



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Procena ekonomskog kapitala za rizik kreditne koncentracije u ICAAP-u

Master rad

Student: Vuk Ognjanović

Mentor: prof. dr Dora Seleši

Novi Sad, 2020.

Sadržaj

1.	Uvod.....	6
1.1.	Tema rada	7
1.2.	Rezultati.....	8
1.3.	Struktura rada	9
2.	Ekonomski kontekst problema	11
2.1.	Rizici i kapital.....	11
2.2.	Bankarska regulativa	14
2.3.	ICAAP	18
2.4.	Kreditni rizik.....	18
2.5.	Rizik kreditne koncentracije.....	21
2.6.	Procena ekonomskog kapitala za rizik kreditne koncentracije.....	22
3.	Modeliranje kreditnog rizika.....	24
3.1.	Modeliranje parametara rizika pojedinačnih dužnika	26
3.1.1.	Modeliranje verovatnoće difolta	26
3.1.2.	Modeliranje LGD	28
3.1.3.	Modeliranje EAD	30
3.2.	Modeliranje korelacija između difolta dužnika	31
3.3.	Modeliranje raspodele verovatnoće gubitaka na kreditnom portfoliju.....	33
3.3.1.	Jednofaktorski model difolta dužnika	33
3.3.2.	Ukupan gubitak na kreditnom portfoliju pri jednofaktorskom modelu difolta ..	35
3.3.3.	Bazel II za kreditni rizik: pristup zasnovan na internim modelima	37
4.	Modeliranje rizika kreditne koncentracije.....	40
4.1.	Indeksi koncentracije	41
4.2.	Granularity adjustment	42
4.2.1.	Motivacija.....	43
4.2.2.	Opšti slučaj.....	44
4.2.3.	IRB model	46
4.3.	Neka regulatorna rešenja	48
4.3.1.	Velika Britanija	48
4.3.2.	Španija.....	49
4.3.3.	Švedska.....	50
4.3.4.	Island	50

5.	Analiza modela rizika kreditne koncentracije	52
5.1.	Hipotetička portfolija.....	52
5.1.1.	Homogen portfolio	53
5.1.2.	Portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta	53
5.1.3.	Portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta.....	55
5.1.4.	Portfolio sa korelacijom između izloženosti i verovatnoća difolta	57
5.2.	Postavka Monte Karlo simulacija.....	58
5.2.1.	Model	58
5.2.2.	Metod uzorkovanja.....	58
5.2.3.	Analiza varijanse	60
5.3.	Rezultati simulacija	64
5.3.1.	Homogen portfolio	65
5.3.2.	Portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta	68
5.3.3.	Portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta.....	72
5.3.4.	Portfolio sa korelacijom između izloženosti i verovatnoća difolta	74
5.4.	Analiza.....	79
6.	Zaključak.....	82
7.	Reference.....	84
8.	Prilog: programski kod korišćen za analizu	86
9.	Kratka biografija autora	101

Popis tabela

Tabela 1: Bilans stanja Industrijske i trgovinske banke Kine na 31.12.2019.	11
Tabela 2: Prinos na aktivnu i kapital Industrijske i trgovinske banke Kine u 2019.....	12
Tabela 3: Faktori za obračun kapitalnog zahteva za rizik koncentracije – Velika Britanija....	49
Tabela 4: Faktori za obračun kapitalnog zahteva za rizik koncentracije – Španija	49
Tabela 5: Udeo najvećih izloženosti u ukupnom portfoliju za različite raspodele	55
Tabela 6: Očekivanje logit-normalne raspodele.....	56
Tabela 7: Hipotetička portfolija	57
Tabela 8: Odnosi varijabli koji su predmet analize.....	65
Tabela 9: MC GA / EAD u odnosu na HHI za homogen portfolio.....	68
Tabela 10: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB za homogen portfolio	68
Tabela 11: MC GA / EAD u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta	69
Tabela 12: MC GA / EAD u odnosu na HHI i PD – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta	69
Tabela 13: MC GA / IRB u odnosu na HHI i PD – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta	70
Tabela 14: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta	71
Tabela 15: MC GA / EAD u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta.....	72
Tabela 16: MC GA / EAD u odnosu na HHI i PD – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta.....	73
Tabela 17: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta.....	74
Tabela 18: MC GA / EAD u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD	76
Tabela 19: MC GA / IRB u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD	77
Tabela 20: MC GA / EAD u odnosu na IRB GA / EAD – sa korelacijom PD i EAD.....	78
Tabela 21: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – sa korelacijom PD i EAD.....	79

Popis grafikona

Grafikon 1: Gustina verovatnoće kreditnih gubitaka (ilustracija).....	14
Grafikon 2: Gustina verovatnoće za logit-normalnu raspodelu	56
Grafikon 3: Varijansa ocena dobijenih primenom običnog Monte Karlo metoda i kvazi Monte Karlo metoda sa preferencijalnim uzorkovanjem	61
Grafikon 4: Varijansa ocena pri različitim vrednostima pomeraja uzorkovanja pri 10.000 simulacija na primeru homogenog portfolija	62
Grafikon 5: Varijansa ocena pri različitim vrednostima pomeraja uzorkovanja pri 10.000 simulacija na primeru nehomogenog portfolija	63
Grafikon 6: Varijansa ocena pri različitim vrednostima pomeraja uzorkovanja pri 100.000 simulacija na primeru nehomogenog portfolija	64
Grafikon 7: MC GA / EAD za homogen portfolio.....	66
Grafikon 8: MC GA / IRB kapitalni zahtev za homogen portfolio.....	67
Grafikon 9: MC GA / IRB GA za homogen portfolio	67
Grafikon 10: MC GA / EAD u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta	69
Grafikon 11: MC GA / IRB u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta	70
Grafikon 12: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta.....	71
Grafikon 13: MC GA / EAD u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta.....	72
Grafikon 14: MC GA / IRB u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta.....	73
Grafikon 15: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta	74
Grafikon 16: MC GA / EAD u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD.....	75
Grafikon 17: MC GA / EAD u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD.....	76
Grafikon 18: MC GA / IRB u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD	77
Grafikon 19: MC EAD / GA u odnosu na IRB GA / EAD – sa korelacijom PD i EAD.....	78
Grafikon 20: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – sa korelacijom PD i EAD	79

Popis skraćenica

Skraćenica	Srpski	Engleski
EAD	Izloženost u trenutku difolta	Exposure at default
GA	Korekcija za odsustvo granularnosti	Granularity adjustment
HHI	Herfindahl-Hirschmanov indeks	Herfindahl-Hirschman index
ICAAP	Proces interne procene adekvatnosti kapitala – propisan Subom 2 Bazela II	Internal capital adequacy assessment process
IRB	(Pristup) zasnovan na internim modelima – model obračuna ekonomskog kapitala propisan Stubom 1 Bazela II	Internal ratings-based (approach)
LGD	Gubitak u slučaju difolta	Loss given default
MC	Monte Karlo	Monte Carlo
P1	Stub 1 (Bazela II)	Pillar 1 (of Basel II)
P2	Stub 2 (Bazela II)	Pillar 2 (of Basel II)
PD	Verovatnoća difolta	Probability of default
RWA	Rizikom ponderisana aktiva	Risk-weighted assets

1. Uvod

1.1. Tema rada

U skladu sa Bazel II standardom, banke su u obavezi da sprovedu internu procenu adekvatnosti kapitala (*internal capital adequacy assessment process – ICAAP*) i da u okviru ovog procesa ocenjuju tzv. ekonomski kapital, odnosno maksimalan gubitak sa određenim, visokim nivoom poverenja (npr. 99.9%) za sve rizike kojima su izložene. Tipično, materijalno najznačajniji rizik je kreditni rizik, a u vezi sa kreditnim rizikom od posebnog interesa je rizik kreditne koncentracije.

Rizik kreditne koncentracije potiče od činjenice da kreditni portfolio banaka tipično nije savršeno granularan, već može postojati koncentracija značajnog dela portfolija u manjem broju dužnika, u određenim privrednim sektorima, geografskim oblastima i sl. Ovaj fenomen povećava rep raspodele kreditnih gubitaka i samim tim ekonomski kapital.

Međutim, za razliku od kreditnog rizika, za koji Bazel II standard u tzv. Stubu 1 definiše model i jednostavnu analitičku formulu za ocenu željenog percentila raspodele, ali pod pretpostavkom odsustva koncentracije, standardom nije definisan nikakav model za ocenu raspodele gubitaka u prisustvu koncentracije. Standard samo u tzv. Stubu 2 definiše zahtev da banke procene uticaj rizika kreditne koncentracije na ekonomski kapital.

Najdirektniji način ocene jeste primena Monte Karlo metoda za ocenu raspodele verovatnoće kreditnih gubitaka na realnom portfoliju, koji samim tim uključuje rizik koncentracije. Međutim, nemaju sve banke potrebno znanje, modele, podatke niti softversku infrastrukturu da sprovedu ovu vrstu obračuna.

S obzirom da se inače u praksi praćenja i izveštavanja o rizicima kao metrika za praćenje kreditne koncentracije tipično koristi Herfindahl-Hirschmanov ili slični indeksi, neke banke koriste indekse koncentracije za ocenu dodatnih zahteva za kapitalom. Ovakve modele definišu i regulatori nekih zemalja, bilo kao obavezni ili referentni pristup u Stubu 2. Međutim, teoretska osnova veze između indeksa koncentracije i kapitalnih zahteva nije apriori jasna, niti je postupak ocene parametara ovakvih modela transparentan, pa je bez odgovarajućeg teoretskog ili statističkog zasnivanja adekvatnost ovako dobijenih ocena upitna.

S druge strane, u konsultativnim dokumentima tokom rada na Bazelu II bio je predložen određen analitički pristup i za ocenu kapitalnog zahteva za rizik individualne kreditne koncentracije, ali on nije uključen u konačan tekst standarda. Gordy i Lütkebohmert, članovi radne grupe za rizik koncentracije u okviru Bazela II, kao i drugi autori, kasnije su objavili više radova u vezi sa ovim modelom.

Tema ovog rada je poređenje nekih od ovih analitičkih pristupa oceni ekonomskog kapitala za rizik kreditne koncentracije sa ocenama dobijenim Monte Karlo metodom na određenim hipotetičkim kreditnim portfolijima. Cilj je da se, spram ocena dobijenih Monte Karlo metodom, koje ćemo smatrati referentnim, oceni adekvatnost i nepristrasnost predloženih analitičko-statističkih formula.

Fokus rada je isključivo na rizik individualne kreditne koncentracije. Nećemo se baviti drugim oblicima kreditne koncentracije, poput koncentracije u pogledu sektora dužnika, geografske oblasti, vrsta proizvoda, kolaterala i sl. Takođe, fokus će biti na portfolija izloženosti prema privrednim društvima sa između 100 i 1000 dužnika, što je tipičan broj dužnika takvog portfolija za banke u Srbiji, a verovatno i druge manje banke drugde u svetu, koje nemaju nužno složene ICAAP modele niti odgovarajuću procesnu i softversku infrastrukturu.

Dakle, za određeni skup hipotetičkih kreditnih portfolija, koja će biti definisana tako da budu reprezentativna za realna portfolija banaka sa različitim nivoima kreditne koncentracije, sprovešćemo:

1. Simulaciju raspodele kreditnih gubitaka primenom metoda Monte Karlo i ocenu ekonomskog kapitala za rizik kreditne koncentracije na bazi ove raspodele;
2. Ocenu ekonomskog kapitala za rizik kreditne koncentracije primenom analitičko-statističkih formula iz literature i lokalne regulative pojedinih zemalja.

U osnovi Monte Karlo simulacije biće isti model koji je korišćen u Stubu 1 Bazela II za ocenu raspodele verovatnoće gubitaka po osnovu kreditnog rizika, ali bez pretpostavke o savršenoj granularnosti portfolija. Analizom rezultata ćemo oceniti adekvatnost i pouzdanost dostupnih analitičko-statističkih formula.

1.2. Rezultati

Pokazuje se da, iako iz same definicije indeksa ova veza nije očigledna, banke koje nemaju složene ICAAP modele niti infrastrukturu za ocenu raspodele kreditnih gubitaka i ekonomskog

kapitala, za ocenu kapitalnih zahteva za rizik individualne koncentracije mogu koristiti Herfindahl-Hirschmanov indeks (HHI), u formi:

$$K_{P2 \text{ add-on}} = c \cdot HHI \cdot EAD.$$

Na primerima analiziranih portfolija, koeficijent c je u proseku oko 0.85. HHI se može koristiti i u odnosu prema kapitalnom zahtevu iz Stuba 1, u formi:

$$K_{P2 \text{ add-on}} = c \cdot HHI \cdot K_{P1}.$$

U ovom slučaju, na primerima koje smo ovde analizirali, koeficijent c je u proseku oko 15. U oba slučaja koeficijenti su znatno niži nego vrednosti koeficijenata koje u sličnim formulama propisuju pojedini regulatori. Preciznost ovakvog modela opada sa porastom varijanse PD-jeva, kao i sa porastom korelacije između PD-jeva i EAD-a. Tačnost ocena se može delimično popraviti, na primer, uključivanjem prosečnog PD-ja u formulu.

Što se tiče Gordy-Lütkebohmert modela, on je, očekivano, bolji prediktor nego HHI. Međutim, analiza pokazuje da, na posmatranim primerima portfolija sa između 100 i 1000 dužnika, i ovaj model precenjuje kapitalni zahtev ocenjen Monte Karlo metodom za čak 30-40%.

S obzirom da je analiza sprovedena na bazi konstruisanih portfolija, koja nisu nužno dovoljno reprezentativna za stvarna portfolija banaka u ovom segmentu, kao i da je i pored analize senzitivnosti na različite faktore strukture portfolija i dalje apstrahovan niz značajnih faktora (ocena i stohastička priroda LGD-ja, korelacija između PD-ja i LGD-ja, ocena i stohastička priroda korelacija između difolta, drugi oblici koncentracije), dobijeni rezultati se moraju uzeti sa rezervom. Međutim, sprovedena analiza se lako može reprodukovati na drugim primerima portfolija. Takođe, primenjeni model se može proširiti tako da obuhvati dodatne faktore. Na taj način se može testirati uticaj dodatnih faktora kao i stabilnost ovde dobijenih ocena.

1.3. Struktura rada

Struktura rada je sledeća:

1. U narednoj glavi biće predstavljen ekonomski kontekst problema: odnos rizika i kapitala, motivi i izvori bankarske regulative u pogledu kapitala, ICAAP, sa posebnim osvrtom na kreditni rizik i rizik kreditne koncentracije;

2. U glavi 3 biće najpre kratko predstavljene metode za modeliranje parametara kreditnog rizika na nivou pojedinačnih dužnika, koji su input za modele kreditnog rizika na nivou kreditnog portfolija. Zatim će biti predstavljen tzv. IRB model Bazela II za ocenu potencijalnog kreditnog gubitka na nivou kreditnog portfolija;
3. Glava 4 posvećena je modelima rizika individualne kreditne koncentracije. Biće kratko predstavljene neki indeksi koncentracije, zatim će biti predstavljen Gordy-Lütkebohmert model za ocenu ekonomskog kapitala za rizik individualne kreditne koncentracije, kao i neka regulatorna rešenja;
4. Glava 5 posvećena je rezultatima analiza predstavljenih modela. Najpre će biti opisano kako su definisana hipotetička portfolija nad kojima će biti sprovedena analiza i poređenje modela. Zatim će biti opisana postavka Monte Karlo simulacija. Konačno, biće predstavljeni rezultati simulacija i obračuna, i sprovedena njihova analiza. Zaključci će biti dati u poslednjoj glavi.

2. Ekonomski kontekst problema

2.1. Rizici i kapital

Banke su finansijski intermedijeri – posrednici između pojedinaca i organizacija koji u datom trenutku imaju na raspolaganju više novca nego što im je potrebno za potrošnju, poslovanje i druge oblike investiranja, i pojedinaca i organizacija koji u istom trenutku na raspolaganju imaju manje novca nego što im je potrebno. Banke ovu ulogu ostvaruju tako što primaju depozite od klijenata i istovremeno daju kredite drugim klijentima.¹

Tabela 1: Bilans stanja Industrijske i trgovinske banke Kine na 31.12.2019.²

	Mlrd. USD	%
Gotovina i sredstva kod centralnih banaka	476	11.0%
Potraživanja od banaka i drugih finansijskih institucija	150	3.5%
Kredit i potraživanja od klijenata	2,345	54.2%
Ulaganja u hartije od vrednosti	1,098	25.4%
Ostala aktiva	255	5.9%
Ukupna aktiva	4,324	100.0%
Obaveze prema klijentima	3,300	76.3%
Obaveze prema bankama i drugim finansijskim institucijama	326	7.5%
Ostale obaveze	312	7.2%
Ukupne obaveze	3,937	91.1%
Kapital	387	8.9%
Ukupna pasiva	4,324	100.0%

Naravno, dugovi u nekom trenutku moraju da se vrate – i to je upravo jedan od ključnih aspekata uloge banaka: da brinu o naplati datih kredita, a da u svakom trenutku obezbede dostupnost primljenih depozita. U ovom poslu banke su izložene različitim finansijskim rizicima, uključujući:

- rizik likvidnosti – rizik da banka neće moći u svakom trenutku da podmiri zahteve deponenata i drugih kreditora za isplatom,

¹ Ovo je, naravno, pojednostavljeno razumevanje uloge i poslovnog modela banaka.

² Najveća banka na svetu na 31.12.2019. po veličini aktive (ICBC, 2020) (Ali, 2020).

- kreditni rizik – rizik da banka neće moći da naplati date kredite u punom iznosu prema ugovorenom planu otplate,
- tržišne rizike – rizik promene vrednosti finansijske imovine i obaveza usled kretanja na tržištu (uključujući cenovni rizik po osnovu dužničkih, cenovni rizik po osnovu vlasničkih finansijskih instrumenata, devizni i robni rizik),
- operativne rizike – rizik finansijskih gubitaka po osnovu propusta ljudi, procesa i sistema.

Među rizicima kojima su banke izložene, kreditni rizik je tipično najznačajniji – kako u pogledu ukupnog iznosa izloženosti tako i u pogledu potencijalnog iznosa gubitka (EBA, 2020).³

Razlika između ukupne vrednosti imovine i obaveza preduzeća ili banke zove se kapital.⁴ Što je iznos kapitala veći, ceteri paribus, kreditori su zaštićeniji od rizika pada vrednosti imovine. Kapital, dakle, predstavlja zaštitu od rizika za kreditore. S druge strane, što je iznos kapitala manji, pri datom prinosu na aktivu, vlasnici ostvaruju viši prinos na kapital – odnosno, svoj vlasnički udeo u preduzeću ili banci.⁵ Kreditori, dakle, imaju interes da iznos kapitala ne bude manji od nekog nivoa koji garantuje sigurnost otplate njihovih kredita. Vlasnici pak mogu imati interes da kapital bude manji da bi ostvarivali viši prinos na kapital. Banke tipično imaju znatno niži prinos na aktivu nego druge industrije, pa stoga postoji snažan podsticaj za smanjenje nivoa kapitala, odnosno maksimalan rast aktive pri postojećem nivou kapitala, kako bi prinos na kapital koji banka ostvaruje bio uporediv sa prinosima koji ostvaruju druge industrije.

Tabela 2: Prinos na aktivu i kapital Industrijske i trgovinske banke Kine u 2019.

	Mrld. USD
Neto dobit (u toku perioda)	45
Ukupna aktiva (na kraju perioda)	4,324
Kapital (na kraju perioda)	387
Prinos na aktivu (prosečno u toku perioda)	1.1%
Prinos na kapital (prosečno u toku perioda)	13.1%

³ Kapitalni zahtevi za kreditni rizik čine 80% ukupnog kapitalnog zahteva za pokriće rizika u Stubu 1 Bazela II (EBA, 2020, p. 32).

⁴ Ovo je različito od kolokvijalnog značenja reči kapital.

⁵ Pod uslovom da je cena duga, odnosno troškovi kamata, manja od operativnog dobitka.

U slučaju privrede, stepen zaduženosti, odnosno iznos kapitala kontrolišu banke i drugi kreditori – ukoliko je preduzeće prezaduženo, odnosno ima nedovoljan udeo kapitala spram rizika poslovanja, banke niti drugi kreditori neće biti spremni da mu odobre dodatno zaduživanje. Međutim, u slučaju banaka, kreditori su privreda i stanovništvo, koji nemaju isti stepen kontrole nad poslovanjem i zaduženošću samih banaka. Tako se banke mogu izložiti rizicima u meri koja bi mogla da ugrozi sigurnost depozita u njima.

S druge strane, ceo naš monetarni sistem je zasnovan na dugu – bankarskim depozitima, uključujući tekuće račune, koje u svakodnevnom životu i poslovanju tretiramo kao ekvivalentne gotovini, a koji zapravo predstavljaju samo obavezu banke da nam na zahtev, odnosno u skladu sa odredbama ugovora, isplati depozit ili njegov deo u gotovini ili obezbedi njegov prenos u drugu banku.⁶ Banka se, međutim, može naći u situaciji da nije u stanju da ispuní ovu obavezu. U situacijama idiosinkrazijskih ili sistemskih kriza, kada se pokazuje ova priroda našeg monetarnog sistema u vidu ograničenja isplate depozita ili njihovog gubitka, kao posledica realizacije rizika i gubitaka u poslovanju banaka, ceo finansijski sistem može ući ili dalje utonuti u krizu poverenja i likvidnosti, koja dalje prouzrokuje dodatne finansijske i ekonomske poremećaje i gubitke.

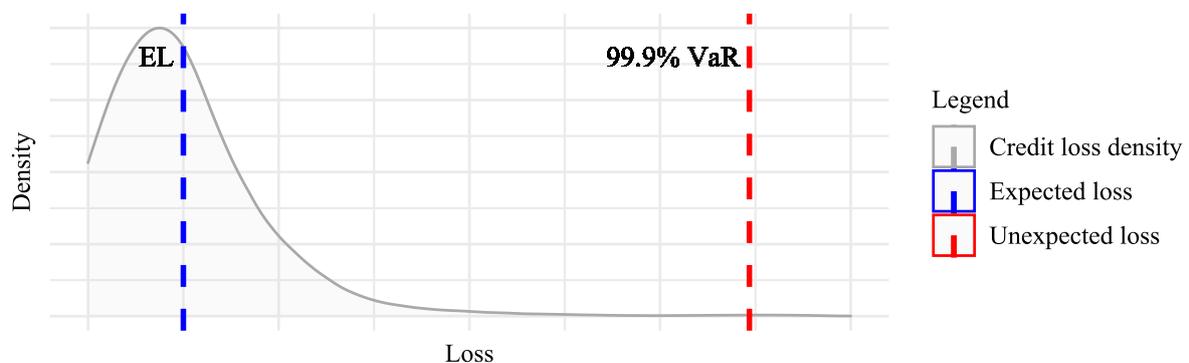
Stoga postoji ogroman interes finansijskog i ekonomskog sistema da banke odgovorno upravljaju rizicima i da u svakom trenutku imaju dovoljno kapitala koji će apsorbovati eventualne gubitke po osnovu rizika kojima je banka izložena u svom poslovanju, tako da deponenti i drugi kreditori banke ne budu oštećeni u slučaju da do njih dođe. Ovaj interes se ostvaruje kroz bankarsku regulativu i kontrolu banaka, koji postavljaju zahteve u pogledu upravljanja rizicima i minimalnog iznosa kapitala. Ulogu regulatora i supervizora tipično imaju centralne banke, ili posebne agencije sa ovim zadatkom, koje usko sarađuju sa centralnom bankom.

Radi preciznosti, ovde je potrebno napraviti razliku između nekoliko značenja i pojmova kapitala:

⁶ Zapravo, ni sama gotovina u današnjoj formi dekretnog novca (*fiat money*) ne predstavlja potpuno sigurno sredstvo plaćanja i rezervu vrednosti – što se pokazuje, na primer, u slučajevima ograničene konvertibilnosti u druge valute i hiperinflacija. Ali u hijerarhiji oblika novca gotovina je svakako iznad bankarskih depozita.

- Računovodstveni kapital je razlika između računovodstvene vrednosti imovine i obaveza;
- Regulatorni kapital predstavlja računovodstveni kapital uz određene korekcije – uvećanja (za stavke koje su prema računovodstvenim standardima klasifikovane kao obaveze, ali ih regulativa u pogledu minimalnog iznosa kapitala smatra podobnim sredstvom zaštite deponenata) i umanjenja (za elemente kapitala ili stavke aktive koje regulativa smatra nepodobnim);
- Regulatorni zahtev za kapitalom – minimalni iznos regulatornog kapitala koji banka mora imati prema određenim pravilima obračuna ovog iznosa, a u skladu sa svojim rizičnim profilom;
- Ekonomski kapital – određeni percentil iz procenjene raspodele verovatnoće gubitaka, odnosno minimalni iznos kapitala (računovodstvenog ili regulatornog) koji bi banka trebala imati tako da gubici budu apsorbovani do određenog, visokog nivoa poverenja, npr. 99.9%. Regulatorni i ekonomski kapital suštinski kvantifikuju istu stvar, ali iz različitih formalnih i procesnih okvira, i koristeći različite metode ocene, odnosno obračuna.

Grafikon 1: Gustina verovatnoće kreditnih gubitaka (ilustracija)



2.2. Bankarska regulativa

U odsustvu međunarodnih sporazuma, problem regulacije bankarskog poslovanja, uključujući minimalni iznos kapitala i upravljanje rizicima, svaka zemlja mora rešavati za sebe. Razlike u strogosti kapitalnih zahteva, međutim, dovode do toga da banke, naročito velike bankarske grupacije, mogu imati podsticaj da premeste svoje poslovanje (delimično ili u celini) iz zemalja u kojima su kapitalni zahtevi stroži u zemlje u kojima su kapitalni zahtevi manje strogi. Na kraju krajeva, banka je jedna velika računovodstvena evidencija ko kome koliko duguje i kada

treba da izmiri svoj dug – apstrahujući tehničke prepreke u pogledu komunikacije sa klijentima, platnog sistema i organizacije sistema, procesa i ljudi, ova evidencija se može voditi sa bilo kog mesta na svetu. To, dalje, može, paradoksalno, dovesti i do takmičenja između zemalja ko će pružiti manje stroge uslove poslovanja bankama – zemlje istovremeno imaju interes da uspostave strože uslove za poslovanje banaka, kako bi građani i privreda, njihovi deponenti, bili zaštićeni, i istovremeno mogu imati interes da ti uslovi budu blaži nego u drugim zemljama,⁷ kako bi privukli banke, odnosno njihovo poslovanje, iz drugih zemalja, koje će onda organizovati poslovanje, pružati usluge i plaćati porez u novoj zemlji.

S obzirom na neprekidno rastuću kompleksnost bankarskog poslovanja u prethodnih nekoliko decenija, postoji i problem znanja – regulatori širom sveta nemaju dovoljno znanja, informacija, niti kapaciteta da svaki za sebe uspostave svrsishodnu i sveobuhvatnu lokalnu regulativu.

Tako su centralne banke zemalja Grupe 10 (SAD, Kanada, Velika Britanija, Francuska, Nemačka, Italija, Holandija, Belgija, Švedska, Japan – kojima se nešto kasnije pridružila i Švajcarska) još 1974. osnovale Bazelski komitet za nadzor banaka (*Basel Committee for Banking Supervision – BCBS*) – forum za saradnju u pogledu bankarske regulative. Povod za osnivanje Komiteta bila je jedna od najčuvenijih propasti banaka – propasti nemačke Herstatt banke 1974. godine (BIS, 2014). Ovaj forum nema formalnu moć da usvaja i nameće bankarsku regulativu, već definiše standarde koji predstavljaju izraz najbolje prakse. Zemlje članice, kao i druge zemlje, zatim formalno usvajaju ove standarde, uz eventualna prilagođavanja.⁸

Komitet je 1988. doneo standard (BCBS, 1988) koji je danas poznat kao Bazel I. Bazel I je bio zasnovan na pojmu rizikom ponderisane aktive (*risk weighted assets – RWA*) i uspostavio je minimalni zahtev za kapitalom od 8% rizikom ponderisane aktive. Rizikom ponderisana aktiva

⁷ Ovaj problem je istaknut u samom uvodu Bazel II standarda: „The fundamental objective of the Committee’s work (...) has been to develop a framework that would further strengthen the soundness and stability of the international banking system while maintaining sufficient consistency that *capital adequacy regulation will not be a significant source of competitive inequality among internationally active banks*“ (BCBS, 2006, p. 2).

⁸ U Srbiji ove standarde formalno uvodi Narodna banka Srbije, u formi podzakonske regulative, uključujući:

- Odluka o adekvatnosti kapitala banke – implementacija Stuba 1 Bazela II,
- Odluka o upravljanju rizicima banke – implementacija Stuba 2 Bazela II,
- Odluka o objavljivanju podataka i informacija banke – implementacija Stuba 3 Bazela II.

je definisana kao ponderisana suma stavki bilansne aktive (npr. krediti) i vanbilansnih stavki (npr. potencijalni krediti, kao što su neiskorišćena sredstva po odobrenim kreditnim linijama), gde su ponderi utvrđeni u zavisnosti od grubo procenjenog nivoa rizika pojedinačnog finansijskog instrumenta. Standard je imao fokus na kreditni rizik. 1996. standard je dopunjen uključivanjem i tržišnih rizika (BCBS, 1996).

2004. donet je daleko ozbiljniji i kompleksniji set standarda (BCBS, 2004), poznatih kao Bazel II. Bazel II ima tri tzv. stuba:

- Stub 1: Minimalni kapitalni zahtevi (Minimum capital requirements),
- Stub 2: Proces supervizorske procene (Supervisory review process),
- Stub 3: Tržišna kontrola (Market discipline).

