Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno – matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Aleksandra Muratović

Razvoj veštine argumentacije u nastavi matematike kroz pitanja tačno/netačno tipa

Master rad

Mentor: dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2021.

Sadržaj

Uvod

Gotovo svakodnevno koristimo i slušamo logične argumente, bilo na poslu, u komunikaciji sa prijateljima, gledajući televiziju, stalno nas neko iznoseći argumente ubeđuje u svoje stavove, i u mnogim situacijama pored same sposobnosti argumentovanja, koja se u matematici može povezati sa izvođenjem zaključaka, potrebna je i veština procene tuđeg razmišljanja i argumenata.

Upravo na to, između ostalog, se odnosi prvi deo rada. Govori se o načinima na koji upotrebljavamo, ili zloupotrebljavamo, jezik i logiku, o logičkim zagonetkama, uopšte o ispravnom zaključivanju, kao i o veznicima i kvantifikatorima, a sve to uz mali osvrt na sam istorijski deo, od Stare Grčke i Aristotela do Bula. Zatim je data uvodna reč o zatvorenim pitanjima, posebno o pitanjima dvostrukog izbora u kojima je učenicima dat iskaz ili niz iskaza za koje se trebaju odlučiti da li su tačni ili ne. U velikoj meri takva pitanja se provlače i kroz ostale delove rada i nazivaju se tačno/netačno pitanjima. Prikazani su i rezultati nekoliko publikovanih istraživanja na temu veštine argumentacije, bilo da je akcenat stavljen na učenike, ili na same nastavnike.

Nakon toga, pažnja se posvećuje argumentaciji kroz nastavu matematike fokusiranoj samo na mali deo sadržaja koji se obrađuju tokom pohađanja osnovne škole, pri čemu se navode razni načini postavljanja tačno/netačno tipa pitanja koja mogu biti pogodna upravo za razvoj veštine argumentovanja. Analizira se učestalost zadataka dvostrukog izbora na završnom ispitu za osnovce, a pored toga i sadržaji udžbenika i zbirki zadataka, kao najvažnijih nastavnih sredstava u osnovnom obrazovanju i vaspitanju.

Navedeni su zatim rezultati empirijskog istraživanja koje je imalo za cilj proveriti koliko su učenici sigurni u svoje odgovore na tačno/netačno pitanja i kakve su veštine argumentovanja njihovih kratkih odgovora, prvenstveno od strane osnovaca završnih razreda. Po ugledu na zbirke, publikovana istraživanja i na naredno PISA testiranje, napravljen je test, kao instrument neophodan za istraživanje sprovedeno u svrhe ovog rada. Učestvovali su učenici sedmog i osmog razreda, kao i učenici različitih obrazovnih profila iz srednjih škola. Sasvim očekivano, odgovor koji se našao na mnogim popunjenim testovima, kada bi se od učenika zahtevalo da obrazlože zašto određeni iskaz smatraju tačnim ili ne, bio je: *„Logično mi je“*. Pitanje je šta podrazumevaju pod tim logičkim zaključivanjem, jer je vrlo moguće da učenikova ispravna, odnosno nespravna intuicija vodi do tačnog, odnosno pogrešnog rešenja, koje je alarm za nastavnika i njegov budući rad sa učenicima.

Kako prethodno biva zaključeno, učenicima se najčešće plasiraju zadaci tačno/netačno tipa koji pripadaju osnovnom nivou, što ih verovatno čini omiljenima među učenicima. Zato, u završnom delu rada, nakon što su poznati rezultati istraživanja, dat je predlog negovanja i razvoja veštine argumentacije kroz diskusiju i rad u grupama, koji između ostalog obuhvata i zadatke zatvorenog tipa o kojima se nakon kratkih odgovora i diskutuje kako bi svi učenici bili uključenini u rad.

1. Elementarna logika i pitanja tačno/netačno tipa

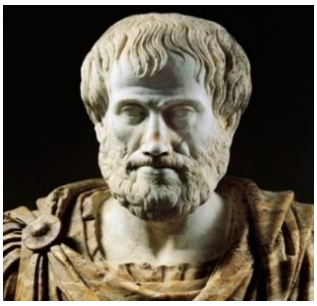
Nisu samo školarci skloni korišćenju uzrečice *„Pa to je logično“,* često je, iako vešti da izvedu ispravan zaključak i argumentuju, koriste i odrasli. Da je nastava matematike pogodna za trening uma, lepo je rekla jedna nastavnica, gospođica Kolins, ćerka novinara Donalda Dž. Meknila mlađeg:

> *„Deca ne uče poeziju samo zato što će porasti i postati pesnici. Radi se o navici uma. Vaš mozak ne razmišlja apstraktno ukoliko to ne zahtevate od njega – a potrebno je da se to zahteva od njega u relativno ranom uzrastu. Strogost i logičnost koje podrazumeva matematika jesu dobar način da uvežbate svoj mozak“. [1]*

Reč *“logika”* ne koristi se samo u krugu učenih ljudi, nego i u svakodnevnom, običnom životu. *“Tu nema logike”* na primer koristimo za nešto nerazumno i neočekivano, a rečenicom *“po toj logici ispada da..”* najavljuje se da do toga što sledi se dolazi na neki poseban, možda i pogrešan način. Oba slučaja produkt su razmišljanja i zaključivanja. [2]

1.1 Istorijski osvrt

Poreklo reči logika potiče od starogrčke reči logos, koja se odnosila na jezik, reči, razum. Već 440. godine pre nove ere sofisti[1], koje je prvenstveno zanimala intelektualna elokvencija, postali su profesionalci kada je u pitanju obuka potencijalnih političara za njihovu što uspešniju karijeru i javni život koji je podrazumevao osnaženu argumentaciju zarad, na prvom mestu, pridobijanje što veće publike. Platona, a kasnije i Aristotela u značajnoj meri, zanimali su oni za koje argumenti prevrtljivih sofista mogu biti zbunjujući. Kao odgovor na takozvane *sofizme*[2], koji su neretko lukave i svesne logičke greške, samo mudro rečene, Aristotel sakuplja do tada poznate šeme ispravnog logičkog zaključivanja i objavljuje ih u svojoj knjizi nazvanoj *„Organon“* (u prevodu Oruđe).



Slika 1: Aristotel (384.-322. pne) rođen u Stagiri, u Trakiji (izvor: https://www.biography.com/scholar/aristotle)

[1] Sofisti – mislioci koji su vešto raspravljali i podučavali druge tome (Platon bi rekao: „trgovci hranom za dušu“)
[2] Sofizam – namerno učinjene logičke greške

Aristotelova logika, naziva se još i Aristotelova teorija silogizama, za koju se može reći da je predak matematičke logike, a za njega da je otac logike. Za njegovu logiku kaže se da je opšta ili formalna, a i mnogo godina kasnije, u 17. i 18. veku bila je obavezan deo svakog obrazovanja. Dedukcija[3] je u vreme Aristotela bila precenjena, a on je svako deduktivno zaključivanje smatrao silogizmom[4]. Sam ga je Kant[5] smatrao neprikosnovenim u oblasti logike, te je i izjavio: *„Sve što je bitno u logici, sve što se može reći o zakonima logike, rekao je Aristotel, pa je zbog toga formalna logika u nekom smislu mrtva nauka...“*

Naredna značajna imena za razvoj matematičke logike, svakako su Rene Dekart i Gotfrid Lajbnic.

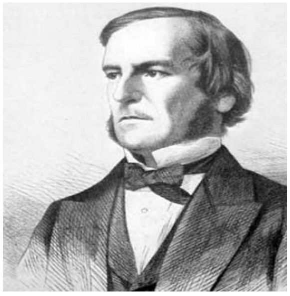
Slika 2: Rene Dekart (1596-1650) rođen u La Eju, seocetu u pitomoj Tureni (izvor slike: https://www.biography.com/scholar/rene-descartes)

Iako je Dekart veoma rano izgubio majku, sa svega jednom godinom života, ostao mu je otac, relativno imućan čovek, za to vreme savremenih shvatanja, da mu pruži podršku i priliku da se školuje, bude najbolji među najboljima i doprinese nauci mnogo. Rečenica koja bi ga veoma dobro opisala je: *„Ja ne radim mnogo, radim intenzivno“.* I uz to, naravno: *„Treba mi mnogo sna i odmora“.* Njegovo krhko zdravlje je to i zahtevalo. Dekartov život obeležila je i velika tragedija, kada je izgubio petogodišnju vanbračnu ćerku, koja se rodila 1635. godine iz jedne od njegovih brojnih ljubavnih avantura, nešto pre nego što je umro i njegov otac. Dobar deo svog života proveo je u Holandiji, dovoljno daleko od svih mesta na kojima bi mogao imati poznanike. U svoj samački, samotnjački život željan samo sna i spokoja, 1643. godine primio je jednu mladu ženu, princezu Elizabetu, ćerku nekadašnjeg češkog vladara, kojoj do kraja svog života piše iskrena i duga prijateljska pisma. Smatrao je da se matematički način razmišljanja mora primenjivati i u ostalim naukama, da ne treba verovati i oslanjati se na mišljenja autoriteta, već na sebe, svoj razum i moć logičkog zaključivanja, kako bi se došlo do pravih istina. Odluka koja ga je kasnije koštala života, jeste odlazak u hladnu Švedsku, da bude učitelj tadašnjoj vladarki kraljici Kristini, sa nadom da će njegovo učenje imati nekog učinka i promeniti njene loše navike, zbog kojih su mnogi, baš kao i on, trpeli svakodnevnu torturu. Njena bahatost nije dozvoljavala da se greje biblioteka, u kojoj je Dekart provodio vreme, dok nije dobio upalu pluća i nedugo zatim umro. (izvor [3])

[3] *Dedukcija – proces zaključivanja koji polazi od opštih stavova (premisa) i ide ka posebnom, pojedinačnom (zaključku).*
[4] *Silogizam –zaključivanje iz dve ili više pretpostavki.*
[5] *Imanuel Kant – filozof 18. veka, za mnoge jedan od najvećih filozofa ikada*

Slika 3: Gotgrid Vilhelm Lajbnic (1646-1716) rođen u Lajpcigu (izvor slike: https://biographyworldweb.blogspot.com/2013/05/gottfried-wilhelm-leibniz-biography.html)

Vrlo rano Lajbnic je naučio latinski, a zatim i starogrčki koji mu je pomagao da čita klasike u originalu, posebno Aristotela, a objavljivao je na francuskom, nemačkom i latinskom. Vrlo često je bio izložen nerazumevanju okoline. Doktorirao je tezom iz prava, a dugo je, za tadašnja shvatanja, smatran mnogo više filozofom nego matematičarem. Potpuno oduševljen Hajgensom[6] i njegovim rešenjima nekih problema, poput matematičkog klatna, izrazio je želju da mu upravo on drži časove. Tako je Lajbnic, sa 27 godina ozbiljno zakoračio u svet matematike koja mu je kasnije omogućila da svoj intelekt maksimalno iskoristi. Uprkos tome što ga mnogi nisu doživljavali kao dobrog čoveka, niko ne može osporiti njegove rezultate i smatrati ga praocem matematičke logike. Naime, njegova ideja bila je da stvori univerzalni formalni račun *„Characteristica Universalis“,* nalik matematici, u kojoj bi bilo moguće mišljenje zameniti računanjem, jer bi svi objekti, pojmovi i relacije imali svoje oznake. (izvor [3])



Slika 4: Džordž Bul (1815-1864) (izvor slike: https://history-computer.com/ModernComputer/thinkers/Boole.html)

Kao sin sitnog trgovca u Linkolnu, Engleska, Bul nije imao brojna prava, koja se tiču obrazovanja i napretka, tako da je njegov put do uspešnog naučnika bio izuzetno trnovit. Otac, koji je sa njim delio strast prema matematici, pružao je sinu neizmernu podršku. Škole koje su tada siromašni mogli pohađati bile su gotovo bedne, tako da je svoju dečačku maštariju, da prodre u višu klasu, velikim trudom, radom i naporima, boreći se sa predrasudama imućnijih od sebe, strpljivo podnoseći svoj teži put, ostvarivao. Svoju misiju otpočeo je učeći jezike, samostalno, tako da je sa samo 12 godina mogao da prevodi sa latinskog pesnike Horacija i Ovidija. Može se reći da sa njegovim radovima i njegovom genijalnom logikom, u 19. veku stiže prava matematička logika. Negova teorija (tzv. *račun klasa*) vodila se dvema idejama: da radeći sa iskazima treba koristiti oznake i da zakoni mišljenja imaju mnogo sličnosti sa zakonima aritmetike. On je dokazao osnovne zakone iskaznog računa, danas poznate kao aksiome Bulove algebre. (izvor [3])

---

[6] *Kristijan Hajgens (1629-1695) - holandski matematičar, astronom i fizičar*

1.2 Iskazna i predikatska logika

Osnovni pojmovi logike iskaza su: *iskaz, istinitosna vrednost iskaza, logički veznici.*

Iskaz je rečenica koja je ili tačna ili netačna. To su rečenice kojima može da se tvrdi nešto, a pored toga što mogu da budu ili ne budu tačne, u matematici se može reći da važe ili ne. Uglavnom se iskazi označavaju malim slovima $p, q, r\ldots$ koja se još nazivaju iskazna slova.

Vrlo rano se učenici sreću sa pojmom iskaza, kao i sa teoremama[7] koje usvajaju kao iskaze koji su uvek tačni. Već u petom razredu poznata im je relacija deljivosti, gde $x|y$ predstavlja iskaz, koji tek kada se *x* i *y* zamene brojevima postaje tačan ili netačan.

Samo neke od teorema u vezi pomenute relacije deljivosti, su:

- ✓ *Ako* $a|b$ *onda* $a|kb$, *za bilo koji priridan broj k.*
- ✓ *Neka su a,b,c proizvoljni prirodni brojevi. Ako a|b i b|c, onda a|c.*
- ✓ *Prirodan broj je deljiv brojem 2 ako je cifra jedinica tog broja 0, 2, 4, 6 ili 8.*
- ✓ *Prirodan broj je deljiv brojem 5 ako je cifra jedinica tog broja deljiva sa 5.*
- ✓ *Prirodan broj je deljiv brojem 3 (9), ako je zbir njegovih cifara deljiv sa 3 (9).*

One rečenice čije se istinitosne vrednosti ne mogu utvrditi, nisu iskazi. Primeri takvih rečenica su:

- *Kako si?*
- *Gde si?*
- *Ova rečenica je netačna.*
- $3 + 5$
- $9 - x = 6$
- *Ona ima plave oči.* (tek kada je poznato ko je „ona“, iskaz postaje tačan ili netačan)

Kako iskaz može biti tačan ili netačan, definišemo **istinitosnu vrednost** iskaza ($\tau(p)$) na sledeći način:

$$\tau(p) = \begin{cases} \top, & p\ je\ tačan\ iskaz \\ \bot, & p\ je\ netačan\ iskaz \end{cases}$$

Sada možemo za rečenicu p: $-0{,}055 - 0{,}5 = -0{,}555$ reći da je iskaz koji ima istinitosnu vrednost tačno, što se može zapisati $\tau(p) = \top$.

Logički veznici služe da od polaznih iskaza dobijemo složenije iskaze, a veznici koji se najčešće koriste su: ***„i“, „ili“, „ako... onda“, „ako i samo ako“*** (binarni) i ***„nije“*** (unarni veznik). Istinitosne vrednosti složenog iskaza zavise od istinitosnih vrednosti iskaza od kojih se taj iskaz sastoji.

Logičke operacije koje odgovaraju ranije spomenutim veznicima su:

[7] *Teorema označava matematičko tvrđenje u čiju se tačnost uveravamo isključivo ispravnim zaključivanjem primenjenim na istinite pretpostavke.*

- *Konjunkcija iskaza p i q je iskaz „p i q“ (oznaka $p \wedge q$)*
- *Disjunkcija iskaza p i q je iskaz „p ili q“ (oznaka $p \vee q$)*
- *Implikacija iskaza p i q je iskaz „ako p onda q“ (oznaka $p \Longrightarrow q$)*
- *Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz „p ako i samo ako q“ (oznaka $p \Longleftrightarrow q$)*
- *Negacija iskaza p je iskaz „nije p“ (oznaka $\rceil p$)*

Istinitosne tabele pregledno prikazuju sve moguće istinitosne vrednosti (⊤/⊥) konjunkcije, disjunkcije, implikacije, ekvivalencije i negacije.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau(p \Rightarrow q)$	$\tau(p \Leftrightarrow q)$	$\tau(\rceil p)$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤

Tabela 1: Istinitosna tablica

Vidimo, da na primer tablicu istinitosti implikacije možemo doživeti kao da iz istine sledi samo istina, a iz neistine bilo šta.

Primer implikacije:

a) Ako je pravougli trougao jednakostraničan, onda je kateta jednaka hipotenuzi.

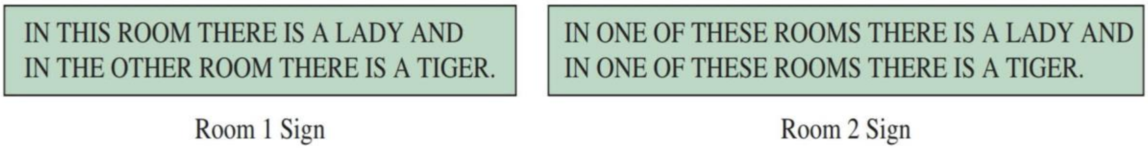
Ovo je tačno, jer je netačna posledica izvučena iz netačne pretpostavke.

b) Ako je $2^2 = 1^2$, onda je 20 prost broj.

Tablica nalaže da ovaj iskaz smatramo tačnim, jer „netačno povlači tačno“ i „netačno povlači netačno“. (izvor [4])

Kada je neki iskaz tačan, njegova negacija je netačna, odnosno iskaz i njegova negacija imaju suprotne istinitosne vrednosti. Recimo *„košulja koju nosim je plava“* i *„košulja koju nosim je zelena“* su iskazi, ali nisu negacije jedna drugoj, jer nemaju suprotne istinitosne vrednosti. Ako je košulja koju nosim crvene boje, oba prethodna iskaza su netačna. Međutim, bez obzira koje boje je košulja koju nosim, iskazi *„košulja koju nosim je plava“* i *„ košulja koju nosim nije plava“*, imaju suprotnu istinitosnu vrednost. Neki iskazi, koji uključuju i kvantifikatore, složeniji su za negiranje. [5]

Raymond Smullyan, istaknuti pisac logičkih zagonetki, u svojoj knjizi *„Dama ili tigar"*, priložio je i logičku zagonetku o zatvoreniku koji mora da bira između dve neprazne sobe u kojima se može nalaziti dama ili tigar. Svaka soba ima znak na vratima i ono što zatvorenik zna, jeste da je tačno jedan od znakova tačan. Ako je zatvorenik pametan i logički razmišlja, ne samo da će spasiti sebi život, nego će i osvojiti mladu damu. [5]



Slika 5: Znak na jednim i na drugim vratima

Zatvorenik na osnovu natpisa na vratima i na osnovu informacija o znakovima sa slike, može odabrati tačnu sobu. Ako je znak na sobi 1 tačan, onda i znak na sobi 2 mora biti tačan. Budući da se to ne može dogoditi, znak na sobi 2 mora biti tačan, što znači da znak na sobi 1 nije tačan. Kako je znak na sobi 2 tačan, znači da se zaista u jednoj sobi nalazi dama a u drugoj tigar. Pošto je znak na sobi 1 netačan, dama ne može biti u sobi 1, mora biti u sobi 2.

Simbolima logičkih veznika, kada je predikatska logika u pitanju, pridružuju se i specifični operatori koji govore o „kvantitetu" objekata sa nekom osobinom, i to su univerzalni kvantifikator ∀ („za sve" ili „svaki") i egzistencijalni kvantifikator ∃ („postoji" ili „neki"). Još kod Aristotela se mogao pronaći mali deo predikatske logike, gde veznici nisu bili jasno odvojeni od kvantifikatora.

Posmatrajući rečenicu $x^2 = 9$, ne možemo reći da je ona iskaz, jer se ne može utvrditi istinitosna vrednost ove matematičke formule. Međutim koristeći reči „postoji" ili „za svako", odnosno simbola za skraćeni zapis ovih reči, koje nazivamo kvantifikatorima, dolazimo do sledećih rečenica:

- Postoji broj x takav da važi formula $x^2 = 9$ (kraće $(\exists x)(x^2 = 9)$)
- Za svaki broj x važi formula $x^2 = 9$ (kraće $(\forall x)(x^2 = 9)$)

koje postaju iskazi, jer imaju istinitosne vrednosti.

Ako kažemo: *„Neki učenici u odeljenju imaju plave oči"* i pretpostavimo da je to tačno, to znači da bar jedan učenik iz odeljenja ima plave oči. Budući da negacija istinite izjave nije istinita, ni *„neki učenici u razredu nemaju plave oči", niti „svi učenici u razredu imaju plave oči"*, nisu negacije prvobitnog iskaza. Negacija bi bila, recimo: *„Ni jedan učenik u odeljenju nema plave oči".* Prilikom otkrivanja da li je jedna izjava negacija druge, učenici stiču i koriste veštinu argumentovanja, da bi se utvrdilo da li iskazi imaju suprotne istinitosne vrednosti u svim mogućim slučajevima.

Učenici petog razreda, opet kada je u pitanju deljivost imaju zadatak da odrede koji su od ponuđenih iskaza tačni, a koji ne. Iskazi mogu biti na primer [17]:

- *Svaki broj deljiv sa 6, deljiv je i sa 3.*
- *Svaki broj deljiv sa 9, deljiv je i sa 3.*
- *Neki brojevi deljivi sa 3, deljivi su i sa 9.*

Dok izvode zaključke, obrazlažu odgovore i daju primere i kontraprimere, učenici se osećaju uključenima u nastavu i veoma brzo stiču veštinu argumentovanja. ***Argumentovanje*** podrazumeva navođenje niza iskaza, od kojih je poslednji zaključak, a svi pre njega premise.

Od rečenica koje se nazivaju *premise* ili *pretpostavke* (u nastavku će se koristiti reč pretpostavka), dolazi se do rečenice koja se zove *zaključak* i koja često biva najavljena rečima *dakle, prema tome ili znači.* ***Pretpostavka*** je iskaz od kog polazi postupak zaključivanja. Ako su pretpostavke tačne, mora onda i zaključak biti tačan.

Iz sledeće dve pretpostavke:

- *Julijanski kalendar sada kasni trinaest dana iza gregorijanskog,*
- *25. decembar ove godine po gregorijanskom kalendaru pada u sredu,*

može dedukcijom da se dođe do zaključka:

- Dakle, 25. decembar ove godine po julijanskom kalendaru pada u utorak.

Zaključivanje se zasniva na značenju reči *julijanski kalendar, gregorijanski kalendar, kasni trinaest dana, sreda*, a umesto *25. decembar* mogao je da stoji bilo koji datum. [2]

U nastavku su navedena samo neka od poznatih pravila zaključivanja.

