p(C, D) \cdot p(F, A).$$

Kako nam je položaj tačke F nepoznat, ne možemo odrediti ni tačku P_2 koja zavisi od nje. Ali P_1 koja ne zavisi od F i P_3 koja zavisi samo od prave $p(F, A)$, a ona nam je poznata, možemo. Dakle, možemo odrediti pravu $p = p(P_1, P_3)$, a na osnovu Paskalove teoreme i tačka P_2 se nalazi na toj pravoj. Ali P_2 pripada i pravoj $p(B, C)$, pa je P_2 jednoznačno određena presekom te dve prave.

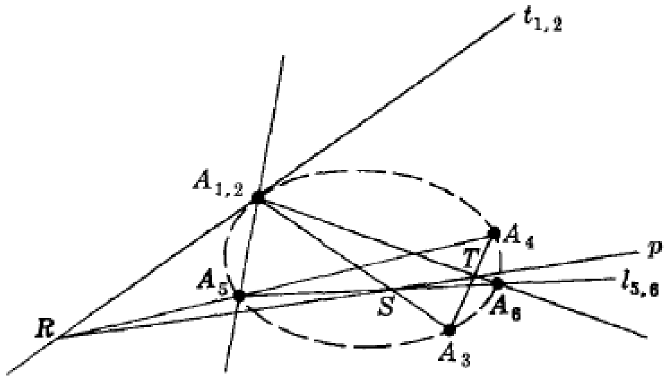


Slika 3.4. Primer 3.5

Kako je $P_2 = p(B, C) \cdot p(E, F)$ sledi da se tačka F nalazi na pravoj $p(P_2, E)$. Sada kada je poznata i tačka P_2, tačku F možemo da odredimo kao presek pravih $p(F, A)$ i $p(P_2, E)$ (Slika 3.4). Pa je F kao druga presečna tačka prave $p(F, A)$ i konike, upravo tražena sledeća tačka konike, a analogno se onda dobijaju i preostale. □

Primer 3.6. *Data je konika sa četiri svoje tačke i tangentom u jednoj od njih. Konstruisati sledeću tačku te konike.*

Dokaz. Neka su A_2, A_3, A_4, A_5 date tačke i neka je tangenta data u tački A_2. Neka $A_{1,2}$ predstavlja dve beskonačno bliske tačke A_1, A_2, a data tangenta neka je onda $t_{1,2}$, kao na Slici 3.5. Pretpostavimo da su $A_{1,2}, A_3, A_4, A_5$ pet temena šestotemenika upisanog u koniku, pri čemu se A_1 beskonačno približava temenu A_2. Sada ćemo, kao u prethodnom primeru, odrediti položaj šestog temena ovog specijalnog tipa prostog šestotemenika upisanog u koniku.



Slika 3.5. Primer 3.6

Neka je $l_{5,6}$ prava koja sadrži tačku A_5, a ne sadrži ni jednu od preostalih datih tačaka. Odredimo sada i drugu tačku preseka ove prave i konike, neka to bude tačka A_6. Dakle, $l_{5,6} = p(A_5, A_6)$.

Dijagonalne tačke šestotemenika $A_{1,2}A_3A_4A_5A_6$ su

$$R = t_{1,2} \cdot p(A_4, A_5),\ S = p(A_2, A_3) \cdot l_{5,6},\ T = p(A_3, A_4) \cdot p(A_1, A_6).$$

Tačku T ne možemo da odredimo, jer zavisi od A_6, a položaj ove tačke nam je nepoznat. Tačka R ne zavisi od A_6, a S zavisi od prave $l_{5,6}$ koja nam je poznata, dakle R i S možemo da odredimo, pa samim tim i pravu $p = p(R, S)$.

Na osnovu Paskalove teoreme i tačka T se nalazi na pravoj p, ali T pripada i pravoj $p(A_3, A_4)$, pa je onda ova tačka jedinstveno određena presekom te dve prave.

Kako je $T = p(A_3, A_4) \cdot p(A_6, A_1)$ sledi tačka A_6 pripada pravoj $p(T, A_1)$ (tačku A_1 predstavlja tačka $A_{1,2}$), a sada nam je poznata i tačka T, pa A_6 dobijamo kao presek pravih $p(T, A_1)$ i $l_{5,6}$. □

Primer 3.7. *Neka je četvorotemenik $ABCD$ upisan u koniku k. Ako su a i b tangente te konike u tačkama A i B. Dokazati da su tačke*

$$a \cdot p(B, C),\ b \cdot p(A, D),\ p(A, B) \cdot p(C, D)$$

kolinearne.

Dokaz. Neka AA predstavlja dve beskonačno bliske tačke i BB takođe. Uočimo prost šestotemenik $AABBCD$.

Prava $p(A, A)$ teži tangenti na koniku u tački A, što je a, a $p(B, B)$ teži tangenti b. Sada, primenom Paskalove teoreme na ovaj specijalan slučaj prostog šestotemenika sledi da su tačke

$$a \cdot p(B, C),\ b \cdot p(A, D),\ p(A, B) \cdot p(C, D)$$

kolinearne. □

3.2 Dezargova involutivna teorema

U prvom delu ovog potpoglavlja prvo ćemo navesti definicije tri tipa pramena konika u projektivnoj geometriji, a zatim Dezargovu teoremu, specijalne slučajeve ove teoreme i obrnutu Dezargovu teoremu. Drugi deo je o harmonijskoj konjugovanosti tačaka na konikama. Literatura korišćena prilikom sastavljanja ovog potpoglavlja: [2], [3], [4] i [5]. Prva slika u ovom potpoglavlju (Slika 3.6) preuzeta je iz [5], a ostale dve pravljene su u programu GeoGebra.

3.2.1 Pramenovi konika i Dezargova involutivna teorema

Definicija 3.1. *Skup svih konika koje sadrže temena datog potpunog četvorotemenika $B_1B_2B_3B_4$ naziva se* ***pramen (konika) prve vrste****, a te četiri tačke su* ***bazne tačke*** *pramena.*

U prethodnom poglavlju smo pokazali da pet različitih tačaka u ravni od kojih nikoje tri nisu kolinearne jedinstveno određuju koniku. Sada možemo primetiti da kroz četiri tačke od kojih nikoje tri nisu kolinearne prolazi bezbroj konika. Naime, izborom još jedne (pete) tačke A koja ne pripada ni jednoj strani datog četvorotemenika, dobijamo jedinstveno odrednu koniku kroz date bazne tačke.

Definicija 3.2. *Neka je dat trotemenik $B_1B_2B_3$ i prava t_1 kroz B_1 koja ne sadrži preostala dva temena.* ***Pramen druge vrste*** *je skup svih konika koje sadrže temena datog potpunog trotemenika i dodiruju pravu t_1 u B_1.*

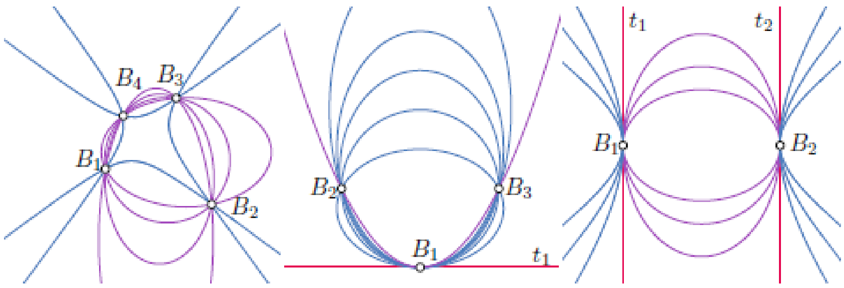
Pramen druge vrste možemo posmatrati kao specijalan slučaj pramena prve vrste, kada se jedna od četiri bazne tačke pramena prve vrste (recimo B_4) beskonačno približi tački B_1. U tom graničnom procesu, od potpunog četvorotemenika nastaje potpuni trotemenik sa tangentom u jednom od temena.

Na sličan način dolazimo i do trećeg tipa pramena, takođe specijalnog slučaja pramena prve vrste. Ako pretpostavimo da se tačka B_4 približava tački B_1, a B_3 ka B_2. Dobijamo:

Definicija 3.3. *Pretpostavimo da su B_1 i B_2 dve različite tačke i t_1 i t_2 prave takve da $B_1 \in t_1, B_2 \in t_2$ i obe su različite od prave B_1B_2. Skup svih konika koje sadrže date tačke i dodiruju date prave, t_1 u B_1 i t_2 u B_2, predstavljaju* ***pramen treće vrste****.*

Konike ovog pramena nazivaju se i **konike dvostrukog kontakta**.

Primeri sva tri definisana tipa pramena konika mogu se videti na Slici 3.6 ispod (redom s leva na desno).