Stub 1 definiše minimalne zahteve u pogledu kapitala. Stub 1 definiše kapitalne zahteve za tri kategorije rizika: kreditni rizik, tržišni rizici i operativni rizik. U okviru tržišnih rizika, Stub 1 definiše kapitalne zahteve za kamatni rizik (cenovni rizik u pogledu dužničkih hartija od vrednosti), cenovni rizik u pogledu vlasničkih hartija od vrednosti, devizni rizik, robni rizik (cenovni rizik u pogledu roba). Za kreditni i tržišne rizike Stub 1 prepoznaje dva moguća pristupa obračunu minimalnih kapitalnih zahteva: tzv. standardizovani pristup i pristup zasnovan na internim modelima. Za operativni rizik su predviđena tri moguća pristupa: tzv. pristup osnovnog indikatora, standardizovani pristup i pristup zasnovan na internim modelima. U principu, očekivana primena pristupa zavisi od veličine, složenosti poslovnog modela, internih kapaciteta i sofisticiranosti internih metodologija banke.

Standardizovani pristup, kao i pristup osnovnog indikatora za operativni rizik, zasnovani su na principu pondera, kao u Bazelu I, ali sa granularnijom identifikacijom različitih izvora i nivoa rizika, i uz uključivanje operativnog rizika. Pristupi zasnovani na internim modelima podrazumevaju direktniju procenu raspodele verovatnoće gubitaka (na bazi internih modela banke) i utvrđivanje minimalnog nivoa kapitala na bazi određenog percentila procenjene raspodele. Na primer, za kreditni rizik taj percentil je 99.9% procenjene verovatnoće kreditnih gubitaka na horizontu od godinu dana.

Stub 2 definiše zahteve u pogledu odgovornosti i internih metodologija upravljanja rizicima, interne procene adekvatnosti kapitala i interne strategije upravljanja kapitalom. Osnovna ideja jeste da su minimalni kapitalni zahtevi iz Stuba 1 samo to – minimalna referentna vrednost, a da banka mora odgovorno upravljati rizicima, interno procenjivati kapitalne zahteve srazmerne

svom rizičnom profilu i imati odgovarajuću strategiju upravljanja kapitalom koja će obezbediti da on nikada ne padne ispod minimuma. Stub 2 takođe definiše kao princip da supervizori (centralne banke ili druge agencije) sprovode kontrolu i ocenu ovih procesa, zahtevaju od banaka da nivo kapitala održavaju iznad minimuma iz Stuba 1, i da sa svoje strane blagovremeno intervenišu kako nivo kapitala banke ne bi pao ispod minimuma.

Stub 3 definiše zahteve u pogledu obelodanjivanja informacija o izloženosti i upravljanju rizicima od strane banke, promovišući na taj način kontrolu kvaliteta upravljanja rizicima banke i od strane finansijskih tržišta i klijenata.

Tokom krize 2008. minimalni kapitalni zahtevi iz Bazela II su prepoznati kao nedovoljni (BCBS, 2009). Takođe, Bazel II nije definisao nikakve minimalne standarde u pogledu rezervi za rizik likvidnosti. (Bili su definisani samo određeni kvalitativni principi.) Stoga je 2010-2016. usvojen paket dodatnih standarda u pogledu minimalnog nivoa kapitala i upravljanja likvidnošću, koji su poznati kao Bazel III (BCBS, 2010) (BCBS, 2013) (BCBS, 2014) (BCBS, 2016). Bazel III nije zamenio već samo predstavlja nadogradnju Bazela II. 2017. usvojene su dodatne dopune Bazel II standarda (BCBS, 2017), koje mnogi u industriji zovu Bazel IV.

Rast kompleksnosti ovih standarda najočiglednije ilustruje broj strana: Bazel I iz 1988. je imao 30 strana. Dopuna Bazela I za tržišne rizike iz 1996. imala je 56 strana. Bazel II je 2006. imao 347 strana. Trenutno, kompletan bazelski okvir ima 1626 strana (BCBS, 2019).⁹

Pored bazelskih standarda, banke podležu i različitoj drugoj regulativi, koja je uglavnom lokalnog karaktera, mada i među njima postoji određena konvergencija. Regulativa u pogledu upravljanja rizicima uključuje principe, odgovornosti i druge zahteve u pogledu organizacije upravljanja rizicima, limite izloženosti određenim rizicima, kao i zahteve za izveštavanjem o rizicima.

Banke takođe podležu međunarodnim standardima finansijskog izveštavanja, koji takođe obuhvataju različite aspekte vezane za izloženost rizicima.

Međutim, krovni i ključni standardi u pogledu odnosa rizika i kapitala jesu bazelski standardi.

⁹ Uz sve razlike u fontu, dimenziji strana i sl., rast obima i kompleksnosti standarda je očigledan.

2.3. ICAAP

Glavni zahtev Stuba 2 jeste uspostavljanje procesa interne procene adekvatnosti kapitala (internal capital adequacy assessment process – ICAAP). Suština zahteva jeste da, s obzirom na to da modeli za procenu minimalnih kapitalnih zahteva u Stubu 1 ne moraju nužno uzimati u obzir sve aspekte i parametre rizičnog profila banke, banke moraju sprovoditi internu analizu svoje izloženosti rizicima i adekvatnosti iznosa kapitala spram svog rizičnog profila.

Fundamentalno očekivanje Stuba 1 kao i Stuba 2 jeste pokriće rizika u kapitalu sa visokim nivoom poverenja – tako da verovatnoća da se gubici po osnovu rizika kojima je banka izložena preliju na deponente i druge kreditore bude minimalna. Na primer, za kreditni rizik u Stubu 1 zahtevani nivo poverenja je 99.9% – drugim rečima, banka mora imati najmanje onoliki iznos kapitala tako da verovatnoća (pri pretpostavkama modela) da gubici premaše ovaj iznos i preliju se na deponente bude ispod 0.1%.

Najdirektnije ispunjenje ovog zahteva jeste modeliranje raspodele mogućih gubitaka. Međutim, taj zadatak može iz različitih razloga biti izazovan ili neizvodljiv u praksi, uključujući nedostatak znanja, nedostupnost podataka, potrebno vreme ili dostupnost softvera. Alternativno, banka može kombinovati dostupne modele (uključujući modele iz Stuba 1) i tzv. ekspertske procene i prilagođavanja – što je eufemizam za grubu procenu, koja kombinuje elemente kvalitativnog i kvantitativnog tipa, u odsustvu sofisticiranijih modela procene.¹⁰ Svakako, očekivanje je da veće banke, sa kompleksnijim poslovanjem, primenjuju sofisticiranije pristupe.

2.4. Kreditni rizik

Među rizicima kojima su banke izložene tipično je najznačajniji kreditni rizik, kako u pogledu iznosa izloženosti tako i u pogledu iznosa mogućih gubitaka. Shodno tome kreditni rizik zahteva i najveću pažnju u okviru ICAAP-a.

¹⁰ S druge strane, treba imati u vidu da sofisticirani modeli procene sa nepouzdanom implementacijom, nepouzdanim ulaznim podacima i neadekvatnim mehanizmima kontrole mogu biti lošiji nego tzv. ekspertske procene.

U pogledu pojedinačnog dužnika, kreditni rizik je rizik da banka neće naplatiti potraživanje od njega u punom iznosu i prema ugovorenom planu otplate. Kreditni rizik se ostvaruje tako što dužnik prestane da plaća dospele obaveze. Ovaj događaj se zove difolt (*default*). Tehnički, difolt se definiše kao neizmirenje obaveza u roku dužem od, na primer, 90 dana ili postojanje drugih indikatora visoke verovatnoće da dužnik neće izmiriti svoje obaveze prema banci (*unlikeliness to pay*) – na primer, gubitak posla ili stečaj.

Difolt sam po sebi ne znači nužno da će banka pretrpeti gubitak – nakon difolta može nastupiti oporavak i dužnik može nastaviti da plaća svoje obaveze prema ugovorenom planu otplate, uključujući i sve zaostale dospele obaveze. Alternativno, banka dužniku može odobriti restrukturiranje, koje će mu omogućiti da nastavi da plaća svoje obaveze po izmenjenom planu otplate, što može ali i ne mora podrazumevati gubitak za banku. Konačno, banka može pristupiti prinudnoj naplati ili ustupiti potraživanje trećem licu (tipično uz značajan diskont, odnosno gubitak), ukoliko je verovatnoća oporavka niska.

Parametri koji se tipično procenjuju u cilju procene kreditnog rizika uključuju:

- Verovatnoću difolta (*probability of default – PD*),
- Izloženost (iznos duga) u trenutku difolta (*exposure at default – EAD*),
- Gubitak u slučaju difolta (*loss given default – LGD*).

EAD kredita prvenstveno zavisi od plana otplate i momenta difolta. Kod akreditiva i drugih garancija, EAD zavisi od verovatnoće protesta garancije od strane trećeg lica u čije je ima garancija izdata. Kod kreditnih linija (npr. overdraftovi i kreditne kartice), EAD zavisi od procena povlačenja u slučaju difolta.

LGD obuhvata verovatnoću oporavka (*cure rate – CR*), kao i gubitak u slučaju gubitka (*loss given loss – LGL*). U slučaju izloženosti koje su obezbeđene hipotekom ili drugim sredstvom obezbeđenja, LGD takođe obuhvata i stepen obezbeđenja kolateralima i očekivani iznos naplate iz kolaterala.

Svi ovi parametri su stohastičke varijable. U zavisnosti od primene, mogu se procenjivati na različitim horizontima – tipično 12 meseci (npr. *12-month PD*), ili na više horizonata od po 12 meseci, sve do kraja života određenog plasmana (npr. *lifetime PD*). Od interesa može biti upravo vreme do difolta. Tipično se koriste tačkaste ocene ili serije tačkastih ocena (npr. PD u

narednih godinu dana, dve godine, itd.), iako se u sofisticiranijim primenama mogu koristiti i druge vrste ocena.

Na nivou pojedinačnog dužnika pitanje je da li će taj dužnik difoltirati ili ne, i ako difoltira koliki će gubitak banka pretrpeti. Na nivou kreditnog portfolija pitanje tipično nije (osim u slučaju veoma malih portfolija) da li će određeni broj dužnika difoltirati, već koliko će dužnika difoltirati i koliki će ukupan gubitak banka pretrpeti. U ovom kontekstu je od interesa raspodela verovatnoće mogućih gubitaka.

Međutim, za razliku od nekih drugih primena, raspodelu verovatnoće kreditnih gubitaka nije moguće oceniti npr. fitovanjem na bazi neke empirijske raspodele. Razlog je, između ostalog, to što su difolti relativno retki, a takođe se pokazuje da je raspodela izrazito asimetrična i promenljiva iz godine u godinu.

Raspodela verovatnoće fundamentalno zavisi od korelacije između difolta dužnika. Naime, pokazuje se da difolti dužnika nisu međusobno nezavisni. Ceteri paribus, što je korelacija između difolta veća, raspodela ima deblji rep – jer veća korelacija znači veću verovatnoću većeg broja difolta koji se dešavaju istovremeno. Stoga je fenomen korelacije između difolta od kritičnog značaja, kako za ocenu raspodele verovatnoće kreditnih gubitaka, tako i uopšte za upravljanje kreditnim rizikom.

Korelacija između difolta se može objasniti po više osnova: Svi dužnici su izloženi određenim sistemskim faktorima finansijskog i makroekonomskog okruženja, poput privrednog rasta, inflacije, deviznih kurseva i kamatnih stopa. Takođe, dužnici koji rade ili posluju u istoj privrednoj grani dodatno su izloženi faktorima specifično vezanim za tu granu, uključujući poremećaje ponude i tražnje, cena inputa i autputa. Konačno, difolt jednog dužnika može izazvati poremećaje u poslovanju ili gubitak posla za druge dužnike sa kojima saraduje, i na taj način povećati rizik ili uzrokovati difolt nekog od njih.

Ovde se pojam korelacije koristi ne nužno u značenju linearnog koeficijenta korelacije, već u opštem značenju međuzavisnosti. Pored korelacije između difolta, makroekonomski i drugi sistemski faktori mogu imati uticaj i na ostale parametre kreditnog rizika – PD, LGD, EAD, npr. kroz niže stope oporavka iz difolta, niže cene i manju utrživost nekretnina, smanjene mogućnosti prinudne naplate, više stope protesta garancija i povlačenja iz kreditnih linija itd. Ova vrsta rizika se zove sistemskim rizikom.

2.5. Rizik kreditne koncentracije

Drugi kritičan faktor koji opredeljuje raspodelu verovatnoće kreditnih gubitaka jeste fenomen kreditne koncentracije. Naime, banke tipično nisu u istoj meri izložene pojedinačnim dužnicima i pojedinačnim faktorima rizika. Tipično, naročito u segmentu poslovanja sa privredom ili u projektnim finansiranjima (npr. izgradnja ili akvizicija stambenih ili poslovnih nekretnina), banke su u velikim iznosima izložene manjem broju dužnika. Ovaj oblik koncentracije je poznat kao *single-name credit concentration*.

Koncentracija, kao i korelacija, povećava rep raspodele – jer jedan dužnik sa dugom od 100 miliona evra ima isti uticaj na raspodelu kao 100 savršeno korelisanih dužnika sa dugovanjem od po milion evra.

U praksi su takođe prisutni i regulativom prepoznati i drugi oblici kreditne koncentracije (EBA, 2014): koncentracija kreditnih izloženosti u određenim privrednim granama (*sectoral concentration*), koncentracija izloženosti u određenim geografskim oblastima (*geographic concentration*), koncentracija izloženosti u pogledu određenih proizvoda (*product concentration*), koncentracija izloženosti u pogledu sredstava obezbeđenja (*collateral and guarantee concentration*).

Fenomen koncentracije se takođe može objasniti po više osnova: Tu je pre svega faktor informacija. Banke su sklonije da odobravaju dodatna sredstva klijentima koje poznaju, nego nova sredstva klijentima koje ne poznaju. Takođe, banke su sklonije da plasiraju sredstva sektorima koje bolje poznaju i sa kojima imaju uspostavljene kontakte, u geografskim oblastima koje bolje poznaju i u kojima imaju uspostavljenu mrežu, itd. Konačno, banci je jednostavno lakše i operativno (iako ne i iz aspekta upravljanja rizicima!) jeftinije da odobri jedan veliki kredit od 100 miliona evra, nego 100 kredita od milion evra.

Kao i slučaju korelacije između difolta, ceteri paribus, što je koncentracija kreditnih izloženosti veća, raspodela ima deblji rep. Stoga je, takođe, fenomen kreditne koncentracije od kritičnog značaja, kako za ocenu raspodele verovatnoće kreditnih gubitaka, tako i uopšte za upravljanje kreditnim rizikom.

2.6. Procena ekonomskog kapitala za rizik kreditne koncentracije

Raspodela verovatnoće kreditnih gubitaka se može ocenjivati različitim metodama. Dostupni metodi pre svega uključuju Monte Karlo metod, ali se pod određenim pretpostavkama mogu naći i analitička rešenja ili aproksimacije.

Pokazuje se tako da je, pod određenim pretpostavkama, moguće vrlo jednostavnom formulom direktno oceniti željeni percentil raspodele kreditnih gubitaka, i to jednostavno sumiranjem iznosa ocenjenih primenom formule na nivou pojedinačnih izloženosti. Ovakva formula je definisana u Stubu 1 Bazela II kao model za banke koje koriste pristup zasnovan na internim modelima (IRB formula). Ulazni podaci u formulu uključuju tačkaste ocene PD-ja, LGD-ja i EAD-a za pojedinačne kreditne izloženosti, kao i ocenu korelacije između difolta, za koju je pak takođe standardom zadata formula koja zavisi od PD-ja.

Međutim, jedna od osnovnih pretpostavki u izvođenju ove formule jeste savršena granularnost portfolija, odnosno odsustvo fenomena kreditne koncentracije. Stoga Bazel II definiše zahtev da banke u okviru Stuba 2 razviju modele i ocene kapitalni zahtev za pokriće rizika kreditne koncentracije. Ovo, međutim, nije trivijalan zadatak.

Najdirektniji metod ocene jeste Monte Karlo metod: ukoliko Monte Karlo metodom ocenimo raspodelu verovatnoće kreditnih gubitaka na stvarnom portfoliju, inkrementalni iznos kapitalnog zahteva na istom nivou poverenja u odnosu na kapitalni zahtev procenjen IRB formulom iz Bazela II koji apstrahuje fenomen kreditne koncentracije, može se smatrati kapitalnim zahtevom za rizik koncentracije. Međutim, ovaj metod nije trivijalno primeniti: potrebno je raspolagati softverskom infrastrukturom u kojoj bi bio postavljen model i sprovedene stotine hiljada ili milioni simulacija u razumnom vremenu na portfoliju koji može imati hiljade ili miliona kreditnih izloženosti. Takođe, sama postavka modela, uključujući različite oblike korelacije, kao i ocenu svih potrebnih parametara, predstavlja izazov za sebe. Ovo je naročito izazov za manje banke, koje nemaju interni kapacitet za razvoj ovakvih metodologija niti njihovu procesnu i softversku implementaciju.

U konsultativnim dokumentima tokom rada na Bazelu II bio je predložen određen analitički pristup i za ocenu kapitalnog zahteva za rizik individualne kreditne koncentracije (BCBS, 2001). Međutim, predloženi pristup – verovatno usled odsustva političkog konsenzusa unutar Komiteta – nije uključen u konačan tekst standarda. Gordy i Lütkebohmert, članovi radne grupe

za rizik koncentracije u okviru Bazela II, kao i drugi autori, kasnije su objavili više radova u vezi sa ovim modelom (Lütkebohmert, 2009) (Lütkebohmert & Gordy, 2013).

S druge strane, različiti regulatori širom Evrope propisali su sopstvene modele za ocenu ekonomskog kapitala za rizik kreditne koncentracije (Bank of England Prudential Regulation Authority, 2020) (Banco de España, 2008) (Finansinspektionen, 2014) (Fjármálaeftirlitið, 2019). Ovi modeli su zasnovani ili na Gordy-Lütkebohmert modelu ili na Herfindahl-Hirschmanovom indeksu koncentracije. Drugi (npr. Narodna banka Srbije) propisuju samo kvalitativne principe upravljanja i limite za velike izloženosti, ostavljajući bankama da same kvantifikuju ekonomski kapital za ovaj rizik.

Tema ovog rada je poređenje nekih od ovih analitičkih pristupa oceni ekonomskog kapitala za rizik kreditne koncentracije sa ocenama dobijenim Monte Karlo metodom na određenim hipotetičkim kreditnim portfolijima.

- Bavićemo se isključivo fenomenom individualne kreditne koncentracije.
- Fundamentalni model kreditnog rizika biće model definisan Bazelom II za banke koje za ocenu kapitalnog zahteva za kreditni rizik koriste pristup zasnovan na internim modelima.
- Koristićemo, takođe, Bazelom II definisane formule za ocenu korelacije između difolta.

Hipotetička portfolija biće konstruisana tako da budu reprezentativna za različite nivoe kreditne koncentracije.

Cilj rada je da se, spram ocena dobijenih Monte Karlo metodom, koje ćemo smatrati referentnim, oceni adekvatnost i nepristrasnost predloženih analitičko-statističkih formula. Ovo je važno za banke koje nemaju interne metodologije i modele za ocenu ekonomskog kapitala za rizik koncentracije. S obzirom da će analiza biti sprovedena na konstruisanim portfolijima, cilj je takođe da svi dobijeni rezultati budu lako reproducibilni i da sprovedene analize mogu lako da se sprovedu i na primerima stvarnih kreditnih portfolija.

3. Modeliranje kreditnog rizika

Potreba za modeliranjem kreditnog rizika postoji u različitim kontekstima i može imati različite ciljeve ili fokus. Banke, na primer, imaju potrebu da modeliraju kreditni rizik za potrebe kreditnog odlučivanja – da li nekom klijentu odobriti kredit ili ne. Takođe, modeli se mogu koristiti za potrebe određivanja cene kredita – koja je minimalna kamatna marža sa kojom se isplati odobriti kredit određenom klijentu. Banke takođe imaju obavezu da modeliraju kreditni rizik za potrebe utvrđivanja obezvređenja po datim kreditima, u skladu sa međunarnim standardima finansijskog izveštavanja. Konačno, banke imaju potrebu za modeliranjem kreditnog rizika u kontekstu primene bazelskih standarda i, naročito, ICAAP-a. Potrebu za modeliranjem kreditnog rizika imaju i drugi učesnici na finansijskim tržištima – na primer, za vrednovanje obveznica i različitih oblika finansijskih derivata kojima je inherentan kreditni rizik. Svaka od ovih upotreba povlači specifične metode i prakse modeliranja.

Različiti pristupi uključuju:

- Različite perspektive – pojedinačni finansijski instrument ili portfolio instrumenata: Za investitora koji ima portfolio kreditnih instrumenata, osnovna veličina od interesa je kreditni gubitak na ukupnom portfoliju. Međutim, ocenjivanje kreditnog gubitka na ukupnom portfoliju tipično nije trivijalan zadatak i stoga se po pravilu sprovodi periodično (npr. kvartalno ili godišnje). U međuvremenu se sprovodi ocenjivanje kreditnog rizika na nivou pojedinačnih instrumenata. Naravno, postoji uska veza između ova dva pristupa: Modeliranjem na nivou pojedinačnih instrumenata ocenjuju se ulazni parametri za modele kreditnog rizika na nivou portfolija. Modeliranjem na nivou portfolija ocenjuje se ukupni kreditni rizik i postavljaju ciljevi ili limiti u pogledu kreditnog rizika pojedinačnih instrumenata. Zatim se, ponovo, uz pomoć modela na nivou pojedinačnih instrumenata proverava saglasnost njihovog kreditnog rizika sa uspostavljenim ciljevima ili limitima.
- Različit fokus – očekivani ili neočekivani gubici: Fokus modela može biti na oceni očekivanog gubitka kreditnog portfolija. Pokazuje se, međutim, da je raspodela verovatnoće kreditnih gubitaka tipično asimetrična sa izrazito debelim repom. Stoga je od interesa takođe modeliranje neočekivanih gubitaka na različitim nivoima poverenja.
- Različite horizonte predviđanja: Horizont predviđanja može biti 12 meseci, kraći ili duži od 12 meseci. S tim u vezi, vremenska varijabla može biti posmatrana kao diskretna (12 meseci, 24 meseca, 36 meseci itd.) ili kontinualna.

- Različito raščlanjivanje kreditnog događaja na komponentne varijable: Osnovna veličina od interesa je kreditni gubitak. Međutim, iznos kreditnog gubitka se može modelirati direktno, ili se mogu modelirati, na primer, verovatnoća nastupanja događa kreditnog gubitka – difolt, izloženost u slučaju difolta i gubitak u slučaju difolta. Pored difolta, naročito u primenama vezanim za tržišno vrednovanje kreditnih instrumenata, od interesa je i modeliranje promena u nivou kreditnog kvaliteta – odnosno, promena verovatnoće difolta.
- Različite postavke modela u odnosu na prirodu fenomena – fundamentalni ili statistički model: Kreditni gubitak se može modelirati na bazi fundamentalnih varijabli – npr. događaj kreditnog gubitka nastupa kada vrednost imovine padne ispod iznosa obaveza ili poslovni dobitak padne ispod iznosa tekućih obaveza po kreditima. U ovakvom pristupu se zatim modeliraju ove fundamentalne varijable, da bi se na bazi njihove ocene dobila ocena kreditnog rizika. Alternativno, kreditni gubitak se može modelirati čisto statistički – kao stohastička varijabla koja zavisi od nepoznatih varijabli, između kojih se onda statističkim metodama utvrđuje veza.
- Različite statističke metode: Na primer, verovatnoća difolta se tipično modelira primenom logističke regresije, ali moguća je primena različitih drugih metoda – drveta odlučivanja (*decision trees*), slučajne šume (*random forests*), neuronske mreže i dr. Isto tako, gubitak u slučaju difolta se može modelirati primenom različitih metoda – linearna regresija, beta regresija i dr. (Brown, 2014).

U kontekstu ocene ekonomskog kapitala u okviru ICAAP-a, od interesa je pre svega modeliranje raspodele verovatnoće gubitaka na kreditnom portfoliju, sa fokusom na neočekivanim gubicima. Horizont predviđanja je tipično godinu dana. Kreditni rizik se u ovom kontekstu tipično raščlanjuje na PD, LGD, EAD i korelaciju između difolta dužnika kao komponentne varijable.

Dakle, modeliranje kreditnog rizika u ovom kontekstu tipično uključuje:

- Modeliranje parametara rizika pojedinačnih dužnika (PD, LGD, EAD),
- Modeliranje korelacija između difolta dužnika,
- Modeliranje raspodele verovatnoće gubitaka na kreditnom portfoliju.

Nama je ovde u fokusu pre svega poslednja tačka. Međutim, s obzirom da su prethodne dve vrste modela inputi za modele koji nas zanimaju, kratko ćemo predstaviti i modele iz prethodne dve tačke.

3.1. Modeliranje parametara rizika pojedinačnih dužnika

3.1.1. Modeliranje verovatnoće difolta

Modeliranje verovatnoće difolta na fiksnom horizontu, npr. 12 meseci, u suštini predstavlja problem klasifikacije. Verovatno najčešći metod statističkog modeliranja u ovom kontekstu je logistička regresija.

Naime, neka je D slučajna veličina koja označava difolt. Nas zanima $p = P\{D = 1\}$. Međutim, umesto direktnog modeliranja ove veličine, možemo posmatrati veličinu

$$\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

Za razliku od p , koje uzima vrednosti između 0 i 1, $\text{logit}(p)$ uzima vrednosti iz skupa $(-\infty, +\infty)$. Stoga na ovu veličinu možemo primeniti linearnu regresiju

$$\text{logit}(p) = b_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n = \mathbf{b}^T \mathbf{x},$$

gde $\mathbf{b}^T = [b_0, b_1, \dots, b_n]$ predstavljaju parametre, a $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_n]$ nezavisne varijable. Regresione parametre ocenjujemo metodom maksimalne verodostojnosti.

Inverznom transformacijom dobijamo

$$p = P\{D = 1 | \mathbf{X} = \mathbf{x}\} = \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{b}^T \mathbf{x}}}.$$

Tipične prediktorske varijable uključuju, za pravna lica, finansijska racija, kvalitativne informacije o industriji, tržišnoj poziciji, kvalitetu rukovodstva i sl., za fizička lica zaradu, stepen zaduženosti, sociodemografske karakteristike (godine, pol, bračni status i sl.), a za oba segmenta tzv. bihevioralne (pokazatelji izračunati na bazi internih informacija banke o prilivima po tekućem računu, korišćenju proizvoda, naročito limita, i kašnjenjima u otplati u proteklom periodu) i KB varijable (pokazatelji izračunati na bazi informacija iz kreditnog biroa o korišćenju proizvoda, naročito limita, i kašnjenjima u otplati kod drugih banaka).

U praksi se, zapravo, problem modeliranja verovatnoće difolta tipično razdvaja na dva problema:

- Problem rangiranja: $r = r(x)$,
- Problem kalibracije: $p = p(r)$.

Model rangiranja može biti razvijen logističkom regresijom i kao autput davati veličine koje se mogu interpretirati kao verovatnoća difolta, ali koje nužno ne odgovaraju verovatnoći difolta, gledano *ex ante*, odnosno realizovanoj stopi difolta, gledano *ex post*, na realnim uzorcima. Stoga se kalibracionom funkcijom ova ocena „popravlja“ tako da odgovara stvarnoj verovatnoći difolta. Razloga za ovakav pristup ima više: Model rangiranja može biti razvijen na uzorku koji u pogledu verovatnoće, odnosno stope difolta nije nužno reprezentativan za portfolio na kojem će model biti primenjivan – bilo zato što je uzorak iz drugog vremenskog perioda, bilo zato što je namerno „obogaćen“ difoltima kako bi u postupku modeliranja bile izabrane bolje varijable, bilo zato što definicija difolta koja je primenjena za modeliranje odstupa od definicije difolta u primeni. S druge strane, takođe, nivo verovatnoće, odnosno stopa difolta varira u zavisnosti od eksternih faktora, dok oni tipično nemaju u toj meri uticaj na samu funkciju rangiranja. Model kalibracije može, tako, uključivati upravo varijable koje su indikatori makroekonomskog okruženja. Takođe, u slučaju razilaženja između predviđenih i realizovanih stopa difolta, model rangiranja može ostati nepromenjen, dok se „popravlja“ samo model kalibracije.

Naravno, pored logističke regresije moguće je primeniti različite druge metode za probleme klasifikacije, uključujući drveta odluke (*decision trees*), slučajne šume (*random forests*), neuronske mreže i dr. (Brown, 2014). Mogućnost različitih pristupa se odnosi kako na problem rangiranja tako i na problem kalibracije.

Takođe, na horizontima različitim od određenog fiksnog horizonta, od, tipično, 12 meseci, verovatnoća difolta se može modelirati različitim metodama. Jedan popularan pristup je baziran na pretpostavci da evolucija nivoa kreditnog kvaliteta (skora, rejtinga) klijenta predstavlja Markovljev proces – nivo kreditnog kvaliteta sutra zavisi od nivoa kreditnog kvaliteta danas, ali je nezavisan od nivoa kreditnog kvaliteta u prošlosti. Stoga se višegodišnje stope difolta mogu dobiti ocenom i primenom tranzicionih matrica.

U kontekstu bazelskih standarda, važna je distinkcija između tzv. dugogodišnje verovatnoće difolta (*through-the-cycle*, skraćeno *TTC PD* – verovatnoća difolta nezavisno od stanja

poslovnog ciklusa) i trenutne verovatnoće difolta (*point-in-time*, skraćeno *PIT PD* – verovatnoća difolta pri trenutnom stanju poslovnog ciklusa). Ovo razlikovanje je povezano sa empirijskom opservacijom i teorijom poslovnih ciklusa – ekonomija prolazi kroz periode rasta i padova, koji se periodično smenjuju, a s tim u vezi postoji i kreditni ciklus: u određenim periodima stope difolta su niže, a u drugim periodima više.