Jedno od najjednostavnijih i najčešće upotrebljavanih pravila zaključivanja zove se ***modus ponens*** i oblika je: $\frac{A \Rightarrow B, A}{B}$.[8]

Primer: ✓ Ako je zbir cifara broja deljiv sa 3, onda je taj broj deljiv sa 3. ✓ Zbir cifara broja 7770 je deljiv sa 3. ✓ Dakle, tvrdnja da je broj 7770 deljiv sa 3 je tačna.

Još jedno od pravila je i ***modus tollens,*** oblika: $\frac{A \Rightarrow B, \rceil B}{\rceil A}$.

Primer: ✓ Ako redovno vežbaš matematiku, dobiješ odličnu ocenu na pismenom. ✓ Nisi dobio odličnu ocenu na pismenom. ✓ Dakle, nisi redovno vežbao matematiku.

[8] *U implikaciji A sledi B (ili ako A onda B) prvi iskaz A zove se antecedens, a iskaz B je konsekvens. Modus ponens je dakle pravilo koje se tiče implikacije i kaže da, ako imamo implikaciju „Ako A onda B" i ako je dato A, možemo zaključiti B.*

Poznato je i ***pravilo tranzitivnosti implikacije i ekvivalencije***, oblika: $\frac{A\Rightarrow B, B\Rightarrow C}{A\Rightarrow C}$ i $\frac{A\Leftrightarrow B, B\Leftrightarrow C}{A\Leftrightarrow C}$.

Primer:

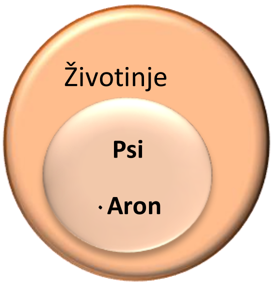
- ✓ Ako je broj deljiv sa 24, onda je deljiv sa 6.
- ✓ Ako je broj deljiv sa 6, onda je deljiv sa 3.
- ✓ Ako je broj deljiv sa 24, onda je deljiv sa 3.

Značajnu ulogu kod zaključivanja imaju skupovi, o čemu će više reči biti u nastavku. Najčešće se skupovi prikazuju grafički pomoću Ojler – Venovih dijagrama, uglavnom u obliku krugova. Na koji način se Ojler[9]- Venovi[10] dijagrami mogu koristiti prilikom zaključivanja, pokazuju sledeći jednostavni primeri, sa kojima se učenici susreću već u petom razredu osnovne škole, kada im se posebno skreće i pažnja na reči *svaki, neki, sledi, ili, i, ne.*

Primer 1:

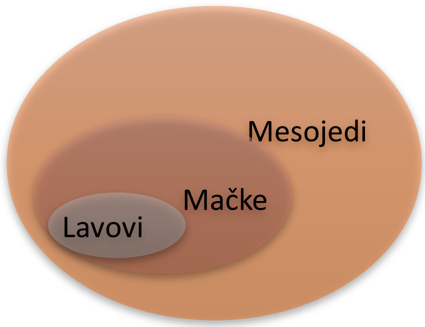
Pretpostavke: Svi psi su životinje.
Aron je pas.

Zaključak: Aron je životinja.



Primer 2:

Pretpostavke: Svi lavovi su mačke.
Sve mačke su mesojedi.



Od učenika petog razreda zahteva da zaključe i obrazlože odgovore na pitanja poput:

1) Da li su svi lavovi mesojedi?
2) Ako životinja nije mesojed, da li može biti mačka?
3) Ako životinja nije mesojed, da li može biti lav?

[9] Leonard Ojler (1707-1783) – slavni švajcarski matematičar, fizičar i astronom.
[10] Džon Ven (1834-1923) – slavni britanski logičar i filozof.

1.3 Pitanja tačno/netačno tipa kao alat za sticanje veštine argumentacije

Rad se na samom početku bavi elementarnom logikom, kao naukom o zaključivanju, koje se u velikoj meri koristi u matematici. Upravo se u okviru nje pojavljuje skup dve istinitosne vrednosti koji se najčešće označava sa $\{\top, \perp\}$, gde se za tačne iskaze govori da su istiniti ($\top$) a za netačne da su neistiniti ($\perp$).

Prema načinu odgovaranja, pitanja se dele na pitanja otvorenog i zatvorenog tipa. U zadacima dvostrukog (alternativnog) izbora, koja pripadaju grupi zadataka zatvorenog tipa i koje možemo nazvati i tačno/netačno zadacima, od učenika se uglavnom očekuje samo da provere (ne)istinitost matematičkog iskaza. Za dati niz iskaza, nakon što utvrde (ne)tačnost, učenici trebaju najčešće pored tačnog iskaza napisati T, a pored netačnog N, ili samo zaokružiti željeno ako su pored svakog iskaza navedena oba slova.

Tačno/netačno pitanja koriste se za [6]:

- *Prepoznavanje činjenica,*
- *Refleksiju naučenih materijala,*
- *Proveru znanja.*

Prednosti tačno/netačno pitanja [6]:

- *Može da se svede na upotrebu „da“ i „ne“ ili „slažem se“ i „ne slažem se“,*
- *Lako se ocenjuju,*
- *Učenici brzo odgovaraju na njih,*
- *Može se testirati širok spektar sadržaja,*
- *Lako se sastavljaju.*

Ono što je vrlo bitno, jeste da zadaci treba da odgovaraju obrazovnim ishodima koji se žele postići. Zadaci zatvorenog tipa, bilo dvostrukog ili višestrukog izbora, uprkos navedenim prednostima, nisu uvek odgovarajući za ispitivanje svih obrazovnih ishoda. Naime, ako definisani ishod striktno podrazumeva kreiranje odgovora, svakako je bolje koristiti zadatke otvorenog tipa.

Neki od nedostataka pitanja dvostrukog izbora su [7]:

- Pogađanja na sreću,
- Previše subjektivno ili previše lako.

S obzirom na mogućnost odabira samo među dva izbora, ovakva pitanja osetljiva su na pogađanja. Nasumično nagađanje ima potpuno jednake šanse da dovede do tačnog, odnosno netačnog odgovora, 50%. Čak ni informacije dobijene iz velikog broja pitanja ovog tipa, ne moraju nužno biti korisne. Odgovarajući na deset pitanja nasumično, učenik može dati recimo sedam tačnih odgovora, a da suštinski zna odgovor na samo tri, jer je ostale slučajno pogodio. Dakle, tačno/netačno pitanja često daju vrlo malo informacija o stvarnim veštinama učenika. Ako ova pitanja nisu napisana veoma pažljivo, mogu biti previše subjektivna i u takvim situacijama ljudi koji ih pogrešno shvate možda bolje znaju sadržaj od onih koji su dobro razumeli.

Većina učenika preferira pitanja tipa tačno/netačno, iako mogu biti vrlo nezgodna. Uprkos nedostacima koje imaju, i dalje se mogu koristiti za *podsticanje diskusije*, na drugačiji način razmišljanja, ali i na razvoj veštine argumentacije. U skladu sa tim može biti dat zbunjujući niz iskaza koji su drugačije formulisani, može se od učenika zahtevati da potvrdi koliko je siguran u svoj odgovor, gde može biti ponuđeno, kao u testu sastavljenom za potrebe istraživanja*, „potpuno sam siguran", „delimično siguran" i „nisam siguran".* Kao što je već spomenuto, neke ishode moguće je ispratiti isključivo zadacima otvorenog tipa, recimo kada se prati sposobnost učenika da formulišu hipoteze, zaključke, kada se prati veština argumentacije i kreativno mišljenje. Ipak, neka modifikovana tačno/netačno pitanja mogu zahtevati da se odgovor argumentuje, odnosno da se dokaže ili opovrgne iskaz na primer pružajući kontraprimere. Kako se učenici snalaze sa takvim pitanjima, biće prikazano u analizi empirijskog istraživanja.

Deca su veoma rano spremna odgovarati na pitanja dvostrukog izbora. Takođe, i kada je u pitanju proces sticanja veštine argumentacije, on započinje već u najranijem uzrastu, a posebno mesto pri tome zauzima igra. Igrajući se, deca razvijaju maštu, ali podjednako i logičko zaključivanje.

Aktivnost *„koji ne pripada"* razvio je nastavnik matematike, bloger i autor Christopher Danielson. Prvenstveno pokazuje deci kolekciju od 4 matematička predmeta (oblici, brojevi, izrazi...), tražeći zatim od njih da odluče koji predmet gde ne pripada i zašto. Ova aktivnost podržava učenike da iznose određene tvrdnje o zajedničkim svojstvima među određenim objektima koje uoče i upoređujući ta svojstva potkrepljuju svoje tvrdnje obrazloženjima. Počev od pitanja dvostrukog izbora, u ovom slučaju *„pripada"* ili *„ne pripada",* lako se dolazi do razgovora kojim se prati veština argumentovanja. [8]

Za samu reč argument, asocijacija može biti spor ili sukob između suprotstavljenih strana. Ipak na nastavi matematike, praksa argumentacije podrazumeva iznošenje tvrdnji, a zatim i potkrepljivanje istih dokazima, obrazlaganje i procenu obrazloženja drugih. Učenici viših razreda bave se formalnijom argumentacijom i deduktivnim dokazima, ali zaista i manja deca mogu podržati svoja obrazloženja dokazima, osmišljavanjem argumenata na osnovu matematičkih odnosa koji su im poznati. Njihovi argumenti imaju smisla i mogu biti tačni. Na primer, oni mogu potvrditi i veoma lepo obrazložiti da je $3 + 5$ i $5 + 3$ isto, koristeći unifix kocke ili matematičku vagu.

U nastavku ćemo videti sa kakvim primerima zadataka pretežno dvostrukog izbora se susreću učenici osnovne škole.

2. Istraživanja o tačno/netačno tipu zadataka u oblasti matematike

Prvo pomislimo da je akcenat prilikom istraživanja ovog tipa uvek na učenicima, ali to naravno nije istina. Najznačajnija karika kada su u pitanju učenici i sticanje osnovnog obrazovanja, biće nastavnici zaduženi za organizaciju i osmišljavanje procesa podučavanja. Zato, velika pažnja posvećuje se nastavnicima i istraživanjima osvrnutim na njihovu spretnost i sposobnost da pruže kvalitetne časove svojim učenicima. U nastavku su navedeni rezultati nekih publikovanih istraživanja.

Promocija matematičke argumentacije

Autori ovog istraživanja Chepina Ramsey i Cynthia W. Langral [9], bave se matematičkom argumentacijom koja bi trebala biti zastupljena u što većoj meri već u nižim razredima osnovne škole. Oni su u svom istraživanju pružili opšte strategije nastave, gde su se primeri odnosili na aritmetička svojstva. Dinamika na nastavi matematike treba atmosferu u učionici da učini pogodnom za otkrivanje novih ideja i oslobodi učenike da iznesu svoj stav, uporede rešenje sa ostatkom odeljenja i objasne način na koji su došli do istog. S obzirom da su učenici već u najranijem uzrastu u stanju da opravdaju ili kritikuju određenu tvrdnju, kao i da samostalno uoče šablone, nastavnik uključivanjem matematičke argumentacije u nastavu utiče na modifikaciju učenikovih stavova o sadržaju koji se obrađuje i generalno na razvoj matematičkog razumevanja kod učenika. Cilj je poboljšati veštine učenika u argumentovanju, ali naravno i proširiti znanje i razumevanje matematičkih sadržaja koji se obrađuju.

Opšte strategije podučavanja:

- *Pružiti jezičku podršku*
- *Razgovarati o poznatom sadržaju*
- *Navesti uslove*
- *Uneti lažne tvrdnje*
- *Manipulisati poznatim sadržajem kao da je nepoznat*

Pružiti jezičku podršku: Učenicima se pruža neki vid pomoći, uvođenjem takozvanih jezičkih okvira, popunjavanjem kojih iznose svoja zapažanja, stavove i nejasnoće. Neki od najčešće upotrebljavanih jezičkih okvira su:

- *Slažem se sa ____________________ jer __________________.*
- *Primetio sam ___________________ kada _________________.*
- *Pitam se zašto _______________?*
- *Imam pitanje o ___________________.*
- *Ne slažem se, jer ________________.*
- *Na osnovu ____________________, mislim ____________________.*

Razgovarajte o poznatom sadržaju: Iako aritmetička svojstva na koja su se odnosili primeri zadataka naizgled nisu povezana sa pojmom parnih i neparnih brojeva, od učenika je prilikom istraživanja zahtevano da navedu šta znaju o njima. Imali su zadatak recimo da usmeno obrazlože tvrdnje da je zbir parnog i neparnog broja neparan broj, a zbir dva parna paran broj. Objašnjenja koja su učenici pružili, samo su poslužila kao značajan uvod u matematičku argumentaciju, čak i kada je u pitanju rasprava o aritmetičkim svojstvima.

Navesti uslove: Veliki problem nastaje često, jer učenici odmah pristupaju rešavanju matematičkih problema, bez preteranih pokušaja da nađu lakše ili elegantije rešenje. Otvorenim pitanjem 100 __ ____ = 100 recimo navode se učenici na otkrivanje osobine identiteta. Popunjavajući praznine operacijom i brojem, učenici su prvo tvrdili da je nula jedino rešenje za brojčanu vrednost, potpuno ignorišući postojanje ostalih operacija. To je upravo momenat u kom je trebalo razmisliti o svim uslovima pod kojim bi izraz važio. Kada su uključili i znanje koje poseduju o ostalim operacijama, došli su do svojstva identiteta, a znanje koje se stekne na ovakav način, otkrivanjem, sigurno je trajnije nego kad nastavnik samo navede svojstva koja važe. Takođe, učenicima je postavljeno pitanje: „Da li je suma tri broja paran ili neparan broj?“, na šta je jedan od učenika odgovorio: *„Čekaj, da li postoje dva parna ili dva neparna broja?“* A zatim je to pitanje navelo ostatak odeljenja da razmisle i navedu ostale mogućnosti. Prilikom sabiranja 3 broja, učenici su otkrili i da se može menjati redosled sabiranja, što ih je navelo i na osobinu asocijativnosti sabiranja.

Uneti lažne tvrdnje: Nastavnik unoseći lažne tvrdnje tera učenike da se pobune i argumentuju svoje stavove. Kada jednom opovrgnu tvrdnju nastavnika, dobiće na sigurnosti i samopouzdanju koje im često nedostaje. Učenicima je dato tvrđenje: *„Svaki put kad pomnožite 2 broja, dobijate paran broj kao proizvod“.* Neki učenici verovali su u tvrdnju samo zato što je nastavnik rekao tako, dok se ipak nekolicina njih pobunila navodeći brojne kontraprimere. Bilo je i onih koji tvrdnju pogrešno shvate. Recimo jedan učenik je razumeo da je u pitanju množenje sa brojem 2, pa je uporno tvrdio da proizvod jeste paran broj. Naknadno, nastavnik je zahtevao od učenika da promene uslove tvrđenja, što je dovelo do sledećih izjava:

- *„Bilo koji broj pomnožen sa dva daje paran broj.“*
- *„Bilo koji broj pomnožen sa parnim brojem daje paran broj.“*

Manipulišite poznatim sadržajem kao da vam nije poznat: U okviru ove strategije, istražujući asocijativno svojstvo, učenici su imali sledeća pitanja.

Ako imate tri broja a, b, c, da li bi ova izjava bila tačna? Zašto?

$(a + b) + c = a + (b + c)$

Da li je ova izjava tačna ili netačna?

$(a - b) + c = a - (b + c)$

Zašto važi za sabiraranje, a za ostale operacije i kombinacije operacija ne?

Na samom kraju dolazi se do važnog saznanja, a to je da kroz nastavu koja propagira matematičku argumentaciju učenici uspevaju da u pravom smislu te reči, vladaju poznatim sadržajima, usvajajući i obogaćujući znanje koje već poseduju. Sa druge strane, nastavnici bi trebalo da imaju veliku ulogu, sprovodeći ispravno strategije podučavanja o kojima se govori, kako učenici ne bi dobijali od njih gotove informacije, nego ih samo usmeravali dajući instrukcije koje vode novim bogatim saznanjima.

Pristupi učenika osnovnih škola u rešavanju $\top/\bot$ brojevnih rečenica

Ovo istraživanje [10], od strane autora: Marta Molina, Encarnacio Castro, John Mason, odnosi se na strategije rešavanja $\top/\bot$ pitanja, uglavnom zasnovanih na primeni aritmetičkih svojstava, kada su u pitanju učenici nižih razreda osnovne škole, tačnije osmogodišnjaci. Razlikuju se dva pristupa. Prvi onaj u kom učenici videvši problem pristupaju često mukotrpnim izračunavanjima bez preteranog truda da sebi olakšaju (proceduralna meta-strategija), i drugi u kom posmatraju problem do momenta kad uvide eventualni način da pojednostave rešavanje istog, pa se tek upuštaju u zapis svojih zapažanja (konceptualna meta-strategija). Istraživanje je sprovedeno nad 26 španskih osmogodišnjih učenika. Prvo je pažnja posvećena proširivanju razumevanja znaka jednakosti, a zatim su učenicima dati uglavnom $\top/\bot$ problemi da reše i prodiskutuju o njima, pri čemu su se učenici podsticali da traže različite načine za rešenje istih problema. Možda se neko zapita čemu dodatno pojašnjenje znaka jednakosti, kad se sa njim učenici veoma rano sreću, ali nije retkost ni u višim razredima osnovne škole da se javi problem nerazumevanja, gde učenici ne posmatraju levu i desnu stranu jednakosti kao dve identične vrednosti.

Sada bi trebalo pojasniti pojam *relacionog razmišljanja* koje se provlači kroz celo istraživanje, pa samim tim i kroz tekst koji sledi. Pod relacionim razmišljanjem podrazumeva se obraćanje pažnje na celokupne izraze i jednačine kao celinu, a ne na postupke koji se sprovode korak po korak. Kroz tačno/netačno i neka otvorena pitanja, nastavnici podstiču učenike na relaciono razmišljanje. Na primer brojevna rečenica $38 + 47 = 47 + 38$, fokusira se na komutativno svojstvo. Učenici mogu da izvrše sa obe strane sabiranje, ali češće uočavaju da su samo zamenjena mesta, zbog čega je rečenica tačna, što može dovesti do diskusije da li je tačno i za sve brojeve i za druge operacije. [11]

Uočeno je 6 različitih ponašanja učenika prilikom raznih načina dolaženja do odgovora na $\top/\bot$ pitanja, od kojih samo jedan ne podrazumeva neku upotrebu relacionog mišljenja (RM). To su:

- **Ne – RM ponašanje:** Učenici koji su skloni ovom ponašanju ne oslanjaju se na potragu veze između dve strane jednakosti, kako bi olakšali i skratili postupak, nego se odmah upuštaju u računanje obe strane koristeći znanje koje imaju, tačnije klasične algoritme za sabiranje i oduzimanje, kao Irene u tabeli ispod.
- **Jednostavno – RM ponašanje:** Učenik često bez da napiše bilo šta, daje odgovor na pitanje. Uočavaju vezu izmedju dve strane jednakosti i primenjuju svojstva koja su naučili, kao recimo „$a - a = 0$“. Tako na primer, učenik za jednakost $325 + 0 = 326$, odgovara: *„Netačno je, jer 325 plus 0 je 325, a 326... je ništa“.*
- **Istovetno – RM ponašanje:** Učenici uočavaju neku istovetnost među brojevima, što ih oslobadja izračunavanja, tačnije refleksno primenjuju svojstva koja znaju, recimo svojstvo komutativnosti. Ovo ponašanje se ne zasniva na jednostavnoj primeni svojstava, već na fleksibilnoj upotrebi uočenih odnosa, kako bi se došlo do odgovora. Primer za to je u narednoj tabeli, Miguel i primer $18 - 7 = 7 - 18$, dok u ostalim zadacima računa vrednosti obe strane da dodje do zaključka.

Brojevni izrazi	Odgovori učenika	
	Irene	**Miguel**
$\mathbf{18 - 7 = 7 - 18}$	Netačno, jer 18-7=11 a 7-18=19 (računa to koristeći standardan algoritam za oduzimanje).	Tačno je, jer je 18-7 isto kao ovo drugo, a ako je isto onda je jednako.
$\mathbf{75 - 14 = 340}$	Netačno, jer 75-14=61, a 14-75=49, ne 340 (opet koristi standardan algoritam za oduzimanje).	Netačno, jer 75-14 nije 340 (računa 75-14=51, koristeći standardan algoritam za oduzimanje)
$\mathbf{17 - 12 = 16 - 11}$	Netačno, jer 16-11=5 (Ona računa 16-11=5 koristeći standardni algoritam za oduzimanje).	Tačno. (Piše vertikalno brojeve 17, 12, 16 i 11, sa predznakom minus, ali ne računa).
$\mathbf{6 + 4 + 18 = 10 + 18}$	Tačno, jer 6+4+18=28 i 10+18=28 (koristi standardni algoritam za sabiranje).	Tačno, jer 6+4+18=28 i 10+18=28 (koristi standardni algoritam za sabiranje).
$\mathbf{75 + 23 = 23 + 75}$	Nema odgovor.	Tačno, jer su isti i onda je to isto.

Tabela 2: Irene i Miguel odgovaraju na neke tačno/netačno brojevne rečenice. [10]

Elementi u osnovi korišćenog relacionog mišljenja	**Primeri objašnjenja učenika**
Istovetnost brojeva u rečenici i znanja o efektu operacija.	U 122+35-35=122: „Tačno je, jer ako na 122 dodamo 35 i oduzmemo 35, to je kao da ništa nismo ni dodavali.“
Činjenica o broju sadržana u rečenici i istovetnost među brojevima.	U 7+7+9=14+9: „Tačno je. Sabrao sam 7 i 7, što je 14, kao i tamo (desno). Devet, isto kao tamo (desno) takođe.
Numerički odnosi između brojeva u rečenici i istovetnost među brojevima.	U 13+11=12+12: „Tačno, jer oduzmete 1 od 12, a dodate ga drugom 12 i dobijete ono tamo (leva strana).
Razlike u veličini između brojeva i znanja o efektu operacija.	U 75-14=340: „Netačno, jer 75-14 je manje, to ne može biti veći broj“.
Numerički odnosi između brojeva u rečenici i znanja o efektu operacija.	U 11-6=10-5: „Tačno, jer ako je 11 veće od 10 i oduzmete 1 više od 5, dobićete isto“.

Tabela 3: Primeri obrazloženja učenika koji dokazuju upotrebu relacionog mišljenja. [10]

- **Jednokratno – RM ponašanje:** Učenik pruža dokaz da je koristio relaciono razmišljanje, zasnovano na samo jednom od gore pomenutih elemenata (ali ne samo na istovetnosti između brojeva).
- **Učestalost – RM ponašanje:** Učenici rešavaju razne primere, koristeći relaciono mišljenje, zasnovano na nekoliko, ali ne na svim elementima iz Tabele 2.
- **Sve – RM ponašanje:** Učenik pruža dokaze o rešavanju različitih izraza, koristeći relaciono mišljenje zasnovano na svim elementima.

Uočeno je da neki učenici kada dobiju zadatak imaju globalan pristup, sagledavaju ceo izraz uspostavljajući vezu između elemenata, dok drugi rade proračune obraćajući pažnju na same brojeve i operacije koje treba da izvrše. Zadatak za nastavnika je da podstakne učenike da pre izračunavanja pogledaju izraz i da im pomognu da razviju više konceptualnih metoda.