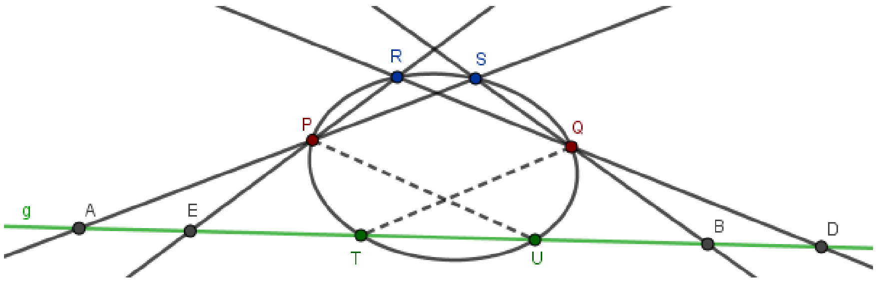


Slika 3.6. Pramenovi konika prvog, drugog i trećeg tipa

Teorema 3.8. *(Dezargova[3] involutivna teorema) Prava koja seče konike koje sadrže temena datog potpunog četvorotemenika, čini to u parovima dvostruko odgovarajućih tačaka jedne iste involucije.*

Dokaz. Neka je $PQRS$ dati četvorotemenik i g data prava. Tačke preseka prave g i pravih $p(P,S), p(Q,S), p(Q,R), p(P,R)$ koje sadrže strane datog četvorotemenika obeležimo sa A, B, D, E redom. Neka proizvoljna konika, od konika koje sadrže temena datog četvorotemenika, seče pravu g u tačkama T i U (kao na Slici 3.7). Dakle, treba pokazati da su T, U par dvostruko odgovarajućih tačaka iste involucije.

[3] Girard Desargues (1591-1661), francuski matematičar



Slika 3.7. Teorema 3.8

Primetimo, P, Q, R, S, T, U su šest tačaka date konike, pa za pramenove pravih sa centrima u P i Q na osnovu Štajnerove teoreme važi:

$$(p(P,S), p(P,R), p(P,T), p(P,U)) \barwedge (p(Q,S), p(Q,R), p(Q,T), p(Q,U)).$$

Pa važi

$$g(A,E,T,U) \barwedge g(B,D,T,U).$$

Na osnovu Teoreme 1.5 iz uvoda, kolinearnu četvorku tačaka možemo projektivno da preslikamo na samu sebe tako što ćemo razmeniti mesta tačkama u okviru prvog, a i drugog para, dakle za tačke B, D, T, U važi

$$g(B,D,T,U) \barwedge g(D,B,U,T).$$

Pa kombinovanjem ovog i prethodnog preslikavanja sledi,

$$g(A,E,T,U) \barwedge g(D,B,U,T).$$

Kako su tačke T, U par dvostruko odgovarajućih tačaka dobijenog preslikavanja, sledi da je ovo preslikavanje involucija. Ali tačke T i U su i tačke u kojima konika seče pravu g, pa je to involucija na pravoj g indukovana četvorotemenikom. □

Teorema 3.9. *(Obrnuta Dezargova) Par dvostruko odgovarajućih tačaka na pravoj p, involucije indukovane četvorotemenikom (čija temena ne pripadaju datoj pravoj), pripadaju konici koja sadrži temena tog četvorotemenika.*

Primetimo da se ova Dezargova teorema odnosi na konike pramena prve vrste, sada ćemo navesti, i specijalne slučajeve ove teoreme koji se odnose na konike pramenova druge i treće vrste.

Kada se u konstrukciji iz dokaza Teoreme 3.8 (Slika 3.7) pretpostavi da se tačke S i Q poklapaju, prava $p(S,Q)$ zamenjuje se tangentom u Q, a sve ostalo ostaje isto, sledi Dezargova teorema za konike pramena druge vrste:

Teorema 3.10. *Prava p koja seče konike koje sadrže temena trotemenika ABC i dodiruju pravu a (kojoj ne pripadaju temena B i C) u tački A, čini to u parovima dvostruko odgovarajućih tačaka jedne iste involucije.*

Teorema 3.11. *Prava koja seče konike koje dodiruju druge dve date prave u datim tačkama, čini to u parovima dvostruko odgovarajućih tačaka jedne iste involucije.*

Na osnovu Dezargove involutivne teoreme i osobina involucije, možemo pokazati da važi sledeće :

Teorema 3.12. *Date su četiri različite tačke među kojima nikoje tri nisu kolinearne i prava koja nije incidentna ni sa jednom od njih. Postoje najviše dve konike koje sadrže date tačke i dodiruju datu pravu.*

Dokaz. Posmatrajmo konike koje sadrže date četiri tačke. Na osnovu Dezargove involutivne teoreme, svaka od tih konika koja seče datu pravu to čini u paru dvostruko odgovarajućih tačaka involucije indukovane datim četvorotemenikom. Pretpostavimo da među tim konikama postoje i one koje datu pravu dodiruju. Tačka dodira konike i prave biće dvojna tačka te involucije. Kako svaka involucija ili nema ili ima dve dvojne tačke, sledi da mogu postojati najviše dve takve konike. □

3.2.2 Harmonijska konjugovanost tačaka na konici

Definicija 3.4. *Naka su A, B, C, D tačke konike k. Par tačaka A, B je harmonijski konjugovan sa parom tačaka C, D ako i samo ako važi*

$$H(p(O, A), p(O, B); p(O, C), p(O, D)),$$

gde je O proizvoljna tačka konike k.

Pokažimo da je ova definicija valjana tj. da ne zavisi od izbora tačke O.

Neka je O' još jedna tačka date konike. Na osnovu Štajnerove teoreme, važi

$$\begin{aligned} &O(p(O, A), p(O, B), p(O, C), p(O, D), ...) \barwedge \\ &\qquad \barwedge O'(p(O', A), p(O', B), p(O', C), p(O', D), ...), \end{aligned}$$

a kako prilikom projektivnog preslikavanja harmonijska konjugovanost ostaje očuvana, važi i

$$H(p(O', A), p(O', B); p(O', C), p(O', D)).$$

Dakle, harmonijska konjugovanost parova tačaka na konici ne zavisi od izbora tačke O, pa je ova definicija dobra.

Narednu teoremu navodimo bez dokaza, dokaz se može pogledati u [4] (Problem 12.3, strana 125).

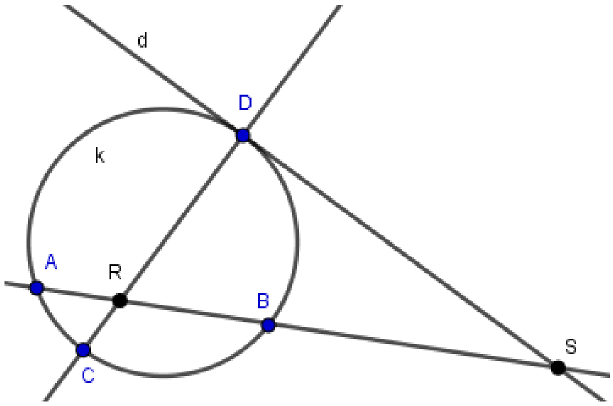
Teorema 3.13. *Ako četiri tačke konike k čine harmonijsku četvorku, onda i tangente na koniku k u tim tačkama čine harmonijsku četvorku pravih.*

Teorema 3.14. *Ako su A, B, C, D tačke konike k takve da važi $H(A, B; C, D)$, onda su prave $p(A, B)$ i $p(C, D)$ konjugovane u odnosu na polaritet koji definiše koniku k.*

Dokaz. Neka za tačke A, B, C, D date konike k važi $H(A, B; C, D)$, na osnovu definicije to znači da za proizvoljnu tačku konike, neka je to baš tačka D, važi

$$H(p(D, A), p(D, B); p(D, C), p(D, D)).$$

Prava $p(D, D)$ je tangenta na koniku u tački D, označimo je sa d. Neka $p(A, B) \cdot p(D, C) = R$ i $p(A, B) \cdot d = S$, kao na Slici 3.8.



Slika 3.8. Teorema 3.14

Sada, presecimo posmatrani pramen pravih ca centrom u D, pravom $p(A, B)$, pa važi

$$H(A, B; R, S).$$

Kako je prava $p(A, B)$ sečica konike, na njoj je indukovana hiperbolična involucija konjugovanih tačaka. Tačke A, B su dvojne tačke te involucije, pa su R, S koje su sa njima harmonijski konjugovane, onda par konjugovanih tačaka. Tačka S pripada pravoj d koja je polara tačke D, pa je S konjugovano i sa D. Dakle, S je pol prave $p(R, D)$. Sada, kako $p(R, D) = p(C, D)$ i kako S pripada pravoj $p(A, B)$ sledi da su $p(A, B)$ i $p(C, D)$ konjugovane. $\square$

Kako sva razmatranja u prethodnom dokazu važe i u suprotnom smeru, vazi i obrnuto

Teorema 3.15. *Ako su prave a i b konjugovane u odnosu na koniku k i sa njom imaju parove zajedničkih tačaka A, B i C, D, redom, tada $H(A, B; C, D)$.*

Glava 4

Projektivno preslikavanje konika

U ovom poglavlju prvo definišemo projektivno preslikavanje na konikama i njegove osobine. Zatim, u drugom delu ovog poglavlja, predstavljamo involuciju na konikama. Literatura korišćena prilikom sastavljanja ovog poglavlja: [1], [3], [4] i [5]. Prva slika je preuzeta iz [4], a druga je napravljena u programu GeoGebra.