S obzirom na to da se u praksi pokazuje da je PIT PD znatno teže predvideti nego TTC PD, kao i da veličine koje su bazirane na PIT PD pokazuju tzv. procikličnost – smanjenje u periodima niski stopa difolta i rast u periodima visokih stopa difolta, što nije u skladu sa ciljevima kapitalnih standarda (da se kapital smanjuje, odnosno povećava aktiva bankarskog sektora u dobrim vremenima, kada bi kapitalni zahtevi pri ovakvom pristupu bili niži, a da se onda traže načini za kontrolu štete i povećanje kapitala u lošim vremenima, kada kapitalni zahtevi porastu), ocene kapitalnih zahteva u Stubu 1 su bazirane na TTC verovatnoćama difolta. Konačno, takav pristup ne bi bio u saglasnosti sa primenjenim modelom za ocenu kapitalnih zahteva, što ćemo ilustrovati kasnije. Očekivanja u pogledu pristupa u Stubu 2 nisu sasvim jasno i eksplicitno definisana – u principu je moguće koristiti i PIT PD – mada, ukoliko se koristi isti model ili neka njegova modifikacija, u principu bi trebalo koristiti TTC PD.

U svakom slučaju, u daljem izlaganju smatraćemo da su verovatnoće difolta na nivou pojedinačnih dužnika unapred ocenjene izabranim modelom, i dostupne kao input za ocenu ekonomskog kapitala u okviru ICAAP-a.

3.1.2. Modeliranje LGD

U kontekstu modeliranja LGD, najpre treba razumeti da LGD fundamentalno zavisi od nekoliko varijabli:

- Verovatnoća oporavka iz difolta (*cure rate*), tj. verovatnoća da klijent uprkos difoltu ipak nastavi da izmiruje obaveze;
- Da li je posmatrano potraživanje obezbeđeno kolateralom, i naplata iz kolaterala u odnosu na EAD;
- Naplata iz drugih izvora u odnosu na EAD;
- Trajanja procesa naplate i vremenske vrednosti novca.

Pri modeliranju se LGD može dekomponovati na ove varijable, pa se tako mogu zasebno modelirati:

- Verovatnoća oporavka iz difolta;
- Volatilitnost tržišne vrednosti kolaterala, dodatni faktori umanjenja vrednosti zbog prinudne prodaje, nedostatka likvidnosti na tržištu i troškova procesa;
- Naplata iz drugih izvora osim kolaterala u odnosu na EAD.

Alternativno, može se direktno modelirati ukupni LGD.

Kao i PD, LGD se takođe može modelirati pomoću različitih statističkih metoda. Moguće metode uključuju linearnu regresiju, beta regresiju i dr.

Na primer, neka je l slučajna varijabla koja označava LGD. Možemo modelirati direktno

$$l = \mathbf{b}^T \mathbf{x},$$

gde su $\mathbf{b}^T = [b_0, b_1, \dots, b_n]$ parametri, a $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_n]$ nezavisne varijable. Koeficijente nalazimo metodom najmanjih kvadrata.

U praksi se često pokazuje da se raspodela realizovanih LGD vrednosti može aproksimirati beta raspodelom (Brown, 2014). Stoga umesto direktnog modeliranja LGD možemo modelirati veličinu

$$\beta(l) = \Phi^{-1} \left(F_{\beta}(l; a, b) \right),$$

gde je Φ standardna normalna funkcija raspodele, a F_{β} funkcija raspodele za beta raspodelu sa parametrima a, b . Parametri a, b se mogu oceniti iz uzoračke sredine μ i varijanse σ^2 :

$$a = \frac{\mu(1 - \mu)}{\sigma^2}, \quad b = \frac{(1 - \mu)^2}{\sigma^2}.$$

Ovako transformisanu veličinu $\beta(l)$ možemo modelirati linearnom regresijom:

$$\beta(l) = \mathbf{b}^T \mathbf{x},$$

a u tom slučaju ocenu l dobijamo kao

$$l = F_{\beta}^{-1}(\Phi(\mathbf{b}^T \mathbf{x}); a, b).$$

Tipične prediktorske varijable uključuju karakteristike dužnika, karakteristike proizvoda, visinu izloženosti, vrstu i stepen kolateralizacije, vreme u difoltu i dr. (ECB, 2017).

U kontekstu bazelskih standarda, važna je napomena da Bazel II zahteva da se za obračun kapitalnih zahteva u Stubu 1 koristi ocena recesijskog LGD (*downturn LGD*). Naime, kao i kod PD, u praksi se uočava cikličnost LGD, koji pada u periodima rasta ekonomije (kada, npr., rastu cene nekretnina) i raste u periodima recesije (kada, npr., padaju cene nekretnina, što direktno utiče na LGD). Ovaj zahtev je takođe u saglasnosti sa primenjenim modelom za ocenu kapitalnih zahteva, što ćemo ilustrovati kasnije.

Kao i za PD, u daljem izlaganju smatraćemo da je gubitak u slučaju difolta na nivou pojedinačnih potraživanja, odnosno sume potraživanja od određenog dužnika unapred ocenjen izabranim modelom, i da je ova ocena dostupna kao input za ocenu ekonomskog kapitala u okviru ICAAP-a.

3.1.3. Modeliranje EAD

Konačno, u kontekstu modeliranja EAD, takođe najpre treba razumeti da EAD fundamentalno zavisi od vrste proizvoda:

- Kod kredita, EAD zavisi od otplatnog plana;
- Kod kreditnih linija (npr. kreditne kartice, overdraftovi), EAD zavisi od iznosa limita, karakteristika limita (da li banka može jednostrano da ukine limit u slučaju pogoršanja kreditne sposobnosti klijenta) i eventualnih dodatnih povlačenja iz limita;
- Kod garancija, EAD zavisi od verovatnoće protesta garancije od strane trećeg lica u čiju je korist garancija izdata.

Kao i PD i LGD, EAD se takođe može modelirati pomoću različitih statističkih metoda. Moguće metode uključuju linearnu regresiju, logističku regresiju, beta regresiju i dr. (Brown, 2014).

U kontekstu bazelskih standarda, važna je napomena da Bazel II zahteva da se za obračun kapitalnih zahteva u Stubu 1 za kredite koristi trenutni iznos duga, bez uzimanja u obzir eventualne otplate u narednih godinu dana.

Kao i za PD i LGD, u daljem izlaganju smatraćemo da je izloženost u slučaju difolta unapred ocenjena izabranim modelom, i da je ova ocena dostupna kao input za ocenu ekonomskog kapitala u okviru ICAAP-a.

3.2. Modeliranje korelacija između difolta dužnika

Raspodela verovatnoće kreditnih gubitaka fundamentalno zavisi od korelacije između difolta dužnika. Naime, pokazuje se da difolti dužnika nisu međusobno nezavisni. Ceteri paribus, što je korelacija između difolta veća, raspodela ima deblji rep – jer veća korelacija znači veću verovatnoću većeg broja difolta koji se dešavaju istovremeno.¹¹

Jedna od mera međuzavisnosti između dve varijable X, Y je Pearsonov koeficijent korelacije:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Ovaj koeficijent se može izračunati i za dve binarne varijable D_1, D_2 takve da

$$p_1 = P\{D_1 = 1\}, \quad p_2 = P\{D_2 = 1\}, \quad p_{1,2} = P\{D_1 = 1, D_2 = 1\}.$$

U ovom slučaju imamo

¹¹ Razmotrimo dva primera:

1. Dva dužnika sa verovatnoćom difolta p , pri čemu su njihovi difolti potpuno nezavisni;
2. Dva dužnika sa verovatnoćom difolta p , pri čemu su njihovi difolti savršeno korelisani.

Oba dužnika imaju EAD od 1 i LGD od 100%. U prvom slučaju imamo sledeće mogućnosti:

	$D_2 = 0$	$D_2 = 1$
$D_1 = 0$	$(1 - p)^2$	$p(1 - p)$
$D_1 = 1$	$p(1 - p)$	p^2

U drugom slučaju imamo sledeće mogućnosti:

	$D_2 = 0$	$D_2 = 1$
$D_1 = 0$	$1 - p$	0
$D_1 = 1$	0	p

U prvom slučaju je verovatnoća da imamo gubitak 2 (izgubimo ceo portfolio) samo p^2 , u drugom slučaju je verovatnoća da imamo ovoliki gubitak čak p . p je tipično mali broj, reda veličine 1%. Dakle, u prvom slučaju je verovatnoća ovolikog gubitka 0.01%, dok je u drugom slučaju ova verovatnoća 1%.

$$\sigma_i = \sqrt{p_i(1-p_i)}, \quad i = 1,2,$$

pa dobijamo

$$\rho_{1,2} = \frac{p_{1,2} - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}}.$$

Postavlja se pitanje ocene $\rho_{1,2}$. Čak i ako imamo ocene za p_1 i p_2 , nemamo ocenu za $p_{1,2}$ – zapravo, to je veličina koja nas ultimativno zanima pre nego samo $\rho_{1,2}$!

Međutim, pod određenim pretpostavkama o procesu difolta možemo izvesti ocenu na osnovu istorijskih podataka (Zhang, Zhu, & Lee, 2008). Naime, ako su 1 i 2 dve homogene grupe dužnika, a p_1, p_2 njihove TTC verovatnoće difolta, koje po definiciji uzimamo kao stabilne kroz vreme, $p_{1,2}$ možemo oceniti kao prosečan broj parova difolta u odnosu na ukupan broj mogućih parova klijenata iz posmatranih grupa:

$$\hat{p}_{1,2} = \sum_t w_{1,2}(t) \frac{D_1(t)D_2(t)}{N_1(t)N_2(t)}, \quad w_{1,2}(t) = \frac{N_1(t)N_2(t)}{\sum_s N_1(s)N_2(s)},$$

gde je $N_i(t)$ broj klijenata na početku godine t , $D_i(t)$ broj difolta u godini t , $i = 1,2$, a $w_{1,2}(t)$ relativni značaj uzorka za godinu t u ukupnom uzorku. Tako dobijamo

$$\hat{\rho}_{1,2} = \frac{\hat{p}_{1,2} - \hat{p}_1 \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}}.$$

Postavlja se pitanje da li je ovo nepristrasna ocena stvarne korelacije između difolta. Pokazuje se da je ova ocena pri određenim pretpostavkama asimptotski nepristrasna kada broj dužnika i dužina perioda posmatranja raste u beskonačno, pri čemu dužina perioda posmatranja ima veći uticaj od broja dužnika (Zhang, Zhu, & Lee, 2008).

Međutim, input u modeliranje raspodele verovatnoća gubitaka na kreditnom portfoliju tipično nije korelacija između difolta (*default correlation*) nego korelacija između vrednosti imovine (*asset correlation*). Ona se može procenjivati direktno, indirektno na bazi ocena difolt korelacija primenom normalne kopule (Zhang, Zhu, & Lee, 2008), ili primenom drugih kopula (Li, 2010). Različite studije daju vrlo različite ocene (Zhang, Zhu, & Lee, 2008). Pokazuje se da su mnoge od tih ocena nestabilne ili potcenjene (Kupiec, 2009) (Qi, Xie, & Liu, 2010). Ovaj zadatak očigledno predstavlja veliki izazov, kako sa metodološke strane tako i sa strane zahteva

u pogledu potrebne dužine serije istorijskih podataka. S druge strane, parametar korelacije je kritičan parametar koji opredeljuje oblik i rep raspodele kreditnih gubitaka (Schönbucher, 2000).

U svakom slučaju, kao i za PD, LGD i EAD, u daljem izlaganju smatraćemo da je parametar korelacije unapred ocenjen izabranim modelom, i da je ova ocena dostupna kao input za ocenu ekonomskog kapitala u okviru ICAAP-a.

3.3. Modeliranje raspodele verovatnoće gubitaka na kreditnom portfoliju

3.3.1. Jednofaktorski model difolta dužnika

Za nas je ovde od prvenstvenog interesa raspodela verovatnoće kreditnih gubitaka. Međutim, za razliku od nekih drugih primena, raspodelu verovatnoće kreditnih gubitaka nije moguće oceniti npr. fitovanjem na bazi neke empirijske raspodele. Razlog je, između ostalog, to što su difolti relativno retki, a takođe se pokazuje da je raspodela izrazito asimetrična i promenljiva iz godine u godinu.

Stoga moramo razmotriti neki drugi pristup, koji će poći od nekog modela kreditnih događaja na nivou individualnih dužnika, pa zatim zbrajanjem ovih pojedinačnih događaja i njihovih verovatnoća doći do raspodele verovatnoće gubitaka na ukupnom kreditnom portfoliju.¹²

Fundamentalni empirijski uvid u tom smislu jeste, kao što smo rekli, da difolti dužnika nisu međusobno nezavisni. Stoga moramo na neki način modelirati međuzavisnost između difolta dužnika. Najjednostavniji način za to jeste da pretpostavimo da svi dužnici zavise od nekog zajedničkog, sistemskog faktora X i nezavisnih pojedinačnih idiosinkrazijskih faktora ε_i , $i = 1, \dots, N$, gde je N broj dužnika. Možemo pretpostaviti da indikator finansijskog stanja (kreditne sposobnosti) r_i dužnika i zavisi od sistemskog i idiosinkrazijskog faktora po sledećoj formuli:

¹² Istorija ovih modela je duga i tipično počinje sa Mertonom (Merton, 1974). Dobar pregled istorije modela kreditnog rizika daje Elizalde (Credit Risk Models I: Default Correlation in Intensity Models, 2006) (Credit Risk Models II: Structural Models, 2006). U industriji se među ovim modelima ističu kompanijski modeli JP Morganov CreditMetrics, Moody's KMV, i Credit Suisseov CreditRisk+. Međutim, ta istorija nije toliko relevantna za našu priču ovde.

$$r_i = \beta_i X + \sqrt{1 - \beta_i^2} \varepsilon_i.$$

Dobijamo

$$E(r_i) = \beta_i E(X) + \sqrt{1 - \beta_i^2} E(\varepsilon_i),$$

$$\text{Var}(r_i) = \beta_i^2 \text{Var}(X) + (1 - \beta_i^2) \text{Var}(\varepsilon_i),$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(r_i, r_j) &= \text{Cov}\left(\beta_i X + \sqrt{1 - \beta_i^2} \varepsilon_i, \beta_j X + \sqrt{1 - \beta_j^2} \varepsilon_j\right) \\ &= \text{Cov}(\beta_i X, \beta_j X) + \text{Cov}\left(\beta_i X, \sqrt{1 - \beta_j^2} \varepsilon_j\right) \\ &\quad + \text{Cov}\left(\sqrt{1 - \beta_i^2} \varepsilon_i, \beta_j X\right) + \text{Cov}\left(\sqrt{1 - \beta_i^2} \varepsilon_i, \sqrt{1 - \beta_j^2} \varepsilon_j\right) = \beta_i \beta_j \text{Var}(X), \end{aligned}$$

jer su varijable $X, \varepsilon_i, \varepsilon_j$ po definiciji međusobno nezavisne.

Ukoliko uvedemo tehničku pretpostavku da varijable X i $\varepsilon_i, i = 1, \dots, N$ imaju standardnu normalnu raspodelu, imamo da i r_i ima normalnu raspodelu

$$E(r_i) = 0, \quad \text{Var}(r_i) = 1, \quad \text{Cov}(r_i, r_j) = \beta_i \beta_j,$$

odnosno dobijamo da i r_i ima standardnu normalnu raspodelu.

Pretpostavimo da difolt dužnika i nastupa ukoliko indikator njegovog finansijskog stanja r_i padne ispod određenog nivoa d_i . S druge strane, pretpostavimo da iz nekog drugog modela znamo da difolt dužnika i nastupa sa verovatnoćom p_i . Dakle, imamo

$$d_i = \Phi^{-1}(p_i).$$

Odavde dobijamo uslov

$$r_i = \beta_i X + \sqrt{1 - \beta_i^2} \varepsilon_i < d_i = \Phi^{-1}(p_i) \Leftrightarrow \varepsilon_i < \frac{\Phi^{-1}(p_i) - \beta_i X}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}.$$

S obzirom da ε_i ima standardnu normalnu raspodelu, dobijamo da je uslovna verovatnoća difolta dužnika i pri datoj vrednosti sistemskog faktora X jednaka

$$P\{D_i = 1|X\} = P\left\{\varepsilon_i < \frac{\Phi^{-1}(p_i) - \beta_i X}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}\right\} = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \beta_i X}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}\right).$$

3.3.2. Ukupan gubitak na kreditnom portfoliju pri jednofaktorskom modelu difolta

Veličina koja nas zanima jeste ukupan gubitak:

$$L_N^e = \sum_{i=1}^N D_i l_i e_i,$$

gde je D_i binarna varijabla koja označava da li je dužnik i difoltirao ($D_i = 1$) ili ne, e_i označava iznos duga, a l_i označava gubitak u slučaju difolta dužnika i .

Ako podelimo ceo izraz sa $\sum_{i=1}^N e_i$ i označimo

$$s_i = \frac{e_i}{\sum_{i=1}^N e_i},$$

dobijamo gubitak kao procenat ukupnog portfolija:

$$L_N = \sum_{i=1}^N s_i D_i l_i.$$

Pokazuje se da pri sledećim pretpostavkama:

1. Varijable $D_i l_i, i = 1, \dots, N$ su međusobno nezavisne pri fiksiranoj vrednosti sistemskog faktora X i ograničene na interval $[0,1]$;
2. $\sum_{i=1}^N e_i \rightarrow \infty$;
3. Postoji pozitivna konstanta ξ takva da je udeo najveće izloženosti reda $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}+\xi}}\right)$;

važi (Lütkebohmert, 2009) (Gordy, 2002):

$$L_N - E(L_N|X = x) \rightarrow 0 \text{ skoro sigurno kad } N \rightarrow \infty.$$

Drugim rečima, kada ukupan iznos portfolija teži u beskonačno a udeo pojedinačnih izloženosti teži nuli, rizik portfolija zavisi samo od sistemskog rizika, dok se idiosinkrazijski rizik pojedinačnih izloženosti međusobno netira.

Pri dodatnoj pretpostavci da je $E(D_i l_i | X = x)$ neopadajuća funkcija po x za sve $i = 1, \dots, N$ dobijamo (Lütkebohmert, 2009):

$$\alpha_q(E(L_N|X)) = E(L_N | \alpha_q(X)),$$

gde $\alpha_q(\cdot)$ označava q -ti kvantil raspodele slučajne veličine.

Drugim rečima, q -ti kvantil raspodele očekivanog gubitka kreditnog portfolija u zavisnosti od sistemskog faktora X možemo dobiti kao očekivani gubitak pri onoj vrednosti sistemskog faktora koja predstavlja q -ti kvantil njegove raspodele.

Dobijamo:

$$\begin{aligned} \alpha_q(E(L_N|X)) &= E(L_N | \alpha_q(X)) = E\left(\sum_{i=1}^N D_i l_i s_i | \alpha_q(X)\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \beta_i \alpha_q(X)}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}\right) E(l_i) s_i \right], \end{aligned}$$

pod pretpostavkom nezavisnosti između D_i i l_i , odnosno između verovatnoće difolta i gubitka u slučaju difolta.

S obzirom da X , po pretpostavci, ima standardnu normalnu raspodelu, važi

$$\alpha_q(X) = -\Phi^{-1}(q),$$

pa dobijamo

$$\alpha_q(E(L_N|X)) = \sum_{i=1}^N \left[\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) + \beta_i \Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}\right) E(l_i) s_i \right].$$

Dakle, pri učinjenim pretpostavkama:

1. Finansijsko stanje pojedinačnih dužnika zavisi od zajedničkog sistemskog faktora i (međusobno i od sistemskog faktora) nezavisnih idiosinkrazijskih faktora rizika. Korelacija između finansijskog stanja pojedinačnih dužnika i zajedničkog sistemskog

faktora je egzogena varijabla. Sistemski faktor, idiosinkrazijski faktori i indikatori finansijskog stanja pojedinačnih dužnika su varijable koje imaju standardnu normalnu raspodelu;

2. Verovatnoća difolta i gubitak u slučaju difolta su egzogene varijable i međusobno nezavisni, pri čemu je gubitak u slučaju difolta ograničen na interval $[0,1]$;
3. Uslovno očekivanje gubitka na pojedinačnom dužniku u funkciji od sistemskog faktora je neopadajuća funkcija po sistemskom faktoru;
4. Ukupan iznos portfolija teži u beskonačno a udeo pojedinačnih izloženosti teži nuli;

dobili smo jednostavnu analitičku formulu za procenu proizvoljnog percentila raspodele kreditnih gubitaka na ukupnom portfoliju. Ova formula je formula koju definiše Bazel II standard u Stubu 1 kao model koji imaju primenjivati one banke koje za ocenu regulatornih kapitalnih zahteva koriste ne standardizovani pristup (koji je zasnovan na fiksnim ponderima), već pristup zasnovan na internim modelima.

3.3.3. Bazel II za kreditni rizik: pristup zasnovan na internim modelima

Naime, Bazel II za kreditni rizik definiše dve vrste pristupa:

1. Standardizovani pristup – koji je zasnovan na fiksnim ponderima (0%, 20%, 50%, 100%, 150% i sl.) koji se dodeljuju pojedinačnim izloženostima u zavisnosti od tipa dužnika, izloženosti, sredstva obezbeđenja, statusa difolta i sl. Ponderisana suma izloženosti se naziva rizikom ponderisana aktiva (*risk weighted assets – RWA*). Regulatorni zahtev za kapitalom se zatim utvrđuje u određenom fiksnom procentu, npr. 8% RWA (procenat može varirati od zemlje do zemlje, u zavisnosti od odluka lokalnih regulatora, i od banke do banke, u zavisnosti od specifičnih zahteva supervizora prema njima);
2. Pristup zasnovan na internim modelima (*internal rating-based approach – IRB approach*) – u kome standard definiše formulu za ocenu raspodele kreditnih gubitaka, a banke obezbeđuju sopstvene procene parametara rizika pojedinačnih dužnika: PD, LGD, EAD. (Zapravo, Bazel II razlikuje osnovni IRB pristup, gde banke ocenjuju samo PD a standard daje ocene LGD i EAD, i napredni IRB pristup, gde banke ocenjuju i LGD i EAD.)

IRB formula ima sledeći osnovni oblik:¹³

$$K = \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{R} \cdot \Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-R}} \right) \cdot LGD - PD \cdot LGD \right),$$

gde K označava kapitalni zahtev, PD i LGD predstavljaju verovatnoću difolta i tačkastu ocenu gubitka u slučaju difolta pojedinačnog dužnika, a R označava korelaciju finansijskog stanja dužnika sa sistemskim faktorom.

U pogledu ocene korelacije finansijskog stanja dužnika sa sistemskim faktorom (*asset correlation*), standard prepoznaje sledeće kategorije izloženosti:

1. Privreda (*Corporate*),
2. Visokorizične poslovne nekretnine (*High-volatility commercial real estate*),
3. Izloženosti obezbeđene stambenim nekretninama (*Residential mortgage exposures*),
4. Kvalifikovane revolving izloženosti u segmentu stanovništva (*Qualifying revolving retail exposures*),
5. Ostale izloženosti u segmentu stanovništva (*Other retail*).

Za segment privrede korelacija se ocenjuje po formuli

¹³ Za dužnike iz segmenta privrede, formula uključuje dodatni multiplikativni faktor:

$$K = \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{R} \cdot \Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-R}} \right) \cdot LGD - PD \cdot LGD \right) \cdot \frac{1 + (M - 2.5) \cdot b}{1 - 1.5 \cdot b},$$

koji predstavlja prilagođavanje za preostalu ročnost kredita. M predstavlja prosečnu preostalu ročnost ponderisanu budućim novčanim tokovima i računa se po formuli

$$M = \frac{\sum_t t \cdot CF_t}{\sum_t CF_t},$$

pri čemu ne može (osim u nekim izuzetnim slučajevima) biti manje od 1 niti veće od 5, a parametar b je definisan standardom kao

$$b = (0.11852 - 0.05478 \cdot \ln PD)^2.$$

Pored ovoga, na obračunate kapitalne zahteve za sve segmente primenjuje se faktor skaliranja od 1.06.

$$R = 0.12 \cdot \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}} + 0.24 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}}\right).$$

Po ovoj formuli, maksimalna vrednost parametra korelacije je 0.24, i ona se ostvaruje za stope PD-ja blizu 0%. Najniža vrednost parametra korelacije je 0.12, i ona se ostvaruje za vrednosti PD-ja preko 10%. Vrednost parametra brzo opada sa rastom PD-ja.

U okviru segmenta privrede, za mala i srednja preduzeća (sa godišnjim prihodima do 50 miliona evra), standard predviđa korektivni faktor

$$R = 0.12 \cdot \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}} + 0.24 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}}\right) - 0.04 \cdot \left(1 - \frac{S - 5}{45}\right),$$

gde S predstavlja godišnji prihod u milionima evra.

Za visokorizične poslovne nekretnine standard predviđa

$$R = 0.12 \cdot \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}} + 0.30 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-50 \cdot PD}}{1 - e^{-50}}\right).$$

Za izloženosti obezbeđene stambenim nepokretnostima standard definiše fiksnu korelaciju od 0.15. Za kvalifikovane revolving izloženosti u segmentu stanovništva standard definiše fiksnu korelaciju od 0.04. Konačno, za ostale izloženosti u segmentu stanovništva korelacija se ocenjuje po formuli

$$R = 0.03 \cdot \frac{1 - e^{-35 \cdot PD}}{1 - e^{-35}} + 0.16 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-35 \cdot PD}}{1 - e^{-35}}\right).$$

4. Modeliranje rizika kreditne koncentracije

Podsetimo se još jednom pretpostavki iza bazelskog modela za ocenu raspodele verovatnoće kreditnih gubitaka:

1. Finansijsko stanje pojedinačnih dužnika je linearna funkcija zajedničkog sistemskog faktora i (međusobno i od sistemskog faktora) nezavisnih idiosinkrazijskih faktora rizika. Korelacija između finansijskog stanja pojedinačnih dužnika i zajedničkog sistemskog faktora je egzogena varijabla. Sistemski faktor, idiosinkrazijski faktori i , posledično, indikatori finansijskog stanja pojedinačnih dužnika su varijable koje imaju standardnu normalnu raspodelu;
2. Verovatnoća difolta i gubitak u slučaju difolta su egzogene varijable i međusobno nezavisni, pri čemu je gubitak u slučaju difolta ograničen na interval $[0,1]$;
3. Uslovno očekivanje gubitka na pojedinačnom dužniku u funkciji od sistemskog faktora je neopadajuća funkcija po sistemskom faktoru;
4. Ukupan iznos portfolija teži u beskonačno a udeo pojedinačnih izloženosti teži nuli.

Fundamentalni model difolta dužnika

$$r_i = \beta_i X + \sqrt{1 - \beta_i^2} \varepsilon_i$$

svakako je ograničavajući. Priroda fenomena je takva da na portfoliju od N dužnika imamo $N(N - 1)/2$ međusobnih korelacija, koje nije moguće proceniti. Računski je neophodno, a svakako je i ekonomski razumno pretpostaviti da su ove korelacije posledica nekih latentnih varijabli, ali je izazov identifikovati te varijable, oceniti njihovu dinamiku, međusobne veze, kao i veze između finansijskog stanja pojedinačnih dužnika i ovih varijabli. Korišćen model predstavlja najjednostavniji model ove vrste. Moguća su i u literaturi obrađena različita proširenja ovog modela tako da uključi više sistemskih varijabli. Mi ćemo se zadržati na ovoj formi modela, jer je on adekvatan za ono što je naš fokus u ovom radu, a to je kvantifikacija rizika individualne koncentracije. Za druge teme, npr. rizik sektorske koncentracije, bilo bi neophodno razmatrati modele sa više sistemskih faktora i drugačijim ocenama korelacije (Düllmann & Masschelein, 2006) (Oh, 2007) (Bonollo, Mosconi, & Mercurio, 2009).

Pretpostavka da varijable u okviru modela imaju standardnu normalnu raspodelu u ovom kontekstu je više tehničkog karaktera. Pretpostavka je, zapravo, da određeni klijent difoltira pri

onim vrednostima indikatora njegovog finansijskog stanja koje predstavljaju p -ti percentil njegove raspodele, a činjenica da radimo sa standardnom normalnom raspodelom nam samo olakšava račun.

Pretpostavka da su verovatnoća difolta i gubitak u slučaju difolta međusobno nezavisne varijable je problematična i ne odgovara teoretskom razumevanju niti empirijskim podacima. U okviru Bazel II standarda ovaj problem je adresiran tako što se za obračun kapitalnog zahteva koristi tzv. recesijski LGD. Mi ćemo takođe zadržati ovaj pristup.

Pretpostavka da je uslovno očekivanje gubitka na pojedinačnom dužniku neopadajuća funkcija po sistemskom faktoru je ekonomski opravdana. Moguće je zapravo napraviti i nešto relaksiraniju pretpostavku (Lütkebohmert, Concentration Risk in Credit Portfolios, 2009). Mi ćemo svakako zadržati ovu pretpostavku.

Za nas je prvenstveno problematična pretpostavka da je udeo pojedinačnih izloženosti u ukupnom portfolio beznačajan. Ovo u praksi univerzalnih banaka koje se bave kreditiranjem kako stanovništva tako i privrede verovatno nikada nije slučaj.

Fenomen kreditne koncentracije povećava rep raspodele kreditnih gubitaka. Pitanje je u kojoj meri, i kako to kvantifikovati.

4.1. Indeksi koncentracije

Za merenje koncentracije tradicionalno se koriste različiti indeksi koncentracije. Najjednostavniji indeks koncentracije predstavlja udeo najvećih k dužnika ili grupa dužnika u ukupnom kreditnom portfoliju:

$$\sum_{i=1}^k s_i,$$

gde s_i predstavlja udeo potraživanja od dužnika i u ukupnom kreditnom portfoliju, i gde su dužnici sortirani u nerastućem poretku: $s_1 \geq s_2 \geq \dots$.