Ispitivanje nastavnika kako bi se izmamilo učeničko matematičko razmišljanje u učionicama osnovne škole

Autori ovog istraživanja [12] su Megan L. Franke, Noreen M. Webb, Angela G. Chan, Marsha Ing, Deanna Freund and Dan Battey. Oni se bave dešavanjima u učionicama tri nastavnika (dva druga razreda i jedan treći) u Južnoj Kaliforniji, koji su se više od godinu dana bavili algebarskim rezonovanjem. Ideja je bila razmatranje načina na koje nastavnici postavljaju pitanja sa ciljem razvoja matematičkog razišljanja, i uopšte potenciranje na razgovoru koji dovodi do proširivanja matematičkog znanja i razumevanja, bilo da se odvija samo među učenicima koji jedni drugima sugerišu i pomažu ili je i nastavnik uključen. Time će učenicima biti omogućeno da popune praznine, odnosno razjasne u svojim glavama materijale i da steknu neke nove ideje i strategije za rešavanja matematičkih problema. Ipak, u većini učionica ispostavilo se da dominira nastava koja je usmerena na nastavnika, gde učenici retko postavljaju pitanja. Zato, nastavnici treba da neguju razne metode, od kojih je jedna postavljanje pitanja učenicima o problemu koji se razmatra, što će im pomoći da se oslobode treme, jasno i argumentovano izraze svoje stavove i slušajući druge saznaju neke nove ideje. Na stručnim usavršavanjima kojima su nastavnici prisustvovali, isticalo se relaciono razmišljanje (Carpenter, Franke, Levi; 2003), uključujući:

- razumevanje znaka jednakosti kao pokazatelja veze
- korišćenje brojevnih relacija za pojednostavljivanje proračuna
- generisanje, predstavljanje i opravdavanje pretpostavki o osnovnim svojstvima brojevnih operacija.

Časovi spomenuta tri nastavnika su snimani, tako da se kasnije tačno mogao razmatrati svaki vođen razgovor. Tokom tih časova od nastavnika je traženo da učenike što više uključe u razgovor, tako da je obavljeno 66 razgovora između nastavnika i učenika pojedinca pretežno, gde su takvi razgovori nazvani segmenti. Ukupan broj segmenata po nastavniku kretao se od 10 do 28. Prvo bi nastavnik postavio problem i ostavio učenicima vreme da razmisle i razgovaraju u manjim grupama, a zatim bi prešao na diskusiju sa celim odeljenjem.

Tačno i potpuno	Problem: $20 + 10 = 10 + \_$ 20 plus 10 je 30, pa... znak jednakosti znači da mora biti isto, a ako je ovde 10, tamo mora biti 20. 20 plus 10 je 30, a 10 plus 20 je 30.
Dvosmisleno i nepotpuno	Problem: $100 + \_ = 100 + 50$ 50 će biti tamo, jer to mora biti isti broj.
Neispravno	Problem: $4 + 9 = 5 \cdot 3 - 2$ (tačno ili netačno) Mislio sam da je netačno, jer 4 + 9 je 13, a $5 \cdot 3$ je 15. To dvoje se ne poklapaju.

Tabela 4: Primer učeničkih objašnjenja

U svim segmentima (98%), osim u jednom, nastavnici su tražili od učenika da objasne odgovor. U 91% segmenata, nastavnik je izričito zatražio objašnjenje, tražeći na početku segmenta odgovor (73%) ili naknadno ako ga učenici ne daju dobrovoljno (33%). U svim slučajevima (97%), osim u dva, ciljni učenik je dao jedno ili više objašnjenja. Nastavnici su i tokom objašnjavanja postavljali pitanja učenicima, u 50 segmenata (76%).

Nastavnici su često davali i primedbe, kako bi učenici naučili da ukazuju strpljenje i poštovanje jedni prema drugima, uprkos razlikama među njima. Na primer, sledećim rečenicama su ih upućivali da daju priliku jedni drugima da objasne, da slušaju i pokušavaju da razumeju mišljenja jedni drugih:

- *„Dajte Rodrigu priliku.“*
- *„Poslušajmo.“*
- *„Hajde da razumemo šta će Raven reći.“*
- *„Sviđa mi se način na koji Jason pažljivo sluša ono što će Marisa i Desiree uskoro podeliti.“*

Objašnjenja učenika razvrstana su u dve kategorije:

a) Tačna i potpuna,
b) Dvosmislena, nepotpuna ili netačna.

Postavljana su pitanja od strane nastavnika o tačnim (18 od 27 slučajeva, 67%), ali i o dvosmislenim, nepotpunim i netačnim objašnjenjima (u 32 od 39 slučajeva, 82%). Učenici često nisu ni pružali razradu (16 od 50), ukoliko nastavnik nije postavljao pitanja. Zato ako nastavnik postavi pitanje, mnogo je verovatnije i da učenik pruži razradu. Nije bilo mnogo učenika koji su prvo dali netačna objašnjenja, a zatim tačna (8 od 32, 25%), ali je bilo i segmenata u kojima su drugi dali tačna objašnjenja (44%). Samo u 31% segmenata, nepotpuna, dvosmislena i netačna objašnjenja ostala su neispravljena. Upravo u ovom publikovanom istraživanju [12] mogu se pronaći i brojni primeri segmenata, odnosno diskusije vođene među učenicima i njihovim nastavnicima. Pitanja, kao i odgovori učenika, razlikovali su se od segmenta do segmenta.

Cilj ove studije bio je da pokaže u kojoj meri su pitanja nastavnika važna, kako bi učenici postali eksplicitniji i detaljniji prilikom pružanja objašnjenja. Nastavnik je nekad postavljao jedno konkretno pitanje u vezi onoga što je učenik rekao ili je postavljao opšta pitanja kako bi podstakao učenika da objasni svoje rešenje. Pored tih opštih, posebnih i sugestivnih pitanja, postavljana su i neka dodatna pitanja, koja se nisu pokazala kao važan faktor pri pokušaju dobijanja dobrog odgovora od učenika. Kada bi učenici dali početna nepotpuna i dvosmislena objašnjenja, višestruka pitanja nastavnika bila su od pomoći da učenik sam dođe do ispravnog zaključka, a onda potpuno i tačno obrazloži. Takođe, kada bi učenici dali netačna rešanja, svojim pitanjima nastavnik bi ih vraćao na pravi put pri potrazi za tačnim, i otklanjajući nejasnoće i nerazumevanje, učenici bi identifikovali i ispravljali svoje greške.

Nizovi postavljenih pitanja od strane nastavnika:

- *Omogućili su nastavniku da razume razmišljanje učenika; da donosi bolje odluke u nastavi, poput onih koje dodatne probleme treba dati i koja pitanja postaviti drugim učenicima,*
- *Pomogli su učeniku koji je ispitivan da razjasni i eventualno ispravi sopstveno razmišljanje,*

- *Pružili su mogućnost drugim učenicima u odeljenju, da svoje razmišljanje povežu sa onim o čemu je reč, što im potencijalno omogućava da isprave sopstvena nerazumevanja.*

Dokazivanje ili pobijanje aritmetičkih tvrdnji: slučaj nastavnika osnovne škole

Autori ovog istraživanja su Ruth Barkai, Pessia Tsarnir, Dina Tirosh i Tommy Dreyfus. Akcenat u istraživanju [13] je ovaj put stavljen na nastavnike i njihove stavove o tome šta smatraju dokazom matematičkog tvrđenja, a šta ne. U studiji je učestvovalo 27 nastavnika, od čega je 25 žena i 2 muškarca, čije se dotadašnje nastavničko iskustvo znatno razlikovalo. Nastavnici su dobili upitnik koji se sastojao od 6 tvrđenja, koja su trebali da dokažu ili opovrgnu u zavisnosti od tačnosti, a vreme za izradu bilo je 90 minuta. Prva tri tvrđenja odnose se na propoziciju *„za svako“*, a naredna tri na propoziciju *„postoji“* i glasila su ovako:

1. *Zbir bilo kojih 5 uzastopnih celih brojeva deljiv je sa 5.*
2. *Zbir bilo koja 4 uzastopna cela broja deljiv je sa 4.*
3. *Zbir bilo koja 3 uzastopna cela broja deljiv je sa 6.*
4. *Postoji 5 uzastopnih celih brojeva čiji je zbir deljiv sa 5.*
5. *Postoje 4 uzastopna cela broja čiji je zbir deljiv sa 4.*
6. *Postoje 3 uzastopna cela broja čiji je zbir deljiv sa 6.*

Zadatak je da za svaku od tvrdnji se izjasne da li je tačna ili netačna, zatim da obrazlože, odnosno opravdaju svoje odgovore i na kraju da se izjasne smatraju li svoja opravdanja matematičkim dokazima. Neki od nastavnika prvo su odgovorili na pitanja vezana za prva tri iskaza i propoziciju „za sve“, a neki su suprotno, krenuli od izjava sa propozicijom „postoji“. U nastavku je pružena analiza rezultata, odnosno odgovora koje su nastavnici dali.

1. Zbir bilo kojih 5 uzastopnih celih brojeva deljiv je sa 5.

Svi nastavnici dali su ispravan odgovor, odnosno da je tvrdnja tačna, ali je samo 41% njih dalo i tačna obrazloženja, poput:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 5x + 10$$

Kako su $5x\ i\ 10$ deljivi sa 5, zaključuje se da je deljiva i suma 5 uzastopnih celih brojeva sa 5. 31% njih su dali algebarske dokaze koje većina njiih uopšte nije smatrala dokazima.

Neki od nastavnika davali su i nealgebarske dokaze. Jedan od njih je bio pokušaj pokrivanja svih mogućnosti, koje je dati nastavnik smatrao pukim davanjem primera, nedovoljnim da bi se nazvao dokazom. Prvo je posmatrao sume pet uzastopnih brojeva među prvih 10, a nakon što je donet zaključak da su sve te sume deljive sa 5, zaključuje da sve ostale sume nastaju dodavanjem jedne od ovih (npr. 61, 62, 63, 64, 65, sastoji se od 5 puta 60 i sume $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, što je deljivo sa 5). Na sličan način se dolazi i do zaključka za trocifrene brojeve...

Jedan od učesnika smatrao je svoje nealgebarsko obrazloženje dokazom. Posmatrajući pet uzastopnih brojeva, recimo niz 1, 2, 3, 4, 5, broj u sredini (3) na sekund se izuzme, a gledaju se njemu dva susedna (2 i 4), koja posmatra kao $3 - 1$ i $3 + 1$, gde -1 neutrališe $+1$, pa je suma ta dva broje $2 \cdot 3$. Slično tome, preostala dva broja su (5 i 1) $3 + 2$ i $3 - 2$, gde opet -2 neutrališe +2, i ostaje $2 \cdot 3$. Na taj način dolazi se do zaključka da je suma uvek 5 puta broj u sredini, što je svakako deljivo sa 5.

Netačna obrazloženja uglavnom su se odnosila na davanje jednog ili više primera 52%, a 33% nastavnika su i to smatrali dokazima. Neki su dali i netačna algebarska obrazloženja.

2. Zbir bilo koja 4 uzastopna cela broja deljiv je sa 4

Svi nastavnici tačno su odgovorili da je tvrdnja netačna, a samo 3 nastavnika uz tačan odgovor nisu dali nikakvo objašnjenje. Kada je reč o onima koji su dali objašnjenja, većina se sastojala od jednog ili više kontraprimera, u 72% slučajeva. Samo polovina njih, odnosno 36%, tačno su komentarisali da je jedan kontraprimer dovoljan za dokaz, dok su drugi sumnjali u to. Tačan algebarski dokaz dalo je 16% nastavnika, a on bi izgledao ovako:
$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4x + 6$, što nije deljivo sa 4, jer $4x$ jeste, ali 6 nije deljivo sa 4.

3. Zbir bilo koja 3 uzastopna cela broja deljiv je sa 6.

Da je tvrđenje netačno, veliki broj nastavnika je tačno odgovorio (69%) i ujedno dao tačno obrazloženje, često u vidu kontraprimera (42%). Bilo je i onih koji su dali pogrešan (23%), ili nikakav (8%) odgovor. Većina nastavnika koji su dali jedan ili više kontraprimera (50%), smatrali su to dokazom tvrdnje, dok je od preostalih nastavnika (19%) koji su dali tačan odgovor i algebarsko obrazloženje, samo jedan smatrao da to nije dovoljno za dokaz.
Često algebarsko objašnjenje bilo je: $x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3$, što jeste deljivo sa 3, ali je onda potrebno pokazati da je takođe deljivo i sa 2. Ako je x paran broj, $3x$ jeste deljivo sa 2 ali 3 nije, što znači da ni $3x + 3$ nije deljivo sa 6. A ako je x neparan broj, $3x$ je takođe neparan, a $3x + 3$ je paran i deljiv sa 6. Kako to ne važi za sve zbirove, tvrdnja je netačna.
Može se pokazati i ovako: $x - 1 + x + x + 1 = 3x$, ali je $3x$ deljivo sa 6 samo kada je x paran broj, pa je tvrđenje netačno.
Samo jedan od nastavnika koji su pogrešno odgovorili i davali primere kako bi opravdali svoje odgovore, smatrao je to i dokazom.

4. Postoji 5 uzastopnih celih brojeva čiji je zbir deljiv sa 5.

Svi nastavnici su odgovorili da je ova tvrdnja tačna i samo jedan nije dao tačno obrazloženje. Najčešće (50%) su nastavnici kao obrazloženja davali jedan ili više primera, što je samo pola njih smatralo matematičkim dokazima. Bilo je i nastavnika (38%) koji su dali algebarska obrazloženja i onih koji su ponovili svoja nealgebarska opravdanja prvog tvrđenja i smatrali ih dokazima, ali se niko od nastavnika nije pozvao na činjenicu da 4. tvrđenje sledi iz 1., iako je većina njih neposredno pre dala odgovor i objašnjenje prvog tvrđenja.

5. Postoje uzastopna 4 cela broja čiji je zbir deljiv sa 4.

Većina nastavnika (77%) dali su tačan odgovor, da je tvrdnja netačna, ali je bilo i onih koji su netačno odgovorili (15%) ili nisu uopšte (8%). Ovo je tvrdnja kod koje su nastavnici najviše grešili, tačnije ni četvrtina nastavnika nisu dali tačne odgovore i tačna obrazloženja. Neki su (19%) ponovili svoja algebarska opravdanja iz 2. tvrđenja, što je 12% njih smatralo dokazima, a 7% ne.

Ako krenemo od zbira prvog niza brojeva $0 + 1 + 2 + 3 = 6$, jasno je on nije deljiv sa 4. Sledeći niz nastaje tako što se svakom broju iz prethodnog niza doda 1, pa je suma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, a budući da smo broju 6 koji nije deljiv sa 4, samo dodali broj 4 ($10 = 6 + 4$), jasno je da ni suma ovog niza nije deljiva sa 4. Naredni niz bio bi $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, gde smo broju koji nije deljiv sa 4 dodali 4. Na taj način, skokovi za 4 uvek će dovesti do brojeva koji nisu deljivi sa 4, jer smo krenuli upravo od broja koji nije deljiv sa 4.

Nastavnici koji su izneli pogrešnu tvrdnju, pokušavali su je opravdati pronalaskom odgovarajućeg primera, i uprkos tome što im nije išlo, verovali su da takav postoji. Neki od nastavnika koji su se vodili sličnom idejom, shodno činjenici da primer nisu pronašli, nisu ni dali odgovor.

6. Postoje 3 uzastopna broja čija se suma deli sa 6.

Skoro svi nastavnici koji su dali tačan odgovor (68%), odnosno da je tvrdnja tačna, pružili su i odgovarajuće obrazloženje, gde samo jedan od njih nije uopšte obrazložio odgovor. Najčešće se opravdanje sastojalo iz jednog ili više primera (48%), što je većina njih (28%) smatrala matematičkim dokazima, a neki su pružili i algebarske dokaze poput onih u 1. i 4. tvrđenju. Dva nastavnika (8%) nisu dala nikakav odgovor, jer su pronašli i primere tri uzastopna cela broja koji jesu i koji nisu deljivi sa 6, pa nisu mogli da odluče da li je tvrdnja tačna ili ne. Oni nastavnici koji su izjavili da je tvrdnja netačna (24%), uz to su pružili i jedan ili više primera tri uzastopna broja čiji suma nije deljiva sa 6, a većina ih je to smatrala kontraprimerima i ujedno dovoljnima za matematičke dokaze.

Nastavnici su oni koji trebaju da podstiču i pružaju učenicima pomoć prilikom pružanja odgovarajuće argumentacije i dokaza tvrdnji, zato je veoma bitno da oni pre svega budu upoznati sa raznim načinima dokazivanja i opovrgavanja tvdnji. Ovo istraživanje svedoči o nedovoljnoj spremnosti nastavnika da pruže ispravna obrazloženja tvrdnji koje su im date. Vidi se da mnogi nastavnici ne barataju čak ni algebrom kao moćnim oružjem prilikom dokazivanja tvrdjenja. Učenici su, posebno u periodu osnovne škole skloni istraživanju i nagađanjima, što nastavnici moraju da podrže i budu spremni da koriste svoje u ovom slučaju algebarsko znanje, da bi utvrdili validnost nagađanja svojih učenika i pružili im zadovoljavajuće odgovore.

3. Analiza nastavnih sadržaja

3.1 Primena Venovih dijagrama pri određivanju istinitosti

Veoma rano učenici usvajaju pojam skupa i pronalaze konkretne primere iz svakodnevnice koji se mogu opisati skupovima, a već u petom razredu uveliko upotrebljavaju pojam matematičkog skupa, koristeći reči „pripada“ ili „ne pripada“, usvajaju pojam praznog skupa, tj. skupa koji nema elemente, zatim pojam podskupa, kao i odgovarajuće simbole: $\{\ \}$, $\in, \notin, \emptyset$. Pored praznog skupa, učenici prema broju elemenata mogu razlikovati i konačne (skup parnih brojeva prve desetice) od beskonačnih skupova (skup prirodnih brojeva). Kao što se vidi i u nastavku, skupovi su predstavljeni najčešće Ojler - Venovim dijagramima i obično sadrže kružne oblasti koje predstavljaju grupe objekata koji imaju neke zajedničke karakteristike. Često se u literaturi nazivaju samo Venovim dijagramima, i može se reći da doprinose boljem shvatanju skupova i samom zaključivanju.

Za skup A kaže se da je podskup skupa B, ako svaki element skupa A pripada i skupu B, a to se zapisuje $A \subset B$. Prethodno je dat primer o lavovima, mačkama i mesojedima predviđen za učenike petog razreda, a u kom se koriste Venovi dijagrami pri zaključivanju, odnosno pri otkrivanju istine. Pri samom kraju rada dat je primer aktivnosti koja može poslužiti za obnavljanje gradiva, sticanje novih saznanja i veštine argumentacije, a koja se koristi Venovim dijagramima i osobinama podskupa.

Publikovana istraživanja naglašavaju važnost pitanja koja nastavnik postavlja pri zaključivanju. Odgovarajući na DA/NE pitanja poput:

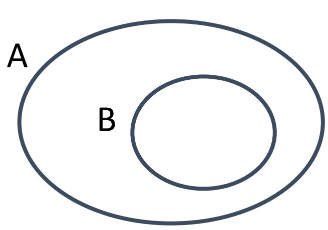
- Da li su svi stanovnici Srbije ujedno i stanovnici Beograda?
- Da li su svi stanovnici Beograda ujedno i stanovnici Srbije?
- Da li postoji neko ko živi u Srbiji, a ne živi u Beogradu?
- Kako biste to prikazali Venovim dijagramom?

učenici dodatno ovladavaju pojmom i osobinama podskupa.

Elementi skupova koje treba predstaviti Venovim dijagramom su stanovnici Srbije i stanovnici Beograda, a važno je da učenici sami ustanove odnos među skupovima i nacrtaju dijagrame. Kako skupove najčešće označavamo velikim latiničnim slovima, da bi učenici usvajali i počeli koristiti oznake, pre samog crtanja možemo ih uvesti:

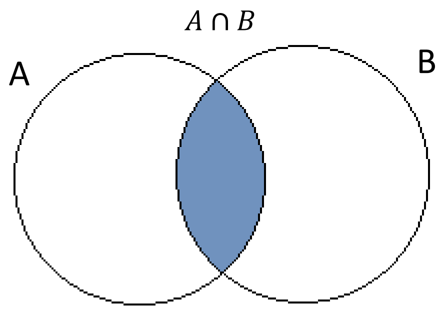
A – ljudi koji žive u Srbiji

B – ljudi koji žive u Beogradu

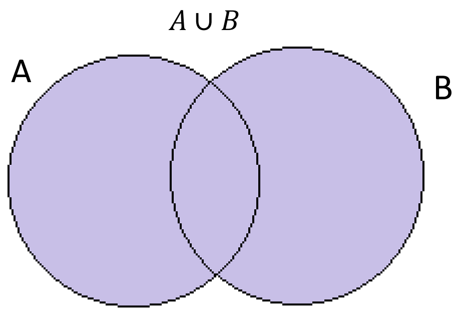


Od velikog značaja pri otkrivanju istine je i poznavanje skupovnih operacija: *presek, unija i razlika*, pri čemu se učenik sreće i sa pojmom disjunktnih skupova, odnosno onih čiji je presek prazan skup.

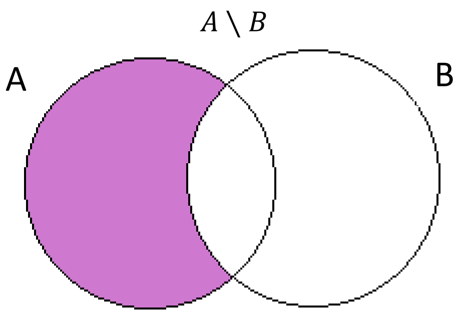
- *Presek* skupova *A i B* je skup elemenata koji pripadaju i skupu A i skupu B. Može se reći i da su to zajednički elementi skupova A i B. Ako je presek dva skupa prazan skup, kaže se da su ta dva skupa disjunktna. (*oznaka* $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$)

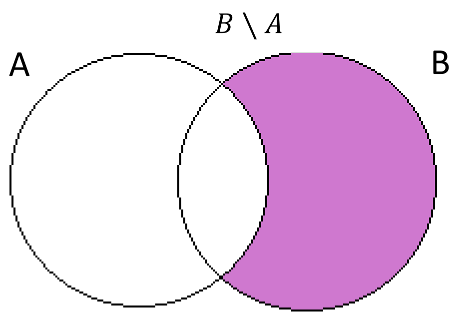


- *Unija dva skupa* je skup svih elemenata koji pripadaju ili skupu A ili skupu B. Može se reći da su to svi elementi koje sadrže svi skupovi A i B. *(oznaka* $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$*)*



- *Razlika skupova A i B* je skup svih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B. *(oznaka* $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$)





U nastavku će biti prikazani i primeri zadataka u kojima učenici mogu koristiti znanje o skupovnim operacijama pri zaključivanju.