4.1 Definicija i osobine

Definicija 4.1. *Neka su date konike k, k_1 i tačke $C \in k$, $C_1 \in k_1$.*

Preslikavanje α koje tačkama $X \in k \setminus C$ dodeljuje prave $p(X, C)$ i tački C tangentu t_C je perspektivno preslikavanje konike k na pramen pravih sa središtem C, $k \overset{=}{\barwedge} C$. Inverzno preslikavanje α^{-1} , pramena na koniku, takođe je perspektivno.

Projektivno preslikavanje $\beta : k \mapsto k_1$ je proizvod konačnog broja perspektivnih preslikavanja

$$k \overset{=}{\barwedge} C \overset{=}{\barwedge} \cdots \overset{=}{\barwedge} C_1 \overset{=}{\barwedge} k_1.$$

Teorema 4.1. *Projektivno preslikavanje konika jednoznačno je određeno sa tri para odgovarajućih elemenata.*

Dokaz. Posmatrajmo projektivno preslikavanje $\alpha : k \mapsto k_1$, konike k na koniku k_1.

Po definiciji, ovo preslikavanje je proizvod konačnog broja perspektivnih preslikavanja

$$k \overset{=}{\barwedge} C \overset{=}{\barwedge} \cdots \overset{=}{\barwedge} C_1 \overset{=}{\barwedge} k_1,$$

gde je početno preslikavanje perspektivno preslikavanje konike k (domena preslikavanja α) na pramen pravih, a krajnje preslikavanje nekog pramena pravih na koniku k_1 koja je kodomen. Između prvog i poslednjeg preslikavanja je konačan niz perspektihvih preslikavanja pramenova pravih. Dakle, središnje preslikavanje je projektivno, pa je kao takvo jedinstveno određeno pomoću tri para odgovajućih elemenata. Onda je i preslikavanje α, takođe jednoznačno određeno sa tri para odgovarajućih elemenata. $\square$

Teorema 4.2. *Neka je $\pi : k \mapsto k$ projektivno preslikavanje konike k na samu sebe. Postoji prava s, koja se zove* ***osa projektivnog preslikavanja konike na samu sebe****, takva da ako su $A, B \in k$ i $A' = \pi(A)$, $B' = \pi(B)$, tada $p(A, B') \cdot p(A', B) \in s$.*

Dokaz. Neka je $k(A, B, C, ...) \barwedge k(A', B', C', ...)$ dato projektivno preslikavanje konike k na samu sebe. Postoje odgovarajući pramenovi pravih sa kojima je ova konika perspektivna. Neka su A, A' centri odgovarajućih pramenova pravih, tada važi

$$\begin{aligned}(p(A', A), p(A', B), p(A', C), ...) &\overset{=}{\barwedge} k(A, B, C, ...) \barwedge \\ &\barwedge k(A', B', C', ...) \overset{=}{\barwedge} (p(A, A'), p(A, B'), p(A, C'), ...).\end{aligned}$$

Kako zajednički element pramenova pravih prilikom ovog preslikavanja odgovara sam sebi, sledi da je preslikavanje između ova dva pramena pravih perspektivno, tj. važi

$$(p(A', A), p(A', B), p(A', C), ...) \overset{=}{\barwedge} (p(A, A'), p(A, B'), p(A, C'), ...).$$

Što znači da se preseci odgovarajućih elemenata ovog preslikavanja, tačke $p(A', B) \cdot p(A, B')$ i $p(A', C) \cdot p(A, C')$, nalaze na osi perspektive. $\square$

Važi i dualna teorema, odnosno kada je konika data kao skup autokonjugovanih pravih

Teorema 4.3. *Neka je $\pi : k \mapsto k$ projektivno preslikavanje konike k na samu sebe. Postoji tačka S, koja se zove* ***centar projektivnog preslikavanja konike na samu sebe****, takva da ako su $a, b \in k$ i $a' = \pi(a)$, $b' = \pi(b)$, tada $S \in p(a \cdot b', a' \cdot b)$.*

Dakle, ako je konika k data svojim tačkama, tada projektivno preslikavanje $\pi : k \mapsto k$ ima osu, a ako je k skup pravih, onda dato projektivno preslikavanje ima centar.

Kad god je data konika kao skup tačaka, data je i konika kao skup pravih koje su tangente na onu prvu. I obratno, kada imamo koniku kao skup pravih istovremeno postoji i konika koja se sastoji od njenih tačaka dodira. Pa se i odgovarajuća projektivna preslikavanja konike na samu sebe međusobno indukuju.

Pretpostavimo da su konike iz prethodne dve teoreme date istovremeno, odnosno da predstavljaju jednu koniku, gde su prave $a, b, c, ...; a', b', c'...$ njene tangente u projektivnim tačkama $A, B, C, ...; A', B', C', ...$, tada **centar** S **projektivnog preslikavanja** $k(a, b, c, ...) \barwedge k(a', b', c', ...)$ **je pol ose** s **projektivnog preslikavanja** $k(A, B, C, ...) \barwedge k(A', B', C', ...)$.

Osa (i centar) preslikavanja $\pi : k \mapsto k$ može da bude od velikog praktičnog značaja.

Neka je data konika k i projektivno preslikavanje $\pi : k \mapsto k$.

Na osnovu Teoreme 4.1 ovo preslikavanje jedinstveno je određeno sa proizvoljne tri tačke $A, B, C \in k$ i njihovim slikama A', B', C', a pomoću Teoreme 4.2 možemo odrediti osu ovog preslikavanja. Kako, prema Teoremi 4.2, tačke $p(A, B') \cdot p(A', B)$, $p(A, C') \cdot p(A', C)$ i $p(B, C') \cdot p(B', C)$ pripadaju toj osi, sledi da osu ovog preslikavanja dobijamo kao pravu kroz bilo koje dve od ove tri tačke.

Sada, korišćenjem ose možemo da odredimo sliku bilo koje tačke. Za proizvoljnu tačku $X \in k$, tačka $p(A', X) \cdot p(A, X')$ takođe će pripadati osi tog projektivnog preslikavanja. Korišćenjem centra možemo odrediti sliku proizvoljne prave.

Sada ćemo videti šta su preseci ose datog projektivnog preslikavanja sa tom konikom. Neka prava s seče koniku k u tačkama X i Y. Neka $A' = \pi(A)$, tada je slika tačke X tačka X' takva da $p(A', X) \cdot p(A, X') \in s$. Dakle, nađemo tačku preseka prave $p(A', X)$ i s, pa kroz nju i tačku A povučemo pravu i nađemo njen drugi presek sa konikom. Ali, kako tačka X pripada krivoj, sledi da se preslikava na samu sebe. Za tačku Y važi isto. Dakle, zahvaljujući postojanju ose projektivnog preslikavanja π, mogu se odrediti dvojne tačke tog preslikavanja i važi:

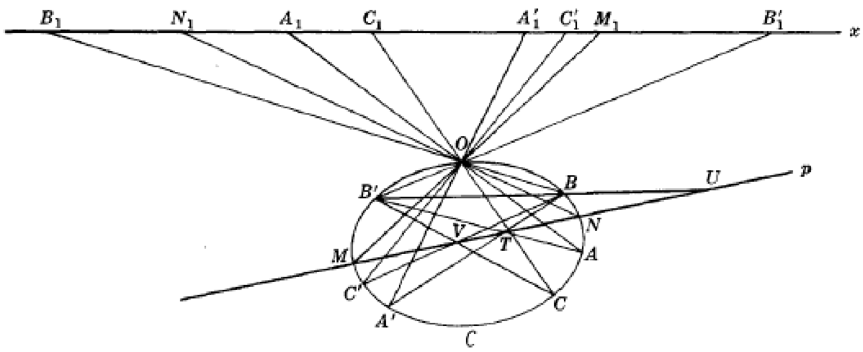
Teorema 4.4. *Dvojne tačke projektivnog preslikavanja na konici (ako postoje) su preseci ose tog preslikavanja sa konikom.*

Projektivno preslikavanje na konici je hiperbolično, parabolično ili eliptično u zavisnosti od toga da li ima dve, jednu ili nema dvojnih tačaka.