Tipično se posmatra udeo najvećih, npr., 10, 20 ili 50 izloženosti. Međutim, izbor broja k je proizvoljan, a sama vrednost indeksa nam ne govori ništa o raspodeli izloženosti niti unutar prvih k niti izvan prvih k izloženosti.

Verovatno najpopularniji indeks je Herfindahl-Hirschmanov indeks (HHI) koncentracije:

$$\sum_{i=1}^N s_i^2.$$

Ovaj indeks su sredinom 20. veka nezavisno definisali Hirschman i Herfindahl za merenje koncentracije u pogledu tržišnog učešća (Hirschman, 1964) (Rhoades, 1993). Od tada je popularizovan za merenje različitih oblika koncentracije, uključujući i koncentraciju u pogledu izvora rizika.

HHI ima korisna svojstva (Lütkebohmert, 2009), ali se mora koristiti sa oprezom.

- Pre svega, referentne vrednosti indeksa za ocenu nivoa koncentracije se razlikuju u zavisnosti od konteksta i upotrebe. Na primer, u pogledu tržišne koncentracije, kao referentne vrednosti za srednju, odnosno visoku koncentraciju se tipično uzimaju vrednosti 0.15 i 0.25. Međutim, za koncentraciju u pogledu kreditnih izloženosti ove referentne vrednosti nisu adekvatne. Takođe, adekvatne referentne vrednosti za različite oblike kreditne koncentracije, npr. rizik individualne koncentracije i rizik sektorske koncentracije, sigurno se razlikuju.
- Takođe, indeks je agnostičan u pogledu nivoa rizika pojedinačnih dužnika ili sektora. Dužnik sa udelom od 5% u ukupnom portfoliju i PD-jem od 0.1% i dužnik sa istim udelom i PD-jem od 10% jednako doprinose indeksu koncentracije.

Konačno, apriori je nejasno kako na bazi vrednosti HH indeksa odrediti ekonomski kapital za rizik koncentracije.

Za merenje koncentracije se takođe može koristiti Gini indeks. Gini indeks se tipično koristi kao indeks nejednakosti društvene dohotka ili imovine, ali ima i mnoge druge upotrebe, npr. kao mera prediktivne moći PD modela. Međutim, Gini indeks kao mera koncentracije ima neka nepoželjna svojstva (Lütkebohmert, 2009), a takođe ima iste probleme kao i HHI.

4.2. Granularity adjustment

S obzirom da je apriori nejasno kako na osnovu indeksa koncentracije odrediti ekonomski kapital za rizik koncentracije, ideja je da probamo da pristupimo ovoj oceni direktno na bazi definicije kreditnog gubitka i raspodele verovatnoće slučajnih veličina koje određuju kreditni gubitak.

Podsetimo se, veličina koju posmatramo je

$$L_N = \sum_{i=1}^N s_i D_i l_i.$$

U odsustvu koncentracije imali smo da

$$L_N - E(L_N|X = x) \rightarrow 0 \text{ skoro sigurno kad } N \rightarrow \infty.$$

Ono što želimo da ocenimo u prisustvu koncentracije jeste

$$L_N - E(L_N|X = x).$$

4.2.1. Motivacija

Da bismo motivisali dalje izlaganje, posmatrajmo najpre jedan jednostavan primer (Lütkebohmert, 2009). Pretpostavimo da sistemski faktor ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i varijansom σ_s^2 , da individualni faktori imaju takođe normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i varijansom σ_e^2 i da je gubitak na pojedinačnom dužniku i jednostavno zbir realizacije sistemskog i odgovarajućeg individualnog faktora, $i = 1, \dots, N$. U tom slučaju procenat gubitka na ukupnom portfoliju takođe ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i varijansom

$$\sigma_s^2 + \frac{\sigma_e^2}{N}.$$

q -ti kvantil raspodele gubitka na ukupnom portfoliju je jednak

$$\Phi^{-1}(q) \cdot \sqrt{\sigma_s^2 + \frac{\sigma_e^2}{N}}.$$

Dakle, ovaj broj asimptotski teži $\Phi^{-1}(q) \cdot \sqrt{\sigma_s^2}$ kada $N \rightarrow \infty$.

Korekcija za odsustvo granularnosti se može dobiti primenom Tejlorovog razvoja:

$$\sqrt{\sigma_s^2 + \frac{\sigma_e^2}{N}} = \sigma_s + \frac{1}{2\sigma_s} \frac{\sigma_e^2}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Korekcija je

$$\Phi^{-1}(q) \cdot \frac{1}{2\sigma_s} \frac{\sigma_e^2}{N}.$$

4.2.2. Opšti slučaj

Posmatrajmo sada opšti slučaj. Prenosimo izvođenje iz (Lütkebohmert & Gordy, 2013), sa nešto izmenjenim oznakama.

Neka je L ukupan ekonomski kapital za kreditni rizik, A asimptotska ocena ekonomskog kapitala za kreditni rizik u odsustvu koncentracije, a $R = L - A$ rezidualni ekonomski kapital za rizik koncentracije.

Postmatrajmo proizvoljne neprekidne slučajne veličine A , R i $L = A + R$. Neka je f_A gustina raspodele slučajne veličine A , i neka je $f_{R|A}$ uslovna gustina raspodele slučajne veličine R . Gustina raspodele slučajne veličine L data je sa

$$f_L(l) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{A,R}(l-r, r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(l-r) f_{R|A}(r|l-r) dr.$$

Ako primenimo Tejlorov razvoj na $f_A(l-r) f_{R|A}(r|l-r)$ oko tačke l dobijamo

$$\begin{aligned} f_A(l-r) f_{R|A}(r|l-r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dl^k} (f_A(l) f_{R|A}(r|l)) ((l-r) - l)^k \\ &= f_A(l) f_{R|A}(r|l) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dl^k} (f_A(l) f_{R|A}(r|l)) r^k. \end{aligned}$$

Zamenom u prethodnu jednačinu dobijamo

$$f_L(l) = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(l) f_{R|A}(r|l) dr + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dl^k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_A(l) f_{R|A}(r|l) r^k dr \right).$$

Ako sa $m_k(l)$ označimo k -ti uslovni moment slučajne veličine R pri uslovu $A = l$:

$$m_k(l) = E[R^k | A = l] = \int_{-\infty}^{\infty} r^k f_{R|A}(r|l) dr,$$

dobijamo

$$f_L(l) = f_A(l) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dl^k} (f_A(l)m_k(l)).$$

Po definiciji,

$$\int_{-\infty}^{\alpha_q(A)} f_A(t) dt = \int_{-\infty}^{\alpha_q(L)} f_L(t) dt = q.$$

Potražimo

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_q(A)}^{\alpha_q(L)} f_A(t) dt &= \int_{-\infty}^{\alpha_q(L)} f_A(t) dt - \int_{-\infty}^{\alpha_q(A)} f_A(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha_q(L)} f_L(t) dt - \int_{-\infty}^{\alpha_q(L)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (f_A(t)m_k(t)) dt - \int_{-\infty}^{\alpha_q(A)} f_A(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (f_A(t)m_k(t)) \Big|_{t=\alpha_q(L)}. \end{aligned}$$

Razvijanjem obe strane u Tejlorov red oko $\alpha_q(A)$, pod pretpostavkom $m_1(t) = 0$, dobijamo

$$f_A(\alpha_q(A)) \cdot (\alpha_q(L) - \alpha_q(A)) \approx -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (f_A(t)m_2(t)) \Big|_{t=\alpha_q(A)},$$

odnosno

$$\alpha_q(L) - \alpha_q(A) \approx -\frac{1}{2f_A(\alpha_q(A))} \frac{d}{dt} (f_A(t)m_2(t)) \Big|_{t=\alpha_q(A)}.$$

Kao što smo rekli na početku, uzimamo:

$$A := \mu(x), \quad R := L_N - \mu(x), \quad L := L_N,$$

gde je L_N gubitak, a $\mu(x)$ asimptotski gubitak kreditnog portfolija u odsustvu koncentracije pri uslovu $X = x$, gde je X sistemski faktor. S obzirom da je $\mu(x)$ po pretpostavci rastuća funkcija po x , umesto uslova $A = \mu(x)$ možemo uzeti uslov $X = x$.

Važi

$$m_1(\mu(x)) = E[R|X = x] = E[L_N|X = x] - E[E[L_N|X = x]|X = x] = 0,$$

$$m_2(\mu(x)) = E[R^2|X = x] = Var[L_N|X = x] = \sigma^2(x),$$

gde je $\sigma^2(x)$ varijansa gubitka u odnosu na asimptotski gubitak kreditnog portfolija u odsustvu koncentracije pri uslovu $X = x$.

Dobijamo

$$\begin{aligned} GA &:= \alpha_q(L_N) - \mu(\alpha_q(X)) \approx -\frac{1}{2f_A(\mu(\alpha_q(X)))} \frac{d}{d\mu(x)} (f_A(\mu(x))m_2(\mu(x))) \Big|_{\mu(x)=\alpha_q(\mu(X))} \\ &= -\frac{1}{2h(\alpha_q(X))} \frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)}{\mu'(x)} \sigma^2(x) \right) \Big|_{x=\alpha_q(X)}, \end{aligned}$$

gde je h je gustina raspodele slučajne veličine X , i gde smo iskoristili $\alpha_q(\mu(x)) = \mu(\alpha_q(x))$ i $f_A(t)dt = \mu'(x)h(x)dx$. GA označava *granularity adjustment*, odnosno prilagođenje za odsustvo savršene granularnosti.

4.2.3. IRB model

Veličine $h(x), \mu(x), \sigma^2(x)$ u gornjoj formuli zavise od modela. Da bismo izračunali granularity adjustment za IRB model trebalo bi izračunati ove veličine za taj model. Pokazuje se, međutim, da su formule koje se dobijaju komplikovane i nepogodne za upotrebu (Lütkebohmert, 2009).

Umesto za IRB model, izvođenje se stoga radi za Credit Suisseov CreditRisk+ model,¹⁴ a zatim se u rezultujuće formule uvršćuju ocene iz IRB modela.

Pretpostavka modela je da sistemski faktor X ima gama raspodelu sa očekivanjem 1 i varijansom $\frac{1}{\xi}$. Verovatnoća difolta dužnika i zavisi od sistemskog faktora po formuli

$$p_i(x) = p_i \cdot (1 - w_i + w_i x),$$

gde je w_i mera zavisnosti od sistemskog faktora. Takođe, pretpostavka modela je da slučajna veličina d_i koja indikuje difolt ima Poissonovu raspodelu. S druge strane, pretpostavka modela

¹⁴ Pomenut u fusnoti u sekciji Modeliranje raspodele verovatnoće gubitaka na kreditnom portfoliju 3.3. Ovo je jedan od industrijskih modela za kreditni rizik na nivou portfolija.

je da je gubitak u slučaju difolta, l_i , takođe stohastička varijabla, ali koja ne zavisi od sistemskog faktora.

Imamo

$$\mu(x) = E[L_N|x] = \sum_{i=1}^N s_i \mu_i(x), \quad \sigma^2(x) = Var[L_N|x] = \sum_{i=1}^N s_i^2 \sigma_i^2(x),$$

gde

$$\mu_i(x) = E[d_i l_i | x] = p_i \cdot (1 - w_i + w_i x) \cdot E[l_i],$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(x) &= E[d_i^2 l_i^2 | x] - E[d_i l_i | x]^2 = E[d_i^2 | x] E[l_i^2] - \mu_i(x)^2 \\ &= (p_i(x) + p_i(x)^2) E[l_i^2] - \mu_i(x)^2 = \mu_i(x) \frac{E[l_i^2]}{E[l_i]} + \mu_i(x)^2 \frac{E[l_i^2]}{E[l_i]^2} - \mu_i(x)^2 \\ &= \mu_i(x) \frac{E[l_i^2]}{E[l_i]} + \mu_i(x)^2 \frac{Var[l_i]}{E[l_i]^2}, \end{aligned}$$

gde smo iskoristili pretpostavku da d_i ima Poissonovu raspodelu, tj. $E[d_i | x] = Var[d_i | x] = p_i(x)$, pa imamo

$$E[d_i^2 | x] = Var[d_i^2 | x] + E[d_i | x]^2 = p_i(x) + p_i(x)^2.$$

Nakon zamene u opštu formulu za GA, i smene

$$EL_i = p_i E[l_i], \quad UL_i = p_i E[l_i] w_i (\alpha_q(X) - 1), \quad TL_i = EL_i + UL_i,$$

dobijamo

$$GA = \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2 \left(k \left(TL_i \cdot \frac{E[l_i^2]}{E[l_i]} + TL_i^2 \cdot \frac{Var[l_i]}{E[l_i]^2} \right) - UL_i \cdot \frac{E[l_i^2]}{E[l_i]} - 2UL_i \cdot TL_i \cdot \frac{Var[l_i]}{E[l_i]^2} \right)}{2 \sum_{i=1}^N s_i UL_i},$$

gde je

$$k = \left(\xi + \frac{1 - \xi}{\alpha_q(X)} \right) (\alpha_q(X) - 1).$$

S obzirom da su EL_i, UL_i, TL_i mali brojevi, tipično reda 0.1 ili manjeg, ako zanemarimo kvadratne članove dobijamo približnu ocenu

$$GA_{approx} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2 (k \cdot TL_i - UL_i) \cdot \frac{E[l_i^2]}{E[l_i]}}{2 \sum_{i=1}^N s_i UL_i}.$$

GA , odnosno GA_{approx} , predstavlja faktor koji se primenjuje na EAD.

Ocene EL_i, UL_i, TL_i uzimamo iz IRB modela. Kao referentnu vrednost za k literatura definiše 4.83 (Lütkebohmert, 2009). $E[l_i^2]$ možemo oceniti primenom formule

$$E[l_i^2] = Var[l_i] + E[l_i]^2,$$

gde je $E[l_i]$ LGD, a $Var[l_i]$ možemo oceniti primenom formule

$$Var[l_i] = 0.25 \cdot E[l_i](1 - E[l_i]).$$

4.3. Neka regulatorna rešenja

Kao što smo rekli, ovaj pristup, iako predložen od strane radne grupe za rizik koncentracije u okviru Bazelskog komiteta tokom rada na Bazel II standardu, nije uključen u konačan tekst standarda. Standard samo definiše zahtev da banke u okviru Stubu 2 razviju modele i ocene kapitalni zahtev za pokriće rizika kreditne koncentracije. Zadatak definisanja metodologije za kvantifikaciju rizika koncentracije ostao je, tako, na pojedinačnim bankama i lokalnim regulatorima.

4.3.1. Velika Britanija

Neki regulatori su, tako, definisali sopstvene smernice za kvantifikaciju rizika koncentracije. Prudential Regulation Authority Banke Engleske¹⁵ (Bank of England Prudential Regulation Authority, 2020) u svojim smernicama za obračun kapitalnih zahteva u Stubu 2 definiše sledeće faktore za obračun kapitalnog zahteva za rizik individualne kreditne koncentracije u zavisnosti od HHI:

¹⁵ Centralna Banka Ujedinjenog Kraljevstva.

Tabela 3: Faktori za obračun kapitalnog zahteva za rizik koncentracije – Velika Britanija

HHI (%)	Faktor
0–0.29%	0–0.5%
0.29–0.59%	0.5–1%
0.59–1.15%	1–2%
1.15–1.65%	2–3%
> 1.65%	3–4%

Zapravo, kada primenimo linearnu regresiju vidimo da su faktori definisani tako da

$$k = 1.8 \cdot HHI.$$

Faktor k se primenjuje na RWA.

4.3.2. Španija

Banka Španije u svojim smernicama za sprovođenje ICAAP-a (Banco de España, 2008) definiše sledeće faktore:

Tabela 4: Faktori za obračun kapitalnog zahteva za rizik koncentracije – Španija

HHI	Faktor
0.10	0.0%
0.15	1.7%
0.30	7.4%
0.60	15.4%
1.20	26.6%
2.40	60.2%
4.80	129.0%
9.60	247.9%
≥ 42.80	1071.2%

U ovom pristupu HHI se izračunava za 1000 najvećih dužnika, a faktor se primenjuje na izračunati kapitalni zahtev za kreditni rizik za isti skup dužnika.

Kada primenimo linearnu regresiju vidimo da su faktori definisani tako da

$$k = 25 \cdot HHI.$$

4.3.3. Švedska

Švedska regulatorna agencija Finansinspektionen (Finansinspektionen, 2014) za banke koje koriste standardizovani pristup definiše sledeću formulu za obračun kapitalnog zahteva za rizik koncentracije:

$$k = 9 \cdot (1 - e^{-18 \cdot AHI}),$$

pri čemu AHI predstavlja prilagođeni HHI za 30 najvećih dužnika:

$$AHI = \frac{\sum_{i=1}^{30} EAD_i}{\sum_{i=1}^N EAD_i} \cdot \sum_{i=1}^{30} \frac{EAD_i^2}{(\sum_{i=1}^{30} EAD_i)^2}.$$

Faktor k se primenjuje na kapitalni zahtev za kreditni rizik u Stubu 1.

Od banaka koje koriste IRB pristup Finansinspektionen zahteva primenu pojednostavljenog granularity adjustmenta:

$$GA_{approx} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2 (4.83 \cdot TL_i - UL_i) \cdot (0.25 + 0.75 \cdot LGD_i)}{2(\sum_{i=1}^N s_i UL_i)^2}.$$

Faktor se primenjuje na kapitalni zahtev za kreditni rizik u Stubu 1.

4.3.4. Island

Islandska regulatorna agencija Fjármálaeftirlitið (Fjármálaeftirlitið, 2019) definiše sledeću formulu za kapitalni zahtev za rizik koncentracije¹⁶:

$$k = 1.96 \cdot HHI.$$

Faktor k se primenjuje na EAD.

Ovi modeli mogu biti modeli koje će banke direktno primeniti u Stubu 2 ili mogu biti korišćeni za ocenu referentnih vrednosti za kontrolu ocena dobijenih primenom internih modela i

¹⁶ Iz obračuna EAD kao i HHI isključuju se izloženosti sa ponderom 0%, kao i izloženosti u statusu difolta.

metodologija banke. Generalno, kod svih regulatora, od većih banaka kao i banaka sa višim nivoom koncentracije, očekuje se primena sofisticiranijih pristupa.

Iako se većina modela zasniva na HHI, oni su na prvi pogled vrlo različiti. Apriori je nejasno po kom kriterijumu bi banka koja nema regulatornu obavezu da primenjuje ijedan od ovih modela, a nema ni interno razvijen model, izabrala neki od predstavljenih modela za ocenu kapitalnog zahteva za rizik koncentracije u Stubu 2.

5. Analiza modela rizika kreditne koncentracije

Sada ćemo na konstruisanim primerima kreditnih portfolija analizirati adekvatnost ocena iz opisanih modela ekonomskog kapitala za rizik koncentracije:

- granularity adjustment, i
- regulatorni modeli bazirani na HHI.

Kao referentne vrednosti uzećemo ocene dobijene Monte Karlo metodom, i u odnosu na njih ćemo analizirati vrednosti dobijene primenom analitičkih formula.

Želimo da razumemo nekoliko stvari:

1. Kako u slučaju potpuno homogenog portfolija (svi dužnici imaju jednak EAD, PD i LGD) broj dužnika utiče na granularnost portfolija u smislu IRB modela?
2. Kako koncentracija EAD-a pri fiksnom PD-ju i LGD-ju utiče na kapitalni zahtev za rizik koncentracije?
3. Kako utiče raspodela PD-jeva?
4. Kako utiče korelacija između PD-ja i EAD-a?

Posmatraćemo isključivo hipotetička portfolija izloženosti prema segmentu privrednih društava. Pretpostavka je da su portfolija izloženosti prema stanovništvu dovoljno granularna, a u svakom slučaju imaju daleko niži nivo koncentracije nego portfolija izloženosti prema privrednim društvima.

5.1. Hipotetička portfolija

U svim portfolijima svi dužnici imaju jednak LGD od 45%, u skladu sa tzv. osnovnim IRB (foundation IRB – F-IRB) pristupom.¹⁷

¹⁷ U okviru IRB pristupa, Bazel II razlikuje osnovni (*foundation*) i napredni (*advanced*) IRB pristup. U osnovnom pristupu, za segment privrede, banke koriste interne ocene PD-ja, dok su ocene LGD i EAD parametara propisane standardom. U naprednom pristupu banke koriste interne ocene i za LGD i EAD. Za segment stanovništva standard poznaje samo napredni pristup.

Radi jednostavnosti analize i poređenja rezultata, u svim portfolijima ćemo izloženosti prema pojedinačnim dužnicima standardizovati ukupnim iznosom portfolija, tako da su pojedinačne izloženosti zapravo udeli u ukupnom portfoliju, a ukupan portfolio ima iznos 1.

5.1.1. Homogen portfolio

Posmatraćemo najpre portfolija sastavljena od N jednakih izloženosti sa jednakim PD_{const} .

- N ćemo birati iz skupa $S_N = \{10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000, 10000\}$.
- PD_{const} ćemo birati iz skupa $S_{PD} = \{0.40\%, 1.08\%, 1.42\%, 2.81\%, 3.23\%, 6.77\%\}$.
Ove vrednosti su odabrane tako da prosečan PD odgovara srednjem PD za slučajeve kada PD nije konstantan na nivou portfolija, koji će biti opisani u nastavku.

Na ovaj način dobijamo ukupno $|S_N| \cdot |S_{PD}| = 10 \cdot 6 = 60$ različitih portfolija.

5.1.2. Portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta

Nadalje ćemo N birati iz skupa $\{100, 200, 500, 1000\}$, odnosno koncentrisaćemo se na portfolija male i srednje veličine, bez mikro i velikih portfolija. Čak i najveće banke u Srbiji imaju do 1000 ili nešto preko 1000 dužnika u segmentu privrede. U Srbiji ukupno ima oko 500 preduzeća koja su definisana kao velika i oko 2500 preduzeća koja su definisana kao srednja (RZS, 2018.).¹⁸

Da bismo dobili portfolija u kojima postoji koncentracija izloženosti, koristićemo log-normalnu i Pareto raspodelu, koje se u literaturi često pominju kao raspodele kojima se mogu opisivati veličine kompanija ili iznosi.

Slučajna veličina X ima log-normalnu raspodelu, ako $Y = \log X$ ima normalnu raspodelu. Ako Y ima raspodelu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, onda X ima log-normalnu raspodelu sa očekivanjem μ_X i varijansom σ_X^2 , gde su μ_X i σ_X^2 dati sa

$$\mu_X = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}},$$

¹⁸ Definicije veličine preduzeća se razlikuju od zemlje do zemlje. U ovom kontekstu velika preduzeća su preduzeća sa 250 i više zaposlenih, a srednja preduzeća sa 50 i više zaposlenih.

$$\sigma_X^2 = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2} = (e^{\sigma^2} - 1)\mu_X^2.$$

Odavde dobijamo

$$\sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2}\right).$$

S obzirom da iznose standardizujemo u odnosu na ukupan iznos portfolija, μ_X nije od značaja, već je od značaja samo $\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2}$. Posmatraćemo slučajeve kada je standardna devijacija iznosa 2 i 4 puta veća od prosečnog iznosa izloženosti, odnosno

$$\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} = 2 \rightarrow \sigma^2 = \ln 5, \quad \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} = 4 \rightarrow \sigma^2 = \ln 17.$$

Slučajna veličina X ima Pareto raspodelu sa parametrom α ako

$$F_X(x) = f(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_{min}}{x}\right)^\alpha, & x \geq x_{min}. \\ 0, & x \leq x_{min} \end{cases}$$

S obzirom da iznose standardizujemo u odnosu na ukupan iznos portfolija, x_{min} nije od značaja, već biramo samo α .

Za Pareto raspodelu je karakteristično da postoji broj $0 \leq p \leq 0.5$ takav da $100p\%$ opservacija ima udeo od $100(1 - p)\%$ u ukupnoj sumi realizacija, i da važi (Hardy, 2010)

$$1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln(1 - p)}{\ln p}.$$

Odavde dobijamo

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{\ln(1 - p)}{\ln p}} = \frac{\ln p}{\ln \frac{p}{1 - p}} = \frac{\ln \frac{1}{p}}{\ln \frac{1 - p}{p}}.$$

Posmatraćemo slučajeve kada 20% dužnika predstavlja 70% portfolija, i kada 30% dužnika predstavlja 70% portfolija. Dobijamo

$$p = 20\% \rightarrow \alpha = \frac{\ln 5}{\ln 4} = 1.161, \quad p = 30\% \rightarrow \alpha = \frac{\ln \frac{10}{3}}{\ln \frac{7}{3}} = 1.461.$$

Ocena udela najvećih 1%, 2%, 5%, 10%, 20% i 50% izloženosti u ukupnom portfoliju pri ovim parametrima data je u sledećoj tablici:

Tabela 5: Udeo najvećih izloženosti u ukupnom portfoliju za različite raspodele

Distribucija	Parametar disperzije ¹⁹	1%	2%	5%	10%	20%	50%
Log-normal	0.84	15%	22%	35%	49%	67%	90%
Pareto	1.42	25%	31%	41%	50%	62%	81%
Log-normal	1.11	26%	36%	52%	66%	80%	95%
Pareto	1.16	47%	53%	62%	69%	78%	90%

Dakle, uzimamo:

- $S_N = \{100, 200, 500, 1000\}$;
- $S_{PD} = \{0.40\%, 1.08\%, 1.42\%, 2.81\%, 3.23\%, 6.77\%\}$;
- $S_{\sigma^2}^{EAD \log-normal} = \{\log 5, \log 17\}$.
- $S_{\alpha}^{EAD Pareto} = \{1.161, 1.461\}$.

Kombinacijom vrednosti parametara dobijamo ukupno $|S_N| \cdot |S_{PD}| \cdot (|S_{\sigma^2}^{EAD \log-normal}| + |S_{\alpha}^{EAD Pareto}|) = 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$ portfolija.

5.1.3. Portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta

Verovatnoća difolta je broj između 0 i 1, pri čemu je prosečan PD reda veličine 0.1 – 1%, tako da su verovatnoće difolta praktično ograničene odozdo sa 0 a odozgo praktično neograničene. Stoga nam je i za verovatnoću difolta potrebna neka asimetrična raspodela ograničena sleva. Verovatnoće se često transformišu logit funkcijom,

$$x = \log \frac{p}{1-p},$$

¹⁹ σ za log-normalnu, odnosno α za Pareto raspodelu.

u skor koji je neograničen i odozdo i odozgo. Pretpostavimo da ovaj skor ima normalnu raspodelu, u kom slučaju PD,

$$p = \frac{1}{1 + e^{-x}},$$

ima tzv. logit-normalnu raspodelu.

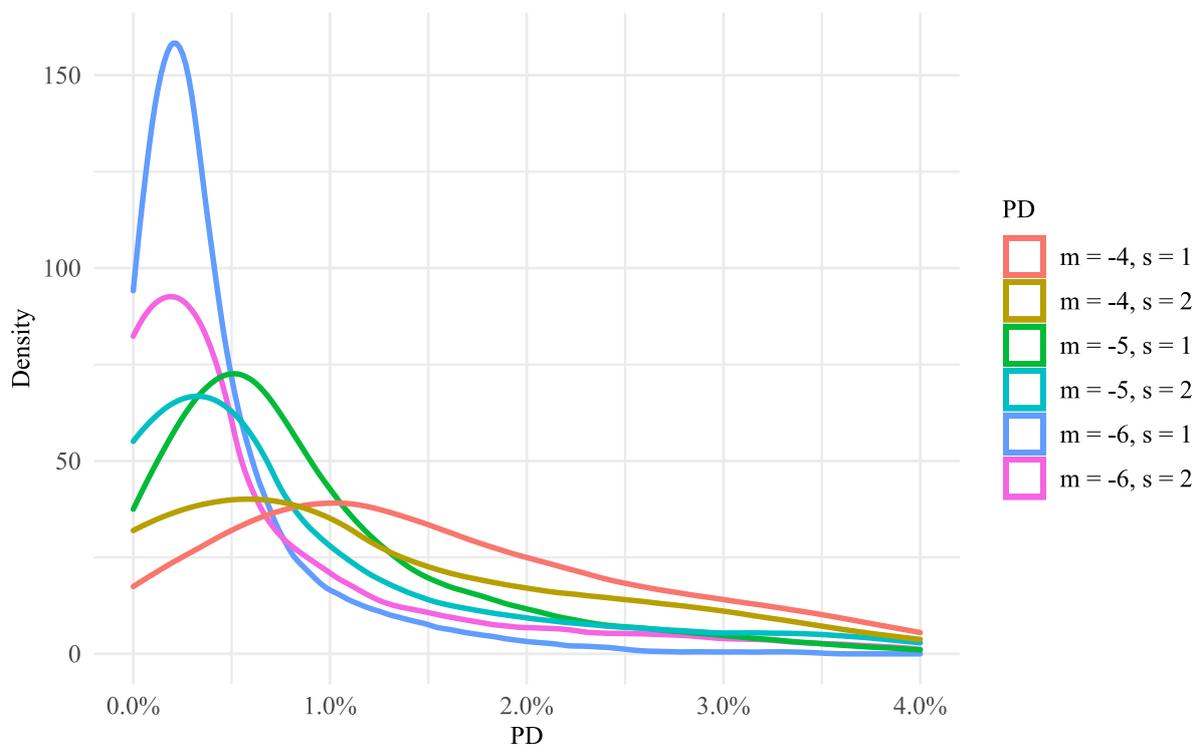
- Očekivanje normalne raspodele skora, μ , biraćemo iz skupa $\{-6, -5, -4\}$.
- Standardnu devijaciju skora, σ , biraćemo iz skupa $\{1, 2\}$.