3.2 Različiti načini postavljanja sličnog tačno/netačno pitanja

Kako su deca veoma rano sposobna zaključivati i argumentovati, matematički sadržaji od samog početka osnovne škole pogodni su za razvoj pomenutih veština. U drugom razredu se na primer, upoznajući prirodne brojeve do 100 i operacije sa njima, učenici sreću sa svojstvom komutativnosti, asocijativnosti, množenju sa nulom, da delilac uvek mora biti različit od nule i mnogim drugim osobinama koje su pogodne za sastavljanje tačno/netačno zadataka koji mogu biti obogaćeni zahtevom da se učenici izjasne koliko su sigurni u svoje odgovore, da se izjasne zbog čega iskaz smatraju tačnim, odnosno netačnim, obraćaju pažnju na ključne reči kao što su „za svaki“ ili „postoji“ i da daju kontraprimere kako bi opovrgli određene tvrdnje. Na taj način učenici stiču veštinu i slobodu da iskažu svoje mišljenje, ali takođe i obilje znanja slušajući argumente druge dece i komentare nastavnika.

U okviru nastavne teme *prirodni brojevi i deljivost*, obrađuje se nastavna jedinica pod nazivom *svojstva deljivosti*. Zadaci tačno/netačno tipa koji su čest primer u okviru ove teme, dobar su put do učenikovog umeća da primeni osnovna pravila deljivosti sa brojevima 2, 3, 4, 5, 9 i dekadnim jedinicama i više od polovine učenika bi trebalo da ovlada njima, s obzirom da prema obrazovnim standardima, pripadaju srednjem nivou postignuća.

Ako je postavljeno jednostavno pitanje o tačnosti iskaza: *„Broj 102746 je deljiv brojem 2“*, učenik do zaključka dolazi kao što je ranije navedeno, nizom iskaza od kojih je poslednji zaključak. U ovom slučaju, tok misli prate sledeća 3 iskaza:

1) Ako se broj završava parnom cifrom (0, 2, 4, 6, 8), odnosno ako je paran, onda je deljiv sa 2,
2) 102746 je paran broj,
3) Dakle, 102746 deljiv je sa 2.

Nešto teži zadatak bio bi sa unošenjem lažnih tvrdnji. Na primer:

Zadatak: Koji su od sledećih iskaza tačni? U slučaju netačnog iskaza navedi primer kada tvrđenje važi a kada ne.

a) Svaki broj deljiv sa 9, deljiv je i sa 3.
b) Svaki broj deljiv sa 3 deljiv je i sa 6.
c) Svaki broj deljiv sa 6, deljiv je i sa 9.
d) Neki brojevi deljivi sa 3 su deljivi i sa 9.
e) Neki brojevi deljivi sa 6 su deljivi i sa 3.

Analizirajući iskaz po iskaz, dolaziće do kontraprimera, odnosno vrednosti kojima obaraju tačnost pojedinih polaznih tvrđenja. Da bi se određena tvrdnja koja počinje sa „svaki“ opovrgla, dovoljno je pronaći samo jedan primer za koji ta tvrdnja ne važi. Istraživanje [9] bavi se matematičkom argumentacijom, pri čemu navodi opšte strategije podučavanja. Sve te strategije mogu uspešno biti sprovedene kroz ovakav tip zadataka. Sa učenicima se razgovara o poznatom sadržaju, o oznakama koje teorija skupova koristi i uslovima deljivosti datim brojevima iz zadatka, pri čemu se sprovodi još jedna od važnih strategija, a to je navođenje uslova pod kojima data tvrdnja važi. Pored toga su unete i neke od lažnih tvrdnji, a nastavnik može o poznatom sadržaju razgovarati sa učenicima kao da mu je nepoznat i time uticati na što veći stepen samostalnosti i sigurnosti koju učenici stiču. Kada nastavnik iznese tvrdnju: „Ako je broj deljiv sa 6, deljiv je i sa 9“, biće učenika koji će u nju poverovati, bez da provere istinitost iste, samo zato što tako kaže nastavnik, ali će biti i onih koji će iznositi kontraprimere da opovrgnu neistinitu tvrdnju. Sprovodeći strategije podučavanja iz pomenutog istraživanja, učenici samo bivaju usmereni ka otkrivanju novih saznanja, ne dobijaju gotove informacije koje samo trebaju usvojiti.

Možemo prvo uvesti sledeće oznake:

A – skup brojeva deljivih sa 3

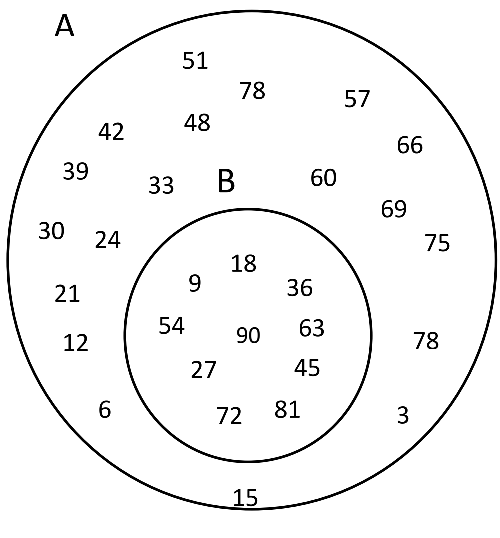
B – skup brojeva deljivih sa 9

Učenici samostalno unose elemente koji pripadaju svakom od skupova:

$$A = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48,51,54,57,60,63,66,69,72,75,78,81,\ldots\}$$

$$B = \{9,18,27,36,45,54,63,72,81,90\ldots\}$$

Zatim posmatraju oba skupa, analizirajući elemente svakog od njih. Skupove treba prikazati i Venovim dijagramom, u koji učenici unose elemente skupova do kojih su došli, prilikom čega donose razne zaključke. Uvideće da svaki element skupa B pripada i skupu A, odnosno da je B podskup skupa A.



Kako je $B \subset A$, jasno je da je svaki broj deljiv sa 9 ujedno deljiv i sa 3. Gledajući isti dijagram mogu odgovoriti i na pitanja o istinitosti drugačije formulisanih iskaza. Pri tome je vrlo bitno da se učenici oslobode i usmeno iznose svoja obrazloženja.

Učenici mogu obrazložiti odgovor na pitanje o istinitosti iskaza: „Svaki broj deljiv sa 3 ujedno je deljiv i sa 9?“, s obzirom da pred sobom imaju mnogo kontraprimera koji se nalaze u razlici $A \setminus B$.

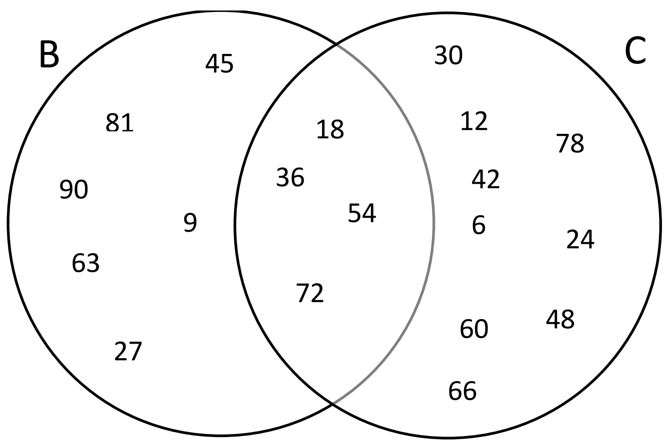
Ovakve tvrdnje često se plasiraju u obliku „ako... onda...“, što je prikazano u delu rada posvećenom analizi udžbenika.

Takođe se sada jasno vidi i odgovor na pitanje o tačnosti iskaza: „Neki brojevi deljivi sa 3 su deljivi i sa 9“. Kako presek skupova A i B nije prazan, svakako da postoje brojevi koji su deljivi i sa 3 i sa 9. Ova tvrdnja može glasiti i: „Postoje brojevi deljivi sa 3, koji su deljivi i sa 9“. Dovoljno je da postoji makar jedan broj koji zatovoljava tvrdnju, da bismo za nju rekli da je tačna.

Kada se u priču uvede i novi skup C kom pripadaju svi brojevi koji su deljivi sa 6, dolazi se do novih zaključaka. Učenici sada imaju zadatak da zapišu elemente skupa C, nakon čega će predstavljajući i njih Venovim dijagramom obrazlagati odgovore o tačnosti preostalih tvrđenja.

$$C = \{6,12,18,,24,30,36,42,48,54,60,66,72,78, \dots\}$$

Kako je skup C takođe podskup skupa A, nikako ne može da važi iskaz: „Svaki broj deljiv sa 3, deljiv je i sa 6“, s obzirom da postoje elementi koji se nalaze u A da pri tome nisu u skupu C. Tačan je iskaz koji kaže da su neki brojevi deljivi sa 6 deljivi i sa 3, s obzirom da se osobine podskupa prenose na nadskup, a C jeste podskup skupa A. Postavljajući dodatna pitanja o važenju tvrdnji poput ovih, nastavnik podstiče učenike da razmišljaju i diskutuju o problemima koje rešavaju. Međutim, posmatrajući skupove B i C, analizirajući i unoseći njihove elemente samostalno u Venove dijagrame, učenici će donositi nove zaključke.



Jasno se vidi da nije svaki broj deljiv sa 6, deljiv i sa 9, s obzirom da je $C \setminus A$ neprazno, a samo neki od kontraprimera mogu se pročitati sa dijagrama: 6,12,24,30... Ali da postoji broj deljiv sa 6 koji je deljiv i sa 9, jeste tačno, i takvi brojevi nalaze se u preseku datih skupova. Nastavnik ima mogućnost da postavlja brojna pitanja o deljivosti na osnovu datih skupova koje su učenici predstavili i dijagramima, a publikovana istraživanja svedoče o važnosti nastavnikovih dodatnih pitanja za razumevanje gradiva i sticanje novih saznanja.

Gotovo isti zadatak može biti postavljen i na drugi način, pri čemu je dat nepotpun početak iskaza i ponuđeno nekoliko mogućih završetaka, kao na primer:

Svaki broj deljiv sa 25...

...deljiv je i sa 100.	T	N
...deljiv je i sa 5.	T	N

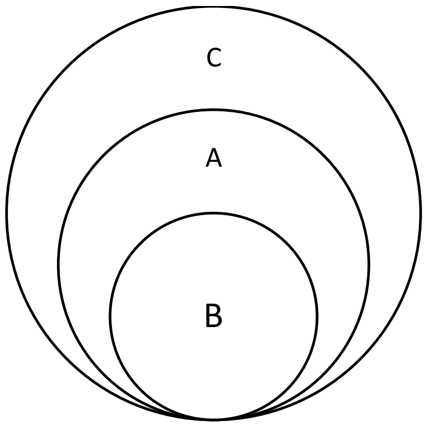
Pored toga, učenicima kao što je ranije navedeno, može biti postavljeno pitanje koliko su sigurni u svoje odgovore. U ovom slučaju tri skupa koje posmatramo su skup brojeva deljivih sa 25 (A), deljivih sa 100 (B) i deljivih sa 5 (C):

$$A = \{25,50,75,100,125,150,175,200,225,250,275,300,..\}$$

$$B = \{100,200,300,400 \dots\}$$

$$C = \{5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,95,100, \dots\}$$

Takođe učenici mogu i predstaviti Venovim dijagramima ove skupove, pri čemu je $B \subset A \subset C$. Kako se osobine prenose sa podskupa na nadskup, učenici zaključuju da je tačan samo iskaz koji kaže da svaki broj deljiv sa 25, deljiv je i sa 5. Jedno od publikovanih istraživanja [12] tiče se važnosti pitanja koja nastavnik postavlja pri čemu je bitno insistirati na objašnjenju odgovora, pri čemu učenici jedni druge pažljivo slušaju i uvažavaju mišljenja sa kojima se možda i ne slažu. Upravo postavljajući pitanja koja navode učenike da ustanove veze među skupovima sa slike, doprineće i boljem razumevanju osobina skupova, skupovnih operacija i same deljivosti datim brojevima. Uočavaju da nije svaki broj deljiv sa 25, deljiv i sa 100, ali zbog nepraznog preseka skupova A i B, samim tim što je skup B podskup skupa A, svakako postoje brojevi koji su deljivi sa 25 i sa 100.



Jedna od vrlina matematike jeste i to što za njene probleme postoje često različita rešenja, koja ponekad zavise od dosetljivosti i mašte učenika. U nastavku su date dve mogućnosti rešavanja istog zadatka uz pomoć Venovih dijagrama.

Zadatak: Obrazloži zašto je tačan sledeći iskaz.

Ako je neki broj deljiv i sa 2 i sa 5, onda je deljiv i sa 10.

Ono što je poznato:

- *Prirodan broj je deljiv brojem 2, ako je cifra jedinica tog broja 0, 2, 4, 6 ili 8*
- *Prirodan broj je deljiv brojem 5, ako je cifra jedinica tog broja 0 ili 5.*
- *Prirodan broj je deljiv sa 10, ako se zapis tog broja završava nulom.*

Prva ideja je svakako, kao i ranije kada su u pitanju bili brojevi 3, 6 i 9, imenovati tri skupa:

A – svi brojevi deljivi sa 2

B – svi brojevi deljivi sa 5

C – svi brojevi deljivi sa 10

Od učenika se zatim očekuje da samostalno navode koji su to elementi svakog od skupova:

$$A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30, \dots\}$$

$$B = \{5,10,15,20,25,30, \dots\}$$

$$C = \{10,20,30, \dots\}$$

Posmatrajući elemente navedenih skupova, učenici uočavaju da se svaki element skupa C nalazi i u skupu A i u skupu B, odnosno da je skup C upravo presek skupova A i B. To znači da ako je neki broj deljiv i sa 2 i sa 5, onda jeste sigurno deljiv i sa 10.

Druga ideja bila bi bliska verovatno učenicima koji su zainteresovani za matematiku i koji imaju odlične ocene, a podrazumeva posmatranje sledećih skupova:

A – cifre jedinica brojeva deljivih sa 2

B – cifre jedinica brojeva deljivih sa 5

C – cifre jedinica brojeva deljivih sa 10

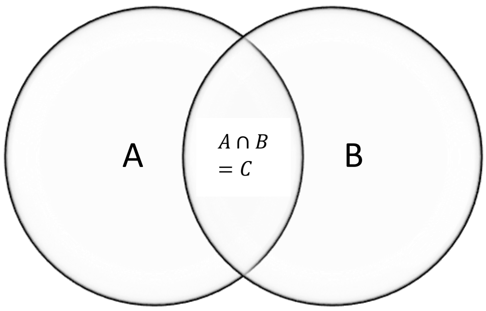
Uz pomoć nastavnika, učenici navode i elemente ovako definisanih skupova:

$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

$$B = \{0,5\}$$

$$C = \{0\}$$

Odnosno, da ako je broj deljiv i sa 2 (završava se parnom cifrom) i sa 5 (završava se cifrom 0 ili 5), onda je deljiv i sa 10 (završava se sa 0).



I kada je naredno Pisa testiranje u pitanju, zadaci tačno/netačno tipa zauzimaju posebno mesto. Učenicima su dati iskazi u vezi kojih se trebaju izjasniti da li su uvek tačni, ponekad tačni ili nikad nisu tačni. Pri donošenju zaključaka u vezi nekih od njih mogu se učenici poslužiti upravo Venovim dijagramima.

Neki od iskaza su [14]:

- Broj koji je deljiv sa 4, deljiv je i sa 2.
- Broj deljiv sa 9 je deljiv i sa 6.
- Suma dva neparna broja je neparan broj.

Prvi iskaz je uvek tačan, jer je broj 2 faktor broja 4, ali se do istog zaključka može doći posmatrajući skupove brojeva deljivih sa 2 i brojeva deljivih sa 4, pa zatim i crtanjem Venovih dijagrama, sa kojih se jasno vidi da je skup brojeva deljivih sa 4 podskup skupa brojeva deljivih sa 2. Drugi iskaz je ponekad tačan naravno, jer postoje i brojevi koji su u preseku i u razlici skupova brojeva deljivih sa 9 i sa 6. Recimo broj 18 je deljiv i sa 9 i sa 6, ali broj 27 je deljiv sa 9, a ne i sa 6. Treći iskaz je predstavnik onih iskaza koji nikad nisu tačni, jer je suma dva neparna broja uvek paran broj.

Još neki od iskaza koji su *ponekad tačni* [14]:

- Četrnaestogodišnja devojčica je viša od devojčice koja ima 10 godina.
- Ako se baca novčić 50 puta, glava pada 25 puta.
- Kada se ceo broj pomnoži sobom dobije se paran broj.

Učenici otkrivajući istinu prilikom rešavanja ovakvog zadatka, mogu davati i primere iz svakodnevnog života. Recimo možda poznaju devojčicu koja ima 10 godina, a više je od neke četrnaestogodišnje devojčice. Množeći razne cele brojeve sobom, dolaze do zaključka da se nekad dobije paran broj, a nekad ne, što će im omogućiti da daju tačna i potpuna obrazloženja. Takođe, ako učenicima za početak intuicija ne govori da ovo tvrđenje nije uvek tačno, da bi se uverili kako ne mora da znači da će 25 puta pasti glava ako se 50 puta baci novčić, na nekom od časova ili velikih odmora učenici se mogu zaigrati novčićima i prebrojavati ishode pri kojima je pala glava i pri kojima je pao novčić od 50 ostvarenih bacanja.

3.3 Zadaci tačno/netačno tipa na završnom ispitu

Da bi završili osnovnu školu, učenici na kraju osmog razreda polažu završni ispit koji procenjuje kompetencije stečene u osnovnoj školi i sastoji se od tri testa: maternji jezik, matematika i kombinovani test. Testovi iz matematike za završni ispit obiluju zadacima zatvorenog tipa, posebno tipom zadataka višestrukog izbora, gde su svrstani i retki primeri zadataka dvostrukog izbora. Kroz svaku od pet oblasti u koje su grupisani sadržaji iz matematike koji se obrađuju tokom osnovne škole, moguće je plasirati tačno/netačno zadatke pogodne za brže i lakše obnavljanje i sticanje znanja. Ono što je uočljivo, jeste da ovi zadaci najčešće pripadaju osnovnom nivou za koji se očekuje da svi učenici, a najmanje 80% njih može postići. Možda je to jedan od odgovora na pitanje: *„Zašto učenici često preferiraju ovaj tip zadataka i smatraju ga lakim?“*. U nastavku su dati samo neki od primera zadataka dvostrukog izbora koji se mogu pronaći u zbirci.

Zadatak: Za svako tvrđenje zaokruži TAČNO, ako je nejednakost tačna, ili NETAČNO, ako nejednakost nije tačna:

a) $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$	***TAČNO***	***NETAČNO***
b) $\frac{2}{3} > 1$	***TAČNO***	***NETAČNO***
c) $\frac{11}{5} < 2$	***TAČNO***	***NETAČNO***
d) $-4 < -2$	***TAČNO***	***NETAČNO***

Ovaj zadatak našao se na testu 1 školske 2010/11 godine, kao jedan od predstavnika oblasti *brojevi i operacije sa njima* i pripada, kada su u pitanju obrazovni standardi, osnovnom nivou, prema čemu se podrazumeva da učenik ume da uporedi po veličini brojeve istog zapisa. Na testu koji su popunjavali učenici u svrhu istraživanja, našao se prvi primer iz ovog zadatka, s tim da se od jedne grupe učenika zahtevalo da se izjasne koliko su sigurni u svoj odgovor, a od druge grupe da obrazlože zašto su izabrali baš taj odgovor, da bi se ustanovilo koliko su učenici uvereni u svoje znanje i vešti argumentovati svoje odgovore. Analiza njihovih odgovora nalazi se u nastavku, a sada je dovoljno spomenuti da je 73,3% učenika sedmog razreda odgovorilo sa *„Da“,* odnosno da jeste $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, 93,6% učenika osmog razreda i 88,6% učenika srednje škole.

U nastavku su data tri zadatka tačno/netačno tipa različitih nivoa iz zbirke zadataka za završni ispit u osnovnom obrazovanju i vaspitanju za školsku 2014/2015. godinu.

Osnovni nivo: **Zaokruži TAČNO, ako je tvrđenje tačno, ili NETAČNO, ako tvrđenje nije tačno.**

$\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{9}{10}$	**TAČNO**	**NETAČNO**
$\frac{7}{11} - \frac{5}{11} = \frac{2}{11}$	**TAČNO**	**NETAČNO**
$\frac{13}{7} - \frac{8}{7} = \frac{5}{7}$	**TAČNO**	**NETAČNO**

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ TAČNO NETAČNO

S obzirom da zadatak pripada osnovnom nivou, očekuje se da bar 80% učenika pokažu da umeju da izvrše osnovne računske operacije u skupu racionalnih brojeva, ovde samo u slučaju sabiranja i oduzimanja razlomaka sa istim imeniocem.

Srednji nivo: **Zaokruži DA, ako je tvrđenje tačno, ili NE ako tvrđenje nije tačno.**

Broj 7770 je deljiv sa 10.	**DA**	**NE**
Broj 111111111 je deljiv sa 5.	**DA**	**NE**
Broj 7770 je deljiv sa 100.	**DA**	**NE**
Broj 22222 je deljiv sa 5.	**DA**	**NE**
Broj 7770 je deljiv sa 9.	**DA**	**NE**
Broj 444 je deljiv sa 3.	**DA**	**NE**
Broj 7770 je deljiv sa 3.	**DA**	**NE**

Od učenika se očekuje da umeju primeniti osnovna pravila deljivosti sa 2,3,5,9 i sa dekadnim jedinicama. Na ovaj zadatak srednjeg nivoa, očekuje se da zna odgovor više od pola učenika.

Napredni nivo: **Kod tačnog tvrđenja zaokruži reč TAČNO, a kod netačnog tvrđenja reč NETAČNO.**

Svaka dva jednakostranična trougla međusobno su slična. **TAČNO** **NETAČNO**

Svaka dva slična trougla imaju jednake obime. **TAČNO** **NETAČNO**

Dva jednakokraka trougla sa uglom pri vrhu od $36°$ su slični trouglovi. **TAČNO** **NETAČNO**

Svi pravougli trouglovi međusobno su slični. **TAČNO** **NETAČNO**

U okviru ovog zadatka učenici bi trebali pokazati znanje o sličnosti trouglova, povezujući sa tim i razna svojstva geometrijskih objekata.

3.4 Analiza udžbenika i zbirki

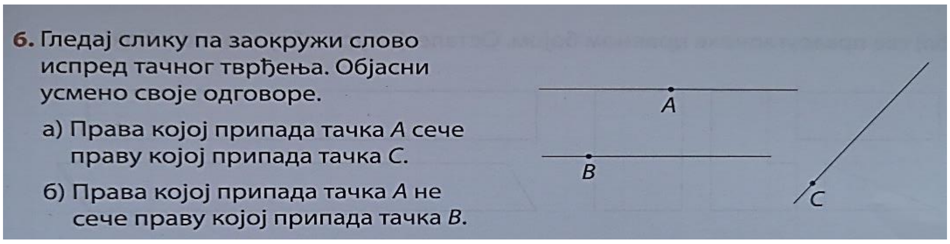
Udžbenici, a zatim i zbirke i radni listovi, osnovno su nastavno sredstvo koje se koristi u obrazovno – vaspitnom radu. S obzirom na to da su trenutno među zastupljenijima udžbenici Klett izdavača, isti će biti i analizirani u nastavku teksta, a razlika je jedino u godini izdanja.