Teorema 4.5. *Projektivno preslikavanje $\pi : k \mapsto k$ je hiperbolično, parabolično ili eliptično u zavisnosti od toga da li je osa s tog preslikavanja sečica, tangenta ili spoljašnja prava za tu koniku, odnosno da li je centar S preslikavanja π spoljašnja tačka, tačka na konici ili njena unutrašnja tačka.*

Zahvaljujući perspektivnoj korespondenciji između konike i pramena pravih, korišćenje ose (i centra) projektivnog preslikavanja konike na samu sebe za određivanje određenih osobina projektivnog preslikavanja jednodimenzionih mnogostrukosti je značajan primer praktične primene konika u konstruktivnim problemima. Na osnovu Teoreme 4.2, Štajner je prvi dao veoma praktičan metod konstrukcije dvojnih tačaka (ako postoje) projektivnog preslikavanja $x(A_1, B_1, C_1, ...) \overline{\wedge} x(A'_1, B'_1, C'_1, ...)$, koji nazivamo **Štajnerova konstrukcija**. U nastavku ćemo opisati ovaj Štajnerov metod u slučaju kada dato projektivno preslikavanje ima dve dvojne tačke.

Neka je data prava x i na njoj projektivno preslikavanje određeno pomoću trojke tačaka A_1, B_1, C_1 i njihovih slika A'_1, B'_1, C'_1. Uočimo tačku O van prave x i kroz nju konstruišemo koniku $\mathcal{C}$ (Slika 4.1). Iz tačke O pro-



Slika 4.1. Štajnerova konstrukcija

jektujemo tačke $A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1$ sa prave x u tačke $A, B, C; A', B', C'$ (redom) na konici $\mathcal{C}$. Sada konstruišemo osu p projektivnog preslikavanja $\mathcal{C}(A, B, C) \overline{\wedge} \mathcal{C}(A', B', C')$ i sa M i N obeležimo tačke preseka konike i ose. Na osnovu Teoreme 4.4 tačke M i N su dvojne tačke za projektivno preslikavanje konike $\mathcal{C}$ na samu sebe. Tada će prave $p(O, M)$ i $p(O, N)$ biti dvojne prave projektivnog preslikavanja pramena pravih sa središtem O na samog sebe, a preseci $p(O, M) \cdot x = M_1$ i $p(O, N) \cdot x = N_1$ će biti par dvojnih tačaka projektivnog preslikavanja pravolinijskog niza tačaka sa nosačem x na samog sebe, odnosno traženi par dvojnih tačaka

$$x(A_1, B_1, C_1, M_1, N_1) \overset{O}{\overline{\wedge}} \mathcal{C}(A, B, C, M, N) \overline{\wedge}$$
$$\overline{\wedge}\, \mathcal{C}(A', B', C', M, N) \overset{O}{\overline{\wedge}} x(A'_1, B'_1, C'_1, M_1, N_1)$$

Dakle, u ovom primeru, projektivno preslikavanje konike na samu sebe je hiperboličko, pa su takva i projektivno preslikavanje pramena pravih samog na sebe i projektivno preslikavanje pravolinijskog niza tačaka na samog sebe.

Navodimo, bez dokaza, još jednu osobinu projektivnog preslikavanja konike na samu sebe. Dokaz se može pogledati u [4] na strani 121, Teorema 12.2.

Teorema 4.6. *Proizvoljna četrvorka tačaka date konike, može se projektivno preslikati sama na sebe, tako da tačke prvog para međusobno zamene mesta, kao i tačke drugog para. Odnosno, važi* $k(A, B, C, D) \barwedge k(B, A, D, C)$.

4.2 Involucija na konikama

Definicija 4.2. *Projektivno preslikavanje* $\pi : k \mapsto k$ *konike na samu sebe koje ima par dvostruko odgovarajućih elemenata, naziva se* ***involucija na konici***.

Teorema 4.7. *Svaki par odgovarajućih elemenata involucije na konici je dvostruko odgovarajući.*

Dokaz. Neka su tačke A, B par dvostruko odgovarajućih elemenata date involucije na konici. Pretpostavimo da se ovim preslikavanjem neka tačka C date konike ($C \neq A, B$) slika u tačku D, a D u tačku E (D, E su takođe tačke konike i različite od A, B, C), dakle

$$k(A, B, C, D) \barwedge k(B, A, D, E).$$

Na osnovu Teoreme 4.6, za tačke A, B, C, D date konike važi

$$k(A, B, C, D) \barwedge k(B, A, D, C).$$

Pa iz ovog i prethodnog preslikavanja sledi,

$$k(B, A, D, C) \barwedge k(A, B, C, D) \barwedge k(B, A, D, E).$$

Dakle, $C = E$, pa par tačaka C, D dvostruko odgovara, a kako su ovo proizvoljne tačke konike, sledi da je svaki par odgovarajućih tačaka dvostruko odgovarajući. $\square$

Teorema 4.8. *Involucija na konici jedinstveno je određena sa dva para dvostruko odgovarajućih elemenata.*

Ova teorema važi jer važi analogno za jednodimenzione mnogostrukosti (Posledica 1.7 iz uvodnog dela).

Teorema 4.9. *Centar involucije na konici kolinearan je sa svakim parom dvostruko odgovarajućih tačaka.*

Dokaz. Neka je $\pi : k \mapsto k$ involucija na konici k data sa

$$k(A, A', B, B', ...) \barwedge k(A', A, B', B, ...).$$

Na osnovu Teoreme 4.2, tačke $p(A, B') \cdot p(A', B)$ i $p(A, B) \cdot p(A', B')$ pripadaju osi ovog projektivnog preslikavanja, pa je osa prava incidentna sa ove dve tačke. Ali, ako sada posmatramo četvorotemenik $AA'BB'$ koji je upisan u datu koniku, primetimo da su to dve od tri njegove dijagonalne tačke. Dakle, osa ovog prelikavanja je stranica autopolarnog trotemenika ovog četvorotemenika. Treća dijagonalna tačka je $p(A, A') \cdot p(B, B')$ i ona je pol naspramne strane tog autopolarnog trotemenika, što je baš osa. Dakle, ta tačka je centar ovog preslikavanja. □

Dualno,

Teorema 4.10. *Tangente konike u paru dvostruko odgovarajućih tačaka seku se na osi involucije.*

Teorema 4.11. *Involucija na konici je eliptična ili hiperbolična prema tome da li je centar unutrašnja ili spoljašnja tačka te konike.*

Dokaz. Osa hiperbolične involucije biće sečica, pa je njen centar spoljašnja tačka. Za eliptičnu involuciju, osa će biti spoljašnja prava. Pol ose, centar, tada će biti unutrašnja tačka. □

Teorema 4.12. *Involucija na konici je eliptična (hiperbolična) ako i samo ako dva para odgovarajućih elemenata razdvajaju (ne razdvajaju) jedan drugog.*

Teorema 4.13. *Par dvojnih elemenata hiperbolične involucije na konici harmonijski je konjugovan sa svakim parom dvostruko odgovarajućih elemenata.*

Primenom prethodnih teorema možemo pokazati da važi i sledeća

Teorema 4.14. *Dva para tačaka, A, A' i B, B', iste konike razdvajaju ili ne razdvajaju jedan drugog prema tome da li je tačka $p(A, A') \cdot p(B, B')$ unutrašnja ili spoljašnja tačka te krive.*

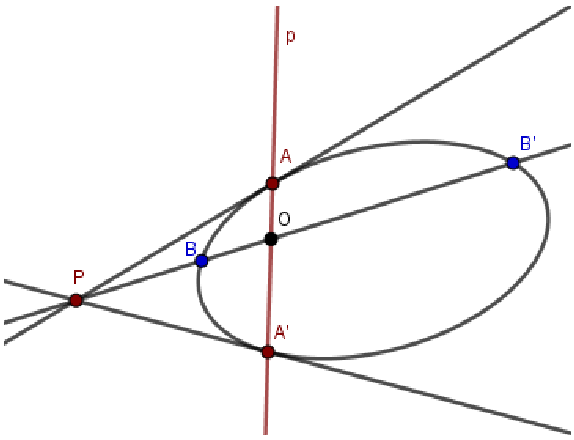
Dokaz. Na osnovu Teorema 4.8 i 4.9 involucija na konici jedinstveno je određena sa dva para tačkaka $A, A'; B, B'$, a tačka $p(A, A') \cdot p(B, B')$ je njen centar. Ako je ova tačka unutrašnja tračka te konike, prema Teotremi 4.11 ova involucija je eliptična, pa iz Teoreme 4.12 sledi da par tačaka A, A' razdvaja par B, B'. Na osnovu istih teorema, ukoliko je tačka $p(A, A') \cdot p(B, B')$ spoljašnja, involucija je hiperbolična, pa par A, A' ne razdvaja par B, B'. □

Teorema 4.15. *Za svaki par odgovarajućih elemenata eliptične involucije na konici postoji jedan i samo jedan par odgovarajućih tačaka te involucije koji je sa datim parom harmonijski konjugovan.*

Dokaz. Neka je A, A' dati par odgovarajućih elemenata te involucije. Zadavanjem jedne unutrašnje tačke date konike, koja će biti centar te involucije, jednoznačno je određena ova eliptična involucija na konici.