Ne postoji analitički izraz za ocenu parametara logit-normalne raspodele u zavisnosti od parametara normalne raspodele, ali ocene možemo dobiti kvazi Monte Karlo metodom.

Tabela 6: Očekivanje logit-normalne raspodele

	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$
$\mu = -6$	0.40%	1.42%
$\mu = -5$	1.08%	3.23%
$\mu = -4$	2.81%	6.77%

Grafikon 2: Gustina verovatnoće za logit-normalnu raspodelu



Dakle, uzimamo:

- $S_N = \{100, 200, 500, 1000\}$;
- $S_\mu^{PD} = \{-6, -5, -4\}$, $S_{\sigma^2}^{PD} = \{1, 2\}$;
- $S_{\sigma^2}^{EAD \log-normal} = \{\log 5, \log 17\}$.
- $S_\alpha^{EAD Pareto} = \{1.161, 1.461\}$.

Kombinacijom vrednosti parametara dobijamo ukupno $4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$ portfolija.

5.1.4. Portfolio sa korelacijom između izloženosti i verovatnoća difolta

Konačno, uvešćemo faktor korelacije između iznosa izloženosti i verovatnoće difolta. Korelaciju između izloženosti i verovatnoće difolta ćemo za potrebe obračuna postići tako što ćemo najpre izvlačiti dve korelisane slučajne veličine sa normalnom raspodelom, a zatim ćemo ove veličine transformisati u log-normalnu, Pareto ili logit-normalnu raspodelu. Nivo korelacije između normalnih varijabli ćemo birati iz skupa $\{-0.6, -0.3, +0.3, +0.6\}$. Nivo korelacije nakon transformacije neće biti isti, ali videćemo da će u proseku ostati u onom znaku i srazmeri sa kojim su veličine inicijalno izvlačene iz normalne varijable.

Kombinacijom vrednosti parametara dobijamo ukupno $96 \cdot 4 = 384$ portfolija.

Na ovaj način dobijamo ukupno 636 hipotetičkih portfolija.

Tabela 7: Hipotetička portfolija

Slučaj	N	PD	EAD	$\rho(PD, EAD)$	Broj portfolija
1	10	6	1	1	60
2	4	6	4	1	96
3	4	6	4	1	96
4	4	6	4	4	384
Ukupno					636

Za svaki ovako konstruisani portfolio, za svakog dužnika, opisanim metodama dobijamo PD i EAD. LGD je za sva portfolija i sve dužnike fiksiran na 45%. Primenom IRB formule za korelaciju dobijamo i R. Na osnovu ovih varijabli za svaki portfolio možemo izračunati kapitalni zahtev po IRB formuli, granularity adjustment, HHI, i kapitalne zahteve za rizik koncentracije po nekoj od regulatornih formula na osnovu HHI.

5.2. Postavka Monte Karlo simulacija

Za svaki portfolio ocenićemo, takođe, ekonomski kapital sa nivoom poverenja od 99.9% primenom metoda Monte Karlo. Drugim rečima, sprovedćemo određeni, veliki, broj slučajnih simulacija, gde ćemo u svakoj simulaciji dobiti određeni iznos gubitka. Gubici iz svih simulacija aproksimiraju teorijsku raspodelu gubitaka, pa ćemo 99.9%-nim kvantom raspodele empirijskih gubitaka aproksimirati 99.9%-ni kvantil teorijske raspodele kreditnih gubitaka.

5.2.1. Model

U osnovi Monte Karlo simulacije je jednofaktorski model difolta koji je u osnovi i IRB modela (Löffler & Posch, 2011).

- U svakoj simulaciji s izvlačimo slučajni faktor $z(s)$ iz standardne normalne raspodele.
- U svakoj simulaciji takođe izvlačimo N_B nezavisnih slučajnih faktora $e_i(s), i = 1, \dots, N_B$ takođe iz standardne normalne raspodele, koji predstavljaju indikatore finansijskog stanja pojedinačnih dužnika.
- Dužnik i difoltira u simulaciji s , tj. $d_i(s) = 1$, ako

$$z(s)\sqrt{R} + e_i(s)\sqrt{1-R} < \Phi^{-1}(PD_i).$$

- Gubitak u simulaciji s jednak je

$$L(s) = \sum_{i=1}^{N_B} D_i \cdot EAD_i \cdot LGD_i.$$

Iz skupa svih simuliranih gubitaka $\{L(s)\}_{s \in \{1, \dots, N_S\}}$ uzimamo 99.9%-ni kvantil kao aproksimaciju 99.9%-nog kvantila teorijske raspodele kreditnih gubitaka.

5.2.2. Metod uzorkovanja

Prilikom računarskog uzorkovanja slučajnih promenljivih dobijamo nizove pseudoslučajnih brojeva, koji za sve praktične potrebe izgledaju kao slučajni, i čija raspodela teži pretpostavljenoj teorijskoj raspodeli. Međutim, da bismo dovoljno tačno aproksimirali raspodelu, a naročito u njenom repu, može nam biti potreban jako veliki uzorak.

S obzirom da nas zanima 99.9%-ni kvantil raspodele, najveći deo opservacija nije od značaja za njegovo određivanje. Od interesa su samo opservacije u repu raspodele, kojih ima samo $0.1\% \cdot N_S$, gde je N_S ukupan broj opservacija. Ovako mali broj opservacija od značaja može rezultovati nestabilnim ocenama pri nedovoljno velikom ukupnom broju opservacija.

Jedan od načina kako možemo povećati broj opservacija u repu raspodele jeste preferencijalno uzorkovanje (*importance sampling*). Naime, možemo sa većom verovatnoćom birati one opservacije koji su od većeg interesa, a sa manjom verovatnoćom birati one opservacije koji su od manjeg interesa. U aposteriornom obračunu kvantila uzimamo u obzir apriorne verovatnoće da pojedinačne opservacije budu izvučene (Löffler & Posch, 2011).

Na primer, ako modeliramo slučajnu veličinu L , koji zavisi od slučajne veličine Z , koja ima standardnu $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu, ali nas zanimaju prvenstveno realizacije u repu raspodele L do kojih prvenstveno dolazi kada Z uzima vrednosti značajno manje od 0, onda možemo uzorkovati Z iz druge raspodele, npr. $\mathcal{N}(\mu, 1)$, $\mu < 0$, a zatim pojedinačne uzorke Z_i , $i = 1, \dots, N_S$, i njima pridružene vrednosti L_i težiniti verovatnoćom da takav uzorak bude izvučen pri teorijskoj raspodeli $\mathcal{N}(0, 1)$. Ukoliko Z_i izvlačimo iz $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodele, onda svaki izvučeni uzorak ima aposteriornu verovatnoću $\frac{1}{N_S}$. Ukoliko Z_i pak izvlačimo iz $\mathcal{N}(\mu, 1)$ raspodele, onda svaki izvučeni uzorak ima apriornu verovatnoću

$$p(Z_i) = \frac{1}{N_S} \frac{\Phi(Z_i)}{\Phi(Z_i - \mu)}.$$

Imajući u vidu prirodu modela, gde ukupan gubitak prvenstveno zavisi od realizacije sistemskog faktora, preferencijalno uzorkovanje pre svega možemo primeniti na sistemski faktor, tako što ćemo sistemski faktor Z izvlačiti iz $\mathcal{N}(\mu, 1)$ umesto $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodele.

Pored ovoga, umesto računarski generisanih pseudoslučajnih brojeva možemo primeniti neki drugi postupak uzorkovanja. Pri manjim veličinama uzorka raspodela računarski generisanih pseudoslučajnih brojeva može značajnije odstupati od pretpostavljene teorijske raspodele. Umesto računarskih algoritama slučajnog uzorkovanja možemo primeniti neki deterministički algoritam uzorkovanja, koji za konkretne potrebe ima svojstva slučajnog uzorka. Ovakav metod simulacija se naziva kvazi Monte Karlo. Da bismo uveli element slučajnosti u postupak uzorkovanja možemo uvesti mala slučajna odstupanja od determinističkih vrednosti. Ovakav metod se naziva randomizovani kvazi Monte Karlo metod (Löffler & Posch, 2011).

Metod koji ćemo primeniti je sledeći (N_S je veličina uzorka):

- Posmatramo brojeve

$$\frac{1}{N_S + 1}, \frac{2}{N_S + 1}, \dots, \frac{N_S}{N_S + 1};$$

- Vrednosti X_i biramo iz raspodele

$$\frac{i}{N_S + 1} + \mathcal{U}\left[-\frac{1}{2N_S}, +\frac{1}{2N_S}\right],$$

gde $\mathcal{U}[x, y]$ označava uniformnu slučajnu raspodelu iz intervala $[x, y]$;

- Zatim uzimamo

$$Z_i = \mu + \Phi^{-1}(Y_i).$$

Ovako dobijeno Z_i ima $\mathcal{N}(\mu, 1)$ raspodelu.

Idiosinkrazijske faktore rizika biramo običnim slučajnim uzorkovanjem.

5.2.3. Analiza varijanse

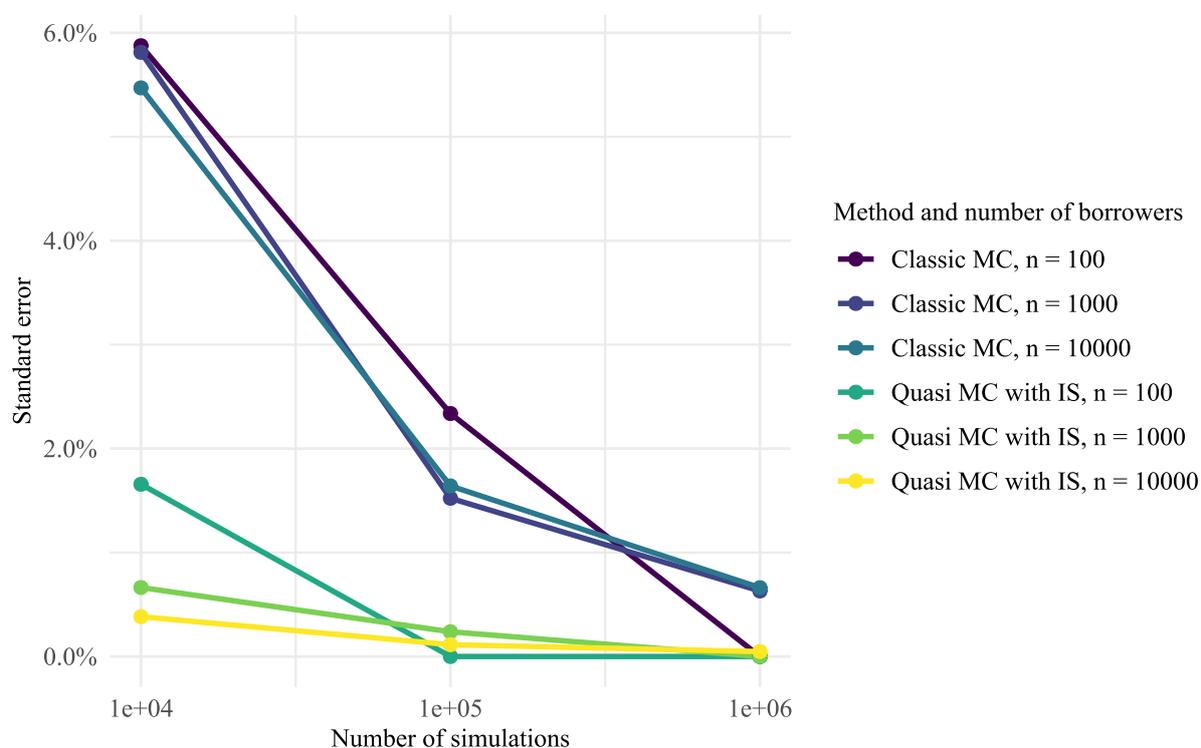
Analiziraćemo sada varijansu ocena 99.9%-nog percentila raspodele kreditnih gubitaka koje dobijamo običnim slučajnim uzorkovanjem (računarski generisani pseudoslučajni brojevi) sistemskog faktora i varijansu ocena koje dobijamo primenom preferencijalnog uzorkovanja i randomizovanog kvazi Monte Karlo metoda.

Posmatraćemo najpre slučaj homogenog portfolija. Za ove potrebe svi dužnici imaju $PD = 2\%$ i $LGD = 45\%$, a izloženost prema svakom pojedinačnom dužniku je $\frac{1}{N_B}$, gde je N_B broj dužnika.

- Broj dužnika, N_B , uzimamo iz skupa $\{100, 1000, 10000\}$.
- Broj simulacija, N_S , uzimamo iz skupa $\{10^4, 10^5, 10^6\}$.
- Za svaku kombinaciju broja dužnika, broja simulacija i metode uzorkovanja sprovodimo 30 nezavisnih Monte Karlo simulacija. Zatim izračunavamo prosek i standardnu devijaciju dobijenih ocena 99.9%-nog percentila raspodele.

Za preferencijalno uzorkovanje uzećemo najpre $\mu = -1$.

Grafikon 3: Varijansa ocena dobijenih primenom običnog Monte Karlo metoda i kvazi Monte Karlo metoda sa preferencijalnim uzorkovanjem

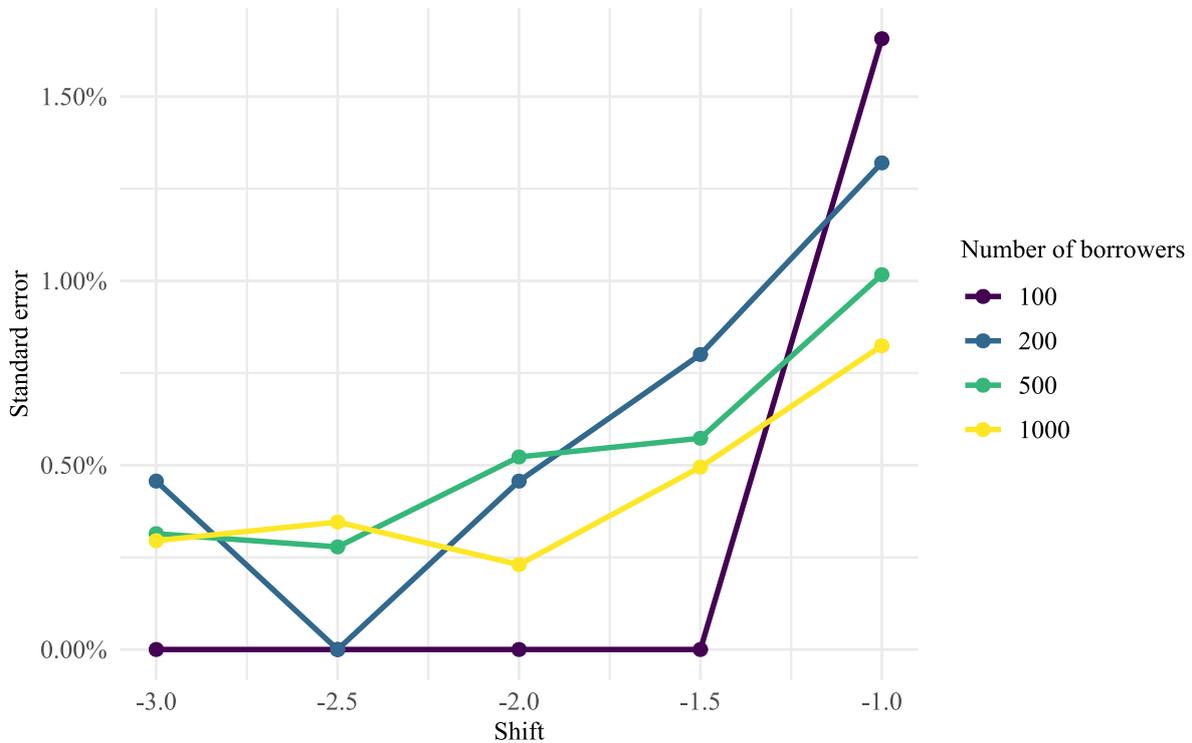


Vidimo da kvazi Monte Karlo metod sa preferencijalnim uzorkovanjem pri 100 puta manje simulacija ima manju ili uporedivu grešku ocene nego običan Monte Karlo metod.

Ispitajmo sada tačnost kvazi Monte Karlo metoda sa preferencijalnim uzorkovanjem pri različitim vrednostima pomeraja μ .

- Broj dužnika, N_B , sada uzimamo iz skupa $\{100, 200, 500, 1000\}$.
- Broj simulacija, N_S , fiksiramo na 10.000.
- Vrednosti pomeraja μ uzimamo iz skupa $\{-3, -2.5, -2, -1.5, -1\}$.
- Za svaku kombinaciju broja dužnika, i pomeraja sprovodimo 30 nezavisnih Monte Karlo simulacija.

Grafikon 4: Varijansa ocena pri različitim vrednostima pomeraja uzorkovanja pri 10.000 simulacija na primeru homogenog portfolija



Vidimo da se najmanja greška ostvaruje oko vrednosti $\mu = -2.5$.

U slučaju homogenog portfolija idiosinkrazijski faktori rizika brzo postaju zanemarljivi, pa i eventualna odstupanja uzoraka idiosinkrazijskih faktora od teorijske raspodele nemaju veći uticaj. Međutim, u slučaju portfolija sa izraženom koncentracijom to nije nužno slučaj. Zato dodatno ispitujemo tačnost kvazi Monte Karlo metoda sa preferencijalnim uzorkovanjem pri različitim vrednostima pomeraja μ u slučaju portfolija gde izloženosti imaju raspodelu u obliku geometrijskog niza sa faktorom $q = 0.9$.²⁰

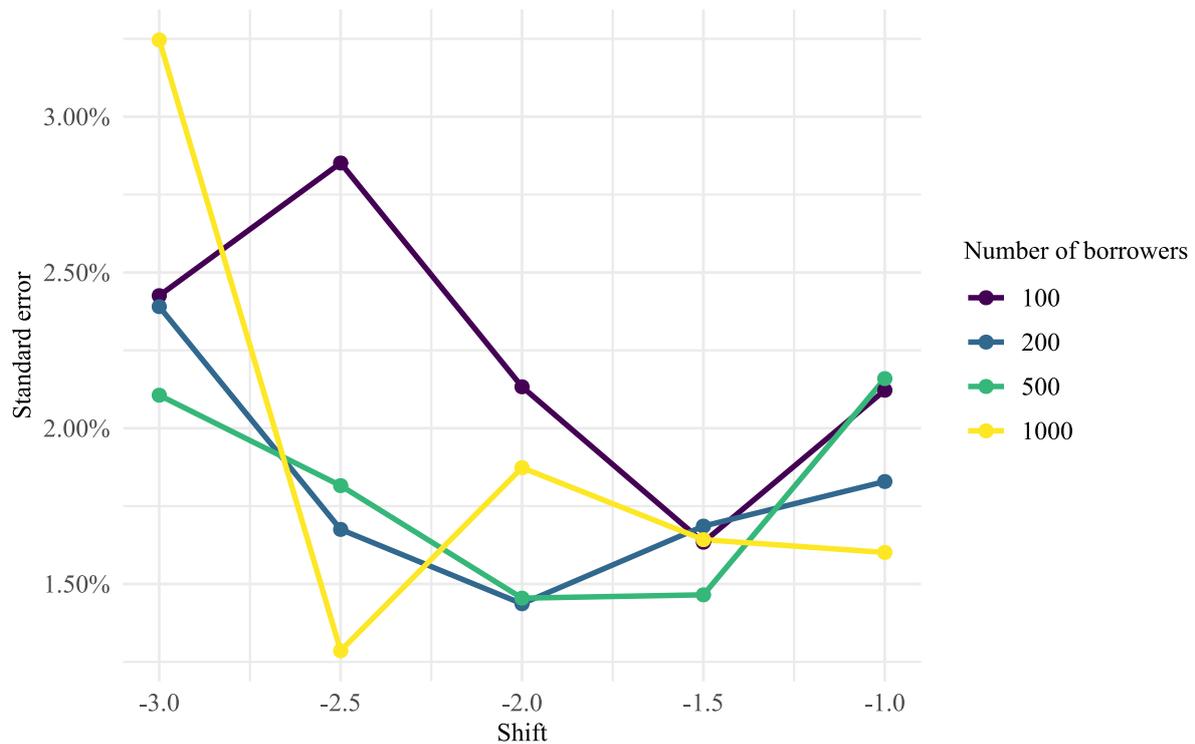
- Broj dužnika, N_B , sada uzimamo iz skupa $\{100, 200, 500, 1000\}$.
- Broj simulacija, N_S , fiksiramo na 10.000.

²⁰ Ako je najveća izloženost veličine c , sledeća je veličine cq , sledeća cq^2 , itd. Udeo najveće izloženosti je u ovom slučaju

$$\frac{c}{c(1 + q + q^2 + \dots + q^{N_B-1})} = \frac{1 - q}{1 - q^{N_B}} \rightarrow 1 - q \quad (N_B \rightarrow \infty).$$

- Vrednosti pomeraja μ uzimamo iz skupa $\{-3, -2.5, -2, -1.5, -1\}$.
- Za svaku kombinaciju broja dužnika, i pomeraja sprovodimo 30 nezavisnih Monte Karlo simulacija.

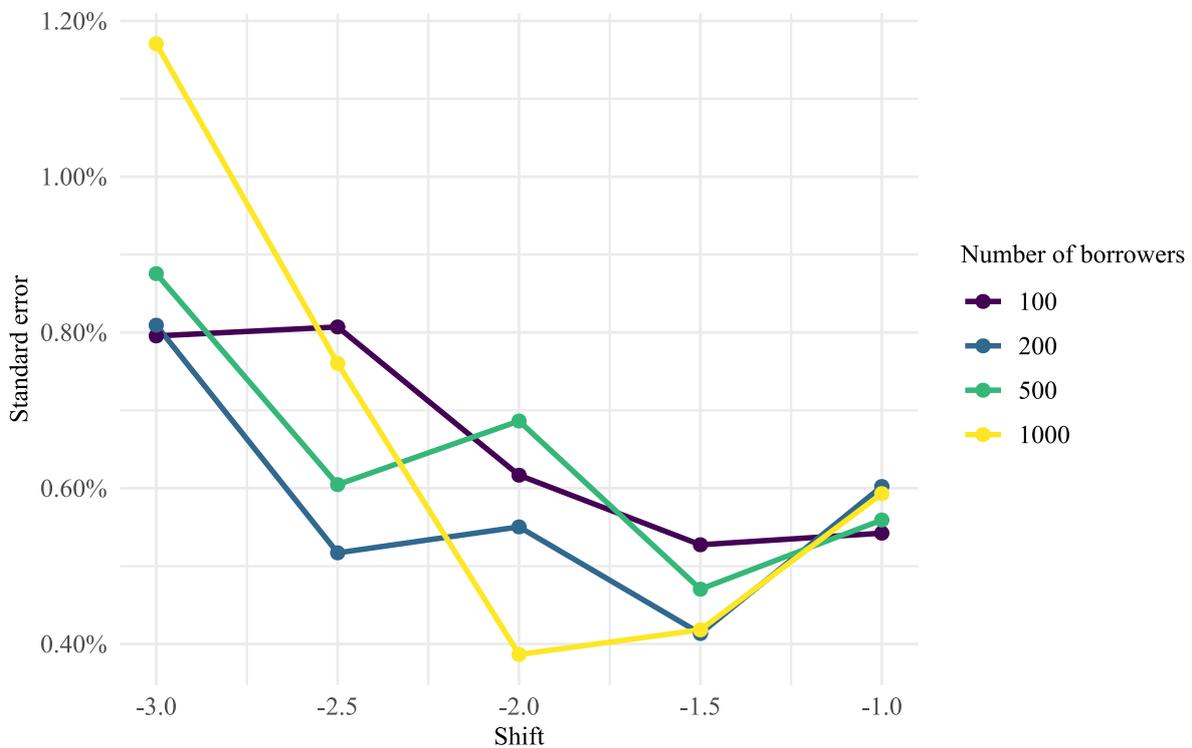
Grafikon 5: Varijansa ocena pri različitim vrednostima pomeraja uzorkovanja pri 10.000 simulacija na primeru nehomogenog portfolija



Najpre vidimo da su u ovom slučaju greške ocena znatno veće—između 30% i preko 10 puta, u proseku oko 4 puta—nego u slučaju homogenog portfolija. Takođe, vidimo veću nestabilnost u zavisnosti od vrednosti pomeraja, ali da se najmanja greška u proseku ostvaruje oko $\mu = -1.5$.

Proverimo još šta se dešava kada broj simulacija povećamo na 100.000.

Grafikon 6: Varijansa ocena pri različitim vrednostima pomeraja uzorkovanja pri 100.000 simulacija na primeru nehomogenog portfolija



Vidimo da čak i sa 100.000 simulacija imamo greške koje su veće—do 4 puta, u proseku oko 40%—nego sa 10.000 simulacija na homogenom portfoliju. Potvrđujemo da se najmanja greška u proseku ostvaruje oko $\mu = -1.5$.

Stoga ćemo nadalje uzeti $N_S = 10^5$ i $\mu = -1.5$. Greška ocene se pri ovim parametrima kreće oko 0.5%, što možemo smatrati prihvatljivim.

5.3. Rezultati simulacija

S obzirom da smo definisali 636 hipotetičkih portfolija, imamo 636 rezultata Monte Karlo simulacija. Međutim, u čak 278 slučajeva dobijene su raspodele EAD takve da je udeo najveće izloženosti veći od 10% portfolija. Ovaj nivo koncentracije ne smatramo realističnim. Stoga se u analizi nadalje ograničavamo na 358 portfolija, za koja je udeo najveće izloženosti do 10% ukupnog portfolija.

Fokus analize nam je na dva odnosa:

1. Odnos između kapitalnog zahteva za rizik koncentracije ocenjenog Monte Karlo metodom (*MC GA – Monte Carlo granularity adjustment*) i HHI;
2. Odnos između kapitalnog zahteva za rizik koncentracije ocenjenog Monte Karlo metodom (*MC GA*) i kapitalnog zahteva ocenjenog primenom formule za granularity adjustment (*IRB GA – IRB granularity adjustment*).

Kao MC GA uzimamo razliku između 99.9%-nog percentila raspodele kreditnih gubitaka ocenjenog Monte Karlo metodom i 99.9%-nog percentila ove raspodele ocenjenog primenom IRB modela (IRB kapitalni zahtev).

Ovaj inkrement možemo posmatrati kao procenat ukupnog portfolija, ili kao procenat kapitalnog zahteva za kreditni rizik ocenjenog primenom IRB modela. Stoga ćemo zapravo posmatrati četiri odnosa:

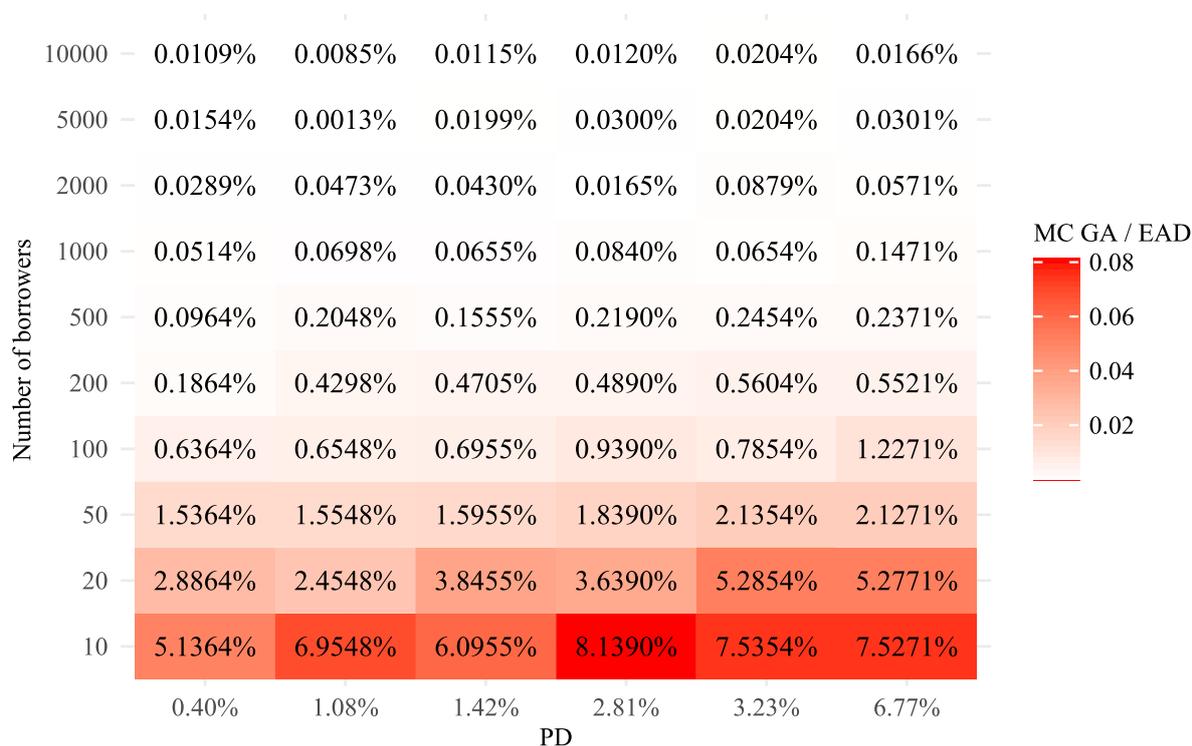
Tabela 8: Odnosi varijabli koji su predmet analize

X	Y
MC GA / ukupan EAD	HHI
MC GA / IRB kapitalni zahtev	HHI
MC GA / ukupan EAD	IRB GA / ukupan EAD
MC GA / IRB kapitalni zahtev	IRB GA / IRB kapitalni zahtev

5.3.1. Homogen portfolio

Pogledajmo najpre MC GA u odnosu na EAD u funkciji od broja dužnika i nivoa PD.

Grafikon 7: MC GA / EAD za homogen portfolio



Vidimo da je u slučaju homogenog portfolija MC GA ispod 0.1% EAD već za portfolija sa 1000 dužnika za sve razumne nivoe PD-ja. S druge strane, za portfolija sa manje od 100 dužnika MC GA prelazi 1% EAD čak i bez ikakve dodatne koncentracije.