Već su prethodno navedeni neki od nedostataka pitanja tačno/netačno tipa, a jedan od njih je, s obzirom da je verovatnoća za davanje tačnog i pogrešnog odgovora od dva moguća, ista, 50%. Zato se mnogi učenici oslanjaju isključivo na pogađanje i preferiraju ovakve zadatke. Upravo to je možda jedan od razloga zbog čega zbirke ne obiluju ovim tipom zadataka u kojima učenik bira između dve alternative, tačno i netačno. Međutim, iako ne zahtevaju numeričko rešenje, nego samo da učenik odabere da li je iskaz tačan ili netačan, ova pitanja često uključuju visok nivo logičkog razmišljanja. To se posebno vidi u zadacima koji zahtevaju dodatna obrazloženja, što pokazuju rezultati empirijskog istraživanja.

U nastavku je analizirana učestalost i primeri tačno/netačno brojevnih rečenica, koji se mogu pronaći u udžbenicima i zbirkama za učenike osnovne škole, a koji mogu biti veoma značajni prilikom sticanja veštine argumentacije.

Učenici nižih razreda osnovne škole u svojim zbirkama susreću se već sa zadacima dvostukog izbora, pri čemu neki od njih zahtevaju i obrazloženja. Prva tema koja se obrađuje u drugom razredu, jeste geometrijska tela i figure, u okviru čega se nalazi nastavna jedinica o pravoj i polupravoj. Pre toga učenici su upoznati sa pojmom duži kao pravom linijom između dve tačke. Druga vrsta prave linije koja ima početnu tačku naziva se poluprava i jasno se naglašava da se na jednu stranu može proizvoljno produžiti. Na kraju, prava linija bez krajeva nazvana je prava za koju je opet naglašeno da se može produžiti na obe strane. Nakon toga, učenicima su predstavljani razni crteži polupravih i pravih, za koje treba da daju objašnjenje da li je tačno da se seku ili ne, i zašto.

Jedan od takvih primera je prikazan na slici 6, a na osnovu njega nastavnik može videti koliko su učenici sposobni dati obrazloženja i ako je neophodno ispraviti greške koje se javljaju prilikom matematičkog izražavanja.



Slika 6: Primer tačno/netačno zadatka koji zahteva i objašnjenje (str. 27, [15])

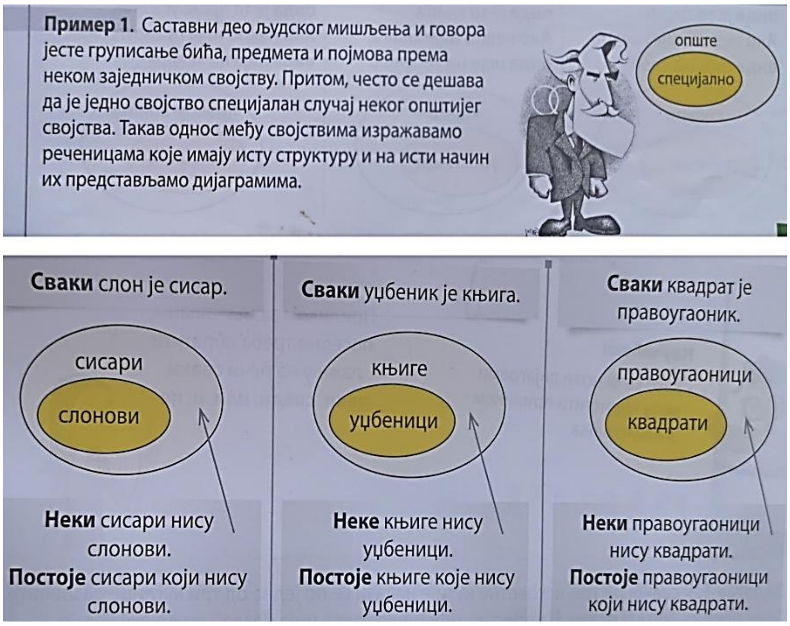
Matematički simboli već u ranom uzrastu zadaju muke učenicima. U trećem razredu, u okviru nastavne teme o jednačinama i nejednačinama, sa učenicima se obrađuje lekcija o skupovima, kako bi ispravno zapisivali skup rešenja nejednačine. Pri tome se naglašava da se skupovi označavaju velikim štampanim latiničnim slovima i da se mogu zapisivati koristeći vitičaste zagrade { }, kao i da se za svaki objekat iz datog skupa može reći da je element ili član skupa, što se kraće zapisuje koristeći simbol ∈. Slično, da neki objekat nije element skupa zapisuje se koristeći oznaku $\notin$. Zadatak sa strane 85. iste zbirke [16], proverava učenikovo razumevanje spomenutih simbola. U zadatku je dat skup $A = \{1,2,3,4,5\}$, a nakon toga tvrđenja poput $12 \in A$, $1 \in A$, $54 \notin A$ itd., pored kojih učenici treba da zapišu „tačno“ ili „netačno“.

Peti razred

Sve je veći obim gradiva, a samim tim i količina različitih tipova zadataka u zbirkama. U nastavku će akcenat biti samo na jednom delu sadržaja, pretežno na oblasti brojevi i operacije sa njima ili algebra i funkcije.

Jedno od publikovanih istraživanja [17], bavi se nastavnicima koji su trebali da dokažu ili opovrgnu tvrđenja koja se odnose na iskaze koji počinju sa *“za svaki” i “postoji”*. Prikazano je prethodno i kako su se oni snašli. Rezultat nije sjajan, a učenike petog razreda treba pažljivo uvoditi u priču o Venovim dijagramima koje koriste prilikom zaključivanja, iskazu kao rečenici koja može biti tačna ili netačna, i posebno obratiti pažnju na reči **svaki, neki, postoji, sledi, i, ili, ne**.

Udžbenik izdavača „Klett” *[17]*, u okviru lekcije Venovi dijagrami i zaključivanje, vrlo lepo je, na svega nekoliko strana pružio učenicima neophodno početno znanje o logici, a u nastavku se nalaze slikoviti primeri.



Slika 7: Primer upotrebe reči svaki, neki, postoji na konkretnom primeru, nastavna jedinica Venovi dijagrami i zaključivanje (str. 23 i 24, [17])

Slika 8: Formulacija matematičkih zakonitosti u obliku ako.., onda.., kao nastavak na prethodni primer (str. 24, [17])

Zadatak za vežbu zatim je zahtevao da učenici dijagramom predstave rečenice:

a) Svaki slikar je umetnik. Postoji umetnik koji nije slikar.
b) Bilo koji noj je ptica. Neke ptice nisu nojevi.
c) Svaka kocka je kvadar. Postoji kvadar koji nije kocka.

U udžbeniku [17] je za iskaz naglašeno da je rečenica koja može biti tačna ili netačna i dat je prikaz kako su uglavnom formulisane matematičke zakonitosti u obliku:

Ako ***, onda ***

odnosno,

Iz *** sledi ***

gde *** i *** stoje umesto nekih iskaza. Prilikom zaključivanja koristimo ih na sledeći način:

- Ako znamo da je tačno ***, onda mora biti tačno i ***;
- Ako znamo da nije tačno ***, onda zaključujemo da nije tačno ni ***.

Nakon toga dat je sledeći primer:

> Zamisli da ti roditelji kažu: *Ako ove školske godine imaš sve petice, kupićemo ti novi mobilni telefon.* U kom slučaju ćeš smatrati da su te roditelji slagali, odnosno da njihova izjava nije bila istinita?

uz objašnjenje da su te roditelji slagali samo ako imaš sve petice, a oni ti ne kupe telefon.

Priči o zaključivanju se zatim pridružuju i skupovne operacije. Znanje i veštine zaključivanja stečene u okviru ovih sadržaja, kasnije se mogu primeniti recimo kroz zadatak 15. iz istog udžbenika, sa strane 43, u svrhu podsećanja na prethodno spomenute uslove deljivosti.

Pored zadataka, reči *svaki, neki, postoji, sledi*, mogu se naći i u definicijama, tvrđenjima i uopšte teorijskom delu gradiva, kao recimo kroz tvrđenje:

„Za svaki prirodan broj n *važi* $\frac{n}{1} = n$ *i* $\frac{0}{n} = 0$*. Zato je skup* $\mathbb{N}_0$ *podskup skupa razlomaka“ [17]* .

Takođe, kao na slici levo, na slikovit način, u oblačićima, često kroz stripove provlače se iskazi koji sadrže pomenute reči.

Slika 9: Primer koji uključuje reči svaki i neki, (str. 122, [17])

Radni list za peti razred [18] obiluje zadacima tipa tačno/netačno, posebno u okviru lekcija o deljivosti. Kroz samo nekoliko zadataka, odgovarajući na pitanja o tačnosti datih iskaza, učenici ponavljaju veliki deo gradiva. Kada je u pitanju isti radni list, u okviru nastavne teme prirodni brojevi i deljivost nalazi se veliki broj zadataka tačno/netačno tipa, a neki od njih mogu se pronaći na stranama *13., 29., 30., 32., 34.*

Šesti razred

U nastavku je reč o tačno/netačno zadacima iz zbirke zadataka za šesti razred [19], u kojima bi učenici trebali pokazati da umeju koristiti cele brojeve i jednostavne izraze sa njima. Na 14. strani, u okviru lekcije o svojstvima sabiranja,nalazi se zadatak koji zahteva od učenika da ispitaju tačnost sledećih jednakosti:

a) $-7+3=3+(-7)$,
b) $-11+(-4)=-4+(-11)$
c) $\big(2+(-4)\big)+(-9)=2+\big((-4)+(-9)\big)$
d) $-7+\big(6+(-5)\big)=(-7+6)+(-5)$

Ono što se primećuje, jeste da su ovi zadaci na samom početku svakog poglavlja, što označava da su najjednostavniji i trebali bi da omoguće reprodukciju osnovnih znanja i veština, što će učiniti da baš svaki učenik makar počne da rešava zadatke iz svakog poglavlja. Slična je priča bila i sa završnim testovima, na kojima su zadaci dvostrukog izbora često pripadali osnovnom nivou.

Na 17. i 20. strani, u okviru lekcija o množenju i deljenju celih brojeva nalaze se zadaci u kojima se traži od učenika da ispitaju tačnost sledećih tvrđenja:

a) $7\cdot(-3)<0$;
b) $(-10)\cdot(-9)<0$;
c) $-9999\cdot(-9)>0$;
d) $-123\cdot 4>0$;
e) $-9999\div 9<0$;
f) $-729\div(-3)>0$;
g) $575\div(-5)>0$;
h) $-3456\div(-9)<0$.

Kada je u pitanju nastavna tema racionalni brojevi, mogu se pronaći zadaci koji zahtevaju da se koriste određena svojstva prilikom izračunavanja vrednosti izraza, da se u prazan kvadratić stavi znak $<,>,=$ tako da tvrđenja budu tačna ili da se uporede brojevi dati u decimalnom zapisu.

Na strani 81. u okviru lekcije svojstva množenja racionalnih brojeva, iste zbirke, nalazi se pitanje dvostrukog izbora: *„Da li postoji broj koji je jednak svojoj recipročnoj vrednosti? Da li za svaki broj možeš da odrediš njegovu recipročnu vrednost?”*

Sedmi razred

Slično kao i u zbirci za šesti razred, preovlađuju zadaci tipa izračunaj, uporedi, predstavi na brojevnoj pravoj itd., samo što je u pitanju skup realnih brojeva tema koja je predmet analize. Vrlo mali broj zadataka tačno/netačno tipa se može pronaći, a neki od njih se nalaze u radnom listu [20] na 11. i 15. strani, i zahtevaju od učenika da odgovore da li su ponuđene jednakosti i nejednakosti tačne. Samo neke od ponuđenih su: $0=0^2, -6{,}1\cdot(-6{,}1)=(-6{,}1)^2, -8\cdot 8=(-8)^2, (-10)^2>(-8)^2$ itd.

I kada je reč o celim algebarskim izrazima, mogu se pronaći zadaci tačno/netačno tipa u zbirci [20]. Jedan od njih zahteva odgovor na pitanja: *„Da li je sledeći algebarski izraz polinom”,* nakon čega su dati razni algebarski izrazi. Još jedan od tačno/netačno zadataka zahteva odgovor na pitanje *„Da li je sledeća jednakost tačna za svako x“,* pri čemu su dati brojni primeri poput $(3x+1)^2 = 9x^2 - 3x + 1, (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$.

Rešavanjem ovih zadataka učenik pokazuje da ume da prepozna polinome, prepoznati i primeniti formulu za kvadrat binoma.

Osmi razred

Analizirajući prisutnost tačno/netačno zadataka u zbirci za osmi razred [21], dolazi se do sličnih zaključaka kao i ranije, odnosno da je veoma mali broj zadataka dvostrukog izbora. Kroz nastavnu temu linearne jednačine i nejednačine sa jednom nepoznatom, učenici se sreću sa pojmom ekvivalentnih jednačina, gde uče da se za dve jednačine kaže da su ekvivalentne ako je svako rešenje jedne od njih ujedno rešenje i druge, i obrnuto, ili ako obe jednačine nemaju rešenja.

Zadatak: Milica i Miloš su rešavali jednačinu $3x + 2(x-1) = 1 + 4x$. Da li je neko od njih dvoje tačno rešio jednačinu? Uoči greške.

Milica:	*Miloš:*
$3x + 2(x-1) = 1 + 4x$	$3x + 2(x-1) = 1 + 4x$
$3x + 2x - 1 = 1 + 4x$	$3x + 2x - 2 = 1 + 4x$
$5x - 1 = 1 + 4x$	$5x - 2 = 1 + 4x$
$5x - 4x = 1 + 1$	$5x - 4x = 1 - 2$
$x = 2$	$x = -1$

Zadaci koji zahtevaju pronalaženje greške u postupku dobra su ideja, iako je istina da se ne viđaju tako često u zbirkama zadataka. Nastavnici ih ne smeju zaboraviti i trebali bi ih praktikovati na nastavi.

Pored toga, mogu se pronaći zadaci poput: *„Ispitaj tačnost sledećih brojevnih jednakosti“* i zadatak 6. sa strane 26. iste zbirke koji zahteva od učenika da ispitaju da li su date jednačine ekvivalentne. Ponuđene su sledeće jednačine:

a) $\frac{x(x+3)}{x} = 3 \; i \; x + 3 = 3$
b) $\frac{(x+5)^2}{x+5} = 0 \; i \; x + 5 = 0$

4. Empirijsko istraživanje

Do sada, kao što se moglo videti prilikom analize udžbenika i zbirki zadataka, u velikom broju slučajeva pitanja tipa tačno/netačno zahtevala su samo da učenik odabere jedno ili drugo, bez preteranog osvrta na razumevanje i razloge zbog kojih se učenik opredelio baš za dati odgovor. Ovim istraživanjem cilj je bio pokazati kako pitanja zatvorenog, tačno/netačno tipa, nemaju preteran značaj ukoliko je jedini zahtev od učenika da zaokruže jedan od dva ponuđena odgovora. Činjenica je da učenici nisu navikli na ovakav, modifikovan tip pitanja tačno/netačno, sudeći i po tome da su se u učionicama mogli čuti komentari negodovanja, jer su kao što i neki od njih tvrde odgovore na ovakva pitanja davali bez preteranog truda i razmišljanja, nasumičnim zaokruživanjem. Kako će tačno/netačno pitanja zauzeti značajno mesto kada je u pitanju i naredno PISA testiranje, cilj ovog pilot istraživanja bio bi predočiti spremnost, ili pak nespremnost učenika da se jasno i argumentovano zauzmu za svoje stavove prilikom odluke o tačnosti datih im tvrdnji. Pored toga, istraživanje se bavi i samoprocenom, s obzirom da su učenici, u zavisnosti od grupe testa koji su popunjavali, imali zadatak i da se u dva zadatka izjasne koliko su sigurni u svoje početne odgovore.

Iako je plan prvobitno bio da instrument (test) za potrebe ovog istraživanja, i rada uopšte, popune učenici samo sedmog i osmog razreda, jer je akcenat na sadržajima koji se obrađuju u osnovnoj školi, test su ipak popunili i učenici nekoliko obrazovnih profila srednjih škola.

4.1 Metodologija

Sedmi i osmi razred

Učestvovao je ukupno 61 učenik iz 3 različite osnovne škole. Od toga 31 učenik osmog i 30 učenika sedmog razreda. Test se nalazi u prilogu na kraju rada, anoniman je, i od učenika je zahtevao, pored zadataka, da napišu koji su razred i koju su ocenu imali u prethodnom razredu. Učenici su na svojim redovnim časovima, uz prisustvo nastavnika popunjavali testove, i pružena im je mogućnost da koriste vreme celog časa ukoliko im je bilo potrebno (30 minuta). U tabeli su podaci o ocenama učenika.

	Sedmi razred	Osmi razred
Ocena 5	11	11
Ocena 4	8	5
Ocena 3	3	8
Ocena 2	8	7

Tabela 5: Pregled podataka o ocenama učenika koji su popunjavali test

Kao što se može videti u prilogu, učenici su popunjavali dva testa koja se minimalno razlikuju. Test 1 je popunilo 15 učenika sedmog razreda i 15 učenika osmog razreda, a test 2 slično, 15 učenika sedmog i 16 učenika osmog razreda.

Srednja škola

Učenicima srednjih škola nije bio potreban ceo čas, nego 15 minuta ili manje. Ukupan broj učenika srednje škole koji su popunjavali test je 44, a u tabeli ispod je dat pregled ocena po razredima koji su popunjavali test.

Obrazovni profili:

- *Ekonomski tehničar (treći i četvrti razred)*
- *Turistički tehničar (prvi i drugi razred)*
- *Mašinski tehničar za kompjutersko konstruisanje (prvi razred)*
- *Elektrotehničar informacionih tehnologija (treći i četvrti razred)*

	Ocena 5	Ocena 4	Ocena 3	Ocena 2	Ukupno
Prvi razred	1	3	3	3	**10**
Drugi razred	2	2	1	1	**6**
Treći razred	2	3	8	2	**15**
Četvrti razred	1	3	5	4	**13**
Ukupno	**6**	**11**	**17**	**10**	**44**

Tabela 6: Pregled ocena po razredima koji su popunjavali test

Test 1 popunilo je 24, a test 2 preostalih 20 učenika srednje škole.

4.2 Rezultati istraživanja

1. **Da li je tačna nejednakost $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$?**

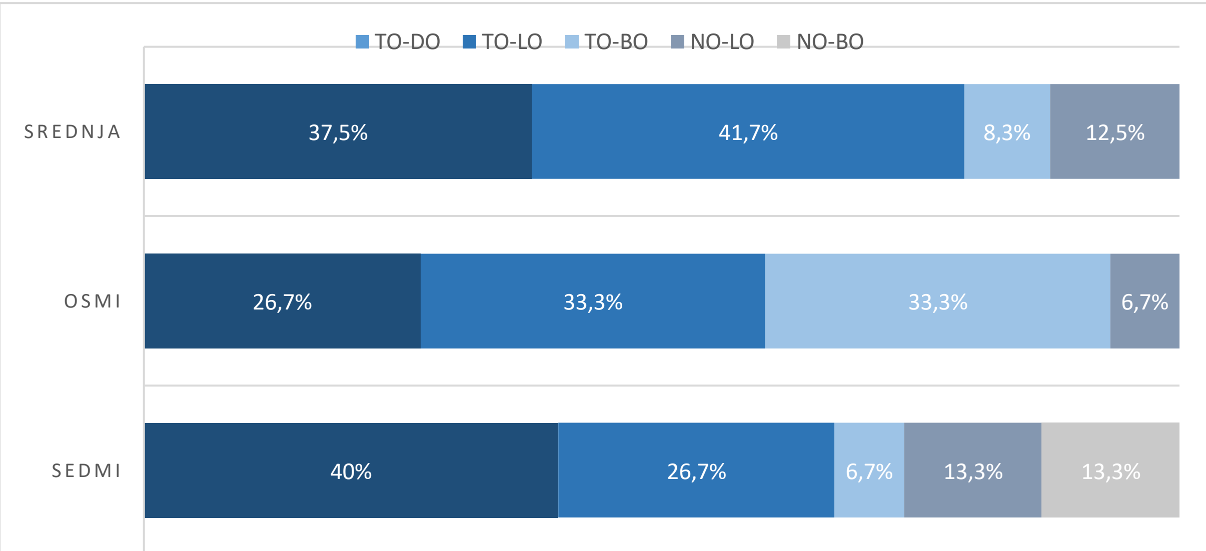
☐**DA** ☐**NE**

U obe grupe prvi deo zadatka bio je potpuno isti, i svih 105 učenika koji su popunjavali test odgovorili su na njega. Cilj je bio proveriti da li učenici umeju uporediti brojeve istog zapisa, a pored toga koliko su sigurni u svoje odgovore i koliko tačno mogu obrazložiti svoje mišljenje. S obzirom da je u pitanju zadatak osnovnog nivoa, očekuje se da bar 80% učenika tačno odgovori na pitanje. Što se tiče učenika osmog razreda, ***93% (29)*** njih dalo je tačan odgovor, zatim ***73,3% (22)*** učenika sedmog razreda i ***88,6% (39)*** učenika srednje škole. Prema tome, samo učenici sedmog razreda zaostaju za procentima kojima težimo.

Na testu 1 drugi deo zadatka podrazumevao je da učenici obrazlože svoje odgovore. Osnovci koji imaju ocenu 2 nisu potpuno odgovorili na ovo pitanje, a uglavnom nisu ni popunili prazno polje. Slična je situacija i sa učenicima koji su imali ocenu 3, ni jedan odgovor nije potpuno tačan, a neka od obrazloženja su: *„Proširio bih razlomak da vidim da li je tačno“*, *„Zato što je bolje da imate polovinu jabuke a ne trećinu“*.. Bilo je i među učenicima koji su imali ocenu 4 onih koji su u prazno polje napisali: *„Zato što je jedna polovina manja od dve trećine“*, *„Razlomke sam proširio na najmanji zajednički imenilac i onda sam uporedio rezultate“* (ali nigde nije naveden postupak da je to zaista urađeno, o čemu verovatno svedoči i netačan odgovor, odnosno „NE“). Neki od učenika sedmog razreda pružili su i potpuna rešenja, gde se u praznom polju našao kratak i tačan postupak prvo proširivanja razlomaka da im imenilac bude 6, nakon čega je učenik od prvog razlomka oduzeo drugi, a onda dobivši negativno rešenje, ispravno je zaključio. Što se ocena 5 tiče, jedan učenik sedmog razreda je potpuno pogrešno odgovorio, dok su ostali davali tačne početne odgovore i dobra obrazloženja.