Prema teoremama 3.14 i 3.15, par tačaka A, A' biće harmonijski konjugovan sa nekim drugim parom tačaka date konike ako i samo ako su prave određene ovom parovima tačaka konjugovane u odnosu na tu koniku.

Dati par tačaka A, A' određuje sečicu, pa je njen pol spoljašnja tačka, označimo je sa P kao na Slici 4.2. Prava koja sadrži P i centar involucije O, seče koniku u dvema tačkama, neka su to B, B'. Ovaj dobijeni par tačaka harmonijski je konjugovan sa fiksiranim parom A, A'. $\square$



Slika 4.2. Teorema 4.15

Kao i u slučaju Štajnerove konstrukcije, osobina involucije na konikama iz ove teoreme važiće i za involuciju na jednodimenzionim mnogostrukostima. Dakle, ovo je još jedan slučaj kada se osobine koje važe za koniku, zbog perspektivne korespondencije, prenose i na jednodimenzionu mnogostrukost. Isto važi i za sledeću teoremu.

Teorema 4.16. *Dve involucije, od kojih je bar jedna eliptična, na jednoj jednodimenzionoj mnogostrukosti, odnosno na jednoj konici, uvek imaju zajednički par dvostruko odgovarajućih elemenata.*

Dokaz. Neka je data konika k i na njoj dve involucije. Zajednički par ovih involucija kolinearan je sa njihovim centrima. Kako je bar jedna od ove dve involucije eliptična, onda je bar jedan od centara tih involucija unutrašnja tačka, što znači da će prava koja sadrži centre sigurno seći koniku. Dobijene tačke preseka te prave i konike su zajednički dvostruko odgovarajući par elemenata date dve involucije na k.

Dakle, pokazali smo da ovo tvrđenje važi na konikama, ali zbog perspektivne korespondencije sledi da važi i na jednodimenzionim mnogostrukostima. □

Glava 5

Konike u afinoj ravni

U prvom delu ovog poglavlja definisana je klasifikacija konika u afinoj ravni i neke njihove osnovne karakteristike u odnosu na beskonačno daleku pravu. Drugo potpoglavlje su primeri primene Paskalove i Brijanšonove teoreme u konstrukcijama na konikama u afinoj ravni. Literatura korišćena prilikom sastavljanja ovog poglavlja: [4] i [6]. Slike 5.4, 5.5 i 5.6 su preuzete iz [6], a ostale su pravljene u GeoGebri.

5.1 Afina klasifikacija konika

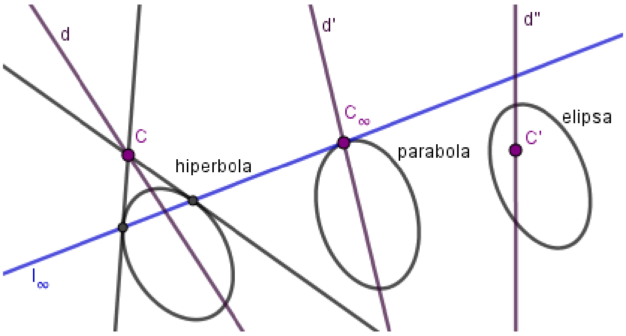
U odnosu na projektivnu ravan gde su sve konike međusobno ekvivalentne, u afinoj ravni razlikujemo tri tipa konika, u zavisnosti od broja zajedničkih tačaka sa beskonačno dalekom pravom, a to su elipsa, hiperbola i parabola.

Definicija 5.1. *Neka je k konika projektivne ravni i l_∞ beskonačno daleka prava. U afinoj ravni, konika k je* ***elipsa*** *ako nema zajedničkih tačaka sa pravom l_∞,* ***parabola*** *ako je prava l_∞ tangenta na koniku i* ***hiperbola*** *ako je sečica.*

Definicija 5.2. *Pol C prave l_∞, u odnosu na datu koniku k, naziva se* ***centar*** *te konike.*

Centar elipse je unutrašnja tačka, centar hiperbole je spoljašnja tačka, a pol prave l_∞, u odnosu na parabolu, je tačka dodira C_∞ (Slika 5.1). Strogo govoreći, parabola nema centar, ali kada je potrebno možemo tačku C_∞ posmatrati kao njen centar. Elipsu i hiperbolu, koje imaju svoje centre, nazivamo **centrirane konike**.

Definicija 5.3. *Svaka prava koja prolazi kroz centar C, centrirane konike, naziva se* ***dijametar konike***.



Slika 5.1. Centar hiperbole, parabole i elipse

Dakle, kako su dijametri incidentni sa centrom koji je pol prave l_∞, oni su polare, u odnosu na koniku, tačaka beskonačne prave. Kako je centar elipse unutrašnja tačka, njeni dijametri su sečice. Dijametri hiperbole mogu biti sečice, prave koje nemaju zajedničkih tačaka sa konikom ili tangente u tačkama preseka konike i beskonačne prave. Te dve tangente se nazivaju **asimptote hiperbole**.

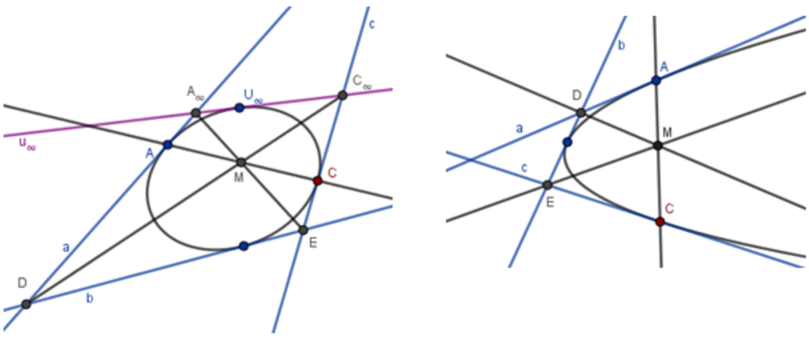
5.2 Primeri konstrukcija

U narednim primerima beskonačno daleka prava označena je sa u_∞.

Primer 5.1. *Neka je data parabola, tangente a, b, c i tačka $A \in a$. Konstruisati tačku dodira C tangente c i te parabole.*

Dokaz. *Analiza*

Beskonačno daleka prava u_∞ je tangenta na parabolu u tački U_∞. Neka



Slika 5.2. Primer 5.1

su tačke $D = a \cdot b$, $E = b \cdot c$, $A_\infty = a \cdot u_\infty$, $C_\infty = c \cdot u_\infty$, kao na Slici 5.2. Primenom Brijanšonove teoreme na specijalan šestostranik $aabccu_\infty$, prave $p(A, C), p(D, C_\infty), p(E, A_\infty)$ koje spajaju njegova naspramna temena, seku se u Brijanšonovoj tački M. Položaj prave $p(A, C)$ još njie poznat jer zavisi od tačke C, ali $p(D, C_\infty)$ i $p(E, A_\infty)$ ne zavise od C, pa je tačka M određena presekom te dve prave. Iz $C \in c$ i $M \in p(A, C)$ sledi da $C = p(A, M) \cdot c$.
Konstrukcija

Dakle, prvo konstruišemo tačke D i E kao presek pravih a i b, odnosno b i c. Zatim, presekom prave kroz D koja je paralelna sa c i prave kroz E koja je paralelna pravoj a dobijamo tačku M. Pa je $p(A, M) \cdot c = C$. □

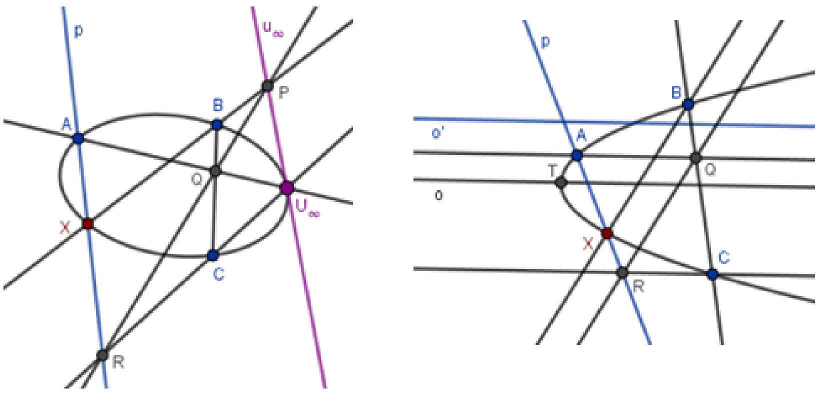
Primer 5.2. *Date su tačke A, B, C parabole, prava p takva da $A \in p$ i pravac o' ose ove parabole. Konstruisati drugu tačku preseka prave p i parabole.*

Dokaz. *Analiza*

Neka je U_∞ tačka dodira beskonačno daleke prave u_∞ i date parabole. Ta tačka i teme parabole T su tačke preseka parabole i ose o. Kako nam je poznat pravac ose i on je paralelan sa osom sledi da $U_\infty = o \cdot o'$. Sada kad je određena tačka U_∞, neka je još X tražena druga presečna tačka parabole i p, pa posmatrajmo specijalan šestotemenik $U_\infty U_\infty AXBC$ upisan u ovu parabolu. Njegove dijagonalne tačke

$$P = u_\infty \cdot p(X, B),\ Q = p(U_\infty, A) \cdot p(B, C),\ R = p(A, X) \cdot p(C, U_\infty)$$

su prema Paskalovoj teoremi kolinearne.