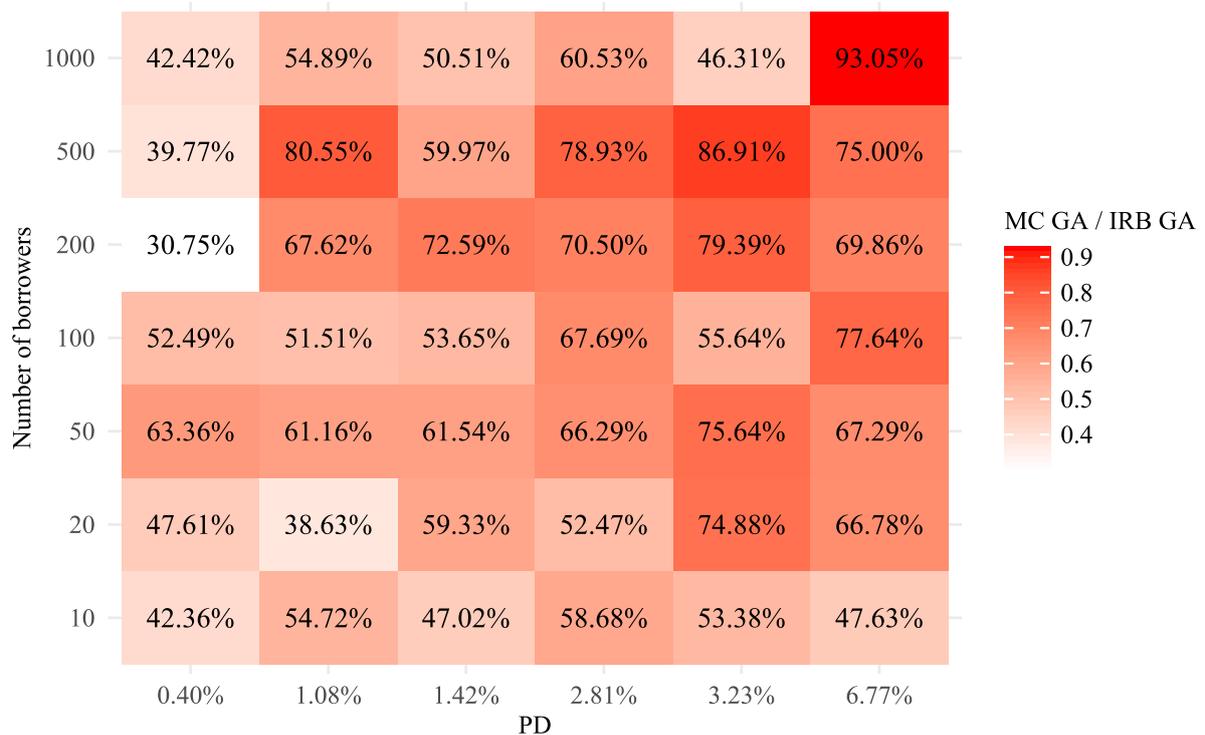
Gledano u odnosu na IRB kapitalni zahtev, MC GA je oko 1% IRB kapitalnog zahteva ili manji već za portfolija od 1000 dužnika. S druge strane, za portfolija sa 100 i manje dužnika MC GA prelazi 10% IRB kapitalnog zahteva. Ovaj procenat je veći što je PD manji, jer je u tom slučaju i IRB kapitalni zahtev manji, a MC GA očigledno sporije raste u zavisnosti od PD-ja nego IRB kapitalni zahtev.

Grafikon 8: MC GA / IRB kapitalni zahtev za homogen portfolio



Pogledajmo sada MC GA u odnosu na IRB GA.

Grafikon 9: MC GA / IRB GA za homogen portfolio



Najpre, primećuje se delimična nestabilnost usled nestabilnosti ocena dobijenih MC metodom. Zbog toga pažnju ograničavamo na portfolija do 1000 dužnika, jer je za veća portfolija GA zanemarljiv, što uvećava grešku poređenja.

Vidimo da je za mala portfolija i niske nivoe PD-ja ovaj odnos ispod 50%, što znači da IRB GA duplo ili više precenjuje potreban kapitalni zahtev. Čak i za srednja portfolija odnos je u proseku oko 70%, odnosno IRB GA za oko 30% precenjuje potreban kapitalni zahtev.

Ako regresiramo MC GA / EAD u odnosu na HHI, dobijamo sledeće ocene:

Tabela 9: MC GA / EAD u odnosu na HHI za homogen portfolio

	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	0.000991	0.00078	1.269	0.209
HHI	0.700619	0.021617	32.411	<2e-16

R^2 ovog modela je oko 0.95. S druge strane, ako na isti način regresiramo MC GA / IRB kapitalni zahtev dobijamo intercept 0, koeficijent od oko 8.9 i R^2 od oko 0.88.

Ako regresiramo MC GA / EAD u odnosu na IRB GA / EAD, dobijamo sledeće ocene:

Tabela 10: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB za homogen portfolio

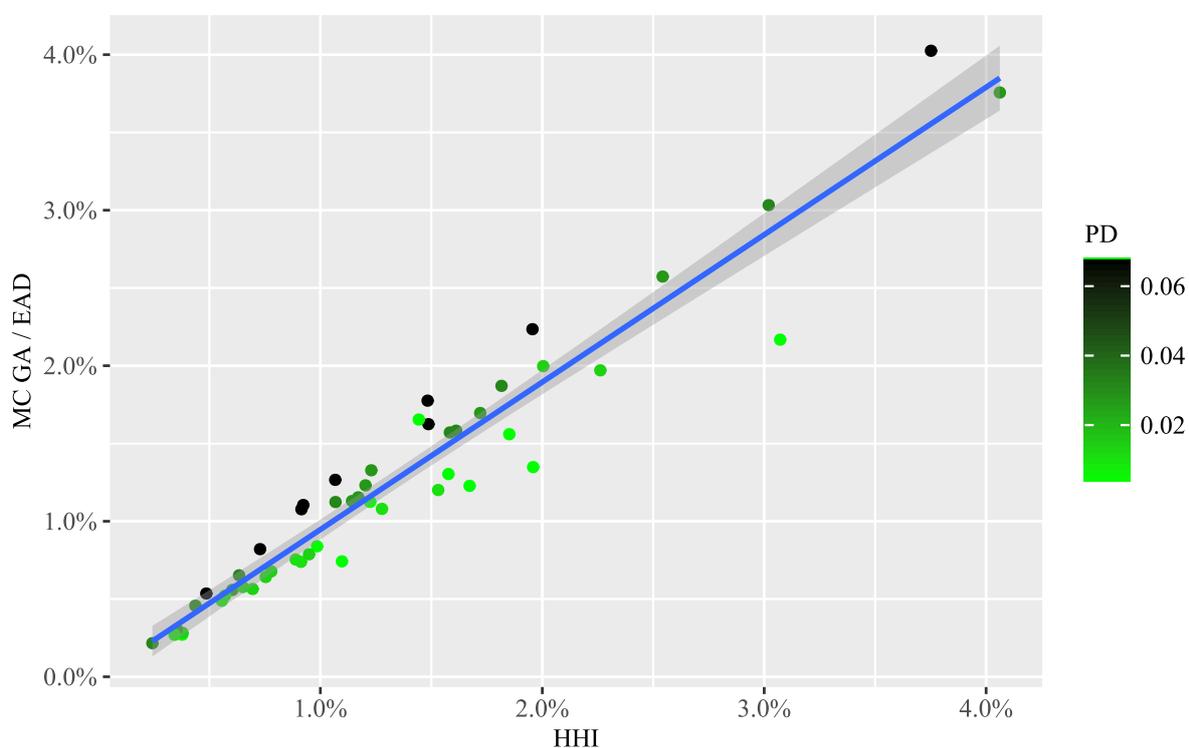
	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	0.018085	0.007498	2.412	0.019
HHI	0.478414	0.010948	43.698	<2e-16

R^2 ovog modela je oko 0.97. Gotovo identične rezultate dobijamo i ako regresiramo MC GA / EAD u odnosu na IRB GA / EAD.

5.3.2. Portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta

Pogledajmo sada slučaj portfolija koja imaju izraženu koncentraciju izloženosti, ali sa jednakim verovatnoćama difolta.

Grafikon 10: MC GA / EAD u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta



Ukoliko izračunamo regresione parametre dobijamo:

Tabela 11: MC GA / EAD u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta

	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	-1.39e-05	5.63E-04	-0.025	0.98
HHI	9.48e-01	3.61E-02	26.251	<2e-16

R^2 modela je oko 0.93. Međutim, vidimo da se portfolija sa nižim PD-jevima nalaze po pravilu ispod regresione krive, a portfolija sa višim PD-jevima iznad regresione krive.

Ako uključimo i PD u regresiju, dobijamo:

Tabela 12: MC GA / EAD u odnosu na HHI i PD – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta

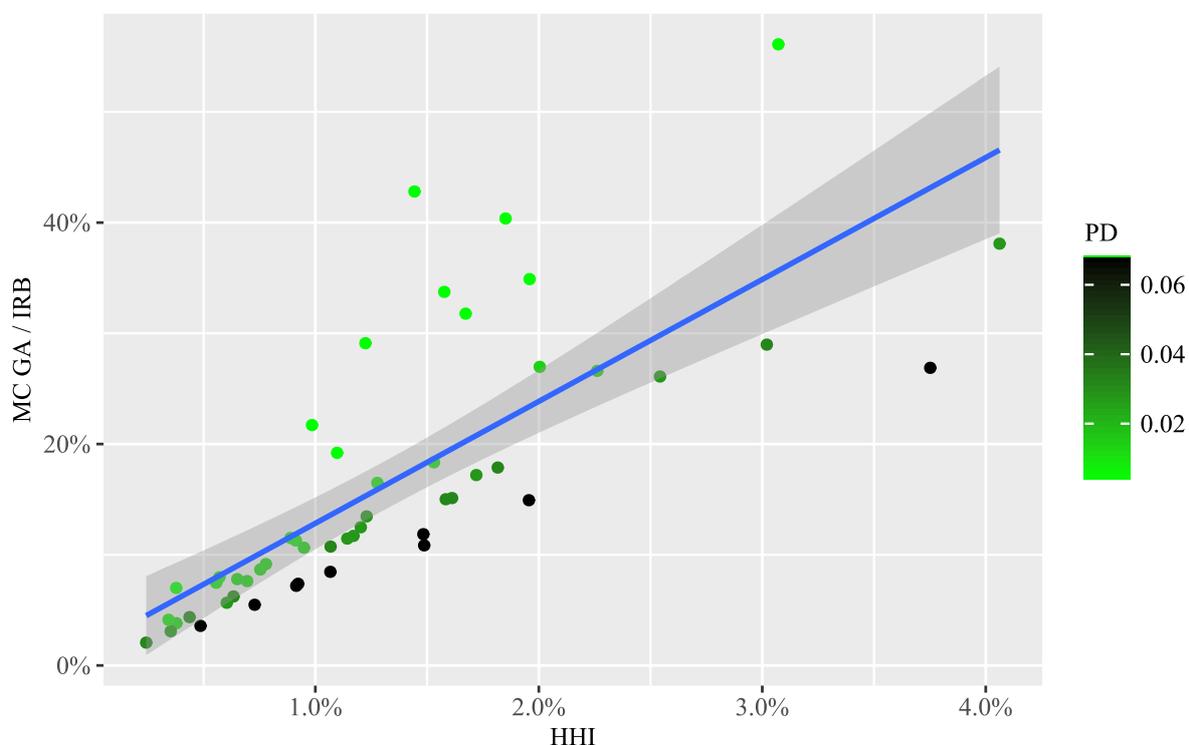
	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	-0.00173	0.000454	-3.815	0.00039
HHI	0.934009	0.025063	37.266	<2e-16

	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
PD	0.07181	0.009744	7.37	2e-09

R^2 modela je oko 0.97. Dakle, za razliku od homogenog slučaja, gde je koeficijent uz HHI bio oko 0.7, ovde je koeficijent uz HHI oko 1.

Ukoliko gledamo MC GA / IRB kapitalni zahtev u odnosu na HHI, vidimo znatno veća odstupanja.

Grafikon 11: MC GA / IRB u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta



Ovo potvrđuje i R^2 regresionog modela od oko 0.59. Nakon uključivanja PD dobijamo R^2 od oko 0.77.

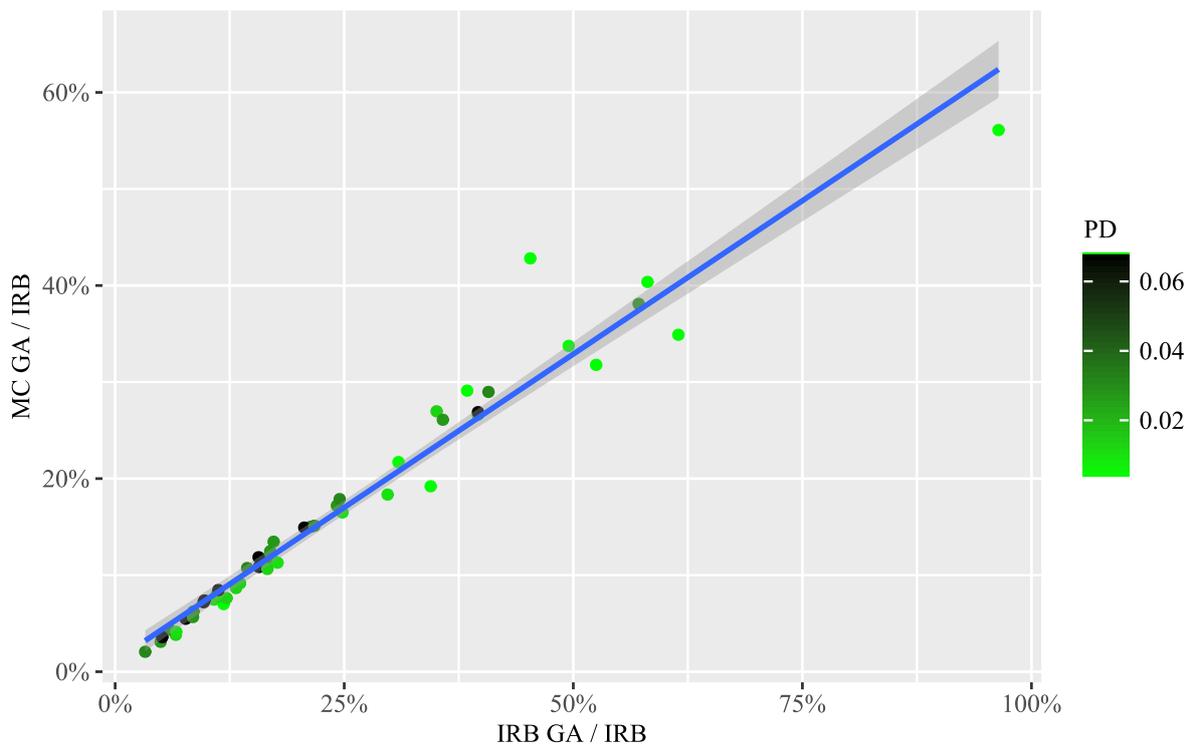
Tabela 13: MC GA / IRB u odnosu na HHI i PD – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta

	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	0.07471	0.01792	4.17	0.000127
HHI	11.47395	0.98972	11.59	1.61e-15
PD	-2.36231	0.38477	-6.14	1.53e-07

Međutim, u ovom slučaju koeficijent uz PD je negativan, suprotno od slučaja kada smo gledali MC GA / EAD. Ovo je u skladu sa ranijim zapažanjem za homogen portfolio da GA sporije raste nego IRB, pa za niže vrednosti PD-ja relativni MC GA / IRB je niži nego za više vrednosti PD-ja.

Ukoliko pogledamo MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB, vidimo visok stepen korelacije i bez vidljivog uticaja PD-ja. Ovo je očekivano jer IRB GA već uzima u obzir PD.

Grafikon 12: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta



Ovo potvrđuje i regresiona analiza:

Tabela 14: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – portfolio sa koncentracijom izloženosti i jednakim verovatnoćama difolta

	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	0.011273	0.005901	1.911	0.0619
HHI	0.635379	0.019571	32.465	<2e-16

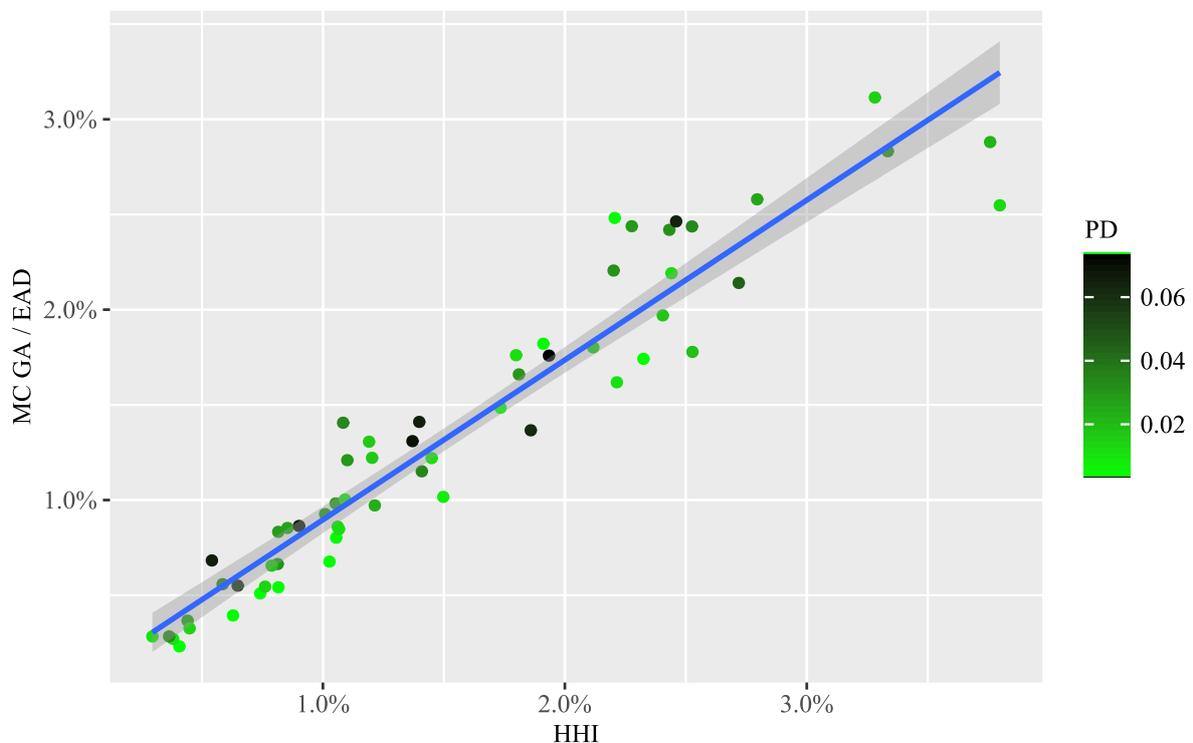
R^2 ovog modela je oko 0.96. Međutim, ono što je simptomatično jeste da koeficijent nije 1 već oko 0.64. Ovo je u skladu sa ranijim zapažanjem o odnosu MC GA i IRB GA za homogen portfolio.

Slične rezultate dobijamo i ako pogledamo MC GA / EAD u odnosu na IRB GA / EAD.

5.3.3. Portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta

Pogledajmo sada slučaj kada PD nije konstantan.

Grafikon 13: MC GA / EAD u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta



Ukoliko izračunamo regresione parametre dobijamo:

Tabela 15: MC GA / EAD u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta

	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	0.000567	0.000598	0.949	0.347
HHI	0.839633	0.033808	24.836	<2e-16

i R^2 od oko 0.91. Koeficijent uz HHI je u ovom slučaju nešto niži nego u slučaju kad smo imali konstantan PD, kada je koeficijent bio oko 0.93-0.95.

Ukoliko gledamo MC GA / IRB dobijamo dosta slabiji model, čak i ako uključimo PD u jednačinu.

Grafikon 14: MC GA / IRB u odnosu na HHI – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta

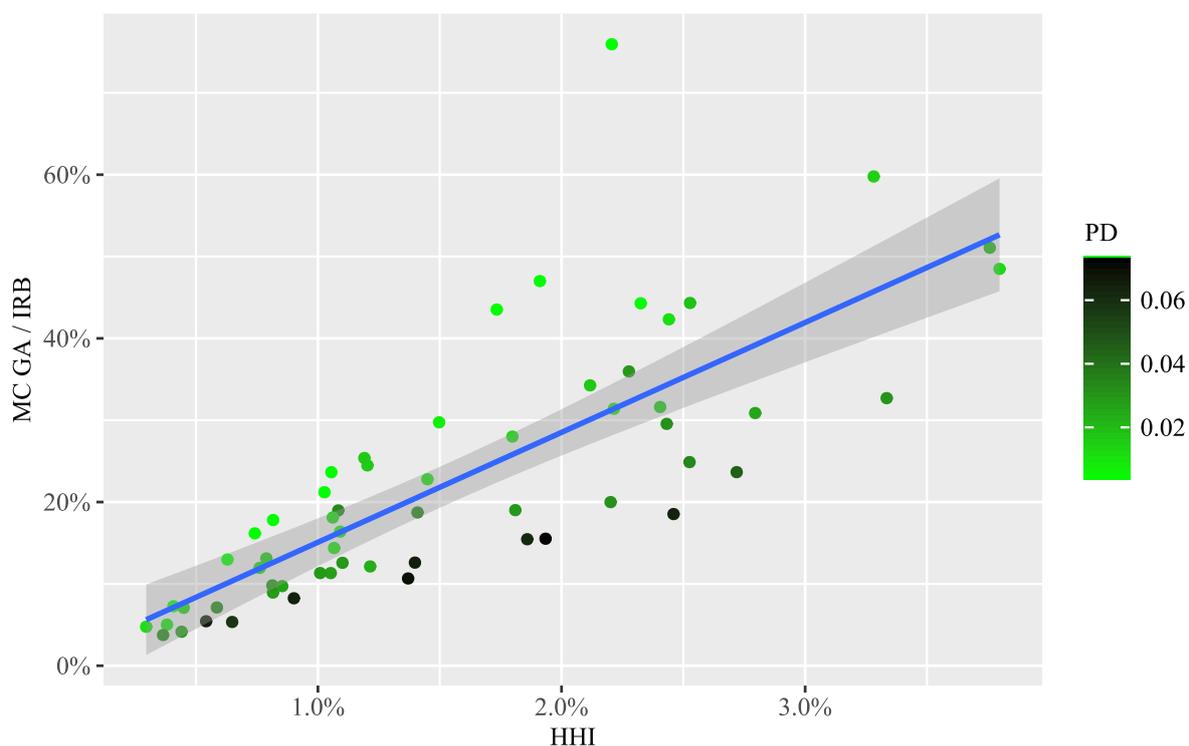


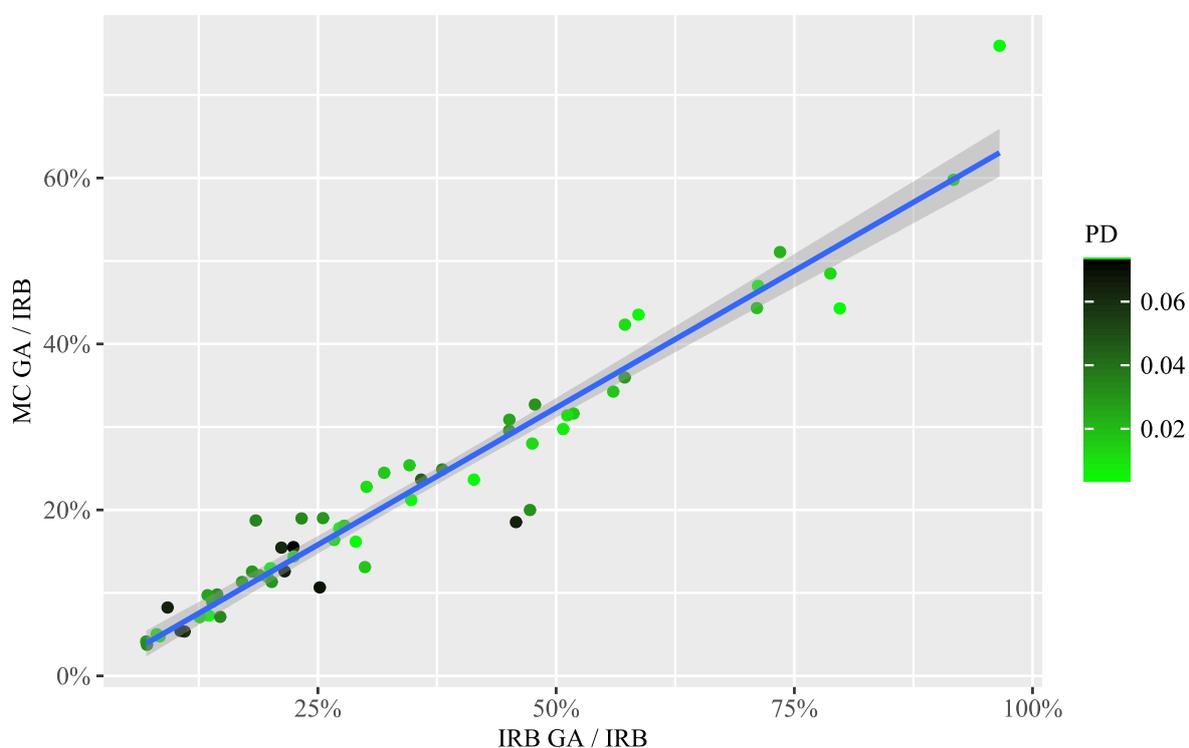
Tabela 16: MC GA / EAD u odnosu na HHI i PD – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta

	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	0.09196	0.02331	3.945	0.000224
HHI	13.57881	1.11318	12.198	<2e-16
average PD	-3.10269	0.51413	-6.035	1.33e-07

R^2 ovog modela je oko 0.77. Koeficijent uz HHI je oko 13.6, dok je u slučaju konstantnog PD-ja bio oko 11.5.

Ukoliko pogledamo MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB, slično kao u slučaju portfolija sa konstantnim PD-jem, vidimo visok stepen korelacije i bez vidljivog uticaja PD-ja.

Grafikon 15: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta



Slično kao u slučaju portfolija sa konstantnim PD-jem, regresioni koeficijent je oko 0.66.

Tabela 17: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – portfolio sa koncentracijom izloženosti i različitim verovatnoćama difolta

	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	-0.00707	0.009046	-0.782	0.438
HHI	0.660338	0.021925	30.117	<2e-16

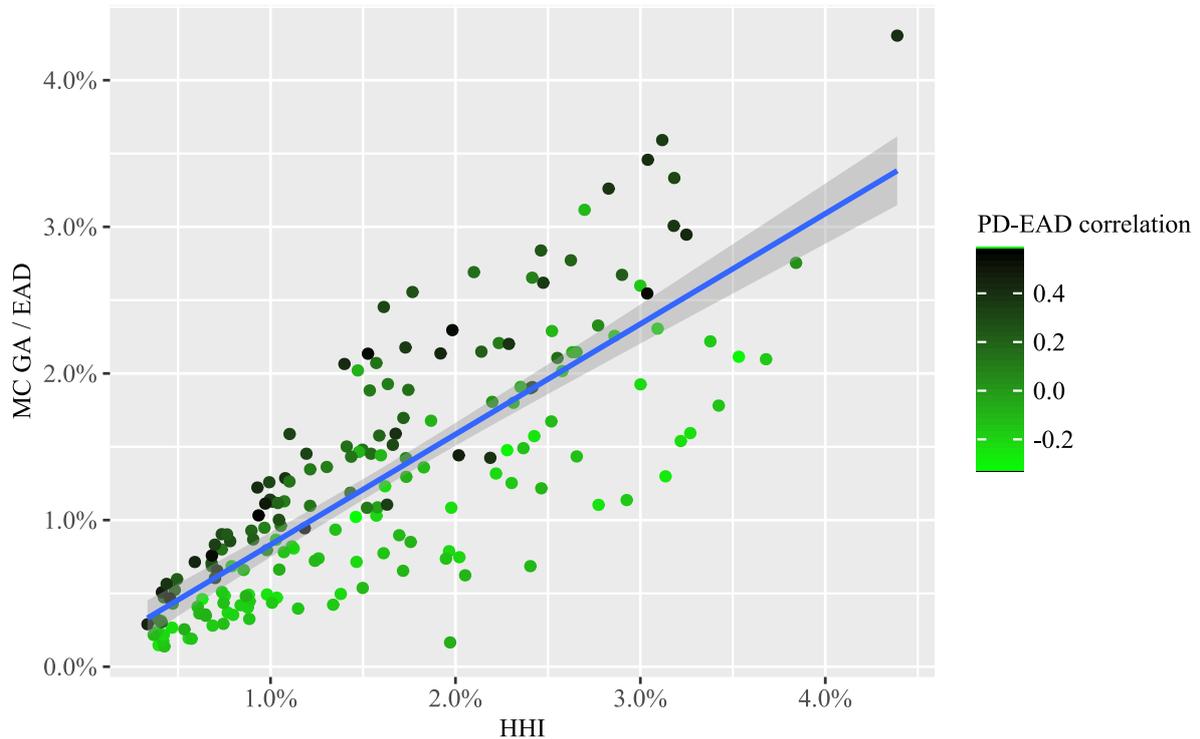
R^2 ovog modela je oko 0.94.

Slične rezultate dobijamo i ako pogledamo MC GA / EAD u odnosu na IRB GA / EAD.

5.3.4. Portfolio sa korelacijom između izloženosti i verovatnoća difolta

Pogledajmo, konačno, slučaj kada postoji korelacija između PD i EAD.

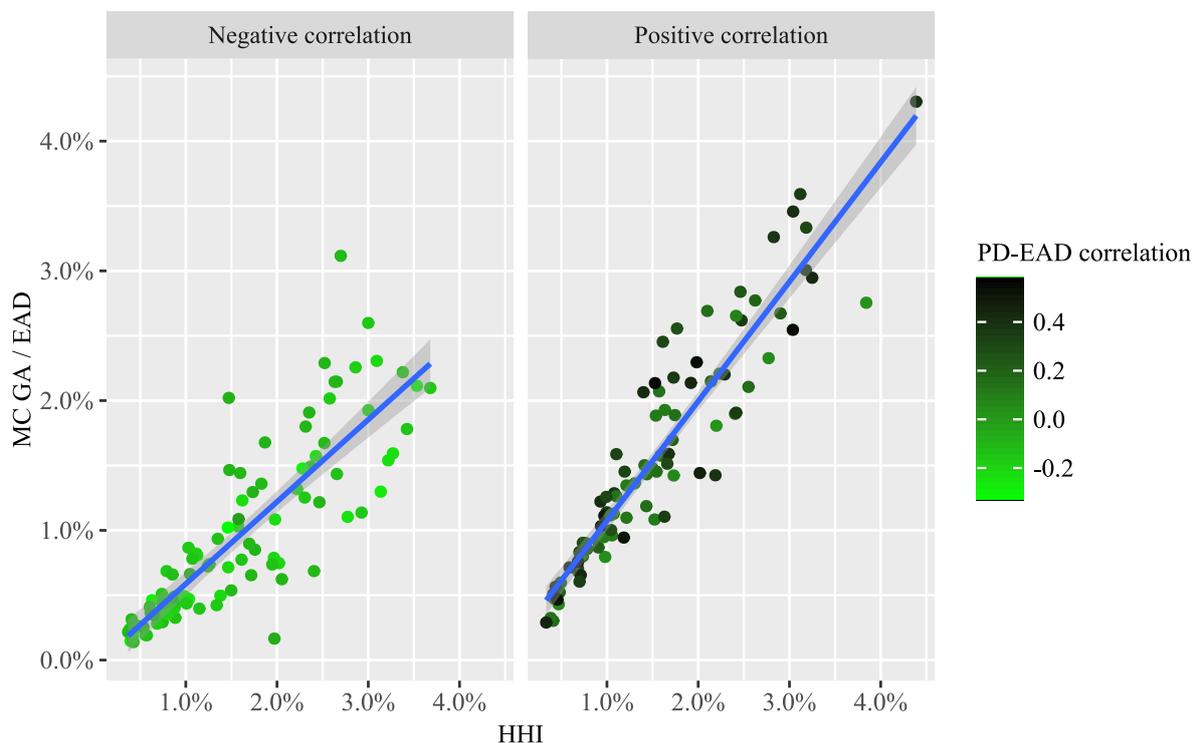
Grafikon 16: MC GA / EAD u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD



Vidimo da se portfolija sa negativnom korelacijom nalaze uglavnom ispod regresione krive, a ona sa pozitivnom korelacijom iznad. Ovo je očekivano, jer u portfolijima sa negativnom korelacijom veće izloženosti imaju manji PD pa samim tim i manji kapitalni zahtev za rizik koncentracije, i obrnuto.

Ovo ukazuje da moramo zasebno razmatrati slučajeve pozitivne i negativne korelacije.

Grafikon 17: MC GA / EAD u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD



Vidimo da nagib regresione krive u slučajevima pozitivne i negativne korelacije nije isti.

Tabela 18: MC GA / EAD u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD

		Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Positive correlation	Intercept	0.001527	0.000662	2.306	0.0234
	HHI	0.921158	0.037523	24.549	<2e-16
Negative correlation	Intercept	-0.00046	0.000776	-0.594	0.554
	HHI	0.633317	0.041974	15.088	<2e-16

U slučaju pozitivne korelacije imamo R^2 od oko 0.87. U slučaju negativne korelacije imamo R^2 od oko 0.71.

Ako pak pogledamo MC GA / IRB, vidimo veći nagib u slučaju negativne korelacije.

Grafikon 18: MC GA / IRB u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD

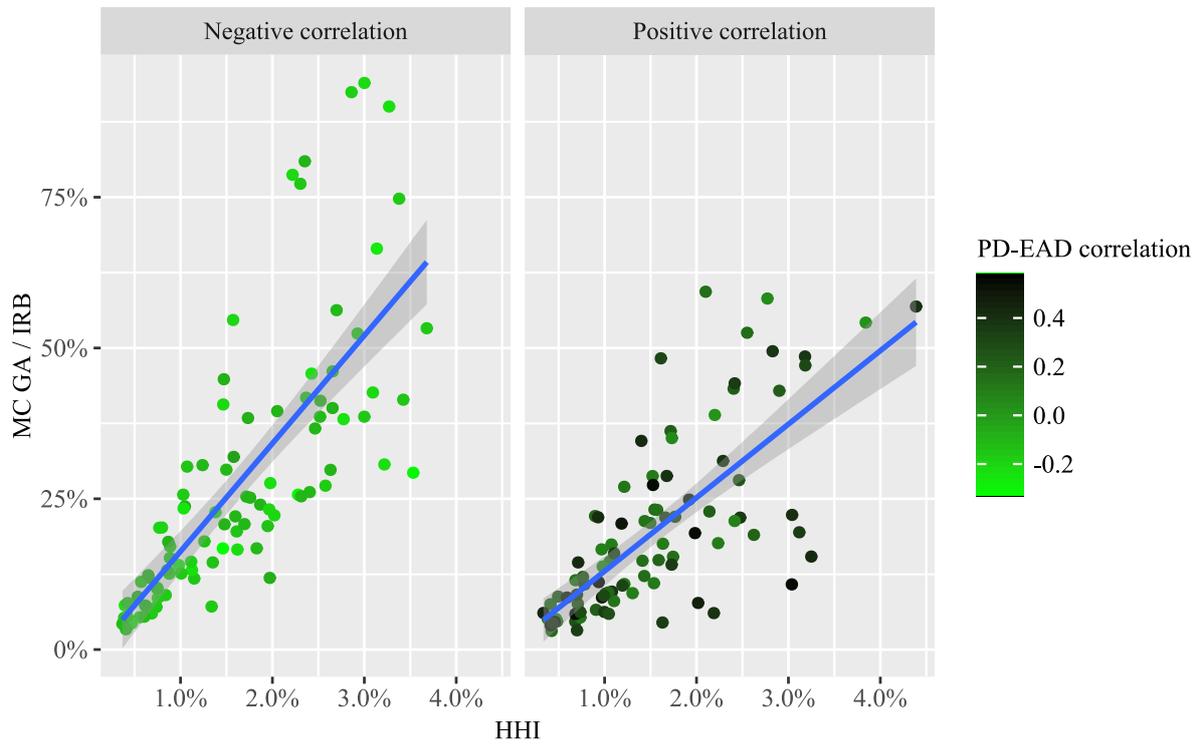


Tabela 19: MC GA / IRB u odnosu na HHI – sa korelacijom PD i EAD

		Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Positive correlation	Intercept	0.00826	0.02162	0.382	0.703
	HHI	12.18044	1.22488	9.944	3.73E-16
Negative correlation	Intercept	-0.01625	0.02893	-0.562	0.576
	HHI	17.90048	1.56431	11.443	<2e-16

U slučaju pozitivne korelacije imamo R^2 od oko 0.52. U slučaju negativne korelacije imamo R^2 od oko 0.58.

Pogledajmo sada MC GA / EAD u odnosu na IRB GA / EAD.

Grafikon 19: MC EAD / GA u odnosu na IRB GA / EAD – sa korelacijom PD i EAD

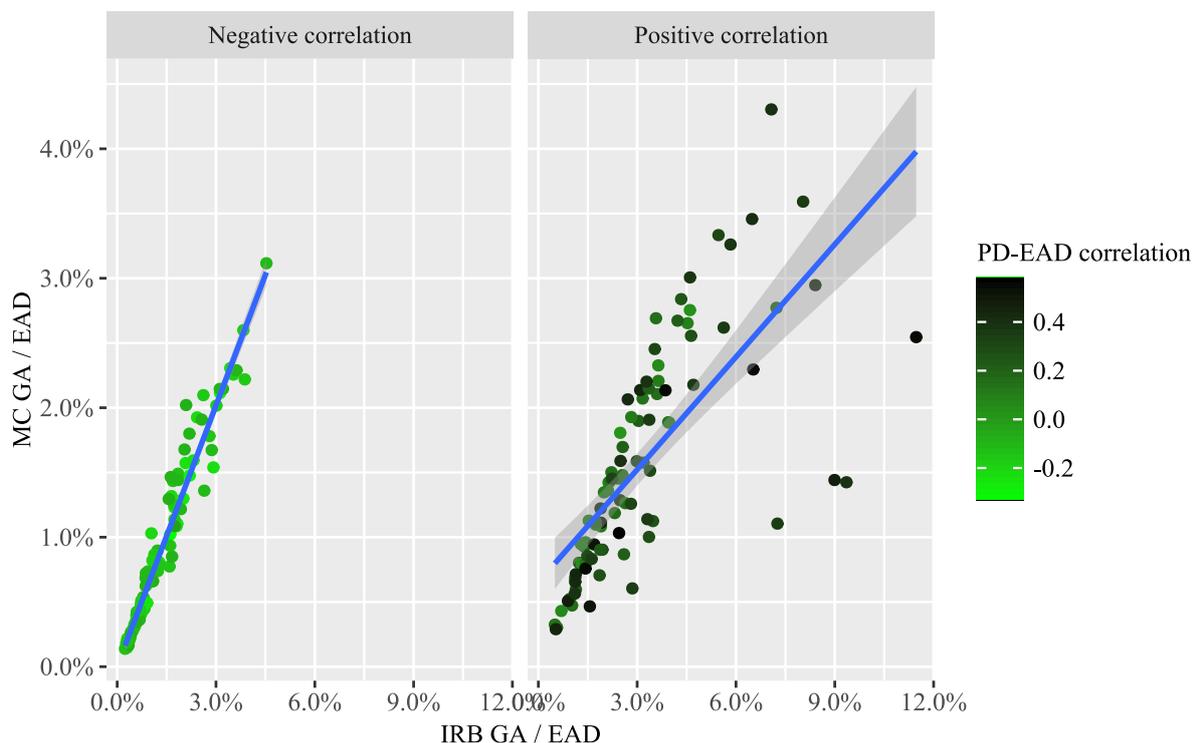


Tabela 20: MC GA / EAD u odnosu na IRB GA / EAD – sa korelacijom PD i EAD

		Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Positive correlation	Intercept	0.006527	0.001116	5.849	7.88E-08
	HHI	0.289903	0.029274	9.903	4.54E-16
Negative correlation	Intercept	1.94E-05	2.95E-04	0.066	0.948
	HHI	6.72E-01	1.68E-02	39.951	<2e-16

U slučaju pozitivne korelacije imamo R^2 od oko 0.52. U slučaju negativne korelacije imamo R^2 od oko 0.94.

Sa grafika vidimo da u slučaju pozitivne korelacije regresiona kriva uopšte ne pogađa dominantni trend zbog manjeg broja autlajera sa jako visokim IRB GA spram MC GA. Ovo su verovatno slučajevi portfolija gde najveće izloženosti imaju izrazito visok PD, što rezultuje visokim IRB GA, ali nema toliki uticaj na MC GA.

Konačno, pogledajmo MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB.

Grafikon 20: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – sa korelacijom PD i EAD

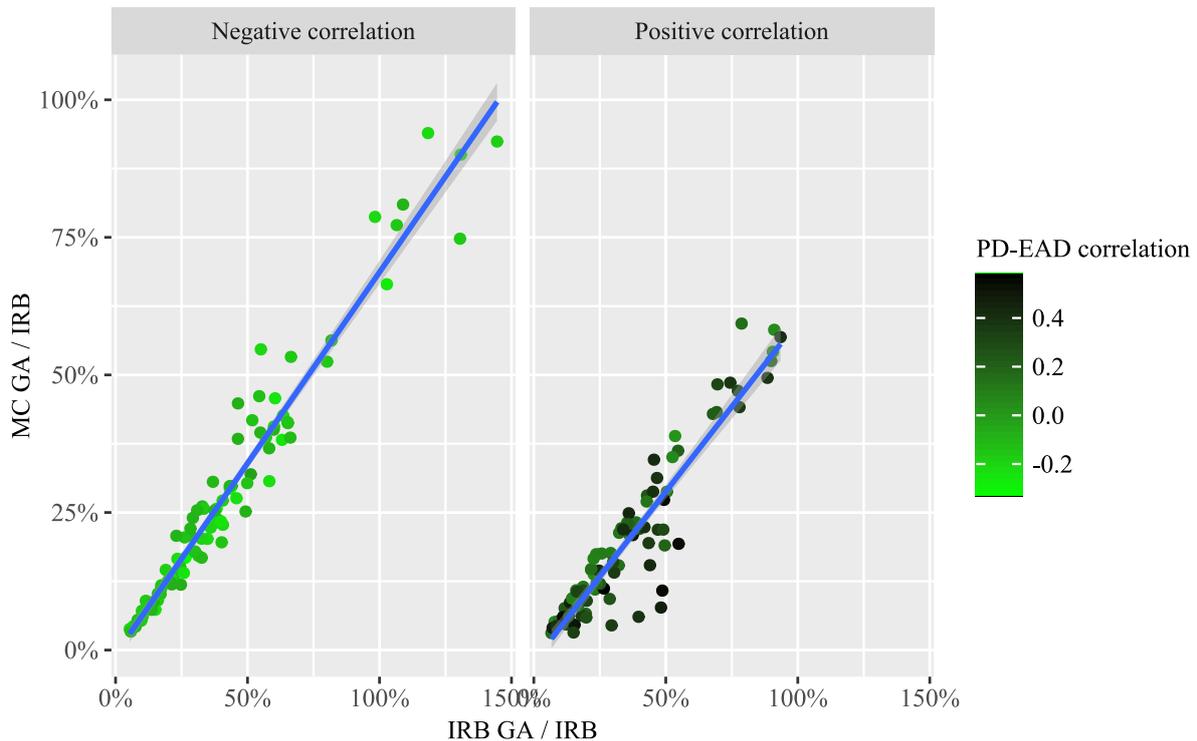


Tabela 21: MC GA / IRB u odnosu na IRB GA / IRB – sa korelacijom PD i EAD

	Estimate	Std. Error	t value	PR(> t)
Intercept	-0.02033	0.006884	-2.953	0.00355
HHI	0.675755	0.014927	45.27	<2e-16

U ovom slučaju ne postoji značajna razlika između slučajeva sa pozitivnom i negativnom korelacijom. R^2 modela je oko 0.92.

5.4. Analiza

U pogledu odnosa MC GA i HHI, možemo zaključiti da je HHI bolji prediktor za MC GA / EAD nego za MG GA / IRB kapitalni zahtev. Regresioni koeficijent se kreće između

- 0.63, u slučaju negativne korelacije između PD i EAD;
- 0.70, u slučaju homogenog portfolija;
- 0.84, u slučaju tipičnog portfolija, bez značajne korelacije između PD i EAD;
- 0.92-0.93, u slučaju portfolija sa konstantnim PD-jevima, odnosno pozitivnom korelacijom između PD i EAD.

Ovo je znatno manje nego koeficijent od 1.96, koliko za ovaj odnos propisuje islandski regulator.

U pogledu odnosa MC GA / IRB kapitalni zahtev i HHI, regresioni koeficijent se na analiziranim primerima kreće između 11.5 i 18.0. Ovo je takođe znatno manje nego koeficijent od 25, koliko za ovaj odnos propisuje španski regulator ili $1.8 \cdot 12.5 = 22.5$, koliko propisuje britanski regulator.²¹

S druge strane, iako iz same definicije indeksa ovo nije bilo očigledno, pokazuje se dakle da HHI jeste solidan prediktor za MC GA. Ovaj odnos možemo razumeti pogledom na IRB GA formulu:

$$GA_{approx} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2 (k \cdot TL_i - UL_i) \cdot \frac{E[l_i^2]}{E[l_i]}}{2 \sum_{i=1}^N s_i UL_i}.$$

U slučaju homogenog portfolija, izraz

$$(k \cdot TL_i - UL_i) \cdot \frac{E[l_i^2]}{E[l_i]} = c$$

je konstantan za sve dužnike, pa dobijamo

$$GA_{approx} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2 c}{2 \sum_{i=1}^N s_i UL_i} = \frac{c}{2K} \cdot HHI,$$

gde je K ukupan IRB kapitalni zahtev.

U pogledu odnosa MC GA i IRB GA, možemo zaključiti da je relativni IRB GA u odnosu na IRB kapitalni zahtev uglavnom jednako dobar prediktor kao i IRB GA u odnosu na EAD, osim u slučajevima gde postoji izražena pozitivna korelacija PD i EAD. U ovakvim slučajevima IRB GA u odnosu na EAD može biti znatno veći nego MC GA. Međutim, ovakav ishod može biti i do nestabilnosti ocena dobijenih Monte Karlo simulacijom. Svakako na ovakve slučajeve—gde neke od najvećih izloženosti imaju natprosečan PD—treba obratiti posebnu pažnju.

²¹ Britanski regulator propisuje $1.8 \cdot HHI \cdot RWA$. U IRB pristupu RWA se izračunava kao kapitalni zahtev / 12.5, imitirajući odnos koji postoji u standardizovanom pristupu, gde je kapitalni zahtev $8\% \cdot RWA$.

Međutim, iako statistički dobar prediktor, pokazuje se da IRB GA na primerima portfolija koja smo analizirali zapravo precenjuje MC GA u proseku za oko 30-40%.

6. Zaključak

Pokazuje se da, iako iz same definicije indeksa ova veza nije očigledna, banke koje nemaju složene ICAAP modele niti infrastrukturu za ocenu raspodele kreditnih gubitaka i ekonomskog kapitala, za ocenu kapitalnih zahteva za rizik individualne koncentracije mogu koristiti Herfindahl-Hirschmanov indeks (HHI), u formi:

$$K_{P2 \text{ add-on}} = c \cdot HHI \cdot EAD.$$

Na primerima analiziranih portfolija, koeficijent c je u proseku oko 0.85. S druge strane, islandski regulator za isti koeficijent propisuje vrednost 1.96, što je više od dva puta više.

HHI se može koristiti i u odnosu prema kapitalnom zahtevu iz Stuba 1, u formi:

$$K_{P2 \text{ add-on}} = c \cdot HHI \cdot K_{P1}.$$

U ovom slučaju, na primerima koje smo ovde analizirali, koeficijent c je u proseku oko 15. S druge strane, britanski i španski regulator za isti koeficijent propisuju vrednosti 22.5, odnosno 25, što je više od 50% više.

Preciznost ovakvog modela opada sa porastom varijanse PD-jeva, kao i sa porastom korelacije između PD-jeva i EAD-a. Tačnost ocena se može delimično popraviti, na primer, uključivanjem prosečnog PD-ja u formulu.

Što se tiče Gordy-Lütkebohmert modela, on je, očekivano, bolji prediktor nego jednostavno HHI. Međutim, analiza pokazuje da, na posmatranim primerima portfolija sa između 100 i 1000 dužnika, i ovaj model precenjuje kapitalni zahtev ocenjen Monte Karlo metodom za čak 30-40%.

U sprovedenoj analizi fokus je bio upravo na portfolija izloženosti prema privredi sa između 100 i 1000 dužnika, što je tipičan broj dužnika takvog portfolija za banke u Srbiji, a verovatno i druge manje banke drugde u svetu, koje nemaju nužno složene ICAAP modele niti odgovarajuću procesnu i softversku infrastrukturu.

Takođe, analiza je sprovedena na bazi konstruisanih portfolija, koja nisu nužno dovoljno reprezentativna za stvarna portfolija banaka u ovom segmentu.

Konačno, apstrahovan je niz značajnih faktora:

- Pitanje ocene LGD-ja;
- Stohastička priroda LGD-ja i njegova korelacija sa PD-jem;
- Pitanje ocene korelacija između difolta;
- Stohastička priroda korelacija između difolta;
- Faktorska struktura korelacija između difolta;
- Drugi oblici koncentracije, npr. sektorska koncentracija.

Imajući u vidu ova ograničenja, dobijeni rezultati se moraju uzeti sa rezervom. Međutim, sprovedena analiza se lako može reprodukovati na drugim primerima portfolija. Takođe, primenjeni model se može proširiti tako da obuhvati stohastički LGD, stohastičke korelacije kao i drugačiju faktorsku strukturu korelacija između difolta. Na taj način se može testirati uticaj dodatnih faktora kao i stabilnost ovde dobijenih ocena.

7. Reference

- Ali, Z. (2020, April 7). *The world's 100 largest banks, 2020*. Retrieved September 30, 2020, from <https://www.spglobal.com/marketintelligence/en/news-insights/latest-news-headlines/the-world-s-100-largest-banks-2020-57854079>
- Banco de España. (2008). *Guidelines on the Internal Capital Adequacy Assessment Process (ICAAP) at credit institutions*.
- Bank of England Prudential Regulation Authority. (2020). *The PRA's methodologies for setting Pillar 2 capital*.
- BCBS. (1988). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*.
- BCBS. (1996). *Amendments to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*.
- BCBS. (2001). *The New Basel Capital Accord: Consultative Document*.
- BCBS. (2004). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework*.
- BCBS. (2006). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework, Comprehensive Version*.
- BCBS. (2009). *Strengthening the resilience of the banking sector: Consultative Document*.
- BCBS. (2010). *Basel III: A Global Regulatory Framework for More Resilient Banks and Banking Systems*.
- BCBS. (2013). *Basel III: The Liquidity Coverage Ratio and Liquidity Monitoring Tools*.
- BCBS. (2014). *Basel III: The Net Stable Funding Ratio*.
- BCBS. (2016). *Minimum Capital Requirements for Market Risk*.
- BCBS. (2017). *Basel III: Finalising Post-crisis Reforms*.
- BCBS. (2019). *The Basel Framework*.
- BIS. (2014, October 9). *History of the Basel Committee*. Retrieved September 30, 2020, from <https://www.bis.org/bcbs/history.htm>
- Bonollo, M., Mosconi, P., & Mercurio, F. (2009). *Basel II Second Pillar: an Analytical VaR with Contagion and Sectorial Risks*.
- Brown, I. (2014). *Developing Credit Risk Models Using SAS® Enterprise Miner and SAS/STAT®: Theory and Applications*. Cary, NC, USA: SAS Institute Inc.
- Düllmann, K., & Masschelein, N. (2006). *Sector Concentration in Loan Portfolios and Economic Capital*.
- EBA. (2014). *Guidelines on Common Procedures and Methodologies for the Supervisory Review and Evaluation Process (SREP)*.

- EBA. (2020). *Risk Dashboard Data as of Q4 2019*.
- ECB. (2017). *Guide for the Targeted Review of Internal Models (TRIM)*.
- Elizalde, A. (2006). Credit Risk Models I: Default Correlation in Intensity Models.
- Elizalde, A. (2006). Credit Risk Models II: Structural Models.
- Finansinspektionen. (2014). *FI's methods for assessing individual types of risk within Pillar 2*.
- Fjármálaeftirlitið . (2019). *Annex 1: Supervisory Benchmarks for the Setting of Pillar 2 Additional Own Funds Requirements for Credit and Concentration Risk*.
- Gordy, M. B. (2002). A Risk-Factor Model Foundation for Ratings-Based Bank Capital Rules.
- Hardy, M. (2010). Pareto's Law. *Mathematical Intelligencer*, 32(3), 38-43.
- Hirschman, A. O. (1964). The Paternity of an Index. *The American Economic Review*, 54(5), 761-762.
- ICBC. (2020). *2019 Annual Report*.
- Kupiec, P. H. (2009). How Well Does the Vasicek-Basel AIRB Model Fit the Data? Evidence from a Long Time Series of Corporate Credit Rating.
- Li, D. X. (2010). On Default Correlation: A Copula Function Approach.
- Löffler, G., & Posch, P. N. (2011). *Credit Risk Modeling Using Excel and VBA*. Wiley.
- Lütkebohmert, E. (2009). *Concentration Risk in Credit Portfolios*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Lütkebohmert, E., & Gordy, M. (2013). Granularity Adjustment for Regulatory Capital Assessment. *International Journal of Central Banking*, 9(3), 33-71.
- Merton, R. C. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, 29(2), 449-470.
- Oh, Y.-H. (2007). Credit Concentration Risk: Extended Multi-Factor Adjustment IRB Model.
- Qi, H., Xie, Y., & Liu, S. (2010). Credit risk models: An analysis of default correlation. *The International Journal of Business and Finance Research*, 4(1), 37-49.
- Rhoades, S. A. (1993). The Herfindahl-Hirschman Index. *Federal Reserve Bulletin*(March), 188-189.
- RZS. (2018.). *Radni dokument: Preduzeća u Republici Srbiji prema veličini, 2017*. Beograd: RZS.
- Schönbucher, P. J. (2000). Factor Models for Portofolio Credit Risk. *Bonn Econ Discussion Papers*(16/2001).
- Zhang, J., Zhu, F., & Lee, J. (2008). *Asset Correlation, Realized Default Correlation, and Portfolio Credit Risk: Modeling Methodology*. Moody's KMV Company.

8. Prilog: programski kod korišćen za analizu

Analiza je sprovedena u R-u, verzija 3.6.0.

Za regresionu analizu korišćena je funkcija *lm* (*linear models*) iz paketa *base*.

Za grafikone je korišćen paket *ggplot2*.

Svi korišćeni paketi:

```
library(actuar) # pareto raspodela
library(foreach) # petlje koje mogu da se paralelizuju
library(doParallel) # paralelizacija
library(doRNG) # reproducibilne paralelne petlje
library(ggplot2)
```

Funkcije:

```
#####

#Funkcije:

# irb_rho(asset_class, pd, size) - difolt korelacija u irb modelu
# irb_mat_adj(pd, m) - maturity adjustment u irb modelu
# irb_tl(pd, lgd, rho) - total loss u irb modelu
# irb_el(pd, lgd) - expected loss u irb modelu
# irb_ul(pd, lgd, rho) - unexpected loss u irb modelu
# irb_ga(pd, lgd, ead, rho) - granularity adjustment za irb model
# irb_ga_approx(pd, lgd, ead, rho) - priblizni granularity adjustment za irb mod
el
# irb_ga_vlgd(elgd) - lgd variance za granularity adjustment

# hhi(ead) - herfindahl-hirschmanov indeks

#asrf_mc_simulation(pd, lgd, ead, rho, nsim) - 99.9% var po asrf modelu primenom
mc simulacije sa nsim izvlacenja
#calculate(pd, lgd, ead, rho, nsim, shift) - master funkcija koja poziva ostale
obracunske funkcije (asrf_mc_simulation, irb_ul, irb_ga)
#asrf_qmc_is_simulation(pd, lgd, ead, rho, nsim) - 99.9% var po asrf modelu
primenom quasi-mc simulacije sa nsim izvlacenja i importance samplingom
#calculate_qmc_is(pd, lgd, ead, rho, nsim, shift) - master funkcija koja poziva
ostale obracunske funkcije (asrf_qmc_is_simulation, irb_ul, irb_ga)

#logit(x) - logit transformacija (log-odds)
#logistic(x) - logisticka transformacija
#moment_logit_normal(mu, sigma, n = 1, k = 100) - n-ti moment logit-normalne
raspodele primenom quasi-mc metoda sa k tacaka
```

```

#mean_logit_normal(mu, sigma, k = 100) - ocekivanje logit-normalne raspodele
#sd_logit_normal(mu, sigma, k = 100) - standardna devijacija logit-normalne
raspodele

#pd_logit_normal(n, mu, sigma) - n vrednosti iz logit-normalne raspodele
#ead_log_normal(n, mu, sigma) - n vrednosti iz log-normalne raspodele
#ead_pareto(n, x_min, alpha) - n vrednosti iz pareto raspodele

#correlated_normal(n, rho) - dva vektora sa po n vrednosti iz bivarijatne
normalne raspodele sa korelacijom rho
#normal_to_pareto(x, x_min, alpha) - transformacija slucajnih velicina koje
imaju normalnu raspodelu u pareto raspodelu
#pd_ead_logit_normal_log_normal(n, mu_pd, sigma_pd, x_min, alpha, corr) - dva
vektora sa po n vrednosti, jedan iz logit-normalne, a drugi iz log-normalne
raspodele, sa korelacijom rho
#pd_ead_logit_normal_pareto(n, mu_pd, sigma_pd, mu_ead, sigma_ead, corr) - dva
vektora sa po n vrednosti, jedan iz logit-normalne, a drugi iz pareto raspodele,
sa korelacijom rho

#####

irb_rho <- function(asset_class, pd = NULL, size = NULL) {

  asset_classes <- c("Corporate", "HVCRE", "Mortgage", "QRRE", "Other Retail")
  must_specify_pd <- c("Corporate", "HVCRE", "Other Retail")

  if(!(asset_class %in% asset_classes)) stop("Incorrect asset class")
  if(asset_class %in% must_specify_pd) {
    if(is.null(pd)) stop("Must specify PD")
    else if(pd < 0 || pd > 1) stop("Incorrect PD")
  }

  if(is.null(size)) {} else if(size < 5) { size <- 5 } else if(size > 50) { size
<- 50 }

  if(asset_class == "Corporate") {
    rho_min = 0.12
    rho_max = 0.24
    k = 50
  }
  else if(asset_class == "HVCRE") {
    rho_min = 0.12
    rho_max = 0.3
    k = 50
  }
  else if(asset_class == "Other Retail") {
    rho_min = 0.03
    rho_max = 0.16
    k = 35
  }
}

```

```

}

if(asset_class %in% must_specify_pd) {
  rho <- rho_min * (1 - exp(-k * pd)) / (1 - exp(-
k)) + rho_max * (1 - (1 - exp(-k * pd)) / (1 - exp(-k))) -
  ifelse(asset_class == "Corporate" && !is.null(size), 0.04 * (1 - (size - 5
) / 45), 0)
}
else if(asset_class == "Mortgage") {
  rho <- 0.15
}
else if(asset_class == "QRRE") {
  rho <- 0.04
}

return(rho)
}

irb_mat_adj <- function(pd, m) {

  if (m < 1) { m <- 1 } else if(m > 5) { m <- 5 }
  b <- (0.11852 - 0.05478 * log(pd)) ^ 2
  mat_adj <- (1 + (m - 2.5) * b) / (1 - 1.5 * b)

  return(mat_adj)
}

irb_tl <- function(pd, lgd, rho) {
  return(pnorm((qnorm(pd) + sqrt(rho) * qnorm(0.999)) / sqrt(1 - rho)) * lgd)
}

irb_el <- function(pd, lgd) {
  return(pd * lgd)
}

irb_ul <- function(pd, lgd, rho) {
  return(irb_tl(pd, lgd, rho) - irb_el(pd, lgd))
}

irb_ga <- function(pd, lgd, ead, rho) {

  s <- ead / sum(ead)
  delta <- 4.83
  elgd <- lgd
  vlgd <- irb_ga_vlgd(elgd)
  elgd2 <- vlgd + elgd ^ 2

  el <- irb_el(pd, lgd)
  ul <- irb_ul(pd, lgd, rho)

```

```

t1 <- irb_t1(pd, lgd, rho)

num <- sum(s ^ 2 * (delta * (t1 * elgd2 / elgd + t1 ^ 2 * vlgd / elgd ^ 2) -
                    ul * elgd2 / elgd - 2 * ul * t1 * vlgd / elgd ^ 2))
den <- 2 * sum(s * ul)

return(num / den)
}

irb_ga_approx <- function(pd, lgd, ead, rho) {

  s <- ead / sum(ead)
  delta <- 4.83
  elgd <- lgd
  vlgd <- irb_ga_vlgd(elgd)
  elgd2 <- vlgd + elgd ^ 2

  el <- irb_el(pd, lgd)
  ul <- irb_ul(pd, lgd, rho)
  t1 <- irb_t1(pd, lgd, rho)

  num <- sum(s ^ 2 * (delta * t1 - ul) * elgd2 / elgd)
  den <- 2 * sum(s * ul)

  return(num / den)
}

irb_ga_vlgd <- function(elgd) {

  gamma <- 0.25
  vlgd <- gamma * elgd * (1 - elgd)
  return(vlgd)
}

#####

hhi <- function(ead) {
  return (sum(ead ^ 2) / (sum(ead) ^ 2))
}

#####

asrf_mc_simulation <- function(pd, lgd, ead, rho, nsim) {

  nb <- length(pd)
  thld <- qnorm(pd)

  l <- rep(0, nsim)
  for (i in 1 : nsim) {

```

```

    z <- rnorm(1) #systemski faktor
    d <- ((z * sqrt(rho) + rnorm(nb) * sqrt(1 - rho)) < thld)

    l[i] <- sum(d * lgd * ead)
  }

  q <- as.numeric(quantile(l, 0.999))
  return(q)
}

calculate <- function(pd, lgd, ead, rho, nsim) {

  start_time <- Sys.time()

  pd_avg <- mean(pd)
  pd_sd <- sd(pd)
  ead_avg <- mean(ead)
  ead_sd <- sd(ead)
  ead_max <- max(ead)
  hhi <- hhi(ead)
  pd_ead_corr <- cor(pd, ead)

  mc <- asrf_mc_simulation(pd, lgd, ead, rho, nsim)
  irb <- sum(irb_tl(pd, lgd, rho) * ead)
  ga <- irb_ga(pd, lgd, ead, rho)
  ga_approx <- irb_ga_approx(pd, lgd, ead, rho)

  end_time <- Sys.time()
  time <- as.double(difftime(end_time, start_time, units = "secs"))

  return(c(pd_avg, pd_sd, ead_avg, ead_sd, ead_max, hhi, pd_ead_corr, mc, irb, g
a, ga_approx, time))
}

#####

asrf_qmc_is_simulation <- function(pd, lgd, ead, rho, nsim, shift) {

  nb <- length(pd)
  thld <- qnorm(pd)

  z <- qnorm(c(1 : nsim) / (nsim + 1) + runif(nsim, -
1, +1) / (2 * nsim)) + shift #systemski faktor
  p <- exp(-z * shift + shift ^ 2 / 2) / nsim

  l <- rep(0, nsim)
  for (i in 1 : nsim) {

```

```

    this_z <- z[i]
    d <- ((this_z * sqrt(rho) + rnorm(nb) * sqrt(1 - rho)) < thld)

    l[i] <- sum(d * lgd * ead)
  }

  df <- data.frame(loss = l, probability = p, cumulative_probability = 0)
  df <- df[sort.list(-df$loss), ]
  df[, 3] <- cumsum(df[, 2])
  q <- approxfun(df[, 3], df[, 1], method = "linear", rule = 2)
  return(q(0.001))
}

calculate_qmc_is <- function(pd, lgd, ead, rho, nsim, shift) {

  start_time <- Sys.time()

  pd_avg <- mean(pd)
  pd_sd <- sd(pd)
  ead_avg <- mean(ead)
  ead_sd <- sd(ead)
  ead_max <- max(ead)
  hhi <- hhi(ead)
  pd_ead_corr <- cor(pd, ead)

  mc <- asrf_qmc_is_simulation(pd, lgd, ead, rho, nsim, shift)
  irb <- sum(irb_tl(pd, lgd, rho) * ead)
  ga <- irb_ga(pd, lgd, ead, rho)
  ga_approx <- irb_ga_approx(pd, lgd, ead, rho)

  end_time <- Sys.time()
  time <- as.double(difftime(end_time, start_time, units = "secs"))

  return(c(pd_avg, pd_sd, ead_avg, ead_sd, ead_max, hhi, pd_ead_corr, mc, irb, ga, ga_approx, time))
}

#####

logit <- function(x) {
  return(log(x / (1 - x)))
}

logistic <- function(x) {
  return(1 / (1 + exp(-x)))
}

moment_logit_normal <- function(mu, sigma, n = 1, k = 100) {
  x <- c(1 : (k - 1))

```

```

e <- (1 / k) * sum(logistic(qnorm(x / k, mean = mu, sd = sigma)) ^ n)
return(e)
}

mean_logit_normal <- function(mu, sigma, k = 100) {
  return(moment_logit_normal(mu, sigma, 1, k))
}

sd_logit_normal <- function(mu, sigma, k = 100) {
  return(sqrt(moment_logit_normal(mu, sigma, 2, k) - moment_logit_normal(mu, sigma, 1, k) ^ 2))
}

#####

pd_logit_normal <- function(n, mu, sigma) {
  pd <- logistic(rnorm(n, mu, sigma))
  return(pd)
}

ead_log_normal <- function(n, mu, sigma) {
  ead <- exp(rnorm(n, mu, sigma))
  ead <- ead / sum(ead)
  return(ead)
}

ead_pareto <- function(n, x_min, alpha) {
  ead <- rpareto1(n, alpha, x_min)
  ead <- ead / sum(ead)
  return(ead)
}

ead_master <- function(n, par1, par2, ead_distribution = c("log-normal", "pareto")) {
  if (ead_distribution == "log-normal") { return(ead_log_normal(n, par1, par2)) }
  else if (ead_distribution == "pareto") { return(ead_pareto(n, par1, par2)) }
}

#####

correlated_normal <- function(n, rho) {

  x <- rnorm(n, 0, 1)
  y <- rnorm(n, 0, 1)
  xy <- cbind(x, y)

  corr_init <- var(xy)
  corr_init_chol <- solve(chol(corr_init))

```

```

xy_chol <- xy %%% corr_init_chol

corr_target <- matrix(c(1, rho, rho, 1), ncol = 2)
corr_target_chol <- chol(corr_target)

xy_final <- xy_chol %%% corr_target_chol * sd(x) + mean(x)
}

normal_to_pareto <- function(x, x_min, alpha) {
  p <- pnorm(x)
  return(qpareto(p, alpha, x_min))
}

pd_ead_logit_normal_log_normal <- function(n, mu_pd, sigma_pd, mu_ead, sigma_ead
, corr) {
  xy <- correlated_normal(n, corr)
  x <- xy[, 1]
  y <- xy[, 2]

  pd <- logistic(mu_pd + sigma_pd * x)
  ead <- exp(mu_ead + sigma_ead * y)
  ead <- ead / sum(ead)
  return(cbind(pd, ead))
}

pd_ead_logit_normal_pareto <- function(n, mu_pd, sigma_pd, ead_min, alpha, corr)
{
  xy <- correlated_normal(n, corr)
  x <- xy[, 1]
  y <- xy[, 2]

  pd <- logistic(mu_pd + sigma_pd * x)
  ead <- normal_to_pareto(y, ead_min, alpha)
  ead <- ead / sum(ead)
  return(cbind(pd, ead))
}

pd_ead_master <- function(n, mu_pd, sigma_pd, ead_par1, ead_par2, ead_distributi
on, corr) {
  if (ead_distribution == "log-normal") {
    return(pd_ead_logit_normal_log_normal(n, mu_pd, sigma_pd, ead_par1, ead_par2
, corr))
  }
  else if (ead_distribution == "pareto") {
    return(pd_ead_logit_normal_pareto(n, mu_pd, sigma_pd, ead_par1, ead_par2, co
rr))
  }
}

```

```
#####
```

Analiza varijanse Monte Karlo metoda:

```
#####
```

```
# Ocena greske MC metoda
```

```
#####
```

```
registerDoParallel(cores = 8)
```

```
nb <- c(100, 1000, 10000)
```

```
nsim <- c(10000, 100000, 1000000)
```

```
nsc <- length(nb) * length(nsim)
```

```
nrep <- 30
```

```
out_nb <- rep(0, nsc)
```

```
out_nsim <- rep(0, nsc)
```

```
out_irb <- rep(0, nsc)
```

```
out_l_mc_mean <- rep(0, nsc)
```

```
out_l_mc_sd <- rep(0, nsc)
```

```
out_time_mc <- rep(0, nsc)
```

```
out_l_qmc_mean <- rep(0, nsc)
```

```
out_l_qmc_sd <- rep(0, nsc)
```

```
out_time_qmc <- rep(0, nsc)
```

```
k <- 1
```

```
for (this_nb in nb) {
```

```
  for (this_nsim in nsim) {
```

```
    pd <- rep(0.02, this_nb)
```

```
    lgd <- rep(0.45, this_nb)
```

```
    ead <- rep(1 / this_nb, this_nb)
```

```
    rho <- irb_rho("Corporate", pd)
```

```
    out_nb[k] <- this_nb
```

```
    out_nsim[k] <- this_nsim
```

```
    out_irb[k] <- sum(irb_tl(pd, lgd, rho) * ead)
```

```
    start_time <- Sys.time()
```

```
    registerDoRNG(k)
```

```
    l <- foreach (i = 1 : nrep, .combine = c) %dopar% asrf_mc_simulation(pd, lgd  
, ead, rho, this_nsim)
```

```
    out_l_mc_mean[k] <- mean(l)
```

```
    out_l_mc_sd[k] <- sd(l) / mean(l)
```

```
    end_time <- Sys.time()
```

```
    out_time_mc[k] <- as.double(difftime(end_time, start_time, units = "secs"))
```

```

start_time <- Sys.time()
registerDoRNG(k)
l <- foreach (i = 1 : nrep, .combine = c) %dopar% asrf_qmc_is_simulation(pd,
lgd, ead, rho, this_nsim, -1)
out_l_qmc_mean[k] <- mean(l)
out_l_qmc_sd[k] <- sd(l) / mean(l)
end_time <- Sys.time()
out_time_qmc[k] <- as.double(difftime(end_time, start_time, units = "secs"))

k <- k + 1
}
}

mc_method_comparison <- data.frame(nb = out_nb, nsim = out_nsim, irb = out_irb,
mc_mean = out_l_mc_mean, mc_sd = out_l_mc_sd,
mc_time = out_time_mc,
qmc_mean = out_l_qmc_mean, qmc_sd = out_l_qmc
_sd, qmc_time = out_time_qmc)

stopImplicitCluster()

write.csv(mc_method_comparison, "mc_method_comparison.csv")

#####
# Ocena uticaja IS shifta na gresku MC simulacije
#####

registerDoParallel(cores = 8)

nb <- c(100, 200, 500, 1000)
nsim <- c(10000)
shift <- c(-1, -1.5, -2, -2.5, -3)
nsc <- length(nb) * length(nsim) * length(shift)
nrep <- 30

out_nb <- rep(0, nsc)
out_nsim <- rep(0, nsc)
out_shift <- rep(0, nsc)
out_irb <- rep(0, nsc)
out_l_qmc_mean <- rep(0, nsc)
out_l_qmc_sd <- rep(0, nsc)
out_time_qmc <- rep(0, nsc)

k <- 1
for (this_nb in nb) {
  for (this_nsim in nsim) {
    for (this_shift in shift) {

      pd <- rep(0.02, this_nb)

```

```

lgd <- rep(0.45, this_nb)
ead <- rep(1 / this_nb, this_nb)
rho <- irb_rho("Corporate", pd)

out_nb[k] <- this_nb
out_nsim[k] <- this_nsim
out_shift[k] <- this_shift
out_irb[k] <- sum(irb_tl(pd, lgd, rho) * ead)

start_time <- Sys.time()
registerDoRNG(k)
l <- foreach (i = 1 : nrep, .combine = c) %dopar% asrf_qmc_is_simulation(p
d, lgd, ead, rho, this_nsim, this_shift)
out_l_qmc_mean[k] <- mean(l)
out_l_qmc_sd[k] <- sd(l) / mean(l)
end_time <- Sys.time()
out_time_qmc[k] <- as.double(difftime(end_time, start_time, units = "secs"
))

k <- k + 1

}
}
}

qmc_is_shift_comparison <- data.frame(nb = out_nb, nsim = out_nsim, shift = out_
shift, irb = out_irb,
                                     qmc_mean = out_l_qmc_mean, qmc_sd = out_l_
qmc_sd, qmc_time = out_time_qmc)

stopImplicitCluster()

write.csv(qmc_is_shift_comparison, "qmc_is_shift_comparison.csv")

#####
# Ocena uticaja koncentracije EAD na gresku MC simulacije
#####

registerDoParallel(cores = 8)

nb <- c(100, 200, 500, 1000)
nsim <- c(10000, 20000, 50000, 100000)
shift <- c(-1, -1.5, -2, -2.5, -3)
nsc <- length(nb) * length(nsim) * length(shift)
nrep <- 30

out_nb <- rep(0, nsc)
out_nsim <- rep(0, nsc)
out_shift <- rep(0, nsc)

```

```

out_irb <- rep(0, nsc)
out_l_qmc_mean <- rep(0, nsc)
out_l_qmc_sd <- rep(0, nsc)
out_time_qmc <- rep(0, nsc)

k <- 1
for (this_nb in nb) {
  for (this_nsim in nsim) {
    for (this_shift in shift) {

      pd <- rep(0.02, this_nb)
      lgd <- rep(0.45, this_nb)
      ead <- 0.9 ^ rep(1 : this_nb)
      ead <- ead / sum(ead)
      rho <- irb_rho("Corporate", pd)

      out_nb[k] <- this_nb
      out_nsim[k] <- this_nsim
      out_shift[k] <- this_shift
      out_irb[k] <- sum(irb_tl(pd, lgd, rho) * ead)

      start_time <- Sys.time()
      registerDoRNG(k)
      l <- foreach (i = 1 : nrep, .combine = c) %dopar% asrf_qmc_is_simulation(p
d, lgd, ead, rho, this_nsim, this_shift)
      out_l_qmc_mean[k] <- mean(l)
      out_l_qmc_sd[k] <- sd(l) / mean(l)
      end_time <- Sys.time()
      out_time_qmc[k] <- as.double(difftime(end_time, start_time, units = "secs"
))

      k <- k + 1

    }
  }
}

qmc_is_shift_comparison_with_concentration <- data.frame(nb = out_nb, nsim = out
_nsim, shift = out_shift, irb = out_irb,
                                                         qmc_mean = out_l_qmc_me
an, qmc_sd = out_l_qmc_sd, qmc_time = out_time_qmc)

stopImplicitCluster()

write.csv(qmc_is_shift_comparison_with_concentration, "qmc_is_shift_comparison_w
ith_concentration.csv")

#####

```

Scenarija:

```
#####  
# Scenarija  
#####  
# Homogen portfolio  
# Variramo N i nivo PD  
  
nborr <- c(10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000, 10000)  
mu_pd <- logit(c(0.4, 1.42, 1.08, 3.23, 2.81, 6.77) / 100)  
mu_ead <- 10  
lgd <- 0.45  
  
# Ukupno 10 x 6 = 60 scenarija  
scenarios <- expand.grid(1, nborr, "constant", mu_pd, 0, "log-  
normal", mu_ead, 0, 0, lgd)  
  
#####  
# Koncentracija izlozenosti uz konstantan PD  
# Variramo N, raspodelu EAD i nivo PD  
# Za EAD posmatramo log-normalnu i Pareto raspodelu  
  
nborr <- c(100, 200, 500, 1000)  
mu_ead_log_normal <- 10  
sigma_ead_log_normal <- sqrt(log(c(2, 4) ^ 2 + 1))  
min_ead_pareto <- 100000  
alpha_ead_pareto <- c(log(10/2, 8/2), log(10/3, 7/3))  
  
# Ukupno 4 x 6 x 4 = 96 scenarija  
scenarios <- rbind(scenarios, expand.grid(2, nborr,  
"constant", mu_pd, 0, "log-  
normal", mu_ead_log_normal, sigma_ead_log_normal, 0, lgd))  
scenarios <- rbind(scenarios, expand.grid(2, nborr,  
"constant", mu_pd, 0, "pareto", min_ea  
d_pareto, alpha_ead_pareto, 0, lgd))  
  
#####  
# Koncentracija izlozenosti uz razlicit PD  
# Variramo N, raspodelu EAD i raspodelu PD  
  
mu_pd <- c(-6, -5, -4)  
sigma_pd <- c(1, 2)  
  
# Ukupno 4 x 6 x 4 = 96 scenarija  
scenarios <- rbind(scenarios, expand.grid(3, nborr,  
"logit-normal", mu_pd, sigma_pd, "log-  
normal", mu_ead_log_normal, sigma_ead_log_normal, 0, lgd))  
scenarios <- rbind(scenarios, expand.grid(3, nborr,
```

```

                                "logit-
normal", mu_pd, sigma_pd, "pareto", min_ead_pareto, alpha_ead_pareto, 0, lgd))

#####
# Koncentracija izlozenosti uz korelaciju izmedju PD i EAD
# Razmatramo slucajeve sa pozitivnom i negativnom korelacijom

corr_pd_ead <- c(-0.6, -0.3, 0.3, 0.6)

# Ukupno 4 x 6 x 4 x 4 = 384 scenarija
scenarios <- rbind(scenarios, expand.grid(4, nborr,
                                "logit-normal", mu_pd, sigma_pd, "log-
normal", mu_ead_log_normal, sigma_ead_log_normal, corr_pd_ead, lgd))
scenarios <- rbind(scenarios, expand.grid(4, nborr,
                                "logit-
normal", mu_pd, sigma_pd, "pareto", min_ead_pareto, alpha_ead_pareto, corr_pd_ea
d, lgd))

names(scenarios) <- c("type", "n", "pd_distribution", "pd_location", "pd_varianc
e",
                    "ead_distribution", "ead_location", "ead_variance", "pd_ea
d_correlation", "lgd")

#####

```

Simulacije:

```

#####
# Simulacije
#####

start_time <- Sys.time()
nsim <- 100000
shift <- -1.5

registerDoParallel(cores = 8)
registerDoRNG(264)

results <- foreach (i = 1 : nrow(scenarios), .combine = rbind, .packages = c("ac
tuar")) %dopar% {

  source("functions.R")

  s <- scenarios[i, ]
  t <- s$type
  n <- s$n
  d_pd <- s$pd_distribution
  m_pd <- s$pd_location

```

```

s_pd <- s$pd_variance
d_ead <- s$ead_distribution
m_ead <- s$ead_location
s_ead <- s$ead_variance
r <- s$pd_ead_correlation

if (r == 0) {
  pd <- pd_logit_normal(n, m_pd, s_pd)
  rho <- irb_rho("Corporate", pd)
  ead <- ead_master(n, m_ead, s_ead, d_ead)
}
else {
  pd_ead <- pd_ead_master(n, m_pd, s_pd, m_ead, s_ead, d_ead, r)
  pd <- pd_ead[, 1]
  rho <- irb_rho("Corporate", pd)
  ead <- pd_ead[, 2]
}

out <- calculate_qmc_is(pd, lgd, ead, rho, nsim, shift)
c(i, j, t, n, d_pd, m_pd, s_pd, d_ead, m_ead, s_ead, r, lgd, out)
}

stopImplicitCluster()

end_time <- Sys.time()
time <- end_time - start_time
time #20-ak min

results <- as.data.frame(results)
names(results) <- c("scenario_id", "repetition", "type", "n", "pd_distribution",
  "pd_location", "pd_variance",
  "ead_distribution", "ead_location", "ead_variance", "pd_ead_
correlation_target", "lgd",
  "pd_avg", "pd_sd", "ead_avg", "ead_sd", "ead_max", "hhi", "p
d_ead_correlation_actual",
  "mc", "irb", "ga", "ga_approx", "time")

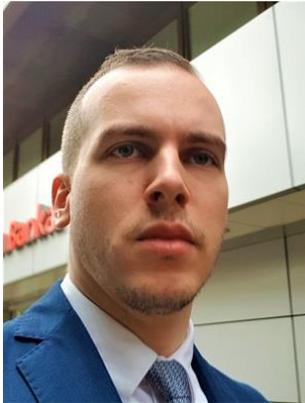
results <- cbind(results,
  mc_ga_abs = results$mc - results$irb,
  mc_ga_rel = (results$mc - results$irb) / results$irb,
  irb_ga_abs = results$ga,
  irb_ga_rel = results$ga / results$irb)

write.csv(results, "out.csv")

#####

```

9. Kratka biografija autora



Vuk Ognjanović je rođen 1989. u Smederevu. 2008. završio Treću beogradsku gimnaziju i upisao studije opšte lingvistike i teorijske matematike na Univerzitetu u Beogradu. U okviru programa Erasmus Mundus godinu dana proveo na Univerzitetu u Nici. 2012. završio studije opšte lingvistike na Filološkom fakultetu i upisao master studije iz kvantitativnih finansija na Ekonomskom fakultetu u Beogradu.

Od 2013. do 2015. radio u Unicredit banci kao saradnik za razvoj i validaciju internih statističkih modela za procenu kreditnog rizika. Od 2015. do 2016. radio u kompaniji Aseko kao analitičar poslovnih procesa i programer za finansijski softver za banke. Od 2016. zaposlen u Eurobanci na poziciji eksperta za upravljanje rizicima, a od 2017. na poziciji rukovodioca za upravljanje podacima, modeliranje rizika i integrisano upravljanje rizicima.

Tokom 2015-2017. položio sve ispite iz CFA programa, a tokom 2016-2017. položio sve ispite osnovnog nivoa ACCA programa. 2018. završio osnovne studije teorijske matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu i upisao master studije iz primenjene matematike.

Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet

Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj, RBR :	
Identifikacioni broj, IBR :	
Tip dokumentacije, TD :	Monografska dokumentacija
Tip zapisa, TZ :	Tekstualni štampani material
Vrsta rada, VR :	Master rad
Autor, AU :	Vuk Ognjanović
Mentor, MN :	Prof. dr Dora Seleši
Naslov rada, NR :	Procena ekonomskog kapitala za rizik kreditne koncentracije u ICAAP-u
Jezik publikacije, JP :	Srpski (latinica)
Jezik izvoda, JI :	Srpski, engleski
Zemlja publikovanja, ZP :	Srbija
Uže geografsko područje, UGP :	Vojvodina
Godina, GO :	2020.
Izdavač, IZ :	Autorski reprint
Mesto i adresa, MA :	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
Fizički opis rada, FO :	6/101/42/21/0/20/1
Naučna oblast, NO :	Primenjena matematika
Naučna disciplina, ND :	Statistika
Predmetna odrednica / ključne reči, PO :	Rizik koncentracije, ICAAP, ekonomski kapital, Monte Karlo
UDK :	
Čuva se, ČU :	Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno Matematički fakultet, Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
Važna napomena, VN :	Nema
Izvod, IZ :	U odsustvu koncentracije izloženosti ekonomski kapital za kreditni rizik se može oceniti npr. bazelskim IRB modelom. Međutim, realna portfolija tipično imaju značajnu koncentraciju izloženosti u malom broju duznika, naročito u segmentu privrede, u kom slučaju ocene iz bazelskog IRB modela nisu adekvatne. Ocene koje obuhvataju efekat koncentracije se mogu dobiti Monte Karlo metodom ili primenom nekih analitičkih ili statističkih formula specifično razvijenih da adresiraju

rizik koncentracije. Tema rada je poređenje ocena koje se dobijaju MC metodom i ocena koje se dobijaju primenom formula iz literature, na primerima nekoliko stotina konstruisanih hipotetičkih portfolija.

Pokazuje se da banke koje nemaju složene ICAAP modele niti infrastrukturu za ocenu raspodele kreditnih gubitaka i ekonomskog kapitala, za ocenu kapitalnih zahteva za rizik individualne koncentracije mogu koristiti Herfindahl-Hirschmanov indeks (HHI), u formi: $K_{P2\ add-on} = c \cdot HHI \cdot EAD$. Na primerima analiziranih portfolija, koeficijent c je u proseku oko 0.85. HHI se može koristiti i u odnosu prema kapitalnom zahtevu iz Stuba 1, u formi: $K_{P2\ add-on} = c \cdot HHI \cdot K_{P1}$. U ovom slučaju, na primerima koje smo ovde analizirali, koeficijent c je u proseku oko 15. U oba slučaja koeficijenti su znatno niži nego vrednosti koeficijenata koje u sličnim formulama propisuju pojedini regulatori. Preciznost ovakvog modela opada sa porastom varijanse PD-jeva, kao i sa porastom korelacije između PD-jeva i EAD-a. Tačnost ocena se može delimično popraviti, na primer, uključivanjem prosečnog PD-ja u formulu. Gordy-Lütkebohmert modela je, očekivano, bolji prediktor nego HHI. Međutim, analiza pokazuje da, na posmatranim primerima portfolija sa između 100 i 1000 dužnika, i ovaj model precenjuje kapitalni zahtev ocenjen Monte Karlo metodom za čak 30-40%.

Datum prihvatanja teme, **DP**: 9. 9. 2020.

Datum odbrane, **DO**:

Članovi Predsednik: Prof. dr Nataša Krejić

komisije, **KO**: Član, mentor: Prof. dr Dora Seleši

Član: Docent dr Jasna Atanasijević

University of Novi Sad, Faculty of Sciences

Key word documentation

Accession number, **ANO**:
Identification number, **INO**:
Document type, **DT**: Monograph type
Type of record, **TR**: Printed text
Contents code, **CC**: Master thesis
Author, **AU**: Vuk Ognjanović
Mentor, **MN**: Prof. Dora Seleši, PhD
Title, **TI**: Estimation of economic capital for credit concentration risk in the ICAAP
Language of text, **LT**: Serbian (latin)
Language of abstract, **LA**: Serbian, English
Country of publication, **CP**: Serbia
Locality of publication, **LP**: Vojvodina
Publication year, **PY**: 2020
Publisher, **PB**: Author's reprint
Publication place, **PP**: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
Physical description, **PD**: 6/101/42/21/0/20/1
Scientific field, **SF**: Applied mathematics
Scientific discipline, **SD**: Statistics
Subject/Key words, **S/KW**: Concentration risk, ICAAP, economic capital, Monte Carlo
UC:
Holding data, **HD**: University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi sad, Trg Dositeja Obradovića 4
Note, **N**:
Abstract, **AB**: In absence of concentration of exposure economic capital for credit risk can be estimated used e.g. Basel IRB model. However, real-world bank portfolios typically have significant concentration of exposure in a small number of borrowers, especially in the corporate segment, in which case estimates from Basel IRB model are inadequate. Estimates that incorporate the impact of concentration can be obtained using Monte Carlo method, ili using some analytical or statistical formulas specifically developed to address concentration risk. The topic of this thesis is comparison of estimates obtained

using MC method with estimates obtained using formulas from the literature, on several hundred constructed hypothetical portfolios.

It appears that banks that do not have complex ICAAP models or infrastructure for estimation of the distribution of credit losses and economic capital can use Herfindahl-Hirschman index (HHI) for estimation of capital requirements for individual concentration risk, in the form: $K_{P2\ add-on} = c \cdot HHI \cdot EAD$. On examples analyzed here, the coefficient c was on average around 0.85. HHI can also be used in relation to Pillar 1 capital requirement, in the form: $K_{P2\ add-on} = c \cdot HHI \cdot K_{P1}$. In this case, on examples analyzed here, the coefficient c was on average around 15. In both cases the coefficients are significantly lower than the values of the coefficients in similar formulas proposed by some regulators. The precision of these kinds of models diminishes with increase in PD variance, as well as with increase in correlation between PD and EAD. The accuracy can be improved somewhat, for example, by including average PD into the formula. Gordy-Lütkebohmert model is, expectedly, a better predictor than HHI. However, the analysis shows that, on examples of portfolio between 100 and 1000 borrowers analyzed here, this model too overestimates economic capital estimated using Monte Carlo method by as much as 30-40%.

Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:

9. 9. 2020

Defended, **DE**:

Thesis defend board, **DB**:

President:

Prof. Nataša Krejić, PhD

Member, mentor:

Prof. Dora Seleši, PhD

Member:

Assistant prof. Jasna Atanasijević, PhD