Što se tiče srednje škole, 22 učenika ostavila su makar neki komentar koji su smatrali obrazloženjem, a samo 2 učenika koja su odgovorila „DA“ nisu to obrazložili. Neka od najčešćih i najzanimljivijih obrazloženja su: *„DA – Zato što su dve trećine veće od jedne polovine“, „DA – zato što* $\frac{1}{2}$ *kad podelimo ispadne* $0{,}5$, *a* $\frac{2}{3}$ *je* $0{,}666\ldots$*“, „DA – zato što je 66% veće od 50%“, „DA - podelimo čokoladu na dva dela i uzmemo jednu polovinu, drugu čokoladu na 3 dela i uzmemo dva. Ko će više dobiti?“*. Jedan učenik je nacrtao dva kruga, a zatim je jedan krug podelio na dva a drugi na 3 dela i zaključio. Pored toga, učenici su se koristili brojevnom pravom, iako se u jednom slučaju desilo da raspored brojeva na pravoj nije bio tačan, a neki od učenika su i proširivali razlomke da imaju isti imenilac, odnosno 6. Na grafiku 1 prikazano je procentualno kako su se učenici snašli, gde:

- TO-DO predstavlja učenike koji su tačno odgovorili i dobro obrazložili
- TO-LO predstavlja učenike koji su tačno odgovorili i loše obrazložili
- TO-BO predstavlja učenike koji su tačno odgovorili, ali bez obrazloženja
- NO-LO predstavlja učenike koji su netačno odgovorili i loše obrazložili
- NO-BO predstavlja učenike koji su netačno odgovorili i predali bez obrazloženja

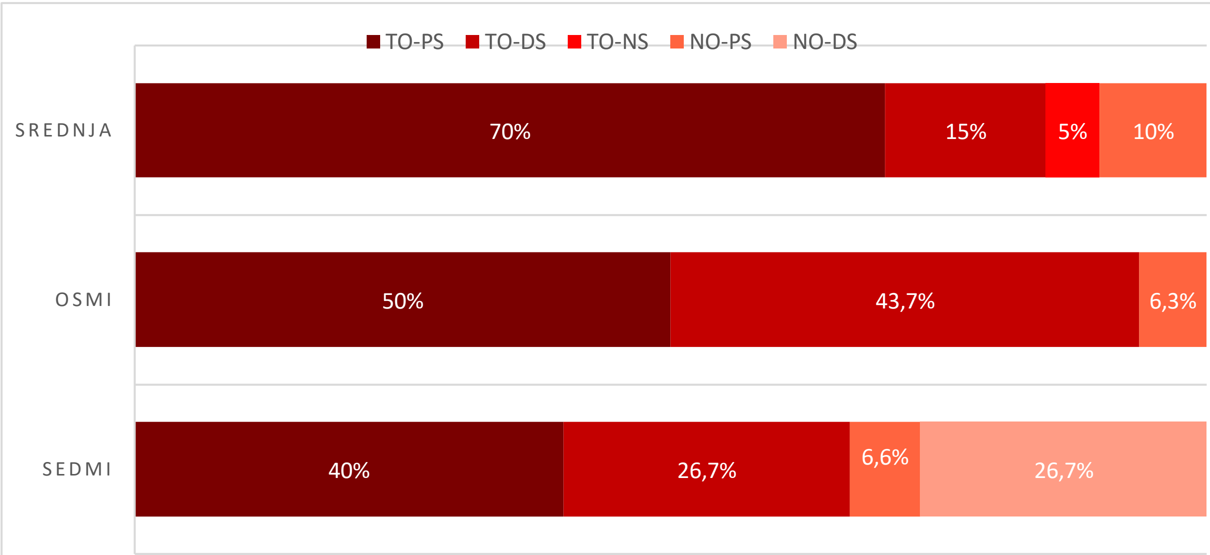


Grafik 1: Distribucija odgovora na prvo pitanje sa testa 1 koje je zahtevalo obrazloženje

Što se tiče testa 2, od učenika je bilo očekivano da se izjasne koliko su sigurni u svoje odgovore. Pri tome imali su ponuđene tri mogućnosti: *potpuno sam siguran-a, delimično sam siguran-a, nisam siguran-a.* Kako su učenici odgovorili najbolje se vidi na grafiku 2, gde:

- TO-PS predstavlja učenike koji su tačno odgovorili i potpuno su sigurni u to
- TO-DS predstavlja učenike koji su tačno odgovorili i delimično su sigurni u to

- ➢ TO-NS predstavlja učenike koji su tačno odgovorili i nisu sigurni u to
- ➢ NO-PS predstavlja učenike koji su netačno odgovorili i potpuno su sigurni u to
- ➢ NO-DS predstavlja učenike koji su netačno odgovorili i delimično su sigurni u to
- ➢ NO-NS predstavlja učenike koji su netačno odgovorili i nisu sigurni u to



Grafik 2: Distribucija odgovora na drugi deo pitanja sa testa 2 koji se odnosi na samoprocenu

Ono što bi bilo poželjno jeste da bude približan procenat onih koji su na testu 1 tačno odgovorili i dobro obrazložili i onih koji su na testu 2 potpuno sigurni u svoje tačne odgovore, što je slučaj samo sa sedmim razredom. Ipak, skoro je duplo veći broj osmaka i srednjoškolaca koji su potpuno sigurni u svoje odgovore, nego onih koji su potkrepili svoje tačne odgovore i dobrim obrazloženjima. Što se grafika 2 tiče, jasno prikazuje da je najveći deo učenika potpuno siguran u sebe, dok grafik 1 ipak svedoči o ne tako malom broju učenika koji su dali loša obrazloženja svojih odgovora. Za sada, može se reći da učenici imaju dobru intuiciju za spoznaju istine na nastavi matematike, sudeći po najvećem broju onih koji su potpuno ili delimično sigurni u svoje tačne odgovore, ali je i dalje mali broj njih sposoban samostalno pružiti dobra obrazloženja svojih odgovora. U zavisnosti od raspodela koje budu oslikavale rezultate narednih pitanja, donosićemo dodatne zaključke.

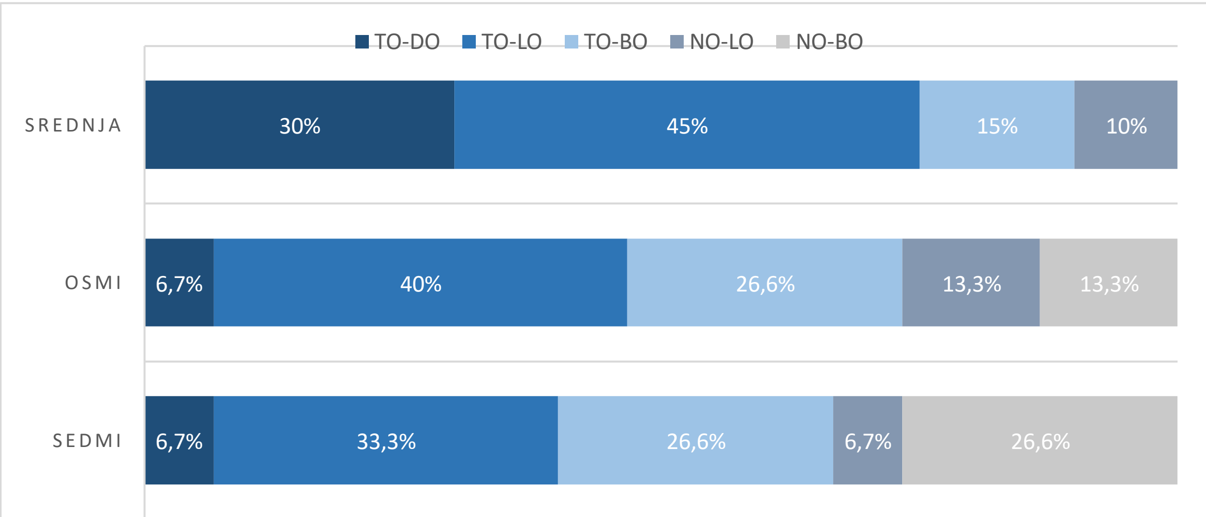
2. Da li je tačna jednakost $0,0011 = 0,1 \cdot 0,011$?

☐**DA** ☐**NE**

Jedan učenik osmog razreda koji ima ocenu 2 nije uopšte uradio ovaj zadatak, tako da preostaje 30 popunjenih testova 1 i 30 popunjenih testova 2. Najlošiji rezultat pokazali su opet učenici sedmog razreda, s obzirom da je ***12 (40%)*** od 30 učenika pogrešno odgovorilo na ovo pitanje, dok su osmaci dosta bolji sa samo ***4 (13,33%)*** učenika koja su dala netačan odgovor od njih 30. Kao i u slučaju prvog pitanja, ***88,6%*** učenika srednje škole tačno su odgovorili na ovo pitanje.

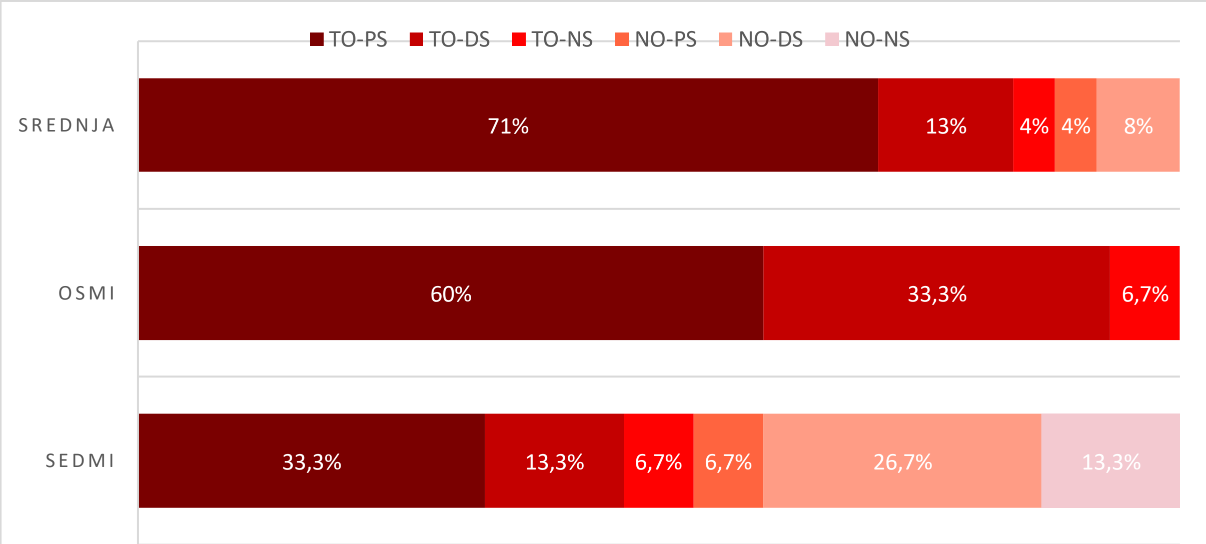
Kada je u pitanju test 2, od učenika se zahtevalo da daju objašnjenje svojih odgovora. Učenici koji su imali ocene 2 i 3, nisu davali potpune odgovore, odnosno izbegavali su da daju obrazloženja čak i kada je početni odgovor bio tačan ili su obrazloženja bila loša. Čak i učenici koji su imali ocenu 4 nisu pisali potpuna obrazloženja, iako su učenici osmog razreda prilično sigurni u svoje tačne odgovore, s obzirom na komentare u praznim poljima: *„Zato što znam“ ili „Znam da je tačno 100%“.* Kada su u pitanju ocene 5, učenici sedmog razreda nisu davali potpune odgovore, dok su neki učenici osmog razreda ispravno obrazlagali, s tim da je bilo i onih koji su od starta pogrešno zaključili i dali početni odgovor „NE“.

Što se tiče srednje škole, samo 3 učenika koja su odgovorila „DA“, nisu to i objasnili. Neki učenici su, pored tačnog odgovora, kao i u slučaju osnovaca, samo prepisali jednakost iz postavke. A bilo je opet i onih koji su odgovarali: *„izračunao sam u glavi“, „logički sam zaključio“ ili „zato što znam da množim“.* Pored toga, neki učenici su tačno izvršili operaciju množenja decimalnih brojeva ili su prvenstveno pretvorili brojeve u razlomke nakon čega su izvršili množenje. Neki su i rečima pokušali obrazložiti, kao recimo: *„DA – jer kad se množi sa 0,1 jedna decimala se briše“.* Sa grafika 3 vidi se da je izuzetno mali broj učenika, posebno osnovne škole umeo obrazložiti svoje odgovore, pri čemu je najveći broj učenika tačno odgovorio na pitanje dvostrukog izbora, ali veliki broj pokušaja da obrazlože nije uspešno realizovan.



Grafik 3: Distribucija odgovora na drugo pitanje sa testa 2 koje je zahtevalo obrazloženje

Na testu 1 zadatak je bio samoprocena, odnosno da učenici potvrde koliko su sigurni u svoje odgovore. Grafik 4 pokazuje da je opet ubedljivo najviše učenika sigurno u sebe, uprkos pokazatelju da je svega po jedan učenik sedmog i osmog razreda potpuno odgovorio na zahtev za obrazloženjem odgovora. Kako najsvetlije nijanse pokazuju one učenike koji su netačno odgovarali na pitanje, vidimo da su učenici sedmog razreda opet najviše grešili, ali ono što je za utehu, grafik 4 pokazuje da pretežno nisu sigurni ili su samo delimično sigurni u svoje netačne odgovore. Što se tiče drugog zadatka, najviše se šarene grafici kada je u pitanju sedmi razred, što svedoči o nedovoljnom poznavanju i vršenju operacije množenja u ovom slučaju sa decimalnim brojevima, iako bi njima to gradivo trebalo biti najsvežije. Preko 70% srednjoškolaca je potpuno sigurno u sebe, ali od 75% učenika koji su pokušali obrazložiti svoje tačne odgovore, više je onih koji se nisu snašli.



Grafik 4: Distribucija odgovora na drugo pitanje sa testa 1 koje se odnosi na samoprocenu

3. Da li je tačan iskaz?

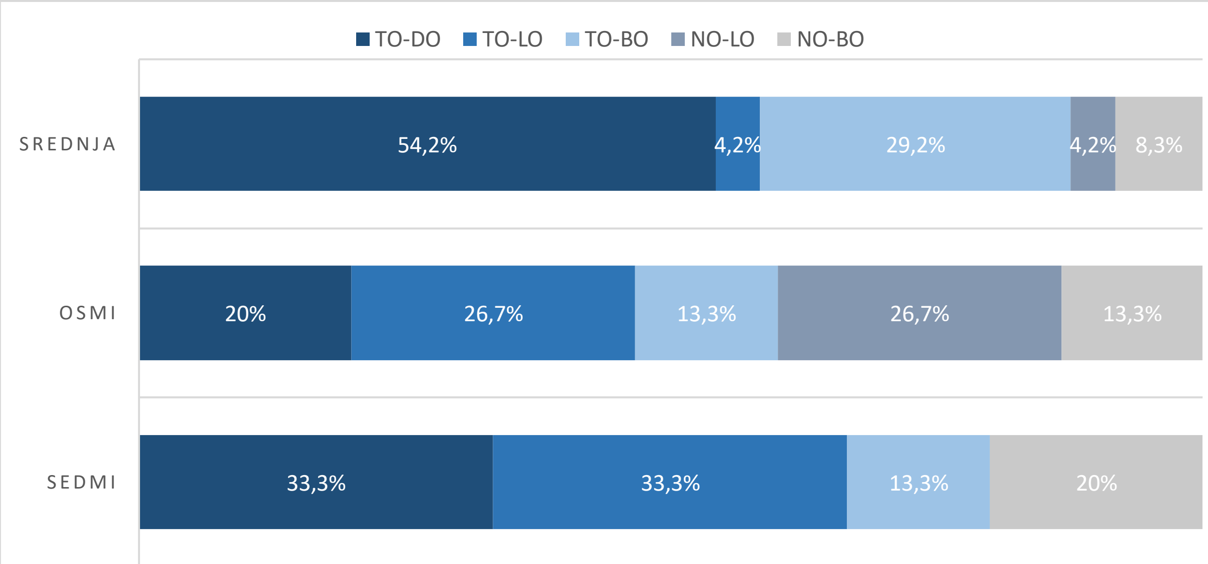
Broj $\sqrt{19}$ nalazi se između brojeva 2,1 i 3,9.

☐**DA** ☐**NE**

Jedan učenik osmog razreda nije dao odgovor na ovo pitanje, tako da imamo 30 učenika sedmog i 30 osmog razreda koji su odgovorili. Gotovo trećina njih ***(66,7%)*** je dala pogrešan odgovor, što je do sada najlošiji rezultat, u poređenju sa prva dva pitanja. Koren na nastavi matematike je, reklo bi se, nešto što izaziva strah i nesigurnost ,a ovakvi zadaci mogli bi pomoći nastavnicima da učenici steknu bolji osećaj i sigurnost po pitanju operacije korenovanja. Znatno bolje su se snašli učenici srednje škole, gde je od 44 učenika, čak 40 ***(90,9%)*** tačno odgovorilo. Učenici pojam korena potpuno shvataju i koriste tek u srednjoj školi kada ponovo obrađuju temu korenovanje.

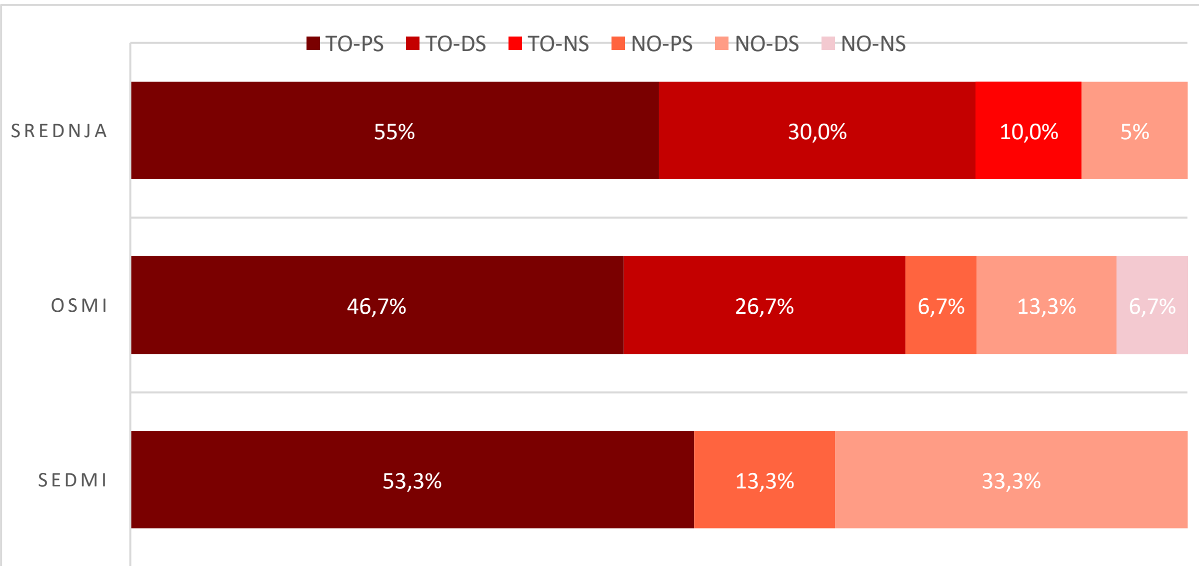
Što se testa 1 tiče, zadatak je bio da učenici dodatno obrazlože svoje odgovore. Bez obzira na to koju ocenu imaju, iako to nije bio cilj, neki od njih koristili su digitron da dodju do zaključka, što se vodilo u kasnijoj analizi kao loše obrazloženje. Mnogi sedmaci i osmaci su ostavljali i prazna polja, takođe uprkos oceni koju imaju. Ipak, tek ocene 4 i 5 pisale su dobra obrazloženja poput: *„$\sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25}$“, „Gledala sam da je kvadrat od 4 manji od 19 i da koren iz 19 takođe ne može biti manji od 4“.*

Od 24 učenika srednje škole koji su odgovorili na ovo pitanje, 2 učenika koja su odgovorila „DA“ i 7 učenika koji su odgovorili „NE“ nisu obrazložili svoje mišljenje. Dakle 9 (37,5%) učenika nije pokušalo argumentovati. Jedan učenik koji je odgovorio „DA“, obrazložio je to sa: *„Koren iz 19 je između brojeva 3 i 9. Mislim da je najbliži 4“.* Jedan učenik koji je odgovorio „NE“ napisao je samo: „Zato što se ne nalazi između 2,1 i 3,9“, dok su preostalih 13 (54,2%) učenika u svojim obrazloženjima koristili $\sqrt{16}$ i davali veoma dobra obrazloženja.



Grafik 5: Distribucija odgovora na treće pitanje sa testa 1 koje je zahtevalo obrazloženje

Na testu 2 drugi zadatak odnosio se opet na samoprocenu. Uglavnom je oko 50% učenika potpuno sigurno u svoje tačne odgovore, iako je samo u slučaju srednjoškolaca toliko učenika u stanju potkrepiti svoj odgovor tačnim obrazloženjem. Takođe kada su srednjoškolci u pitanju vidimo da je skoro isti procenat, oko 10%, onih koji su netačno odgovorili pri čemu uglavnom nisu ni skloni davanju obrazloženja, kao i onih na grafiku 6 koji su netačno odgovorili i nisu sigurni u to. Ipak, čak za 20% je više učenika sedmog i osmog razreda koji su potpuno sigurni u svoje tačne odgovore, nego onih koji su uspeli ispravno obrazložiti svoje mišljenje. Učenicima sedmog i osmog razreda operacija korenovanja nije omiljena, ali sudeći po oko 50% učenika sigurnih u svoje odgovore imaju dobar osećaj, ali intuiciju treba nadograditi i znanjem tako što će nastavnici sadržaje prilagođavati uzrastu osnovne škole, što će i učenike sa slabijim postignućima zainteresovati za rad.



Grafik 6: Distribucija odgovora na treće pitanje sa testa 2

4. Da li je tačan iskaz?

Podeliti neki broj sa 0,5 je isto što udvostručiti ga.

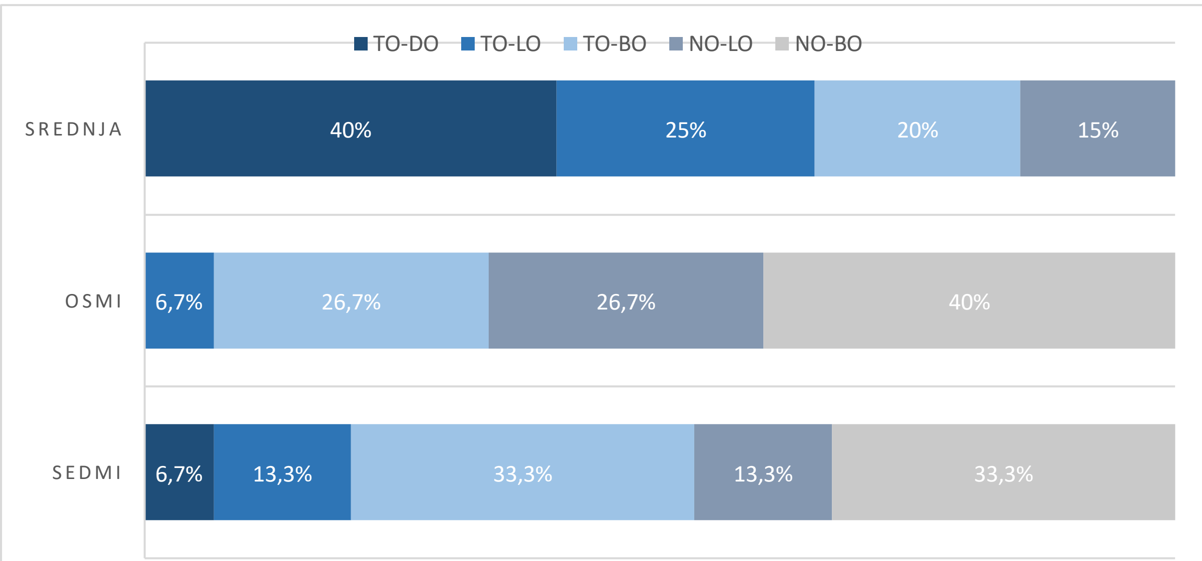
☐**DA** ☐**NE**

Jedan učenik osmog razreda koji ima ocenu 4 nije odgovorio na ovaj zadatak, tako da preostaje 30 odgovora učenika sedmog razreda i 30 odgovora učenika osmog razreda. U ovom zadatku se prvi put dešava da je više učenika dalo pogrešan odgovor nego tačan, gde je 14 sedmaka ***(53,3%)*** i 20 osmaka ***(66,7%)*** dalo netačan odgovor.