Slika 5.3. Primer 5.2

Tačku P ne možemo još odrediti jer zavisi od X čiji položaj ne znamo, ali Q i R ne zavise od X(R ne zavisi od X jer $p(A, X) = p$ koja je već data), pa je Paskalova prava određena sa ove dve tačke i $P \in p(Q, R)$ (Slika 5.3).

Dakle, tačka P će biti presek prave $p(Q,R)$ i prave u_∞, pa $X = p(P,B)\cdot p$.
Konstrukcija

Presek prave $p(B,C)$ i prave kroz A paralelne pravcu o' je tačka Q, a R je presek prave p i prave koja sadrži C i paralelna je sa o'. Konstruišemo pravu $p(R,Q)$, a zatim i pravu kroz B koja joj je paralelna, tačka preseka te prave i prave p je tražena tačka X. □

Primer 5.3. *Date su prave a i p i tačke A i B. Konstruisati centar hiperbole takve da A, B pripadaju toj hiperboli, prava p je njena asimptota, a prava a tangenta u A.*

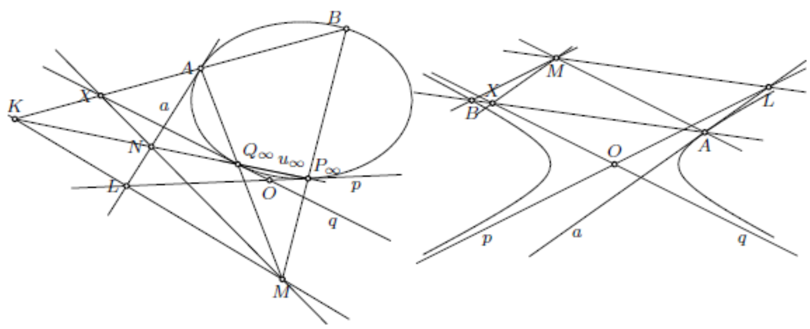
Dokaz. *Analiza*

Centar hiperbole je presek njenih asimptota. Neka su asimptote ove hiperbole data p i neka je druga q, a njihove tačke dodira sa konikom, odnosno presečne tačke sa pravom u_∞ obeležimo sa P_∞ i Q_∞. Dakle, treba da odredimo drugu asimptotu.

Posmatrajmo specijalan šestotemenik $Q_\infty P_\infty P_\infty BAA$, prema Paskalovoj teoremi njegove dijagonalne tačke

$$K = p(Q_\infty, P_\infty)\cdot p(B,A),\ L = p\cdot a,\ M = p(P_\infty, B)\cdot p(A, Q_\infty)$$

su kolinearne. Tačka M zavisi od nepoznate tačke Q_∞, pa je ne možemo odrediti, dakle Paskalova prava je $p(K,L)$ i važi $M \in p(K,L)$. Odakle je $M = p(K,L)\cdot p(P_\infty, B)$, pa $Q_\infty = u_\infty \cdot p(A,M)$. Dakle, q je paralelno sa $p(A,M)$.



Slika 5.4. Primer 5.3

Sada primenom Paskalove teoreme i na šestotemenik $Q_\infty Q_\infty P_\infty BAA$ čije dijagonalne tačke su

$$X = q\cdot p(B,A),\ N = u_\infty\cdot a,\ M = p(P_\infty, B)\cdot p(A, Q_\infty),$$

sledi da je $X = p(N, M) \cdot p(B, A)$ (Slika 5.4). Odavde $q = p(X, Q_\infty)$, pa $O = p \cdot q$.

Konstrukcija

Presek datih pravih a i p je tačka L, zatim tačku M dobijamo kao presek prave kroz L paralelne sa $p(B, A)$ i prave koja sadrži B i paralelna je p. Povlačenjem prave kroz M paralene pravoj a u preseku sa pravom $p(B, A)$ dobijamo X. Sada je prava q paralelna sa $p(A, M)$ i sadrži X, pa je dobijeni presek prave q sa pravom p, tražena tačka O koja je centar ove hiperbole. □

Primer 5.4. *Ako su date tačke A i O i prave a i p takve da je a tangenta u A na hiperbolu, O centar te hiperbole i p jedna njena asimptota, odrediti njenu drugu asimptotu.*

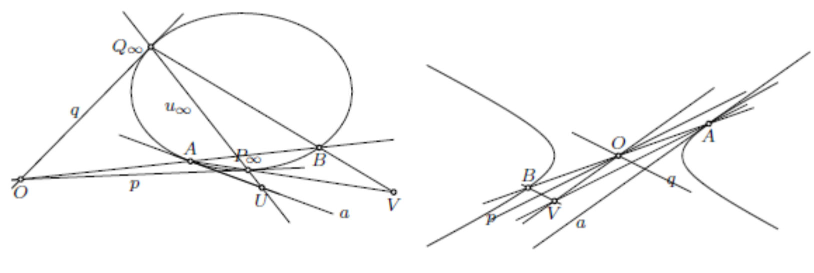
Dokaz. Predstavićemo dva načina rešavanja ovog problema, prvo primenom Paskalove, a zatim primenom Brijanšonove teoreme.

Pretpostavimo da su asimptote ove hiperbole prave p i q, a njihove presečne tačke sa pravom u_∞ neka su P_∞ i Q_∞. Centar hiperbole je tačka preseka asimptota.

Rešenje primenom Paskalove teoreme

Analiza

Neka je B tačka konike koja je simetrična tački A u odnosu na datu tačku O ($B \in p(A, O) \cdot k(O, AO)$). Posmatramo specijalan potpuni šestotemenik $P_\infty P_\infty AABQ_\infty$. Dve njegove dijagonalne tačke, $O = p \cdot p(A, B)$ i $U = a \cdot u_\infty$, možemo odmah odrediti (jer ne zavise od Q_∞) i na osnovu Paskalove teoreme prava koja ih sadrži je Paskalova prava kojoj pripada i treća dijadonalna tačka $V = p(P_\infty, A) \cdot p(B, Q_\infty)$. Sledi, $V = p(P_\infty, A) \cdot p(O, U)$, pa $Q_\infty = u_\infty \cdot p(B, V)$ i zatim $q = p(Q_\infty, O)$.



Slika 5.5. Primer 5.4 primena Paskalove teoreme

Konstrukcija

Dakle, na osnovu analize, prvo konstruišemo tačku B simetričnu tački A u odnosu na O, to će biti presečna tačka prave $p(A, O)$ i kružnice $k(O, AO)$. Zatim, tačku V dobijamo kao presek prave kroz O koja je paralelna sa a

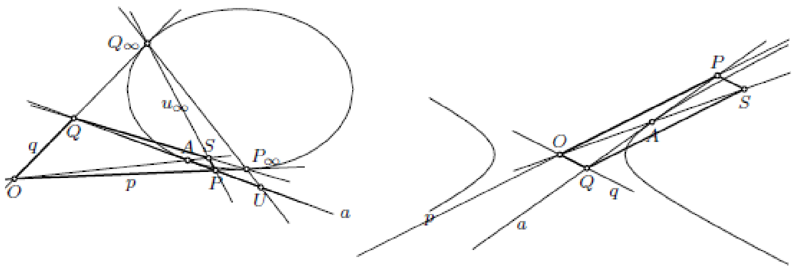
i prave paralelne p koja sadrži A. Sada, prava paralelna sa $p(B, V)$ koja prolazi kroz O je tražena asimptota q.

Rešenje primenom Brijanšonove teoreme

Analiza

Neka su P i Q tačke preseka asimptota p i q sa pravom a (redom) i neka je $S = p(P_\infty, Q) \cdot p(Q_\infty, P)$. Sada je $p(P, S) \parallel p(O, Q)$ i $p(Q, S) \parallel p(O, P)$, jer $p(P, S) \cdot p(O, Q) = Q_\infty \in u_\infty$ i $p(Q, S) \cdot p(O, P) = P_\infty \in u_\infty$, pa je $PSQO$ paralelogram.

Prema Brijanšonovoj teoremi prave $p(P_\infty, Q)$, $p(O, A)$, $p(Q_\infty, P)$, koje spajaju naspramna temena, potpunog šestostranika $ppqqaa$ čije strane su tangente date hiperbole, seku se u Brijanšonovoj tački. Dakle, $S \in p(O, A)$, pa je $A = p(O, S) \cdot p(P, Q)$. Kako se dijagonale PQ i OS, uočenog paralelograma, polove važi i $PA \cong QA$, dakle tačka Q simetrična je tački P u odnosu na A.



Slika 5.6. Primer 5.4 primena Brijanšonove teoreme

Konstrukcija

Na osnovu analize sledi da je potrebno konstruisati tačku Q, pa će tražena asimptota q biti prava kroz Q i O. A ova tačka Q simetrična tački P u odnosu na A dobija se u preseku prave a i kružnice $k(A, PA)$ i onda je $q = p(O, Q)$. □

Primer 5.5. *Data je hiperbola G, njene asimptote p i q i tačke $A \in G$, $T \in p$. Konstruisati tangentu na tu hiperbolu iz date tačke T.*

Dokaz. *Analiza*

Neka su, kao i ranije, P_∞ i Q_∞ dodirne tačke asimptota, odnosno tačke preseka asimptota p i q sa pravom u_∞.

Posmatrajmo šestotemenik $AAP_\infty P_\infty Q_\infty Q_\infty$. Njegove dijagonalne tačke

$$R = p(A, A) \cdot p(P_\infty, Q_\infty),\ S = p(A, P_\infty) \cdot q,\ V = p(Q_\infty, A) \cdot p$$

su, prema Paskalovoj teoremi, kolinearne. Pa je

$$R = p(S,V) \cdot p(P_\infty, Q_\infty) = p(S,V) \cdot u_\infty,$$

odakle je $p(A,R)$ tangenta a u tački A.

Označimo traženu tangentu sa t. Kako $T \in p$ važi $t \cdot p = T$. Neka su $P = a \cdot p$, $Q = a \cdot q$, $E = q \cdot t$. Posmatrajmo šestostranik $tppaqq$. Primenom Brijanšonove teoreme na njega, prave $p(T,Q)$, u_∞, $p(P,E)$ seku se u Brijanšonovoj tački, označimo je sa M. Pa sledi da $E = p(M,P) \cdot q$. Sada, kada nam je poznata i tačka E, kako je $t \cdot p = T$ i $t \cdot q = E$ sledi $t = p(T,E)$.

Konstrukcija

Prvo konstruišemo tangentu a u datoj tački A.

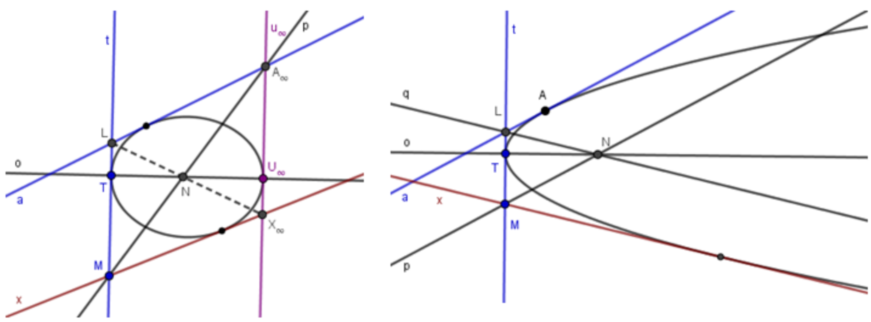
Presek asimptote q i prave koja sadrži A i paralelna je asimptoti p je tačka S, a tačka V je presek ptave p i prave kroz A paralelne q. Zatim, kao presek prave $p(S,V)$ i prave u_∞, dobijamo tačku R, pa je $a = p(A,R)$.

Sada je presekom $p(T,Q) \cdot u_\infty$ određena tačka M. Konstruišemo pravu $p(M,Q)$, pa je u preseku ove prave sa q dobijena tačka E. Tražena tangenta je $t = p(T,E)$. □

Primer 5.6. *Neka su date prave a i t i tačke $T, M \in t$. Ako je T teme parabole, a a i t njene tangente, konstruisati tangentu na tu parabolu iz tačke M.*

Dokaz. *Analiza*

Beskonačno daleka prava u_∞ je tangenta na parabolu u tački U_∞. Ta tačka je beskonačno daleka tačka ose parabole koja je normalna na tangentu t u tački T.



Slika 5.7. Primer 5.6

Neka je x tražena tangenta i $L = a \cdot t$, $A_\infty = a \cdot u_\infty$, $X_\infty = x \cdot u_\infty$. Posmatrajmo šestostranik $ttxu_\infty u_\infty a$. Na osnovu Brijanšonove teoreme sledi da su prave $o = p(T, U_\infty)$, $p(t \cdot x, u_\infty \cdot a) = p(M, A_\infty)$, konkurentne u Brijanšonovoj tački, označimo je sa N. Dakle, $N = o \cdot p$ iz čega sledi $N \in q$, pa je $X_\infty \in p(N, L)$.

Konstrukcija

Konstruišemo prvo pravu o koja sadrži T i normalna je na t. Zatim, pravu p kroz M paralelnu sa a. Presek ove dve prave je tačka N, a presek datih travih a i t označimo sa L. Konstruišemo pravu $p(N, L)$. Sada, tražena tangenta x je prava paralelna sa $p(N, L)$ koja prolazi kroz datu tačku M.

□

Primer 5.7. *Date su prave a i o i tačka $A \in a$. Konstruisati teme parabole, ako je a tangenta u tački A, a prava o osa te parabole.*

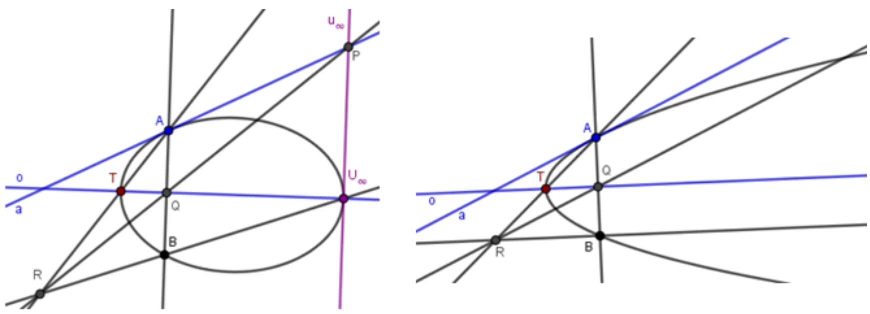
Dokaz. *Analiza*

Neka je T traženo teme date parabole, a tačku dodira prave u_∞ i parabole označimo sa U_∞. Tačka simetrična datoj tački A u odnosu na osu takođe će pripadati paraboli, označimo je sa B.

Sada posmatramo specijalan šestotemenik $AABU_\infty U_\infty T$ čija temena pripadaju ovoj paraboli. Njegove dijagonalne tačke

$$P = a \cdot u_\infty,\ Q = p(A, B) \cdot p(U_\infty, T) = p(A, B) \cdot o,\ R = p(B, U_\infty) \cdot p(T, A)$$

su prema Paskalovoj teoremi kolinearne. Tačku R još ne možemo odrediti, jer zavisi od T koja nam je nepoznata, ali P i Q ne zavise od T, pa je Paskalova prava određena sa ove dve tačke. Odavde sledi da je $R = p(B, U_\infty) \cdot p(P, Q)$, a zatim $T = p(A, R) \cdot o$.



Slika 5.8. Primer 5.7

Konstrukcija

Konstruišemo normalu iz A na datu pravu o, podnožje ove normale biće tačka Q. Sada, tačku B ove parabole, simetričnu tački A u odnosu na o, dobijamo u preseku prave $p(A, Q)$ i kružnice $k(Q, AQ)$. Zatim, presek prave kroz B praralelne o i prave paralelne a koja sadrži Q biće tačka R. Konstruišemo još pravu $p(A, R)$, pa je $T = p(A, R) \cdot o$.

□

Primer 5.8. *Data je prava o i tačke $T \in o$ i $A \notin o$ takve da je A tačka parabole čija osa je prava o, a teme data tačka T. Konstruisati tangentu u tački A na tu parabolu.*

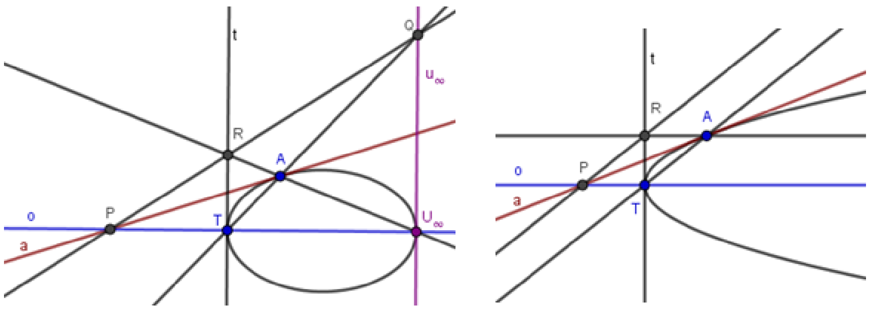
Dokaz. *Analiza*

Presek prave o i beskonačno daleke prave u_∞ označimo sa U_∞, to je tačka dodira date parabole i u_∞. Tangenta na parabolu u tački T koja je njeno teme, biće normala na o, neka je to t.

Prema Paskalovoj teoremi, tačke

$$P = a \cdot p(T, U_\infty) = a \cdot o, \; Q = p(A, T) \cdot u_\infty, \; R = p(Q, R) \cdot o$$

su kolinearne, kao dijagonalne tačke potpunog šestotemenika $AATTU_\infty U_\infty$ čija temena pripadaju datoj paraboli. Paskalova prava određena je tačkama Q i R jer one ne zavise od t, pa ih možemo odrediti. Tačku P dobijamo u preseku Paskalove prave odnosno $p(Q, R)$ i prave o. Pa je $a = p(A, P)$.



Slika 5.9. Primer 5.8

Konstrukcija

Konstruišemo pravu t, normalu u T na o. Kao presek te prave i prave koja sadrži tačku A i paralelna je sa o, dobijamo tačku R. Sada, presek prave kroz R paralelne pravoj $p(A, T)$ i prave o je tačka P, pa je $p(A, P)$ tražena tangenta a.

□

Primer 5.9. *Data je prava p i tačke A, B, T. Neka je G hiperbola takva da je p njena asimptota, $p(A, T)$ tangenta i $A, B \in G$. Konstruisati drugu tangentu iz tačke T na tu hiperbolu.*

Dokaz. *Analiza*

Tačku dodira asimptote p i hiperbole označimo sa P_∞. Neka je x tražena tangenta, a $p(A,T) = a$ data tangenta.

Temena šestotemenika $AABP_\infty P_\infty$ su tačke date hiperbole. Primenom Paskalove teoreme dobijamo da su njegove dijagonalne tačke,

$$R = p(A,A) \cdot p(B,P_\infty),\ S = p(A,B) \cdot p,\ V = p(B,B) \cdot p(P_\infty, A),$$

kolinearne, pa sledi da $V = p(R,S) \cdot p(P_\infty, A)$. Zatim, tangenta u tački B biće prava $p(V,B)$, oznažimo je sa b.

Neka su $b \cdot p = W,\ b \cdot a = U,\ x \cdot p = F$, a važi i $a \cdot x = T$.

Sada, primenom Brijanšonove teoreme na šestostranik $aaxppb$, sledi da su prave $p(A,P_\infty),\ p(T,W),\ p(F,U)$ konkurentne. Položaj prave $p(F,U)$ nam je još nepoznat jer zavisi od tačke F, a ona od x. Dakle, Brijanšonova tačka, označimo je sa M, određena je presekom pravih $p(A,P_\infty)$ i $p(T,W)$. A kako $M \in p(F,U)$, sledi $F \in p(M,U)$, pa je $F = p(M,U) \cdot p$. Tražena tangenta x biće prava $p(F,T)$.

Konstrukcija

Konstruišemo prvo tangentu na datu hiperbolu u tački B.

Presek prave kroz B paralelne sa p i date prave $a = p(A,T)$ biće tačka R, a S dobijamo u preseku prave p i prave određene datim tačkama A i B. Konstruišemo pravu kroz ove dve tačke. Presek te prave i prave koja sadrži A i paralelna je p biće tačka V. Prava $p(V,B)$ je tangenta b u tački B.

Neka su W i U tačke preseka prave b sa pravama p i a, redom. Sada konstruišemo Brijanšonovu tačku M kao presek pravih $p(A,P_\infty)$ i $p(T,W)$. Zatim pravu $p(M,U)$. Kao presek ove prave i prave p dobijamo tačku F, pa je $p(T,F)$ tražena druga tangenta iz T. $\square$

Literatura

[1] H.S.M. Coxeter, *The Real Projective Plane (with an appendix for Mathematica by George Beck)*, Third Edition, Springer-Verlag, New York, Inc., 1993.

[2] H.S.M. Coxeter, *Projective Geometry*, second edition (reprint, slightly revised, of 2nd ed originally published by University of Toronto Press, 1974), Springer-Verlag, New York, Inc., 1987.

[3] Milica Žigić, *Projektivna geometrija*, skripta, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, 2018.

[4] Frank Ayres, Jr., *Projective Geometry*, Schaum Publishing Company, New York, 1967.

[5] Georg Glaeser, Hellmuth Stachel, Boris Odehnal, *The Universe of Conics (From the ancient Greeks to 21st century developments)*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2016.

[6] Vladica Andrejić, *Projektivna geometrija ravni*, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Beograd, 2016.

Biografija

Nikolina Dimitrov rođena je 1. aprila 1996. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Miloš Crnjanski" u Novom Sadu završava 2011. godine. Nakon završetka osnovne škole upisuje Gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu, prirodno-matematički smer, koju završava 2015. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje osnovne akademske studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. Od četvrte godine (školska 2018/19) studije nastavlja na novom smeru na integrisanim akademskim studijama, smer Master profesor matematike na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Nikolina Dimitrov
AU

Mentor: dr Milica Žigić
ME

Naslov rada: Konike u projektivnoj geometriji i konstrukcije u afinoj ravni
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2021.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/70/6/0/28/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Projektivna geometrija
ND

Ključne reči: projektivna geometrija, konike, polaritet indukovan konikom, Štajnerova teorema, Paskalova i Brijanšonova teorema, Dezargova teorema involucije, involucija na konikama, primeri konstrukcija na konikama afine ravni
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu predstavićemo konike u projektivnoj geometriji. U prvom poglavlju dat je istorijki uvod o projektivnoj geometriji i osnovne definicije i teoreme koje se pojavljuju u nastavku rada. Sledeće poglavlje počinje kratkim istorijskim uvodom o konikama, a zatim navodimo tri defini-

cije konika u projektivnoj geometriji. U ovom poglavlju predstavićemo i polaritet indukovan konikom i Štajnerovu teoremu. Treće poglavlje je posvećeno značajnim teoremama: Paskalovoj, Brijanšonovoj i Dezargovoj involutivnoj teoremi. Definisaćemo i tri tipa pramena konika i harmonijsku konjugovanost tačaka na konici. U četvrtom poglavlju prvo se upoznajemo sa projektivnim preslikavanjem na konikama, a zatim opisujemo involuciju na konici. U poslednjem, petom, poglavlju definišemo konike u afinoj ravni i rad završavamo primerima konstrukcija na konikama afine ravni primenom Paskalove i Brijanšonove teoreme.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 2. 6. 2021.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Sanja Konjik, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Milica Žigić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Jelena Stojanov, vanredni profesor, Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin" Zrenjanin, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Nikolina Dimitrov
AU

Mentor: Milica Žigić, PhD
MN

Title: Conics in projective geometry and constructions in the affine plane
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2021.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: (5/70/6/0/28/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Projective geometry
SD

Subject/Key words: Projective geometry, conics, polarity induced by a conic, Steiner's theorem, Pascal's and Brianchon's theorems, Desargue's involution theorem, involution on a conic, examples of constructions on conics of the affine plane
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this master thesis we presented conics in projective geometry. In the first chapter, a historical introduction to projective geometry and the basic definitions and theorems that appear in the continuation of the paper, are given. The next chapter begins with a brief historical introduction to conics, and then we give three definitions of conics in projective geometry.

In this chapter, we will also present the polarity induced by the conic and Steiner's theorem. The third chapter is dedicated to the important theorems: Pascal's, Brianchon's and Desargue's involution theorem. We will also define three types of the pencils of conics and harmonic conjugation of points on a conic. In the fourth chapter, at first, projective mapping on conics, is introduced. Then involution, is descripted. In the last, fifth, chapter, we define conics in the affine plane and finish the thesis with examples of constructions on conics of the affine plane by applaying Pascal's and Brianchon's theorem.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 02. 06. 2021.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Sanja Konjik, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: Milica Žigić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Jelena Stojanov, PhD, Associate Professor, Faculty of Technics: "Mihajlo Pupin", Zrenjanin, University of Novi Sad