Test 2 je od učenika zahtevao da obrazlože odgovore koje su dali i rezultati su sledeći. Učenici su izbegavali da obrazlože, posebno ocene 2 i 3, bilo da su sedmi ili osmi razred. Ali i učenici koji imaju više ocene izbegavali su da objasne ili čak uz netačan odgovor neki su pisali: *„Zato što znam 100%“.* Bilo je i onih, opet bez obzira na ocenu, koji su se fokusirali isključivo na operaciju deljenja, a ne i na činjenicu da dele decimalnim brojem koji je manji od 1, pa su neretko obrazlagali sa: *„Kad podeliš neki broj sa 0,5 ti ga prepoloviš a ne udvostručiš“.* Učenik osmog razreda koji ima ocenu 5, pokazao je ispravno razmišljanje, ali i nedostatak veštine da obrazloži, odgovorivši: *„Zato što se množi sa 2, a ne deli sa 0,5“*. Neki učenici su uzimali konkretne primere brojeva koje su podelivši sa 0,5 udvostručili, a zatim neki od njih i ispravno zaključili.

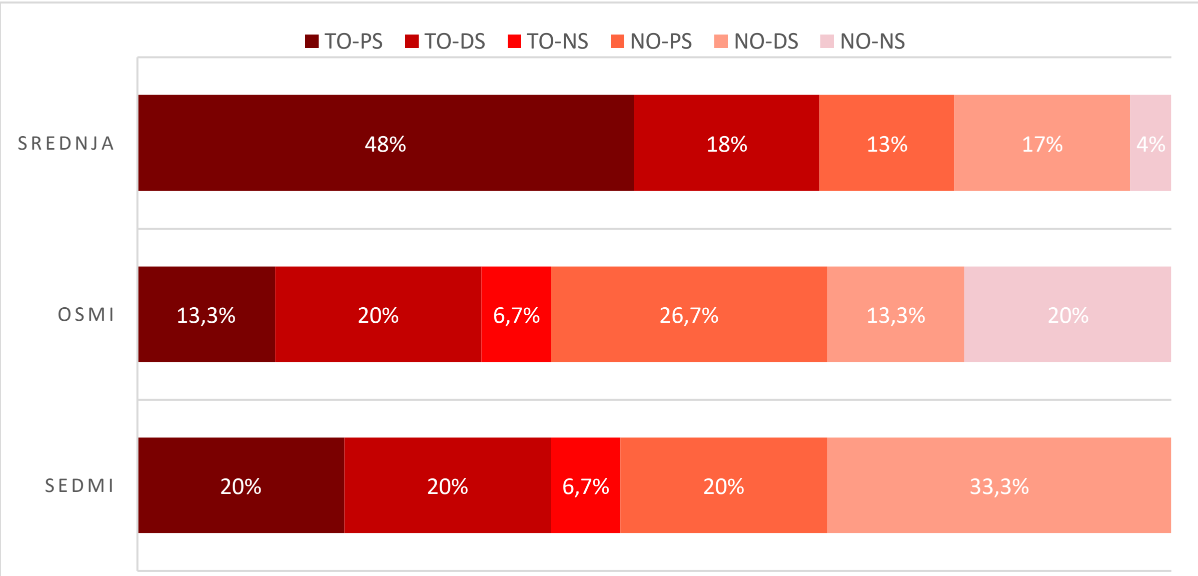
Bolje su se snašli učenici srednje škole, gde je 40% (8) učenika pored tačnog odgovora dalo i zadovoljavajuća obrazloženja, a od 20 učenika, 4 (20%) nisu popunili prostor ostavljen za obrazloženje. Najviše učenika je davalo konkretne primere množenja sa 0,5, a neki od odgovora bili su: *„DA – zato što se udvostruči“, „DA – jer kad se množi sa 0,5 onda se broj smanjuje za pola, a ovo je obrnuto“, „DA -* $x: 0{,}5 = x: \frac{1}{2} = 2x$*“.*

Ono što se jasno vidi sa grafika 7, jeste da najveći procenat kada su učenici osnovne škole u pitanju, zauzima pogrešan odgovor „NE“ i to bez obrazloženja, dok je odgovor „DA“ koji prati tačno obrazloženje, dao samo jedan učenik sedmog razreda.



Grafik 7: Distribucija odgovora na četvrto pitanje sa testa 2 koje je zahtevalo obrazloženje

Grafik 8 pokazuje neka slaganja sa grafikom 7, ali opet pretežno kada su učenici srednje škole u pitanju. Vrlo su slični procenti učenika koji su dali tačan odgovor praćen zadovoljavajućim obrazloženjem i onih koji su potpuno sigurni u svoje tačne odgovore. Pored toga približan je broj onih koji su netačno odgovorili i dali pri tome netačno obrazloženje i onih koji su sa druge strane potpuno sigurni u svoje netačne odgovore. To su upravo učenici kojima je najpotrebnija pomoć. Svetlije boje dominiraju na oba posmatrana grafika kada su učenici osnovne škole u pitanju, što svedoči o velikom broju pogrešnih odgovora na ovo pitanje. Učenici su dakle, prilično sigurni da pomnožiti broj sa 0,5 ne znači udvostručiti ga, s obzirom da je preko 50% učenika sedmog i 40% učenika osmog razreda potpuno ili delimično sigurno u to. Decimalnim brojevima se učenici bave u sedmom i osmom razredu, prvo u okviru teme o racionalnim brojevima gde ovladavaju osnovnim računskim operacijama u istom skupu brojeva. Kao i kada je u pitanju zadatak broj 2, može se zaključiti da učenici imaju određenu odbojnost prema ovakvom zapisu i ne vladaju množenjem i deljenjem decimalnih brojeva najbolje. Još jedno opažanje je da su učenici osnovne škole u znatno većem broju ostavljali prazna polja tamo gde je trebalo da se nađe obrazloženje.

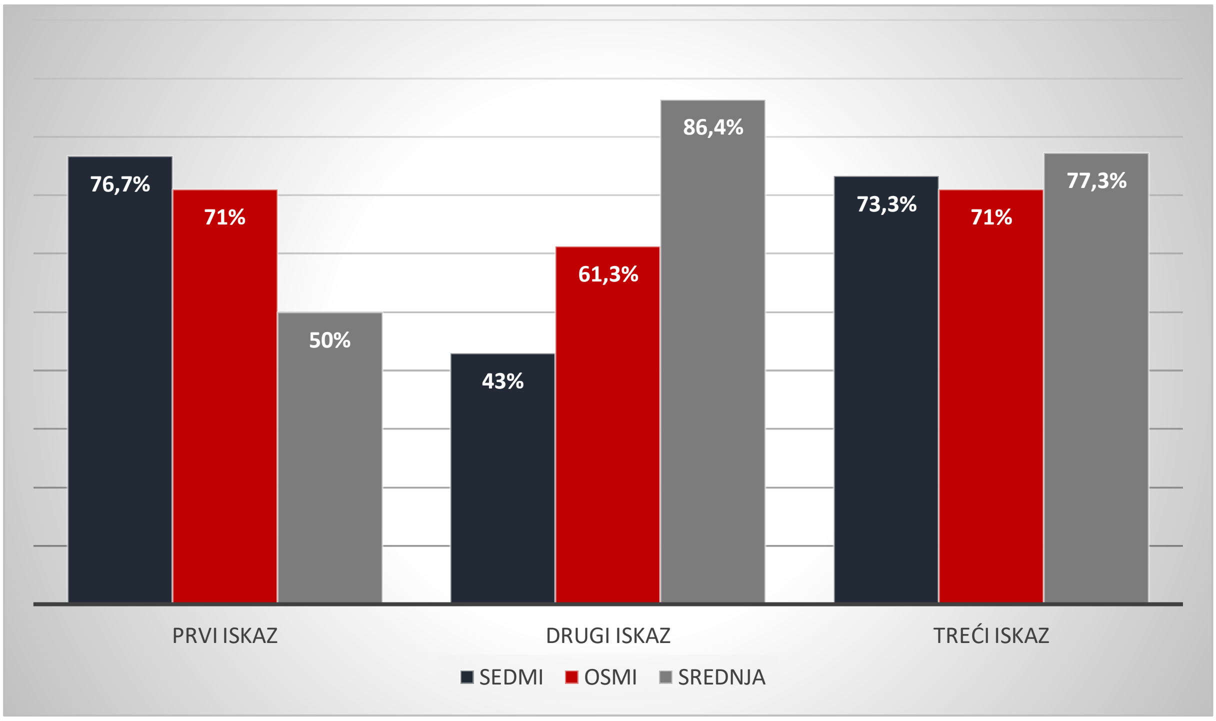


Grafik 8: Distribucija odgovora na četvrto pitanje sa testa 1 koje se odnosi na samoprocenu

Peti zadatak je tipičan zadatak tačno/netačno tipa, koji od učenika samo zahteva da se odluče o tačnosti iskaza. Grafik 9 pokazuje koliko je učenika procentualno odgovorilo tačno na svaki od iskaza, bilo da se radi o sedmom, osmom razredu ili srednjoj školi. Očigledno je da su se učenici veoma dobro snašli sa ovakvim tipom pitanja, sudeći po tome da su samo učenici sedmog razreda u nešto većem broju pogrešno odgovarali kada je u pitanju istinitost drugog iskaza. U svim ostalim slučajevima uglavnom su u preko 70% slučajeva davali tačne odgovore.

5. **Da li su tačani sledeći iskazi?**

Rešenje jednačine $5-(x+2)=5$ je -2.	☐ **DA** ☐ **NE**
Broj 8^5 je 8 puta veći od broja 8^4.	☐ **DA** ☐ **NE**
Proizvod 99 negativnih i jednog pozitivnog broja je pozitivan.	☐ **DA** ☐ **NE**



Grafik 9: Procenat tačnih odgovora po razredima

Činjenica je da se učenici bolje snalaze kada je jedini zahtev da odluče o tačnosti iskaza, bez da obrazlažu svoje mišljenje. Ono što se primećuje, jeste da učenici srednje škole kao i operacijom korenovanja, bolje vladaju i operecijom stepenovanja. Više pažnje se treba posvetiti ovim operacijama u osmom razredu, ili je učenicima samo potrebno vreme i malo više iskustva za potpuno ovladavanje ovim operacijama.

Ipak, ono što je učenicima zadalo najviše muke, jeste poslednji, šesti zadatak koji je zahtevao da dođu do zaključka i navedu slučajeve u kojima dati iskaz važi, odnosno ne važi.

6. **Iskaz**

Ako dodaš isti broj brojiocu i imeniocu, vrednost razlomka se povećava.

može u nekim slučajevima biti tačan, a u nekim netačan.

Odgovore koje su učenici davali, a nema ih mnogo, nalaze se u tabeli i podebljani su ukoliko ima izgleda da bi učenik ubrzo kroz razgovor sa nastavnikom došao do tačnog rešenja, iako bi mogli biti malo opširniji i sveobuhvatniji. U zagradi pored svakog odgovora nalazi se ocena koju je dati učenik imao zaključenu. Potamljeni odgovori su oni koji imaju najviše smisla i očigledno je da se pretežno ocene 4 ili 5 najbolje snalaze kada je u pitanju argumentacija odgovora. Takav ishod bio je i očekivan. Ali, čak i kod visokih ocena uočava se nerazumevanje samog zadatka, gde se može primetiti da neki učenici dodaju razlomcima na primer $\frac{2}{2}$, što je jedno celo i naravno da će se bilo koji razlomak u tom slučaju povećavati, umesto da i brojiocu i imeniocu doda 2 i zaključi šta se dešava sa polaznim razlomkom. Generalno je bio očekivan veći broj tačnih odgovora, posebno od učenika sedmog razreda koji su se u drugom polugodištu šestog razreda bavili razlomcima u velikoj meri, ali ipak su se za razliku od osmaka setili pojma pravih i nepravih razlomaka i tačno odgovorili, dok su osmaci u manjem broju navodili tačne primere razlomaka za koje iskazi važe. Svakako, bez obzira na uzrast, pored toga što su najčešće netačni, odgovori su i vrlo kratki.

	Za koje razlomke je iskaz tačan	Za koje razlomke je iskaz netačan
Sedmi razred	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{5} + 5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ (4) $\frac{17}{2} = \frac{17 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{51}{6}$ (5) $\frac{2}{3} + 5 = \frac{7}{8}$; $\frac{2^{\angle 8}}{3}$ $\frac{7^{\angle 3}}{8} = \frac{16}{24} < \frac{21}{24}$ povećava se (5) **Kada je brojilac manji od imenioca (5)** **Za razlomke gde je imenilac veći od brojioca (neprave razlomke) (5)** Za razlomke sa istim brojiocem i imeniocem (5) **Za neprave. (5)**	$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{1}$ (3) $\frac{1}{5} + (-5) = \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) = 0$ (4) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10}$ (5) $\frac{2}{2} + 5 = \frac{7}{7}$ ne povećava se (5) **Obrnuto. (5)** **Za razlomke gde je brojilac veći od imenioca (prave razlomke) (5)** Za razlomke sa različitim brojiocem i imeniocem (5) **Za prave. (5)**
Osmi razred	$\frac{8}{8}$ (3) $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ za one koje su tačne (4) $\boldsymbol{\frac{3}{1}}$ **(5)** Ako su svi pozitivni, istog znaka (5) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$ (5) Za one kojima je brojilac veći od imenioca. (5) Tačno je kada je brojilac veći od imenioca, jer neće biti jednaki. (5) $\boldsymbol{\frac{1}{8}, \frac{1}{10}}$ **(ocena 5)** $\boldsymbol{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}}$ **(ocena 5)** $\boldsymbol{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}}$ **... (ocena 5)**	$\frac{5}{2}$ (3) $\frac{1}{5} > \frac{3}{1}$ za one koje su netačne (4) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **(5)** Ako su različitog znaka (5) $\frac{2}{-5}$ (5) Za oni kojima je brojilac i imenilac jednaki. (5) Za one koji su jednaki, jer onda možemo da dobijemo ceo broj. (5) $\boldsymbol{\frac{10}{1}, \frac{8}{1}}$ **(5)** $\boldsymbol{\frac{15}{1}}$ **(5)** $\boldsymbol{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}}$ **... (5)**

Srednja škola	Za one koji su negativni. (2) $\frac{3}{3}, \frac{2}{2}$ (3) $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, ..$ (3) $\frac{3}{3}, \frac{2}{2}$ (3) Za razlomke kod kojih su različiti brojilac i imenilac. (3) **Ako je brojilac veći. (3)** Kod negativnih razlomaka. (3) **Ako je brojilac veći. (4)** $\frac{x+a}{y+a}$ povećava se ukoliko su brojilac i imenilac pozitivni. (4) $\frac{2}{7} + \frac{2}{2} = \frac{4+14}{14} = \frac{18}{44}$ (5) **Ako je brojilac veći. (5)** *najčešći odgovor* $\frac{5}{6} + \frac{2}{2} = 1\frac{10}{12}$ (5) $\frac{x}{y} < \frac{x+n}{y+n}$ n – pozitivan (5)	Za one koji su negativni. (2) $\frac{4}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{7}, ..$ (3) $\frac{7}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ (3) Za razlomke kod kojih su isti brojilac i imenilac. (3) **Ako je imenilac veći. (3)** Kod pozitivnih razlomaka. (3) **Ako je imenilac veći. (4)** $\frac{-x+(-a)}{-y+(-a)}$ onda će se smanjivati u negativnom smislu. (4) $\frac{4}{7} + \left(-\frac{3}{3}\right) = \frac{4}{8} - \frac{3}{3} = \frac{12-24}{24} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2}$ (5) **Ako je imenilac veći. (5)** *najčešći odgovor* $\frac{5}{6} + \left(-\frac{2}{2}\right) = \frac{10-12}{12} = -\frac{2}{12}$ (5) n - negativan. (5)

Tabela 13: Pregled odgovora koje su učenici dali na poslednje pitanje.

4.3 Ključni nalazi

Ono što je svakako rezime cele ove priče, jeste da ni osnovci ni učenici srednjih škola ne pokazuju preterano razvijenu veštinu argumentovanja, bar kroz zadatke iz matematike. Uglavnom su zadovoljavajući procenti tačnih početnih odgovora, ali u momentu kada trebaju odbraniti svoje stavove, često nastaje muk. Test generalno nije rađen za ocenu, ali neki od nastavnika su naglasili da će učenike nagraditi ako se dobro snađu rešavajući postavljene probleme. Odeljenja koja su imala dodatni vid motivacije, nisu pokazala primetno bolje rezultate, ali da je slučaj bio isti u svim odeljenjima, odnosno da su svi nastavnici nagrađivali, možda bi učenici, makar neki od njih, uložili još više truda u svoje radove.

U prvom zadatku, koji je zahtevao samo osnovno znanje o razlomcima srednjoškolci su pokazali nešto bolji rezultat, sa 70% tačnih odgovora u koje su učenici potpuno sigurni kada je test 2 u pitanju, dok su osnovci u samo u oko 45% slučajeva dali tačan odgovor u koji su potpuno sigurni. Zanimljivo je da su osmaci u najvećoj meri tačno odgovarali, ali je najmanje osmaka tačno i obrazložilo odgovore. Broj učenika osnovne škole koji su dali tačna obrazloženja svojih tačnih početnih odgovora, približniji je procentu onih učenika koji su potpuno sigurni u svoje tačne odgovore. To govori da su i učenici čiji je test iziskivao samoprocenu, relativno svesni koliko znanja poseduju, dok su se učenici srednje škole pokazali vrlo samouverenima, bez nekog velikog pokrića, sudeći po malom broju odgovora potkrepljenih tačnim obrazloženjima.

Kada je u pitanju drugi zadatak, učenici su se pokušavali izboriti za digitron, iako to nije bila poenta ovog zadatka. Solidan broj srednjoškolaca, 71%, u svoje tačne odgovore potpuno su sigurni, ali samo 30% je onih koji koji su u stanju dati zadovoljavajuće obrazloženje. Još lošija je situacija kod osnovaca, koji su pretežno izbegavali obrazložiti odgovor, a učenici sedmog razreda nisu ni dovoljno sigurni u svoje tačne odgovore. To svedoči o tome da se operacija množenja kada su u pitanju brojevi u decimalnom zapisu još uvek nije slegla i da bi joj trebalo posvetiti dodatnu pažnju, jer zaista za ovaj zadatak nije potrebno imati digitron pored sebe da bi se brzo zaključilo o tačnosti iskaza.

Ni u trećem zadatku situacija nije bila bolja, tek nešto više od polovine srednjoškolaca koji su popunili test je dalo tačan odgovor i tačno obrazloženje, a isto toliko ih je i potpuno sigurno u svoje odgovore. Kako rešavanje matematičkih, ali i nekih drugih problema, zahteva upravo intuiciju na koju se oslanjamo, dobra stvar je što učenici odgovorivši u velikom broju tačno, u šta su i potpuno sigurni, pokazuju da smisao i osećaj verovatno i poseduju. Koliko god intuicija bila dobra, moramo je uzimati sa nekom rezervom, jer samo intuicija nije dovoljna, o čemu i svedoči često mnogo manji broj onih koji svoju intuiciju potkrepljuju validnim obrazloženjima. Tačno pola osnovaca je potpuno sigurno u svoj tačan odgovor, ali samo 26,7% učenika dalo je i dovoljno dobro objašnjenje i pokazalo razumevanje operacije korenovanja.

Prethodni rezultati svakako nisu sjajni, ali kada je četvrti zadatak u pitanju, procenti ne dostižu ni prethodne brojke. Učenici su se u četvrtom zadatku uhvatili za operaciju deljenja, koju oni intuitivno shvataju na svoj način, odnosno da se deljenjem broj nužno smanjuje, što svakako nije istina jer je u pitanju deljenje brojem koji se nalazi između 0 i 1. Više je osnovaca koji su potpuno sigurni u netačan odgovor nego u tačan, a kada su obrazloženja u pitanju, dominira broj onih koji su dali netačan i odgovor i obrazloženje. Skoro polovina (48%) srednjoškolaca dali su tačan odgovor u koji su potpuno sigurni, ali ipak je manji broj (40%) onih koji su tačan odgovor u stanju i odbraniti validnim argumentima.

Peti zadatak bio je možda i najlakši učenicima, jer su upravo na takve zadatke i navikli, tipičan je zadatak zatvorenog tipa. Dakle sve što je trebalo, jeste odlučiti da li je iskaz tačan ili ne. Učenici sedmog i osmog razreda su prilično ujednačeni, i uglavnom je oko 70% učenika davalo tačne odgovore, izuzev kada je u pitanju drugi iskaz o čijoj se tačnosti dobro izrazilo samo 43,3% sedmaka. Srednjoškolci su najlošiji rezultat ostvarili kada je prvi iskaz u pitanju, ali ipak nisu ispod 50% tačnosti, dok su na poslednja dva iskaza pokazali zadovoljavajuće rezultate, gde je oko 80% učenika dalo tačan odgovor.

Dolazimo do zadatka koji je sasvim očekivano, dodatno pokvario utisak o sposobnosti učenika da argumentuju. Ni blizu 50% učenika nije dalo zadovoljavajuće odgovore, pri tome se ne misli na potpuno tačne, nego čak na one koji ukazuju na eventualno dobro razmišljanje. Kada su osnovci u pitanju, definitivno je nužno posvetiti ogromnu pažnju ovakvom tipu zadatak, jer su učenici pokazali solidne rezultate onog momenta kada treba samo zaokružiti „DA“ ili „NE“, ali kada trebaju objasniti kako su ustvari došli do odgovora, ponestane im strpljenja i reči. Učenici srednjih škola pokazali su da njihovo znanje nije trajno i da uglavnom uče trenutnu materiju koja se obrađuje, tek onoliko koliko je dovoljno za ocene koje žele.

5. Predlog nastavne aktivnosti

Ono što učenicima nedostaje na nastavi matematike je često malo viši stepen samostalnosti. Navikavaju se da veruju autoritetima i veoma mali broj njih dopušta sebi da posumnja u reči nastavnika. Prva nastavna tema kojom se bave učenici sedmog razreda, jesu realni brojevi. Pri tome skupu racionalnih brojeva treba pažljivo pridružiti disjunktan skup iracionalnih brojeva. Kako sama reč *iracionalan* vodi poreklo iz latinskog jezika, i znači nelogičan, nerazuman, takvi brojevi učenicima, posebno sa slabijim postignućima, zadaju poteškoće pri usvajanju. Zbog toga, potrebno je počev od skupa prirodnih brojeva, obnavljati i nadograđivati znanje, tako da svi učenici usvoje znanja o iracionalnim, a zatim i realnim brojevima.

Za početak učenici mogu biti podeljeni u četiri homogene grupe, pri čemu bi idealno bilo da budu 4 učenika u svakoj od grupa. Raspored sedenja grupa, može biti sledeći:

II	**I**
III	**IV**

Prvo svi učenici dobijaju listiće na kojima se nalazi isti skup brojeva, ali zadatak za grupe se razlikuje:

- Prva grupa ima zadatak da iz datog skupa izdvoji podskup koji čine prirodni brojevi $\mathbb{N}$,
- Druga grupa ima zadatak da iz datog skupa izdvoji podskup koji čine celi brojevi $\mathbb{Z}$,
- Treća grupa ima zadatak da iz datog skupa izdvoji podskup koji čine racionalni brojevi $\mathbb{Q}$,
- Četvrta grupa ima zadatak da iz datog skupa izdvoji brojeve koji *NISU* racionalni.

Pri tome, četvrta grupa dobija malo uputstvo i zanimljivosti o brojevima koje izdvaja iz skupa, o čemu će upućivati i učenike ostalih grupa kada postanu heterogene prilikom sledećih aktivnosti. Uputstvo za njih je sledeće:

Setite se prvo skupa racionalnih brojeva koji se mogu zapisati u obliku razlomaka, a neretko se srećemo i sa decimalnim zapisima razlomaka koji mogu biti ***konačni ili periodični.*** *Iako se za skup racionalnih brojeva kaže da je gust, s obzirom da između svaka dva opet imamo racionalnih brojeva, ipak postoje mnogi primeri vama poznatih brojeva koji ukazuju na mogućnost proširenja skupa racionalnih brojeva. To su brojevi kojima odgovaraju* ***beskonačni neperiodični*** *decimalni zapisi, a skup takvih brojeva nazivamo* ***iracionalni skup*** *i označavamo ga sa I. Jedan od najpoznatijih iracionalnih brojeva je* $\pi = 3{,}14159265\ldots$*, a broj njegovih izračunatih decimala dostiže više desetina miliona. Takođe, kvadratni koreni svih prirodnih brojeva koji nisu potpuni kvadrati kaže se da su iracionalni brojevi. Još jedna bitna stvar je da unija iracionalnih i racionalnih brojeva čini skup realnih* *brojeva koji označavamo sa $\mathbb{R}$, pri čemu sada zaista **svakoj** tački brojevne prave odgovara tačno jedan realan broj. Ne brinite ako vas nešto u ovoj priči zbunjuje, jer uskoro ćete saznati kakve muke su ovi brojevi zadavali Pitagori i Pitagorejcima davnog VI veka p.n.e.*

Skup koji se nalazi na listićima svake grupe je sledeći:

$$A = \left\{\frac{9}{7},\ -555,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{8},\ 1{,}333\ldots,\ \pi,\ \frac{355}{10},\ -\frac{5}{1},\ \sqrt{7},\quad 1{,}235235235235\ldots, 8,\ \sqrt{36},\ -\frac{12}{3}, 10,\ -\sqrt{49},\ \frac{4}{9},\ 13,\ 1{,}3,\ 3^2,\ 1{,}25478\ldots, 0{,}0005,\ 1{,}111,\ 21,\ \right\}$$

A odgovori koji se očekuju od svake grupe su:

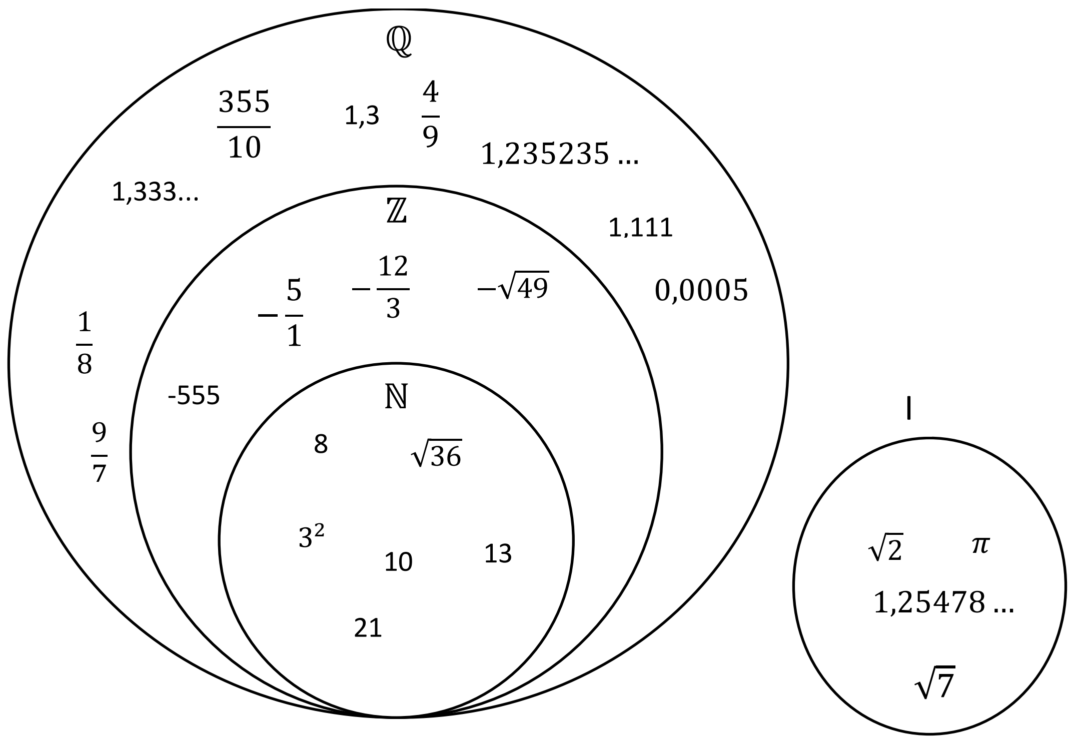
- ✓ Prva grupa: $\mathbb{N} = \left\{8, \sqrt{36}, 10, 13, 3^2, 21\right\}$
- ✓ Druga grupa: $\mathbb{Z} = \left\{8, -555, -\frac{5}{1}, \sqrt{36}, -\frac{12}{3}, -\sqrt{49}, 10, 13, 3^2, 21\right\}$
- ✓ Treća grupa: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{9}{7},\ 8,\ -555,\ \frac{1}{8},\ 1{,}333\ldots,\ \frac{355}{10},\ -\frac{5}{1},\ \sqrt{36},\ -\frac{12}{3},\ 1{,}3,\ -\sqrt{49}, \frac{4}{9}, 10, 13, 3^2,\ 0{,}0005,\ 1{,}111,\ 21,\ 1{,}235235235\ldots\right\}$
- ✓ Četvrta grupa: $I = \left\{\sqrt{2},\ \pi,\ \sqrt{7},\ 1{,}25478\ldots\right\}$

Nastavnik ima uvid u radove učenika, i može im u svakom momentu pružiti pomoć ili postaviti pitanje kojim će ih navesti da razmisle o eventualnim greškama koje prave.

Nakon toga, dva učenika koja su bliže prvoj grupi okreću se ka njima, upoređuju i diskutuju o skupovima do kojih su došli, a dva preostala učenika druge grupe okreću se ka trećoj grupi i upoređuju sa njima rezultate do kojih su došli. Za sada, učenici spomenutih grupa kroz manje od 10 minuta obnavljaju prethodno gradivo o do tada poznatim skupovima brojeva. Isto tako, dva učenika treće grupe mogu se okrenuti ka četvrtoj grupi ukratko se upoznati sa pričom o novom skupu iracionalnih brojeva. Pri tome učenici jedni druge slušaju, zajedno nadograđuju svoje znanje i usvajaju nove argumente. To može trajati samo par minuta.

Zatim, formiraju se četiri heterogene grupe koje sadrže po jednog učenika svake od prethodno navedenih grupa, odnosno u svakoj od grupa nalaze se učenici potpuno različitih znanja i veština. Sada je zadatak isti za sve. Venovim dijagramima treba predstaviti skupove do kojih su grupe dolazile i uneti pri tome sve elemente skupa A tamo gde im je mesto. Nastavnik prati rad novoformiranih grupa utičući na to da svi učenici budu uključeni u proces zaključivanja, da diskutuju i budu ravnopravni članovi koji unose u Venove dijagrame elemente koji pripadaju skupu kojim su se prethodno bavili.

Ono što se od grupa očekuje kao krajnji ishod, jeste:



Kao završnu aktivnost učenici imaju da odrede tačnost sledećih iskaza:

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \cup I = I$
- $\mathbb{Q} \cap I = \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$

O tačnosti iskaza učenici će prodiskutovati, navodeći primere i kontraprimere sa svojih crteža. Slika Venovih dijagrama do koje su samostalno došli ostaće upamćena, pre nego ona koju nastavnik nacrta sam na tabli. Možda neće sve grupe samostalno doći do tačnih rešenja i ispravno popuniti grafik, ali kroz razgovor sa nastavnikom i međusobno, ukloniće eventualne greške. Kasnije se može više posvetiti pažnja obeležavanju brojeva na realnoj brojevnoj pravoj, kao i samim dokazima da određeni brojevi nisu racionalni pretpostavljajući suprotno, pa dolazeći do kontradikcije, što vrlo verovatno neće okupirati pažnju učenika sa slabijim ocenama od 4 ili 5, ali će makar umeti da prepoznaju i razlikuju iracionalne brojeve od racionalnih.

Zaključak

Zaključivanje i argumentovanje trebali bi biti sastavni deo nastave matematike. Kada su učenici u stanju da uz pomoć nastavnikovih smernica povezuju novo gradivo sa prethodnim, odnosno da razvijaju unutarpredmetne kompetencije, znatno lakše će usvajati nova znanja i pamtiti brojne informacije. Dok u kabinetima vlada pozitivna atmosfera, gde i učenici i nastavnici postavljaju i odgovaraju na pitanja poput: *„Da li je ova tvrdnja tačna? i „Zašto tako mislite?*, proces učenja će biti efektniji. Na taj način, učenici razvijaju kroz matematičke sadržaje, moć zaključivanja i veštinu argumentovanja. Uloga nastavnika pri tome, jeste odabir dobrih pitanja i zadataka, koji će od učenika zahtevati visok nivo samostalnosti, truda da shvate nešto i podstaći ih da postavljaju pitanja. Ipak, nisu svi učenici ljubitelji matematike i ne zanima ih zašto je nešto istinito ili nije, nego se prosto oslanjaju na tvrdnje koje iznose autoriteti, odnosno u ovom slučaju nastavnici. Upravo zbog tih učenika proces odabira primera koji će se naći na časovima, nije jednostavan. Pored toga što je zadužen za osmišljavanje časova koji zadovoljavaju potrebe svih učenika za znanjem, manje i više zainteresovanih, nastavnik treba ostati detaljan kada su u pitanju postupci rešenja raznovrsnih matematičkih problema, koje učenici često pamte kao šablone.

Istraživanje koje je sprovedeno, pokazuje da učenici u velikoj meri izbegavaju obrazložiti svoje odgovore na tačno/netačno pitanja, čak i kada su doneli ispravne zaključke. Najlošiji rezultat postignut je upravo u pitanju koje je samo zahtevano da navedu u kom slučaju data tvrdnja važi, a u kom ne, dok su se učenici najbolje snašli odgovarajući na kratko pitanje o tačnosti iskaza, koje nije zahtvalo obrazloženje odgovora. Usmenim odgovorima na ista pitanja, uz podršku nastavnika, rezultati bi verovatno bili bolji. Publikovana istraživanja takođe svedoče o značaju tačno/netačno pitanja kada je u pitanju razvoj veštine argumentacije, zbog čega bi se u većoj meri trebala nalaziti u udžbenicima i radnim sveskama, ali i biti zastupljenija na samim časovima.

Od učenika se može zahtevati i da prepričaju ili preformulišu pitanje na koje trebaju odgovoriti, jer se neretko ispostavi da nisu razumeli formulaciju. Intuicija učenika se znatno razlikuje, ali prilikom argumentovanja dolazi se do toga da i učenici i nastavnik budu usresređeni na iste stvari, što je vrlo bitno. Postavljaju se konkretna pitanja i nastavnik ne posvećuje pažnju stvarima koje misli da izazivaju poteškoće u razumevanju i zaključivanju, nego tačno onim problemima za koje se učenici zainteresuju, odnosno odreaguju postavljajući pitanja.

Problem nedostatka veštine argumentovanja svakako postoji, ali uz dodatni trud od strane nastavnika, moguće ga je u velikoj meri otkloniti. Inspirisani napretkom koji pokazuju njihovi učenici, imaće osećaja i sluha za odabir dobrih tačno/netačno pitanja koja bude radoznalost, želju za novim saznanjima i podstiču na razvoj veštine argumentovanja kroz nastavu matematike.

Literatura

[1] Pikover, K. A., (2007). *Strast za matematikom: brojevi, zagonetke, ludilo, religija I potraga za stvarnošću,* Copyright 2007 NNK International, Beograd 2007.

[2] Došen, K., (2013), Osnovna logika, Aron Swartz Beograd

[3] Ristojević, R., (1981), Veliki matematičari, Nolit Beograd

[4] Despotović, R., Tošić, R., Šešelja, B., (2018), Matematika za I razred srednje škole, Zavod za udžbenike Beograd, 21. izdanje

[5] Billstein, R., Libeskind, S., Lott, J. W., Boschmans, B., (2016). A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers, Pearson Education, 12th edition

[6] https://www.classmarker.com/learn/question-types/true-false-questions/ (09.1.2021.)

[7] https://secondavenuelearning.com/true-false-questions/ (09.1.2020.)

[8] https://www.teachingchannel.com/blog/argumentation-in-mathematics (15.12.2020.)

[9] Ramsey, C., Langrall, C. W. (March 2016). Promoting Mathematical Argumentation: Teaching Children Mathematics. Vol. 22, pp. 412-419.

[10] Molina, M., Castro, E. and Mason, J. (2008). *Elementary school students´ approaches to solving true/false number sentences.* PNA 2(2), 75-86.

[11] Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., Koehler Zeringue, J., (2005). *Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking.* ZDM 2005 Vol. 37 (1), pp. 53-59.

[12] Franke, M. L., Webb, N. M, Chan, A. G., Ing, M., Freund, D., Battey, D., *Teacher Questioning to Elicit Students' Mathematical Thinking in Elementary School Classrooms*, DOI: 10.1177/0022487109339906 Journal of Teacher Education 2009 60: 380

[13] Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., (2002) *Proving or Refuting Arithmetic Claims: The Case of Elementary School Teachers*.

[14] *https://pisa2021-maths.oecd.org/#Examples* (15.11.2020.)

[15] Popović, B., Vulović, N., Anokić, P., Kandić, M., (2015). *Maša I Raša. Matematika 2: Radna sveska za drugi razred osnovne škole*, Treće izdanje „Klett".

[16] Popović, B., Vulović, N., Anokić, P., Kandić, M., (2015). Maša i Raša. Matematika 3: Radna sveska za treći razred osnovne škole, Drugo izdanje „Klett", 2015.

[17] Ikodinović, N., Dimitrijević, S., (2018). Matematika 5: Udžbenik za peti razred osnovne škole, Prvo izdanje „Klett".

[18] Popović, B., Stanić, M., Milojević, S., Vulović, N., (2019). Matematika 5: Zbirka zadataka za peti razred osnovne škole, Drugo izdanje „Klett".

[19] Milojević, S., Vulović, N., (2013). Matematika 6, Zbirka zadataka sa rešenjima, Peto izdanje Beograd: "Klett" d.o.o, Beograd.

[20] Popović, B., Stanić, M., Milojević S., Vulović, N., (2020). Matematika 7, Zbirka zadataka sa rešenjima za sedmi razred osnovne škole, Prvo izdanje Beograd: “Klett” d.o.o, Beograd.

[21] Popović, B., Milojević, S., Vulović, N., (2016). Matematika 8, Zbirka zadataka sa rešenjima, Osmo izdanje Beograd: “Klett” d.o.o Beograd, 2016.

Prilozi

Primeri testova za pilot istraživanje:

Test 1

1. Da li je tačna nejednakost $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$?

☐DA ☐NE

Obrazloži zašto si izabrao/la dati odgovor?

2. Da li je tačna jednakost $\mathbf{0,0011 = 0,1 \cdot 0,011}$?

☐DA ☐NE

Koliko si siguran/na u svoj odgovor (označi odgovor)?

☐ Potpuno sam siguran/na ☐ Delimično sam siguran/na ☐ Nisam siguran/na

3. Da li je tačan iskaz?

Broj $\sqrt{19}$ nalazi se između brojeva 2,1 i 3,9.

☐DA ☐NE

Obrazloži zašto si izabrao/la dati odgovor?

4. Da li je tačan iskaz?

Podeliti neki broj sa 0,5 je isto što udvostručiti ga.

☐DA ☐NE

Koliko si siguran/na u svoj odgovor (označi odgovor)?

☐ Potpuno sam siguran/na ☐ Delimično sam siguran/na ☐ Nisam siguran/na

5. Da li su tačni sledeći iskazi?

Rešenje jednačine $5 - (x + 2) = 5$ je -2.	☐ DA ☐ NE
Broj 8^5 je 8 puta veći od broja 8^4.	☐ DA ☐ NE
Proizvod 99 negativnih i jednog pozitivnog broja je pozitivan.	☐ DA ☐ NE

6. Iskaz

Ako dodaš isti broj brojiocu i imeniocu, vrednost razlomka se povećava.

može u nekim slučajevima biti tačan, a u nekim netačan.

Za koje razlomke je iskaz tačan?

Za koje razlomke je iskaz netačan?

Koji si razred? ______

Koju ocenu si imao/la na kraju prethodne školske godine iz matematike? ______

Test 2

1. Da li je tačna nejednakost $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$?

☐DA ☐NE

Koliko si siguran/na u svoj odgovor (označi odgovor)?

☐ Potpuno sam siguran/na ☐ Delimično sam siguran/na ☐ Nisam siguran/na

2. Da li je tačna jednakost $\mathbf{0,0011 = 0,1 \cdot 0,011}$?

☐DA ☐NE

Obrazloži zašto si izabrao/la dati odgovor?

3. Da li je tačan iskaz?

Broj $\sqrt{19}$ nalazi se između brojeva 2,1 i 3,9.

☐DA ☐NE

Koliko si siguran/na u svoj odgovor (označi odgovor)?

☐ Potpuno sam siguran/na ☐ Delimično sam siguran/na ☐ Nisam siguran/na

4. Da li je tačan iskaz?

Podeliti neki broj sa 0,5 je isto što udvostručiti ga.

☐DA ☐NE

Obrazloži zašto si izabrao/la dati odgovor?

5. Da li su tačani sledeći iskazi?

Rešenje jednačine $5-(x+2)=5$ je -2.	☐ DA ☐ NE
Broj 8^5 je 8 puta veći od broja 8^4.	☐ DA ☐ NE
Proizvod 99 negativnih i jednog pozitivnog broja je pozitivan.	☐ DA ☐ NE

6. Iskaz

Ako dodaš isti broj brojiocu i imeniocu, vrednost razlomka se povećava.

može u nekim slučajevima biti tačan, a u nekim netačan.

Za koje razlomke je iskaz tačan?

Za koje razlomke je iskaz netačan?

Koji si razred? _____

Koju ocenu si imao/la na kraju prethodne školske godine iz matematike? _____

Biografija

Aleksandra Muratović je rođena 21. 10. 1995. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Svetozar Miletić“ u Titelu završava 2010. godine, kao odličan učenik. Zatim, takođe u Titelu, upisuje Srednju tehničku školu „Mileva Marić“, smer ekonomski tehničar, koju završava 2014. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje se na studije Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu, četvorogodišnji smer diplomirani profesor matematike. Nakon toga se 2018. godine upisuje na smer integrisanih studija, studijski program master profesor matematike Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Sredinom marta 2020. godine položila je poslednji ispit predviđen planom i programom i time stekla uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, mart 2021. *Muratović Aleksandra*

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Aleksandra Muratović
AU

Mentor: dr Zorana Lužanin
MN

Naslov rada: Razvoj veštine argumentacije u nastavi matematike kroz pitanja tačno/netačno tipa
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski i engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2021.
GO

Izdavac: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovica 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: 5/61/21/13/9/9/2
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Metodika matematike

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: pitanja tačno/netačno tipa, argumentacija, nastava matematike, osnovna škola, udžbenik za predmet matematike

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Tema ovog master rada je istraživanje uloge tačno/netačno tipa zadataka u razvoju veštine argumentacije kod učenika osnovne škole. U uvodnom delu rada prikazan je i sam tip tačno/netačno zadataka, nakon čega su u drugom delu navedeni i rezultati nekih publikovanih istraživanja na temu tačno/netačno tipa zadataka u oblasti matematike. Zatim se u trećem delu navode razni načini postavljanja tačno/netačno pitanja, analizira se učestalost zadataka dvostrukog izbora na završnom ispitu, kao i sadržaj udžbenika i zbirki zadataka za osnovnu školu. U četvrtom delu predstavljeni su rezultati istraživanja sprovedenog među učenicima VII, VIII razreda i srednjoškolcima, pri čemu je cilj bio proveriti koliko su učenici sigurni u svoje odgovore na tačno/netačno pitanja i kakve su veštine argumentovanja njihovih kratkih odgovora. U petom delu predstavljena je jedna mogućnost pridruživanja skupa iracionalnih brojeva već poznatom skupu racionalnih, koristeći između ostalog i pitanja tačno/netačno tipa.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veca: 16.12.2020.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Petar Đapić, vanredni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzotet u Novom Sadu
Mentor: dr Zorana Lužanin, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Goran Radojev, docent,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Aleksandra Muratović
AU

Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D.
MN

Title: Development of argumentation skills in teaching mathematics in primary school through true / false questions
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian and English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2021
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 5/61/21/13/9/9/2
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Teaching of mathematics
SD

Subject/Key words: true / false questions, argumentation, teaching mathematics, elementary school, classbook for the subject of mathematics
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The topic of Master's thesis is analizing that type how true/false type exercises contribute to the development of argumentation skills when dealing with primary school pupils. The introduction (of this thesis) presents a true/false exercise where as the second part consists of the results of some published research on true/false tasks in the field of maths. The third part is dedicated to various ways of assigning a true/false task, how common this type of exercise is in the final exam as well as the content in primary school textbooks. Results of research conducted among 7^{th} and 8^{th} year primary school pupils and secondary school, are represent in the fourth section of this thesis. The ain was to analize how certain pupils were in giving their answers to true/false questions and the role argumentation skills play in these type of exercises. The fifth section discusses with the possibility of joining a set of irrational numbers to an already known set of rational numbers, using, among other things, questions of the true/false type.
Accepted by the Scientific Board on: 16.12.2020.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Petar Đapić, Ph.D., Associate Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D., Full Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Goran Radojev, Ph.D., Assistant Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad