



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Slađana Mandić

Primena malih talasa i unakrsne malotalasne analize u ekonomiji

Master rad

Mentor:
dr. Nenad Teofanov

2020, Novi Sad

Sadržaj

1 Uvod	4
2 Od Furijeove do malotalasne transformacije	5
2.1 Furijeova transformacija	6
2.1.1 Furijeova transformacija u $L^1(\mathbb{R})$	8
2.1.2 Furijeova transformacija u $L^2(\mathbb{R})$	10
2.2 Regularnost i opadanje Furijeove transformacije	11
2.3 Vremensko-frekvencijska lokalizacija	12
2.4 Analogije i razlike malotalasne i prozorske Furijeove transformacije	14
2.5 Mali talasi ili talasići	15
2.6 Različiti tipovi malotalasnih transformacija.	17
2.6.1 Neprekidna malotalasna transformacija	17
2.6.2 Inverzna neprekidna malotalasna transformacija	18
2.6.3 Diskretna malotalasna transformacija	19
2.7 Lokalizacione osobine i Hajzenbergov princip neodređenosti	20
2.8 Malotalasna moć spektra i malotalasne faze	26
2.9 Relacija skale ili frekvencije i Furijeov faktor	27
2.10 Analitički mali talasi	28
2.10.1 Morlet-ovi mali talasi	29
2.10.2 Generalizovani Morseovi talasići	30
3 Unakrsna malotalasna analiza	31
3.1 Šta je vremenska serija?	31
3.2 Unakrsna malotalasna transformacija i unakrsna malotalasna moć	32
3.3 Kompleksna malotalasna koherencija	33
3.4 Malotalasna koherencija i fazna razlika	33
3.5 Malotalasne udaljenosti	35
4 Primene malotalasnih transformacija u ekonomiji	40
4.1 Neki ekonomski pojmovi	40
4.1.1 Poslovni ciklusi	40
4.1.2 Indikator ekonomskog očekivanja	42
4.1.3 Co-movement	43
4.2 Konvergencija ciklusa ekonomskog očekivanja u evrozoni	44
4.2.1 Malotalasna moć spektra i indikator ekonomskog očekivanja EA-10	46
4.2.2 Malotalasne udaljenosti	47
4.2.3 Malotalasne koherencije i fazne razlike	51

5 Dodatak	56
5.1 Kod	56
5.2 Koherencije višeg reda: Parcijalne i višestruke koherencije	63
5.3 Modeli linearnih vremenskih serija	65
5.4 Monte Karlo simulacije	67
6 Zaključak	68
Literatura	69
Biografija	71

1 Uvod

Teorija malih talasa¹ veoma je značajna sa stanovišta obrade signala. Međutim, osim u signalnoj analizi ova teorija je našla svoju primenu i u nekim oblastima ekonomije. Nastala je kao odgovor na praktične zahteve inženjera i fizičara u potrazi za matematičkim aparatom koji pruža detaljniju analizu od postojeće Furijeove analize. U tom pogledu, možemo je posmatrati kao sledbenika Furijeove teorije, ali u određenom smislu, unapređenu i prilagođenu.

Prednost malotalasnih metoda u odnosu na Furijeovu analizu je mogućnost da se sačuvaju informacije o vremenu i stoga one mogu biti pogodne za istraživanja u nekim oblastima finansija.

Dakle, kako malotalasna transformacija predstavlja unapređenje i proširenje Furijeove transformacije, najpre se u drugom poglavlju uvodi definicija Furijeove transformacije i neke njene osobine. Zatim se definiše pojam malotalasne transformacije i tipovi malotalasnih transformacija (neprekidna i diskretna). Takođe se obajšjava Hajzenbergov princip neodređenosti i pojam analitičkih malih talasa.

Malotalasna analiza se primenjuje i za merenje i određivanje odnosa između dve nestacionarne vremenske serije. Za proučavanje vremensko frekvencijske zavisnosti između dve vremenske serije koristi se unakrsna malotalasna analiza. Stoga se u trećem poglavlju definišu osnovni pojmovi unakrsne malotalasne analize.

Na početku četvrtog poglavlja definisani su neki ekonomski pojmovi, poput poslovnih ciklusa i pojma co-movement. Veći deo četvrtog poglavlja posvećen je opisivanju primene i interpretaciji rezultata koju su u svom radu detaljno istražili Aguiar-Conraria, M. F. Martins i M. F. Martins [9]. U petoj glavi dat je listing osnovnog koda koji su navedeni autori koristili za dobijanje nekih od rezultata sa odgovarajućim komentarima. U dodatku petog poglavlja definisani su neki modeli vremenskih serija.

¹engl. wavelet theory

2 Od Furijeove do malotalasne transformacije

Za izradu ovog pogavlja korišćena je literatura [1], [6], [8] i [10].

Iako je ovaj rad o primeni malotalasne analize, prirodno je započeti izlaganje sa osnovnim pojmovima Furijeove analize. Furijeove metode su alternativa (a i konkurentni) malotalasnim metodama, tako da je poređenje ovih metoda prirodno. Osim toga malotalasne metode zasnivaju se na Furijeovoj analizi.

Poreklo Furijeove teorije pripisuje se matematičaru Džozefu Furiju, koji je u svom radu 1807. godine tvrdio da se svaka periodična funkcija može predstaviti beskonačnom sumom sinusa i kosinusa. Ovakva ideja dovela je do razvoja dobro poznate Furijeove transformacije i imala je veliki uticaj u matematičkoj analizi, fizici i inženjerstvu, ali trebalo je čak ceo vek i po da bi se razumela konvergencija Furijeovih redova i upotpunila teorija Furijeovih integrala. Furije je bio motivisan proučavanjem toplotne difuzije, u osnovi koje je bila linearna diferencijalna jednačina. Furijeova transformacija koristi baze sinusa i kosinusa različitih frekvencija da utvrdi koliko svake frekvencije sadrži signal. Tokom 19. veka Furijeova transformacija rešila je mnoge probleme iz fizike i inženjerstva. Međutim tokom 20. veka matematičari, fizičari i inženjeri shvatili su nedostatak Furijeove transformacije. Furijeova transformacija ne dozvoljava da se frekvencija signala menja tokom vremena i zato su postojali problemi sa reprodukcijom signala čije se karakteristike menjaju tokom vremena. Drugim rečima, Furijeova transformacija može nam reći koliko svake frekvencije postoji u signalu, ali ne i kada ta komponenta frekvencije postoji u vremenu.

Da bi se prevazišlo ovo ograničenje predložena je kratkotrajana Furijeova transformacija². Kao što samo ime govori, osnovna ideja je korišćenje Furijeove transformacije za kratkorajne periode. Sastoji se u primeni kartkotrajnog prozora na signal i izvođenja Furijeove transformacije unutar ovog prozora.

Međutim, svaka vremensko-frekvencijska analiza ograničena je Hajzenbergovim principom neodređenosti (koji će detaljnije biti objašnjen u poglavlju 2.7). Fizičar Verner Hajzenberg je 1927. godine izjavio da se brzina i položaj nekog objekta ne mogu istovremeno tačno meriti. Ovo znači da je nemoguće istovremeno znati tačnu frekvenciju i tačno vreme pojave frekvencije u signalu. U stvari, postoji kompromis između vremenske i frekvencijske rezolucije. Ovo znači da se za uske prozore dobija dobra vremenska rezolucija, ali loša frekvencijska rezolucija dok se za široke prozore dobija dobra frekvencijska rezolucija, a loša vremenska rezolucija.

Problem sa kratkotrajanom Furijeovom transformacijom je što koristi prozore konstantne dužine (videti Sliku 2). Ovi fiksirani prozori daju uniformnu podelu vremensko-frekvencijskog prostora. Kada je uključen širok opseg frekvencija,

²engl. short-time Fourier transform

prozor čije je vreme fiksirano obično sadrži velik broj ciklusa visoke frekvencije i nekoliko ciklusa niske frekvencije što rezultira preteranoj zastupljenosti komponenti visoke frekvencije i nedovoljnoj zastupljenosti komponenti niske frekvencije. Dakle, kako se signal ispituje unutar fiksiranog vremensko-frekvencijskog prozora sa konstantnim intervalima u vremenskom i frekvencijskom domenu, kratkotrajna Furijeova transformacija ne omogućava adekvatnu rezoluciju za sve frekvencije.

Nasuprot tome, malotalasna transformacija koristi osnovne lokalne funkcije koje se mogu rastezati i pomerati sa fleksibilnom rezolucijom u vremenu i frekvenciji. U slučaju malotalasne transformacije, vremenska rezolucija je prilagođena frekvenciji skupljanjem širine prozora kada se fokusira na visoke frekvencije, odnosno širenjem kada se procenjuju niske frekvencije. Dopuštanje prozora različitih veličina omogućava poboljšavanje frekvencijske rezolucije niskih frekvencija i vremenske rezolucije visokih frekvencija. Ovo znači da odgovarajuća visokofrekvencijska komponenta može biti bolje lokalizovana u vremenu nego komponenta niske frekvencije. Suprotno tome, komponenta niske frekvencije može biti bolje lokalizovana u frekvenciju u poređenju sa komponentom visoke frekvencije. Kako omogućava fleksibilniji pristup u analizi vremenskih serija, malotalasna analiza je usavršavanje Furijeove analize.

Na Slici 1. prikazana su poređenja vremensko-frekvencijskih osobina. Za vremenske serije u vremenskom domenu svaka tačka sadrži informacije o svim frekvencijama. Suprotno tome, u slučaju Furijeove transformacije, svaka tačka u frekvencijskom domenu sadrži informacije o svim tačkama u vremenskom domenu. U slučaju kratkotrajne Furijeove transformacije, vremensko-frekvencijska ravan podeljena je koristeći prozor konstantne dužine, dok se u slučaju malotalasne transformacije širina prozora prilagođava frekvenciji.

2.1 Furijeova transformacija

Najpre navodimo oznake koje će se koristiti u radu: $L^1(\mathbb{R})$ označava skup integrabilnih funkcija tj. skup funkcija koje zadovoljavaju uslov

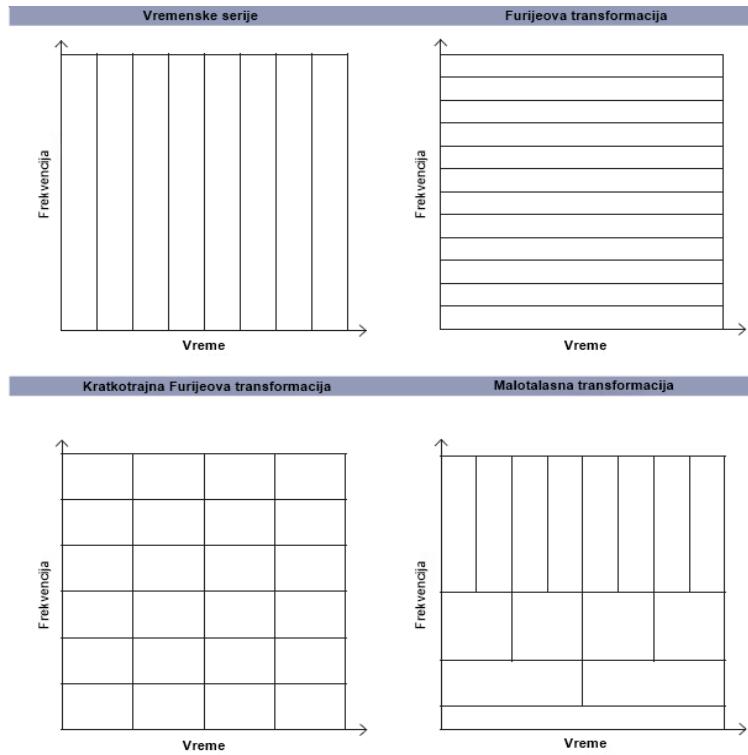
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty.$$

$L^2(\mathbb{R})$ označava skup kvadratnih integrabilnih funkcija, tj. skup funkcija definisanih na realnoj pravoj koje zadovoljavaju

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

sa uobičajnim unutrašnjim proizvodom

$$\langle x, y \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$$



Slika 1: Poređenje vremensko-frekvencijskih osobina

i sa odgovarajućom normom

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Ovde se zvezdica korsiti za označavanje kompleksne konjugacije. Pošto se kvadrat norme $x(t)$,

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

obično naziva energijom x , prostor $L^2(\mathbb{R})$ takođe je poznat kao prostor signala konačne energije.

Furijeova analiza predstavlja bilo koju funkciju konačne energije $x(t)$ kao sumu sinusodnih talasa $e^{i\omega t}$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Amplituda $X(\omega)$ svakog sinusoidnog talasa $e^{i\omega t}$ jednaka je njenoj korelaciji sa x ,

koja se naziva Furijeova transformacija:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Što je $x(t)$ regularnije, amplituda sinusoidnog talasa $|X(\omega)|$ brže opada kada se frekvencija ω povećava.

Kada je $x(t)$ definisano samo na intervalu $[0,1]$, onda Furijeova transformacija postaje dekompozicija u Furijeovu ortonormalnu bazu $\{e^{i2\pi mt}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ prostora $L^2[0, 1]$.

U ovom radu uvek koristimo konvenciju $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ za označavanje Furijeovog para, tj. odgovarajućim velikim latiničnim slovima označavamo Furijeovu transformaciju date funkcije. Dakle, ako $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ onda $X(\omega)$ označava njegovu Furijeovu transformaciju, ω označava ugaonu (radijalnu) frekvenciju i $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$ prema Ojlerovoj formuli.

2.1.1 Furijeova transformacija u $L^1(\mathbb{R})$

Dve funkcije x_1 i x_2 su jednake u $L^1(\mathbb{R})$ ako važi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t) - x_2(t)| dt = 0.$$

Ovo znači da se $x_1(t)$ i $x_2(t)$ mogu razlikovati samo na skupu tačaka mere 0, odnosno kažemo da su ove funkcije skoro svuda jednake.

Da bi se izbegli problemi konvergencije, Furijeov integral se prvo definiše na prostoru $L^1(\mathbb{R})$, a zatim se proširuje na prostor $L^2(\mathbb{R})$ funkcija konačne energije. Furijeov integral

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

meri "koliko mnogo" oscilacija frekvencije ω postoji u x . Ako $x \in L^1(\mathbb{R})$ onda ovaj integral konvergira i

$$|X(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty.$$

Prema tome Furijeova transformacija je ograničena, i može se pokazati da je neprekidna funkcija od ω . Ako je X integrabilna, Teorema 2.1 daje inverznu Furijeovu transformaciju.

Teorema 2.1. *Inverzna Furijeova transformacija. Ako je $x \in L^1(\mathbb{R})$ i $X \in L^1(\mathbb{R})$ onda*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.1)$$

U nastavku se navode Fubinijeva teorema i teorema dominantne konvergencije.

Teorema 2.2. *Fubinijeva teorema. Ako je $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(v_1, v_2)| dv_1 \right) dv_2 < +\infty$, onda je*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(v_1, v_2) dv_1 dv_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(v_1, v_2) dx_1 \right) dv_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(v_1, v_2) dv_2 \right) dv_1. \end{aligned}$$

Teorema 2.3. *Dominantna konvergencija. Neka je $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ familija funkcija takva da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t) = x(t)$ skoro svuda. Ako je*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n(t)| \leq y(t) \quad i \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt < +\infty,$$

onda je x integrabilna i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) dt.$$

Značajna operacija u obradi signala je konvolucija i ona je data sledećom definicijom.

Definicija 1. Neka su x i y funkcije čiji je domen ceo skup \mathbb{R} . Konvolucija funkcija x i y , u oznaci $x * y$, definiše se sa:

$$(x * y)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u - v)y(v)dv, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Furijeova transformacija preslikava konvoluciju dva signala u njihov proizvod.

Teorema 2.4. *Konvolucija. Neka je $x \in L^1(\mathbb{R})$ i $z \in L^1(\mathbb{R})$. Funkcija $y = z * x$ je u $L^1(\mathbb{R})$ i*

$$Y(\omega) = Z(\omega)X(\omega), \tag{2.2}$$

gde su sa Y , Z i X označene Furijeove transformacije signala y , z i x respektivno.

Dokaz.

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - u)z(u)du \right) dt.$$

Kako je $|x(t-u)||z(u)|$ integrabilno na \mathbb{R}^2 , možemo primeniti Fubinijevu teoremu (Teorema 2.2).

Smenom promenljivih $(t, u) \rightarrow (v = t - u, u)$ dobija se

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u+v)\omega} x(v) z(u) du dv \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iv\omega} f(v) dv \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\omega} h(u) du \right), \end{aligned}$$

čime je dokazano (2.2).

□

Dirakova delta funkcija (distribucija) je neutralni (jedinični) element za operaciju konvolucije:

$$\delta * x = x.$$

Iz Teoreme 2.4 sledi da je Furijeova transformacija Dirakove delta distribucije jednaka jediničnoj funkciji:

$$X(\omega) = \hat{\delta}(\omega) X(\omega) \implies \hat{\delta}(\omega) = 1,$$

gde je sa $\hat{\delta}$ označena Furijeva transformacija od δ .

U sledećoj tabeli su navedena neka svojstva Furijeove transformacije

Osobina	Funkcija	Furijeova transformacija
	$x(t)$	$X(\omega)$
Inverzija	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Konvlucija	$x_1 * x_2(t)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
Množenje	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Translacija	$x(t-u)$	$e^{-i\omega u} X(\omega)$
Modulacija	$e^{i\xi t} x(t)$	$X(\omega - \xi)$
Skaliranje	$x(t/s)$	$ s X(s\omega)$
Izvodi višeg reda, $p \in \mathbb{N}$	$x^p(t)$	$(i\omega)^p X(\omega)$
Kompleksna konjugacija	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Hermitska simetrija	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(-\omega) = X^*(\omega)$

Tabela 1: Osobine Furijeove transformacije

2.1.2 Furijeova transformacija u $L^2(\mathbb{R})$

Furijeova transformacija indikatorske funkcije $x = 1_{[-1,1]}$ je

$$X(\omega) = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega}{\omega}.$$

Ova funkcija nije integrabilna, ali je njena kvadratana funkcija integrabilna. Stoga se Teorema 2.1 o inverznoj Furijeovoj transformaciji ne može primeniti. Ovo je motivacija za proširenje Furijeove transformacije na prostor $L^2(\mathbb{R})$ funkcija konačne energije. Postojanje unutrašnjeg proizvoda na Hilbertovom prostoru $L^2(\mathbb{R})$ nudi širok spektar pogodnosti.

Teorema 2.5. *Ako su x i z iz $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, onda važi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)z^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Z^*(\omega)d\omega. \quad (2.3)$$

Za $z = x$ sledi da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.4)$$

Dokaz. Neka je $y = x * \bar{z}$ gde je $\bar{z} = z^*(-t)$. Pomoću teoreme o konvoluciji (Teorema 2.4) i osobine kompleksne konjugacije (Tabela 1) pokazuje se da je $G(\omega) = F(\omega)H^*(\omega)$. Primenom inverzne Furijeove transformacije (2.1) na $y(0)$ dobija se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)z^*(t)dt = y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Z^*(\omega)d\omega.$$

□

Jednačine (2.3) i (2.4) nazivaju se Parsevalova formula i Planšerelov identitet respektivno.

2.2 Regularnost i opadanje Furijeove transformacije

Globalna regularnost funkcije x zavisi od opadanja ³ $|X(\omega)|$ kada se frekvencija ω povećava. Proučava se diferencijabilnost funkcije x . Ako $x \in L^1(\mathbb{R})$ onda inverzna Furijeova formula (2.1) implicira da je x neprekidna i ograničena:

$$|x(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\omega t} X(\omega)| d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)| d\omega < +\infty. \quad (2.5)$$

U Teoremi 2.6 dat je dovoljan uslov koji garantuje diferencijabilnost x za bilo koji red p .

Teorema 2.6. *Funkcija x je ograničena i p puta neprekidno diferencijabilna sa ograničenim izvodima ako je*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|(1 + |\omega|^p) d\omega < +\infty. \quad (2.6)$$

³engl. decay

Dokaz. Furijeova transformacija izvoda k -tog reda $x^{(k)}(t)$ je $(i\omega)^k X(\omega)$. Primjenjujući (2.5) na ovaj izvod dokazuje se da je

$$|x^{(k)}(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)| |\omega|^k d\omega.$$

Uслов (2.6) implicira da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)| |\omega|^k d\omega < +\infty$$

za svako $k \leq p$, pa je $x^{(k)}(t)$ neprekidno i ograničeno.

□

Ovaj rezultat dokazuje da ako postoji konstanta K i $\varepsilon > 0$ takvi da

$$|X(\omega)| \leq \frac{K}{1 + |\omega|^{p+1+\varepsilon}}, \quad \text{onda} \quad x \in \mathbf{C}^p.$$

Opadanje $|X(\omega)|$ zavisi od najgoreg singularnog ponašanja funkcije x . Npr. $x = 1_{[-T,T]}$ nije neprekidno kada je $t = \pm T$, pa $|X(\omega)|$ opada poput $|\omega|^{-1}$.

U ovom slučaju, takođe je važno znati da je $x(t)$ regularno za $t \neq \pm T$. Ova informacija ne može se dobiti iz osobine opadanja $|X(\omega)|$. Da bi se okarakterisala lokalna regularnost signala x , neophodno ga je razložiti pomoću talasnih formi koje su vremenski dovoljno lokalizovane, za razliku od sinusoidnih talasa $e^{i\omega t}$.

2.3 Vremensko-frekvencijska lokalizacija

U mnogim primenama, za dati signal $x(t)$ (pri čemu se za sada prepostavlja da je t neprekidna promenljiva), ispituje se njegov frekvencijski sadržaj lokalno u vremenu. Ovo je npr. slično muzičkoj notaciji, koja govori muzičaru koju notu (frekvencijska informacija) treba da odsvira u određenom trenutku. Standardna Furijeova transformacija,

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} x(t) dt,$$

daje prikaz sadržaja frekvencije signala x , ali informacije koje se odnose na vremensko-frekvencijsku lokalizaciju, npr. visokofrekventni prasak ne mogu se lako pročitati iz X . Vremensko-frekvencijska lokalizacija može se postići najpre uokvirivanjem signala x , tako što se odseče samo dobro lokalizovani deo x i zatim se izvrši njegova Furijeova transformacija:

$$(T^{win}x)(\omega, u) = \int x(t)y(t-u)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.7)$$

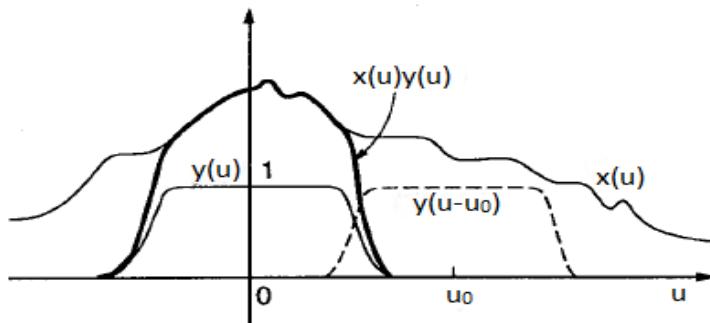
Ovo je tzv. prozorska ili kratkotrajna Furijeova transformacija ⁴, koja je standardna tehnika za vremensko frekvencijsku lokalizaciju.

Još je poznatija analiza signala u njenoj diskretnoj verziji, gde su u i ω do deljenje regularne prostorne promenljive: $u = nu_0, \omega = m\omega_0$, gde su $m, n \in \mathbb{Z}$ i $\omega_0, u_0 > 0$ su fiksirane vrednosti. Onda (2.7) postaje

$$(T_{m,n}^{win}x)(m\omega_0, nu_0) = (T_{m,n}^{win}x)(\omega_0, u_0) = \int x(t)y(t - nu_0)e^{-im\omega_0 t} dt. \quad (2.8)$$

Ovaj postupak je prikazan na Slici 2: za fiksirno n , $T_{m,n}^{win}(x)$ odgovara Furijeovim koeficijentima $x(\cdot)y(\cdot - nu_0)$. Ako je npr. y kompaktan nosač, onda je jasno da, uz odgovarajuće izabrano ω_0 , Furijeovi koeficijenti $T_{\cdot,n}^{win}(x)$ su dovoljni za karakterizaciju i ako je potrebno za rekonstrukciju $x(\cdot)y(\cdot - nu_0)$. Premeštanje n "delova" po koracima u_0 , omogućava se dobijanje svih x iz $T_{m,n}^{win}(x)$.

Mnogo mogućih izbora je predloženo za prozorsknu funkciju y u analizi signala, od kojih većina ima kompaktan nosač i odgovarajući glatkoću. U fizici, (2.7) je povezan sa prikazima koherentnih stanja; $y^{\omega,u}(t) = e^{i\omega t}y(t - u)$ su koherentna stanja. U ovom kontekstu, veoma popularan izbor je Gausova funkcija y . U svim primenama, pretpostavlja se da je y dobro definisana u prostoru i vremenu; ako su y i Y koncentrisane oko nule, onda se $(T^{win}x)(\omega, u)$ može tumačiti kao "sadržaj" x blizu vremena u i frekvencije ω . Prozorska Furijeova transformacija prema tome pruža opis x u vremensko-frekvencijskoj ravni.



Slika 2: Prozorska Furijeova transformacija: funkcija $x(u)$ se množi sa funkcijom $y(u)$, i izračunavaju se Furijeovi koeficijenti proizvoda $x(u)y(u)$; procedura se zatim ponavlja za translirane prozore, $y(u - u_0), y(u - 2u_0), \dots$

⁴engl. windowed Fourier transform, short-time Fourier transform

2.4 Analogije i razlike malotalasne i prozorske Furijeove transformacije

Malotalasna transformacija pruža sličan vremensko-frekvencijski opis, sa nekoliko bitnih razlika. Formule malotalasne transformacije analogne (2.7) i (2.8) su

$$W_{x;\psi}(\tau, s) = |s|^{-1/2} \int x(t)\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (2.9)$$

i

$$W_{m,n}^{x;\psi}(\tau, s) = s_0^{-m/2} \int x(t)\psi\left(s_0^{-m}t - n\tau_0\right) dt. \quad (2.10)$$

U oba slučaja se pretpostavlja da ψ zadovoljava

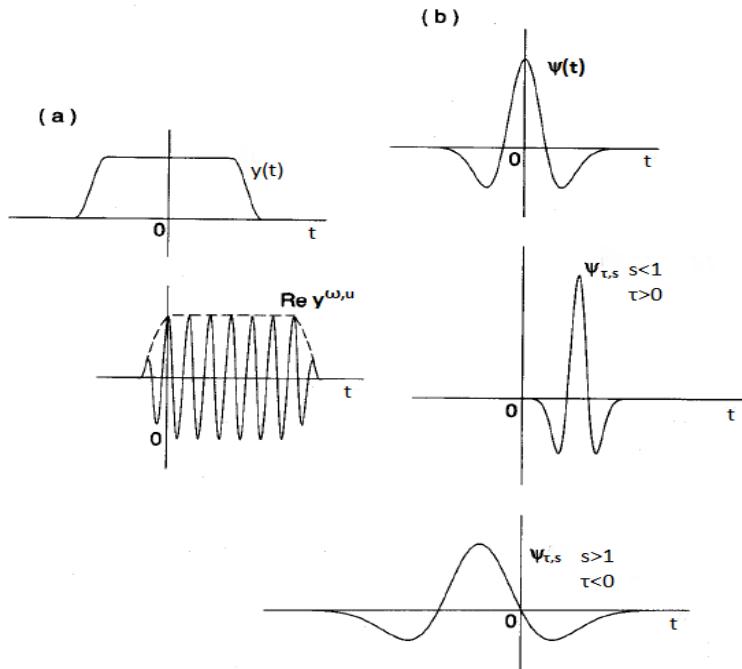
$$\int \psi(t)dt = 0. \quad (2.11)$$

Formula (2.10) je dobijena iz (2.9) restrikcijom s, τ samo na diskretne vrednosti: u ovom slučaju $s = s_0^m$, $\tau = n\tau_0 s_0^m$, gde su $m, n \in \mathbb{Z}$, i $s_0 > 1$, $\tau_0 > 0$ fiksirani.

Jedna sličnost između malotalasne transformacije i prozorske Furijeove transformacije je jasna: i (2.7) i (2.9) uzimaju unutrašnje proizvode x sa familijom funkcija indeksiranih sa dve oznake, $y^{\omega,u}(t) = e^{i\omega t}y(t-u)$ u (2.7), i $\psi_{\tau,s}(t) = |s|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$ u (2.9).

Funkcije $\psi_{\tau,s}$ nazivaju se talasići⁵; funkcija ψ se ponekad naziva "mother wavelet". Ovde se pretpostavlja da su ψ i y realne, čak iako ovo nije neophodno; ako nisu realne, onda se u (2.7) i (2.9) mora uvesti kompleksna konjugacija. Tipičan izbor za ψ je $\psi(t) = (1-t^2)\exp(1-t^2/2)$, drugi izvod Gausove funkcije, koji se ponekad naziva "mexican hat" funkcijom jer podseća na presek Meksičkog šešira. Funkcija "Mexican hat" je dobro lokalizovana i u vremenu i u frekvenциji, i zadovoljava (2.11). Kako se s menja, $\psi_{s,0}(t) = |s|^{-1/2}\psi(t/s)$ pokriva različite frekvencijske opsege (velike vrednosti parametra skaliranja $|s|$ odgovaraju malim frekvencijama, ili velikoj skali $\psi_{s,0}$; male vrednosti $|s|$ odgovaraju visokim frekvencijama ili veoma maloj skali $\psi_{s,0}$). Promena parametra τ omogućava pomeranje centra vremenske lokalizacije: svaki $\psi_{\tau,s}(t)$ je lokalizovan oko $t = \tau$. Iz toga sledi da (2.9), kao i (2.7) daje vremensko-frekvencijski opis x . Razlika između malotalasne transformacije i prozorske Furijeove transformacije leži u oblicima funkcija $y^{\omega,u}$ i $\psi_{\tau,s}$, kao što je prikazano na Slici 3. Sve funkcije $y^{\omega,u}$ sastoje se od iste funkcije omotača y (engl. envelope function), translirane na odgovarajuće vremenske lokacije, i "popunjene" sa oscilacijama viših frekvencija. Takođe, sve funkcije $y^{\omega,u}$, bez obzira na vrednosti ω imaju istu širinu. Nasuprot tome, $\psi_{\tau,s}$ ima vremensku-širinu prilagođenu frekvenciji: više frekvencije $\psi_{\tau,s}$ su

⁵engl. wavelets



Slika 3: Tipični oblici (a) prozorske Furijeove transformacije funkcija $y^{\omega,u}$ i (b) talasića $\psi_{\tau,s}$. $y^{\omega,u}(t) = e^{i\omega t}y(t-u)$ može se posmatrati kao translirani omotač y "popunjeno" višim frekvencijama; $\psi_{\tau,s}$ su sve kopije istih funkcija, translirane, skupljene ili razvučene.

veoma uske, dok su niske frekvencije $\psi_{\tau,s}$ mnogo šire. Kao rezultat toga, malotalasna transformacija bolje "zumira" pojavu visoke frekvencije u kratkotrajnim periodima od prozorske Furijeove transformacije, poput prelaznih signala.

2.5 Mali talasi ili talasići

Furijeova analiza omogućava proučavanje ciklične prirode vremenskih serija u frekvencijskom domenu. Međutim uprkos korisnosti Furijeove transformacije, njenom primenom gubi se informacija o vremenu. Zbog ovog gubitka informacija teško je razlikovati prolazne odnose ili identifikovati u kojem vremenskom trenutku su se desile strukturne promene. Štaviše, ove tehnike su pogodne samo za vremenske serije sa stabilnim statističkim osobinama, tj. za stacionarne vremenske serije. Kao alternativa predložena je malotalasna analiza.

Malotalasna analiza procenjuje spektralne karakteristike vremenskih serija kao funkcije vremena, otkrivajući kako se različite periodične komponente vremenskih serija menjaju tokom vremena. Dok se u spektralnoj analizi vremenske serije raz-

bijaju na sinus i kosinus različitih frekvencija i bekonačnog trajanja u vremenu, malotalasna transformacija razvija vremensku seriju u transliranu i skaliranu funkciju koja ima ograničen spektralni opseg i ograničeno trajanje u vremenu. Kao što ćemo videti jedna od glavnih prednosti malotalasne transformacije jeste mogućnost vršenja prirodnih lokalnih analiza vremenskih serija: talasić se rasteže u dugačku funkciju da bi se izmerilo kretanje niskih frekvencija, a zatim se skuplja u kratku funkciju da bi se izmerilo kretanje visokih frekvencija.

Ovde važi Parsevalova jednakost definisana sa (2.3) i Planšerelov identitet (2.4). Planšerelov identitet se može napisati u obliku norme $\|x(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|X(\omega)\|^2$.

Da bi funkcija $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ bila "mother" (prihvatljiv ili analizirajući) talasić ona mora da zadovoljava tehnički uslov, koju se obično naziva i uslov prihvatljivosti⁶ koji glasi:

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (2.12)$$

Konstanta C_ψ se naziva konstanta prihvatljivosti.

Treba istaknuti da je kvadrat integrabilna funkcija $\psi(t)$ vrlo blag uslov opadanja i da se u praksi nameću mnogo strožiji uslovi. U stvari, u svrhu pružanja korisne vremensko-frekvencijske lokalizacije talas mora biti dobro lokalizovan, kako u vremenskom tako i u frekvencijskom domenu.

Ako je $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ onda je Ψ neprekidno i (2.12) može biti zadovoljeno samo ako je $\Psi(0) = 0$ ili $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$. Sa druge strane, ako je $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ nameće se malo jači uslov od integrabilnosti na ψ , naime ako je

$$\int (1 + |t|)^\alpha |\psi(t)| dt < \infty \text{ za } \alpha > 0,$$

onda je

$$|\Psi(\omega)| \leq C|\omega|^\beta, \quad \beta = \min(\alpha, 1)$$

i (2.12) je zadovoljen. Dakle, za funkcije sa dovoljnim opadanjem, ispostavilo se da je uslov prihvatljivosti (2.12) ekevivalentan sledećem zahtevu:

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

Ovo znači da se funkcija ψ mora pomerati gore i dole po t-osi(t-axis), tj. mora se ponašati poput talasa; ovo, zajedno sa pretpostavkom o svojstvu opadanja opravdava izbor termina talasić - Slika 4. Ta osobina dozvoljava efektivnu lokalizaciju u vremenu i frekvenciji, za razliku od Furijeove transformacije, koja vrši dekompoziciju signala u smislu sinusa i kosinusa, tj. talasa beskonačnog trajanja.

⁶engl. admissibility condition



Slika 4: Tipičan mali talas u odnosu na kosinusnu funkciju. Dok je kosinusna funkcija uvek između -1 i 1 , malotalasna funkcija se približava nuli kako se udaljava od koordinatnog početka.

2.6 Različiti tipovi malotalasnih transformacija.

Postoje različiti tipovi malotalasnih transformacija, sve počinju sa osnovnim formulama (2.9) i (2.10). U ovom radu će se razlikovati:

- Neprekidna malotalasna transformacija (2.9), i
- Diskretna malotalasna transformacija (2.10)

2.6.1 Neprekidna malotalasna transformacija

Počevši od dopustive "mother wavelet" funkcije ψ , familija $\psi_{\tau,s}$ funkcije "wavelet daughters" može se dobiti jednostavnim skaliranjem i transliranjem ψ :

$$\psi_{\tau,s}(t) := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad s, \tau \in \mathbb{R}, s \neq 0,$$

gde je s faktor skaliranja ili dilatacije koji kontroliše širinu talasića i τ je translacioni parametar koji kontroliše lokaciju talasića. Skaliranje talasića jednostavno znači rastezanje talasića (ako je $|s| > 1$) ili skupljanje (ako je $|s| < 1$), dok transliranje jednostavno znači promenu njegovog položaja u vremenu.

Normalizacija je birana tako da je $\|\psi_{\tau,s}\| = \|\psi\|$ za sve τ, s . Prepostavljamo da je $\|\psi\| = 1$. Za datu vremensku seriju $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, njena neprekidna malotalasna transformacija u odnosu na talasić ψ je funkcija dve promenljive, $W_{x;\psi}(\tau, s)$

$$W_{x;\psi}(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt. \quad (2.13)$$

Položaj talasića u vremenskom domenu dat je sa τ , dok je njegov položaj u frekvencijskom domenu dat sa s . Prema tome malotalasna transformacija, preslikavanjem originalne serije u funkciju promenljivih τ i s , daje istovremeno informacije o vremenu i frekvenciji. Formule malotalasne i Furijeove transformacije veoma su slične. Glavna razlika je da u Furijeovoj transformaciji nema parametra lokalizacije vremena i da postoje sinusne i kosinusne funkcije umesto malotalasne funkcije.

Koristeći Teoremu 2.4, neprekidna malotalasna transformacija (2.13) može biti predstavljena u frekvenciji, kao

$$W_x(\tau, s) = \frac{\sqrt{|s|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(s\omega) X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Kada je iz konteksta jasno da je ψ talasić, piše se W_x umesto $W_{x;\psi}$.

2.6.2 Inverzna neprekidna malotalasna transformacija

Važnost uslova prihvatljivosti (2.12) proizilazi iz činjenice da njegovo ispunjenje garantuje da se energija originalne funkcije $x(t)$ očuva malotalasnom transformacijom, tj. da važi Parsevalova jednakost:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W_x(\tau, s)|^2 \frac{d\tau ds}{s^2},$$

koja omogućava rekonstrukciju funkcije $x(t)$ iz njene malotalasne transformacije. Preciznije, funkcija x može se dobiti iz njene malotalasne transformacije pomoću formule "rezolucije identiteta" koja je data sledećom teoremom.

Teorema 2.7. Za sve $x, y \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\tau, s) W_y^*(\tau, s) \frac{ds d\tau}{s^2} = C_\psi \langle x, y \rangle \quad (2.14)$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\tau, s) W_y^*(\tau, s) \frac{ds d\tau}{s^2} \\ &= \iint \left[\int X(\xi) |s|^{1/2} e^{-i\tau\xi} \Psi^*(s\xi) d\xi \right] \frac{ds d\tau}{s^2} \\ & \quad \left[\int Y^*(\xi') |s|^{1/2} e^{i\tau\xi'} \Psi(s\xi') d\xi' \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Izraz u prvoj zagradi može se posmatrati kao $(2\pi)^{1/2}$ puta Furijeova transformacija $X_s(\xi) = |s|^{1/2} X(\xi) \Psi^*(s\xi)$; slična je interpretacija i druge zgrade $(2\pi)^{1/2}$

puta kompleksno konjugovana Furijeova transformacija $Y_s(\xi) = |s|^{1/2}Y(\xi)\Psi^*(a\xi)$. Na osnovu unitarnosti Furijeove transformacije sledi da je

$$\begin{aligned}
 (2.15) &= 2\pi \int \frac{ds}{s^2} \int X_s(\xi) Y_s^*(\xi) d\xi \\
 &= 2\pi \int \frac{ds}{|s|} \int X(\xi) Y^*(\xi) |\Psi(s\xi)|^2 d\xi \\
 &= 2\pi \int X(\xi) Y^*(\xi) d\xi \int |\Psi(s\xi)|^2 \frac{ds}{|s|} \\
 &\quad (\text{Fubinijeva teorema omogućava zamenu}) \\
 &= C_\psi \langle x, y \rangle
 \end{aligned}$$

(uraditi smenu promenljive $\zeta = s\xi$ u drugom integralu).

□

Sada je jasno zašto se nameće uslov prihvatljivosti (2.12): ako je C_ψ beskočna onda se rezolucija identiteta (2.14) ne bi očuvala. Formula (2.14) može se napisati i u sledećem obliku

$$x = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\tau, s) \psi_{\tau,s} \frac{ds d\tau}{s^2}, \quad (2.16)$$

kada je $C_\psi \neq 0$.

Zbog velike redundantnosti ove transformacije (primetite da se funkcija jedne promenljive preslikava u bivarijantnu funkciju) dostupne su mnoge formule rekonstrukcije. Na primer, moguće je rekonstruisati $x(t)$ koristeći

$$x(t) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty W_x(\tau, s) \psi_{\tau,s}(t) d\tau \right] \frac{ds}{s^2},$$

odnosno izračunavajući transformaciju samo za pozitivne vrednosti skalirajućeg parametra s , što je uobičajan zahtev u praksi.

2.6.3 Diskretna malotalasna transformacija

U slučaju neprekidne malotalasne transformacije razmatrali smo funkciju

$$\psi_{\tau,s}(t) = |s|^{-1/2} \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right)$$

gde su $s, \tau \in \mathbb{R}$ i ψ je prihvatljiv mali talas. Ukoliko je $\psi(\omega) \neq 0$ za $\omega > 0$, onda uslov prihvatljivosti postaje

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{-\infty}^0 \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Da bi se izvršila diskretizacija dilatacionog parametra s biramo $s = s_0^m$, $m \in \mathbb{Z}$, tako da je dilatacioni korak $s_0 \neq 1$ fiksiran. Zbog praktičnosti prepostavlja se da je $s_0 > 1$ (iako to nije važno jer uzimamo i pozitivne i negativne vrednosti m). Kao što je već prikazano na Slici 3, različite vrednosti m odgovaraju talasićima različitih širina. To znači da bi diskretizacija translacionog parametra τ trebala da zavisi od m : uski (visoka frekvencija) mali talasi se pomeraju malim koracima da bi prekrili ceo skup, dok se širi (niže frekvencije) mali talasi pomeraju većim koracima. Za $m = 0$, prirodno je da τ diskretizujemo množenjem celih brojeva (pozitivnih ili negativnih) sa τ_0 (proizvoljno $\tau_0 > 0$ je fiksirano), gde je τ_0 odabранo na odgovarajući način tako da $\psi(t - n\tau_0)$ "pokriva" ceo skup. S obzirom da je širina $\psi(s_0^{-m}t)$ proporcionalna sa s_0^m , biramo da diskretizujemo τ sa $\tau = n\tau_0 s_0^m$, gde je $\tau_0 > 0$ fiksirano, i $n \in \mathbb{Z}$. $\tau = n\tau_0 s_0^m$ osigurava diskretizaciju talasića na nivou m "pokrivajući" skup na isti način kao $\psi(t - n\tau_0)$. Odgovarajući diskretni talasići su dati na sledeći način:

$$\psi_{m,n}(t) = s_0^{-m/2} \psi(s_0^{-m}(t - n\tau_0 s_0^m)) = s_0^{-m/2} \psi(s_0^{-m}t - n\tau_0).$$

Na Slici 5a. šematski je prikazana rešetka vremensko-frekvencijske lokalizacije centara koji odgovaraju $\psi_{m,n}$. Za datu funkciju x , unutrašnji proizvod $\langle x, \psi_{m,n} \rangle$ tada daje tačnu diskretnu malotalasnu transformaciju $W_{m,n}^{x;\psi}$ kao što je definisano u (2.10) (opet prepostavljamo da je ψ realno).

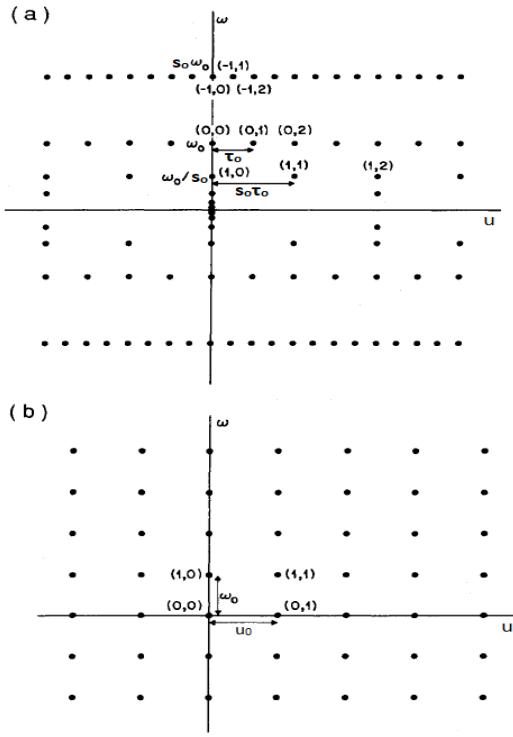
U diskretnom slučaju, uopšte ne postoji formula "rezolucije identiteta" analoga sa (2.16) za neprekidan slučaj. Rekonstrukcija x iz W_x , ako je uopšte moguća, mora se izvesti na neki drugi način.

Izbor malog talasa ψ koji se koristi u neprekidnoj malotalasnoj transformaciji ili u okvirima diskretno označenih familija malih talasa u osnovi je ograničen samo zahtevom (definisan sa 2.12) da je C_ψ konačan. Iz praktičnih razloga, obično se bira ψ tako da je dobro koncentrisan u vremenskom i frekvencijskom domenu, ali to i dalje ostavlja mnogo slobode.

2.7 Lokalizacione osobine i Hajzenbergov princip neodređenosti

Može li se konstruisati funkcija x sa energijom koja je veoma dobro lokalizovana u vremenu i sa Furijeovom transformacijom X koja ima energiju koncentrisanu u intervalu male frekvencije? Kao što smo već i pre istakli ne postoji idealna lokalizacija, tj. ne postoji takva lokalizacija koja daje podjednako dobre informacije i o frekvenciju i o vremenu. Upravo o ovome govori Hajzenbergov princip neodređenosti⁷.

⁷engl. Heisenberg Uncertainty principle



Slika 5: Mreža vremensko-frekvencijske lokalizacije malotalasne transformacije i prozorske Furijeove transformacije. (a) Malotalasna transformacija: $\psi_{m,n}$ je lokalizovana oko $s_0^m n \tau_0$ u vremenu. Prepostavljamo da $|\Psi|$ ima dva maksimuma u frekvenciji, $su \pm \xi_0$ (to je slučaj npr. za mali talas-Meksički šešir (Mexican hat) $\psi(u) = (1 - u^2)e^{-u^2/2}$; $|\Psi_{m,n}(\xi)|$ onda dostiže maksimum u $su \pm s_0^m \xi_0$, koji su dva centra lokalizacije $\psi_{m,n}$ u frekvenciji. (b) Prozorska Furijeova transformacija: $y_{m,n}$ je lokalizovana oko $n u_0$ u vremenu, a oko $m \omega_0$ u frekvenciji.

Vremensko-frekvencijska koncentracija energije je ograničena Hajzenbergovim principom neodređenosti. Hajzenbergov princip neodređenosti izведен je u kvantnoj mehanici. U osnovi je rečeno da se određeni parovi fizičkih osobina, kao što su položaj i momenat, ne mogu istovremeno znati sa proizvoljno velikom preciznošću: Što se preciznije meri jedna osobina, manje precizno se može meriti druga. Primijenjeno u našem kontekstu, ako želimo preciznost u frekvenciji, odričemo se preciznosti u vremenu. Furijeova transformacija upravo to čini: ima odličnu frekvencijsku lokalizaciju, ali se informacije o vremenu gube. Talasići omogućuju čuvanje informacije i o vremenu i o frekvenciji. U ovom odeljku ćemo tačno opisati ovaj kompromis između vremena i frekvencije. Da bi se smanjilo vreme širenja funkcije x , ono se može skalirati sa $s < 1$, održavajući konstantnu

ukupnu energiju, ako je

$$x_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} x\left(\frac{t}{s}\right), \quad \text{onda} \quad \|x_s\|^2 = \|x\|^2.$$

Furijeova transformacija $X_s(\omega) = \sqrt{s}X(s\omega)$ je proširena sa $1/s$, pa se u frekvencijskoj lokalizaciji gubi ono što se postiglo u vremenu. Dakle, kao što smo već istakli, u osnovi je kompromis između vremenske i frekvencijske lokalizacije.

Da bismo opisali osobine vremensko-frekvencijske lokalizacije neprekidne matalasne transformacije, prepostavljamo da su i talasić $\psi(t)$ i njegova Furijeova transformacija $\Psi(\omega)$ dobro lokalizovane funkcije. Tačnije, prepostavlja se da ove funkcije imaju dovoljno opadanje tj. treba da važi $|\psi(t)| < C(1 + |t|)^{-(1+\varepsilon)}$ i $|\Psi(\omega)| < C(1 + |\omega|)^{-(1+\varepsilon)}$, za $C < \infty$, $\varepsilon > 0$.

Centar u vremenu ili prosečna lokacija talasića ψ , $\mu_{t;\psi}$ definisan je na sledeći način:

$$\mu_{t;\psi} = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t|\psi(t)|^2 dt,$$

Mera koncentracije ψ oko njenog centra ili odstupanje od prosečne vrednosti, data je standardnom devijacijom u vremenu (ova vrednost je još poznata i kao radijus u vremenu):

$$\sigma_{t;\psi} = \frac{1}{\|\psi\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu_{t;\psi})^2 |\psi(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Centar u frekvenciji ili prosečni momenat, $\mu_{\omega;\psi}$, definisan je sa

$$\mu_{\omega;\psi} = \frac{1}{\|\Psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\Psi(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.17)$$

Standardna devijacija (ili radijus) u frekvenciji, $\sigma_{\omega;\psi}$ definisana je formulom

$$\sigma_{\omega;\psi} = \frac{1}{\|\Psi\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \mu_{\omega;\psi})^2 |\Psi(\omega)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Često se koristi i skraćena notacija pri čemu se iz oznake izostavlja ψ , npr. umesto $\mu_{\omega;\psi}$ pisaće se samo μ_{ω} itd.

Što je veće σ_t , veća je neodređenost u pogledu položaja slobodne čestice; što je veće σ_{ω} veća je neodređenost u pogledu momenta. Količine μ_t i σ_t su srednja vrednost i standardna devijacija funkcije gustine definisane sa $|\psi(t)|^2 / \|\psi\|^2$. Funkcija gustine za μ_{ω} , σ_{ω} data je sa $|\Psi(\omega)|^2 / \|\Psi\|^2$. Stoga, ne bi trebalo da čudi da je interval $[\mu_t - \sigma_t, \mu_t + \sigma_t]$ skup gde $\psi(t)$ dostiže njegovu "najznačajniju" vrednost dok interval $[\mu_{\omega} - \sigma_{\omega}, \mu_{\omega} + \sigma_{\omega}]$ igra istu ulogu za $\Psi(\omega)$. Pravougaonik

$$H_{\psi} := [\mu_t - \sigma_t, \mu_t + \sigma_t] \times [\mu_{\omega} - \sigma_{\omega}, \mu_{\omega} + \sigma_{\omega}]$$

u (t, ω) -ravni se naziva Hajzenebregova kutija ili prozor za funkciju ψ . Možemo reći da je ψ lokalizovano oko tačke (μ_t, μ_ω) vremensko frekvencijske ravni, sa neodređenošću datom sa $\sigma_t \sigma_\omega$. U našem kontekstu, Hajzenbergov princip neodređenosti uspostavlja sledeću granicu:

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}.$$

Teorema 2.8. *Hajzenbergov princip neodređenosti. Vremenska i frekvencijska varijansa funkcije $x \in \mathbf{L}^2$ zadovoljavaju*

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Ova nejednačina postaje jednakost ako i samo ako postoji $(\mu_t, \mu_\omega, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ tako da je

$$x(t) = a \exp[i\mu_\omega t - b(t - \mu_t)^2]. \quad (2.18)$$

Dokaz. Pretpostavlja se da je $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \sqrt{t}x(t) = 0$. Teorema važi za svako $x \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Ako su μ_t i μ_ω prosečno vreme i frekvencija lokalizacije funkcije x , tada je prosečno vreme i frekvencija lokalizacije funkcije $\exp(-i\mu_\omega t)x(t + \mu_t)$ jednako nuli. Prema tome, dovoljno je dokazati teoremu za $\mu_t = \mu_\omega = 0$. Na osnovu Planšerelovog identiteta

$$\sigma_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \|x(t)\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \mu_\omega)^2 |X(\omega)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Primetimo da je

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi \|x\|^4} \int_{-\infty}^{+\infty} |tx(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega X(\omega)|^2 d\omega.$$

Pošto je $i\omega X(\omega)$ Furijeova transformacija funkcije $x'(t)$, Planšerelov identitet (2.4) primjenjen na $i\omega X(\omega)$ daje

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{\|x\|^4} \int_{-\infty}^{+\infty} |tx(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2 dt. \quad (2.19)$$

Na osnovu Švarcove nejednakosti⁸ sledi

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\geq \frac{1}{\|x\|^4} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |tx'(t)x^*(t)| dt \right]^2 \\ &\geq \frac{1}{\|x\|^4} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{2} [x'(t)x^*(t) + x'^*(t)x(t)] dt \right]^2 \\ &\geq \frac{1}{4\|x\|^4} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t(|x(t)|^2)' dt \right]^2.\end{aligned}$$

Pošto je $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \sqrt{t}x(t) = 0$, parcijalnom integracijom dobija se

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4\|x\|^4} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \right]^2 = \frac{1}{4}.$$

Da bi se postigla jednakost, Švarcova nejednakost koja se primenjuje na (2.19) mora biti jednakost. Ovo implicira da postoji $b \in \mathbb{C}$ takvo da

$$x'(t) = -2bt x(t).$$

Dakle, postoji $a \in \mathbb{C}$ tako da $x(t) = a \exp(-bt^2)$. Ostali koraci dokaza su jednakosti tako da je donja granica zaista dostignuta. Kada je $\mu_t \neq 0$ i $\mu_\omega \neq 0$, odgovarajuća translacija vremena i frekvencije daje (2.18).

□

Kako je talasić “daughter” $\psi_{\tau,s}$ dobijen od njegovog “mother” talasića ψ jednostavnom translacijom τ i skaliranjem sa s , može se pokazati da su centar i radujus u vremenu $\psi_{\tau,s}$ dati sa $\mu_{t;\psi_{\tau,s}} = \tau + s\mu_t$ i $\sigma_{t;\psi_{\tau,s}} = s\sigma_t$ i da su centar i radus u frekvenciji $\psi_{\tau,s}$ dati sa $\mu_{\omega;\psi_{\tau,s}} = \frac{\mu_\omega}{s}$ i $\sigma_{\omega;\psi_{\tau,s}} = \frac{\sigma_\omega}{s}$. Posebno, ako je “mother” talasić ψ centriran kad je $t = 0$, tj. ako je $\mu_t = 0$, onda prozor povezan sa $\psi_{\tau,s}$ postaje

$$H_{\psi_{\tau,s}} = [\tau - s\sigma_t, \tau + s\sigma_t] \times \left[\frac{\mu_\omega}{s} - \frac{\sigma_\omega}{s}, \frac{\mu_\omega}{s} + \frac{\sigma_\omega}{s} \right].$$

⁸U unitarnom vektorskem prostoru V za svako $x, y \in V$ važi $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. Pri tome jednakost važi samo ako su vektori x, y linearno nezavisni.

Specijalni Slučajevi Švarcove nejednakaosti:

- U \mathbb{R}^n i \mathbb{C}^n sa standardnim unutrašnjim proizvodom važi $|\sum_1^n x_i y_i^*| \leq \sqrt{\sum_1^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_1^n |y_i|^2}$
- U prostoru \mathbf{L}^2 važi $|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g^*(x)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx$.

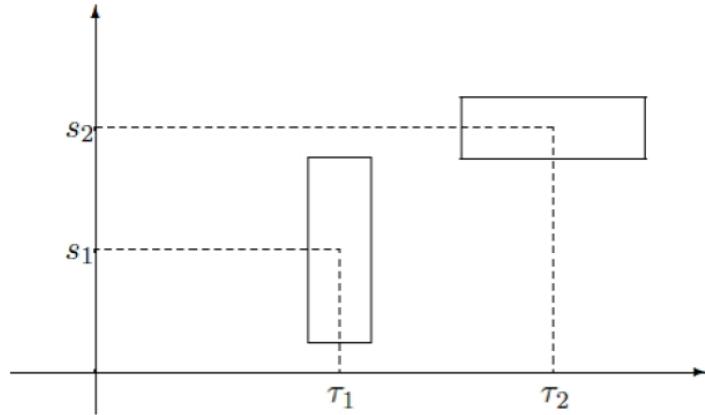
U ovom slučaju, postoji $W_x(\tau, s) \approx \int_{\tau-s\sigma_t}^{\tau+s\sigma_t} x(t)\psi_{\tau,s}^*(t)dt$ i prema Parsevalovoj relaciji, $W_x(\tau, s) \approx 2\pi \int_{\frac{\mu_\omega}{s}-\frac{\sigma_\omega}{s}}^{\frac{\mu_\omega}{s}+\frac{\sigma_\omega}{s}} X(\omega)\Psi_{s,\tau}(\omega)d\omega$.

Prema tome zaključujemo da neprekidna malotalana transformacija $W_x(\tau, s)$ daje vremensku informaciju o $x(t)$ oko trenutka $t(\tau) = \tau$, sa preciznošću $s\sigma_t$ i frekvencijsku informaciju o $X(\omega)$ oko frekvencije

$$\omega(s) = \frac{\mu_\omega}{s}, \quad (2.20)$$

sa preciznošću $\frac{\sigma_\omega}{s}$.

Iako je površina prozora konstantna (data sa $4\sigma_t\sigma_\omega$), dimenzije prozora menjaju se u skladu sa skalom; prozori se šire za velike vrednosti s (široke skale s - niske frekvencije $\omega_s = \frac{\sigma_\omega}{s}$) i skupljaju se za male vrednosti s (uska skala - visoke frekvencije $\frac{\sigma_\omega}{s}$). Ovo je jedna od glavnih prednosti malotalasne transformacije u odnosu na prozorsku Furijeovu transformaciju. Dakle, malotalasna transformacija omogućava variranje dužine talasića tako što se proteže u dugačku malotalasnu funkciju koja služi za merenje kretanja niskih frekvencija i sabija se u kratku malotalasnu funkciju koja meri kretanje visokih frekvencija. Na Slici 6. prikazani su prozori koji su povezani sa neprekidnom malotalasnou transformacijom.



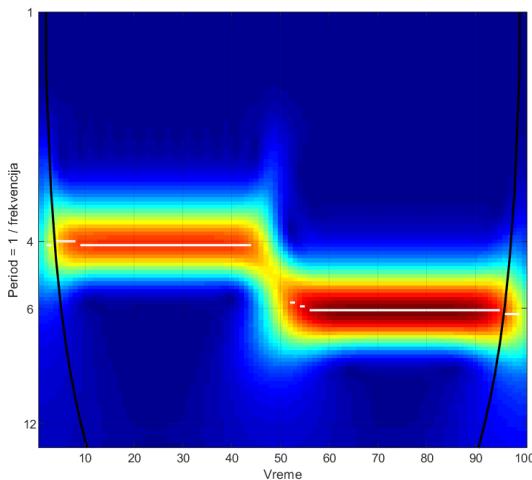
Slika 6: Prozori povezani sa neprekidnom malotalasnou transformacijom

2.8 Malotalasna moć spektra i malotalasne faze

(Lokalna) malotalasna moć spektra ⁹, ponekad nazvan i skalogram ili malotalasni periodogram definisan je kao

$$(WPS)_x(\tau, s) = |W_x(\tau, s)|^2.$$

Malotalasna moć spektra meri koliki je relativan doprinos varijansi vremenske serije u svakom vremenskom trenutku i na svakoj skali. Na Slici 7. (slika je preuzeta iz literature [9]) prikazana je malotalasna moć spektra vremenskih serija sa različitim ciklusima u prvoj i drugoj polovini uzorka.



Slika 7: Malotalasna moć spektra

Na Slici 7, kao i na ostalim slikama u radu, hladne boje (ekstremne vrednosti-plava boja) označavaju nižu moć, dok toplije boje (ekstremne vrednosti-crvena) označavaju višu moć. Bele linije označavaju maksimum malotalasne moći spektra, stoga dajući direktnu procenu cikličnog perioda. Malotalasna transformacija u određenom momentu u vremenu koristi informacije susednih tačaka, pa je manje tačna kako dolazi do uglova vremenske serije. Ova oblast koja je pogodjena graničnim efektima naziva se konus uticaja. Na grafiku konus uticaja je oblast izvan debelih crnih linija. Na vertikalnoj osi spektra, frekvencije su konvertovane u ciklične periode u godinama. Malotalasna moć spektra prikazna na Slici 7, ukazuje na činjenicu da su u posmatranom primeru četvorogodišnji i šestogodišnji ciklusi važni za objašnjavanje ukupne varijanse vremenske serije u prvoj i drugoj polovini uzorka.

Globalna malotalasna moć spektra ¹⁰ je prosečna vrednost malotalasne moći

⁹engl. (local) wavelet power spectrum

¹⁰engl. global wavelet power spectrum

u vremenu:

$$(GWPS)_x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |W_x(\tau, s)|^2 d\tau.$$

Kada je talasić ψ kompleksna vrednost, odgovarajuća malotalasna transformacija $W_x(\tau, s)$ je takođe kompleksna vrednost. U ovom slučaju transformacija se može podeliti na realni deo, $\Re\{W_x(\tau, s)\}$, i imaginarni deo, $\Im\{W_x(\tau, s)\}$, ili na njenu amplitudu, $|W_x(\tau, s)|$, i fazu (ili fazni ugao), $\phi(\tau, s) : W_x(\tau, s) = |W_x(\tau, s)| e^{i\phi_x(\tau, s)}$.¹¹

Za realne vrednosti malotalasnih funkcija, imaginarni deo je konstantno nula i faza je, dakle, nedefinisana. Dakle, da bi se razdvojile informacija o fazi i amplitudi vremenske serije, važno je koristiti kompleksne talasiće. U ovom slučaju, pogodno je izabrati talasić $\psi(t)$ čija je Furijeova transformacija definisana samo na pozitivnom delu realne ose, tj. tako da je $\Psi(\omega) = 0$ za $\omega < 0$. Talasić koji zadovoljava ovu osobinu naziva se analitički ili progresivni. Kada je ψ analitički talasić i $x(t)$ je realno, formule za rekonstrukciju koje uključuju samo pozitivne vrednosti parametra skaliranja s su i dalje dostupne; posebno, ako talasić zadovoljava da je $0 < |K_\psi| < \infty$, gde je $K_\psi := \int_0^\infty \frac{\Psi^*(\omega)}{\omega} d\omega$, onda se može koristiti sledeća formula rekonstrukcije, poznata kao Morlet formula, koja se pretežno koristi za numeričke primene:

$$x(t) = 2\Re \left[\frac{1}{K_\psi} \int_0^\infty W_x(\tau, s) \frac{ds}{s^{3/2}} \right].$$

Kada je talasić ψ analitički, odgovarajuća malotalasna transformacija se naziva analitička malotalasna transformacija¹².

Bitno je napomenuti da će se u nastavku ovoga rada prepostavljati da su svi razmatrani talasići analitički i prema tome malotalasna transformacija se računa samo za pozitivne vrednosti skalirajućeg parametra s . Iz ovog razloga, u svim formulama koje uključuju količinu $|s|$, ono će biti zamenjeno sa s .

2.9 Relacija skale ili frekvencije i Furijeov faktor

Malotalasna transformacija pruža nam prikaz vremenske skale funkcije koja se analizira, a ne vremensko-frekvencijsku reprezentaciju. Formula (2.20) se obično koristi za konvertovanje skala u frekvencije. Međutim, treba imati na umu da

¹¹Fazni ugao $\phi_x(\tau, s)$ kompleksnog broja $W_x(\tau, s)$ može se dobiti pomoću sledeće formule:

$$\phi_x(\tau, s) = \arctan \left(\frac{\Im\{W_x(\tau, s)\}}{\Re\{W_x(\tau, s)\}} \right).$$

¹²engl. analytic wavelet transform

ova inverzna relacija između skale i frekvencije odgovara određenoj interpretaciji i da postoje i drugi načini dodeljivanja frekvencija skalamu.

Postoje bar tri načina za konvertovanje skale u frekvenciju. Osim vrednosti $\mu_{\omega;\psi}$ date u (2.17) koja se naziva energetska frekvencija i koja će se zbog praktičnosti označavati sa ω_ψ^E razmatraju se još dve frekvencije povezane sa malim talasom. To su maksimalna frekvencija, ω_ψ^P i centralna trenutna frekvencija, ω_ψ^I . Maksimalna frekvencija definiše se kao frekvencija na kojoj je apsolutna vrednost Furijeove transformacije, $|\Psi(\omega)|$ maksimalna tj. $|\Psi(\omega_\psi^P)| = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\Psi(\omega)|$. Centralna trenutna frekvencija definisana je kao vrednost trenutne frekvencije koja je promenljiva u vremenu i koju talasić dostiže u svom centru tj. $\omega_\psi^I = \check{\omega}(0)$, gde je $\check{\omega}(t)$ promena vremena trenutne frekvencije malog talasa definisanog sa $\check{\omega}_\psi(t) = \frac{d}{dt} \Im\{\ln \psi(t)\}$. Za svaku od tri specifične frekvencije, ω_ψ^E , ω_ψ^P i ω_ψ^I definiše se formula pomoću koje je moguće skalu predstaviti kao frekvenciju:

$$\omega(s) = \frac{\omega_\psi}{s},$$

sa ω_ψ označena je bilo koja od tri specifične frekvencije. $\omega(s)$, ω_ψ^E , ω_ψ^P i ω_ψ^I su ugaone frekvencije. Relacija između skale i uobičajne "Furijeove" frekvencije f (izražene u ciklusima po jedinici vremena), data je formulom

$$f(s) = \frac{\omega_\psi}{2\pi s}. \quad (2.21)$$

$Ff = \frac{2\pi}{\omega_\psi}$ se naziva Furijeov faktor malog talasa i koristi se, u programima, za pretvaranje skala u periode.

Naravno, biće prikladno izabrati mali talas čije pridružene frekvencije ω_ψ^P , ω_ψ^E i ω_ψ^I imaju sve iste (ili bar veoma slične) vrednosti, jer ovo daje jedinstven pogled na relaciju između frekvencije i skale.

2.10 Analitički mali talasi

Uslov prihvatljivosti (2.12) je veoma slab uslov i, teoretski, postoji beskonačno mnogo malih talasa koji ga ispunjavaju. U praksi, izbor malog talasa je važan aspekt koji treba uzeti u obzir. On zavisi od konkretne primene.

U ovom odeljku se sumiraju neke osobine koje objašnjavaju zašto se Morlet-ov mali talas ¹³ najčešće koristi u praksi (kako autori ističu, čini se da svaka primena u ekonomiji koristi upravo ovaj izbor). Takođe, ovde se prepostavlja važna familija analitičkih malih talasa, generalizovanih Morseovih malih talasa ¹⁴, koji su fleksibilniji i koji se mogu koristiti kao alternativa za Morlet-ov mali talas kada se preferiraju bolji vremenski ili frekvencijski lokalizovani mali talasi.

¹³engl. Morlet wavelet

¹⁴engl. generalized Morse wavelets, GMW

2.10.1 Morlet-ovi mali talasi

Morlet-ovi mali talasi su jednoparametarska familija funkcija, koju su prvi put predstavili Goupillaud, Grossman i Morlet 1984.godine. Oni su definisani sa

$$\psi_{\omega_0}(t) = K \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2} \right) e^{-t^2/2}.$$

Izraz $e^{-\omega_0^2/2}$ postaje zanemarljiv za specijalno izabrano ω_0 , pa se Morlet-ov mali talas može definisati jednostavnije na sledeći način:

$$\psi_{\omega_0}(t) = K e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

gde je ω_0 centralna frekvencija. Da bi $\psi_{\omega_0}(t)$ imalo jediničnu energiju, konstanta normalizacije K mora biti jednaka

$$K = \pi^{-1/4}.$$

Od sada će se prepostavljati da je $K = \pi^{-1/4}$. Furijeova transformacija normalizovanog talasića data je sa

$$\Psi_{\omega_0}(\omega) = \sqrt{2}\pi^{1/4} e^{-\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Dakle, $\Psi_{\omega_0}(0) = \sqrt{2}\pi^{1/4} e^{-\omega_0^2/2} \neq 0$. Međutim, za dovoljno veliko ω_0 , npr. $\omega_0 > 5$, vrednosti $\Psi_{\omega_0}(\omega)$ za $\omega \leq 0$ su tako male da se za numeričke svrhe, Ψ_{ω_0} može smatrati analitičkim talasićem.

Morlet-ov talasić postao je najpopularniji među svim kompleksnim vrednostima talasića uglavnom zbog četiri interesantne osobine:

1. Za numeričke svrhe, može se tretirati kao analitički talasić.
2. Maksimalna frekvencija, energetska frekvencija i centralna trenutna frekvencija Morlet-ovog talasića su sve jednake i date sa

$$\omega_{\psi_{\omega_0}}^P = \omega_{\psi_{\omega_0}}^E = \omega_{\psi_{\omega_0}}^I = \omega_0,$$

olakšavajući pretvaranje skale u frekvencije. Koristeći formulu (2.21), i za najčešći izbor $\omega_0 = 6$, dobija se da je $f = \frac{6}{2\pi s} \approx \frac{1}{s}$.

3. Površina Hajzenbergovog prozora dostiže njegovu donju granicu sa ovim talasićem, tj. neodređenost dostiže najmanju moguću vrednost: $\sigma_{t;\psi_{\omega_0}} \sigma_{\omega;\psi_{\omega_0}} = \frac{1}{2}$. U tom smislu, Morlet-ov talasić ima optimalnu zajedničku vremensko-frekvencijsku koncentraciju.
4. Vremenski i frekvencijski radius su jednaki, $\sigma_{t;\psi_{\omega_0}} = \sigma_{\omega;\psi_{\omega_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, i prema tome, ovaj talasić predstavlja najbolji kompromis između koncentracije vremena i frekvencije. U ekonomiji se najčešće za vrednost ω uzima $\omega_0 \in [5, 6]$.

2.10.2 Generalizovani Morseovi talasići

Iako se Morlet-ov talasić dosta primenjuje, ponekad je potrebno posmatrati talasiće koji zavise od više parametra. Iz tog razloga se definišu generalizovani Morseovi talasići.

Generalizovani Morseovi talasići¹⁵ su dvoparametarska familija talasića, definisana, u frekvencijskom domenu sa

$$\Psi_{\beta,\gamma}(\omega) = K_{\beta,\gamma} H(\omega) \omega^\beta e^{-\omega^\gamma}$$

gde je $K_{\beta,\gamma}$ konstanta normalizacije i $H(\omega)$ je Hevisajdova funkcija definisana sa

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{za } \omega > 0, \\ 0 & \text{za } \omega \leq 0. \end{cases}$$

Da bi talasić bio dobro definisan mora da važi da su $\beta > 0$ i $\gamma > 0$. Promenom ovih parametara, generalizovani Morseovi talasići mogu davati širok spektar karakteristika, ostajući analitički. Zapravo, ovi talasići formiraju široku familiju koja podrazumeva mnoge druge tipove talasića. Pokazano je da uopšteni Morseovi talasići obuhvataju dve popularne familije analitičkih talasića: familiju Koši ili Klauder talasića (za $\gamma = 1$), Paul talasiće (koji odgovaraju slučaju kada je $\gamma = 1$ i $\beta \in \mathbb{N}$) i analitičke "Derivative of Gaussian" talasiće (za $\gamma = 2$).

Nažalost, za razliku od Morletovog slučaja, za generalizovane Morseove talasiće, ne postoji poseban način za pretvaranje skale u frekvencije. To je zato što je maksimalna frekvencija, $\omega_{\beta,\gamma}^P = (\frac{\beta}{\gamma})^{1/\gamma}$, različita od energetske frekvencije, $\omega_{\beta,\gamma}^E = \frac{1}{2^{1/\gamma}} \frac{\Gamma(\frac{2\beta+2}{\gamma})}{\Gamma(\frac{2\beta+1}{\gamma})}$, koja se razlikuje od centralne trenutne frekvencije, $\omega_{\beta,\gamma}^I = \frac{1}{2^{1/\gamma}} \frac{\Gamma(\frac{\beta+2}{\gamma})}{\Gamma(\frac{\beta+1}{\gamma})} = 2^{1/\gamma} \omega_{\beta/2,\gamma}^E$. Za ekonomiste, naviknute na razmišljanje o frekvencijama ovo je očigledan nedostatak ove familije talasića.

¹⁵engl. Generalized Morse Wavelets, GMWs

3 Unakrsna malotalasna analiza

Među mnogim primenama, jedna se bavi otkrivanjem i kvantifikovanjem odnosa između dve nestacionarne vremenske serije. Koncepti unakrsne malotalasne moći¹⁶, malotalasne koherencije¹⁷ i malotalasne fazne razlike¹⁸ su prirodna uopštenja osnovnih alata malotalasne analize koji nam omogućavaju da se na adekvatan način bavimo vremensko-frekvencijskom zavisnošću između dve vremenske serije. Za definisanje koncepata unakrsne malotalasne analize korišćena je literatura [7] i [8] sa spiska literature, dok je za uvođenje pojma vremenskih serija korišćen izvor [11].

Od sada, sve veličine koje će biti definisane (npr. unakrsna malotalasna transformacija, malotalasna koherencija, itd.) su funkcije vremena i skale (ili frekvencije). Da bi se pojednostavila notacija, ove veličine će biti opisane za određenu vrednost argumenata (τ, s).

3.1 Šta je vremenska serija?

Kako se ovde uvode koncepti malotalasne unakrsne analize između dve vremenske serije prvo se definiše pojam vremenske serije.

Definicija 2. Stohastički proces. Neka je $(\Omega, A, P(\cdot))$ prostor verovatnoće, \mathbf{T} je neki skup realnih brojeva i neka je definisana funkcija $X(\cdot, \cdot)$ koja preslikava $\Omega \times \mathbf{T}$ u \mathbf{R} . Uređeni niz slučajnih promenljivih $\{X(\cdot, \cdot), t \in \mathbf{T}\}$ naziva se stohastički (slučajni) proces.

Ako je u procesu $\{X(\cdot, \cdot), t \in \mathbf{T}\}$ fiksiran indeks $t \in \mathbf{T}$ dobija se slučajna promenljiva $X(\cdot, t)$ definisana na prostoru uzorka Ω . $X(\omega, \cdot)$ predstavlja funkciju od t koja se naziva realizacija slučajnog procesa. $X(\omega, t)$ za dato ω i t predstavlja realan broj. Stohastički proces se skraćeno označava sa $X(t)$ i X_t .

Vremenska serija je jedna realizacija stohastičkog procesa. To je uređeni niz zapažanja. Uređivanje se najčešće vrši s obzirom na vreme (postoje i serije kod kojih se uređivanje vrši s obzirom na prostor, tzv. prostorne serije) i to obično u jednakim vremenskim intervalima. Dok su kod klasične statističke analize elementi slučajnog uzorka međusobno nezavisni, kod analize vremenskih serija zapažanja u uzorku nisu međusobno nezavisna. Ukoliko se svojstva vremenske serije ne menjaju tokom vremena onda je serija stacionarna. Suprotno, ona je nestacionarna.

¹⁶engl. cross-wavelet power

¹⁷engl. wavelet coherency

¹⁸engl. wavelet phase-difference

Definicija 3. Striktna stacionarnost. Stohastički proces $\{X_t : t \in \mathbf{T}\}$ je striktno stacionaran ako je za bilo koji podskup (t_1, t_2, \dots, t_n) iz \mathbf{T} i za bilo koje $k \in \mathbf{T}$

$$F(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}).$$

Definicija striktne stacionarnosti govori da funkcija raspodele stohastičkog procesa ostaje nepromenjena kada se pomeri (translira) u vremenu za proizvoljno k .

Srednja vrednost stohastičkog procesa X_t je

$$\mu = E(X_t).$$

Varijansa stohastičkog procesa X_t je

$$\sigma_t^2 = E(X_t - \mu)^2.$$

Kovarijansa stohastičkog procesa je

$$\gamma(r, s) = Cov(X_r, X_s) = E((X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))), \quad r, s \in \mathbf{T}.$$

Korelacija stohastičkog procesa

$$\rho(r, s) = \frac{Cov(X_r, X_s)}{\sqrt{Var(X_r)Var(X_s)}}, \quad r, s \in \mathbf{T}.$$

Definicija 4. Slaba stacionarnost. Stohastički proces je $\{X_t, t \in \mathbf{T}\}$ je slabo stacionaran ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- $E(X_t) = \mu = const, \quad \forall t \in \mathbf{T}$
- $E(X_t^2) < \infty, \quad \forall t \in \mathbf{T}$
- $\gamma(r, s) = \gamma(r + t, s + t), \quad \forall r, s, t \in \mathbf{T}.$

Definicija nekih modela vremenskih serija data je u poglavlju 5.1.1 na kraju rada.

3.2 Unakrsna malotalasna transformacija i unakrsna malotalasna moć

Unakrsna malotalasna transformacija ¹⁹ dve vremenske serije $x(t)$ i $y(t)$, definisana je kao

$$W_{xy} = W_x W_y^*,$$

¹⁹engl. the cross-wavelet transform, XWT

gde su W_x i W_y malotalasne transformacije x i y , respektivno. Kada je $y = x$ dobijamo malotalasnu moć spektra tj. $W_{xx} = |W_x|^2 = (WPS)_x$.

Unakrsna malotalasna moć²⁰ dve vremenske serije data je na sledeći način

$$(XPW)_{xy} = |W_{xy}|.$$

Dok malatalasna moć spektra prikazuje lokalnu varijansu vremenske serije, unakrsna malatalasna moć dve vremenske serije prikazuje lokalnu kovarijansu između ovih vremenskih serija u vremensko-frekvencijskom prostoru. Prema tome, unakrsna malatalasna moć daje kvantifikovanu meru sličnosti moći između dve vremenske serije.

3.3 Kompleksna malatalasna koherencija

Za dve vremenske serije $x(t)$ i $y(t)$ može se definisati njihova kompleksna malatalasna koherencija²¹ ϱ_{xy} sa:

$$\varrho_{xy} = \frac{S(W_{xy})}{[S(|W_x|^2)S(|W_y|^2)]^{1/2}},$$

gde S označava operator glatkoće odnosno konvolucije sa pogodno izabranim prozorom u vremenu i skali. Glatkoća je neophodna, jer bi inače koherencija bila identična jedinici za svako vreme i na svim skalamama. Glatkoća u vremenu i skali može se postići konvolucijom odgovarajućih prozora.

3.4 Malatalasna koherencija i fazna razlika

Kompleksna malatalasna koherencija može se zapisati u polarnoj formi, kao $\varrho_{xy} = |\varrho_{xy}|e^{i\phi_{xy}}$. Apsolutna vrednost kompleksne malatalasne koherencije naziva se malatalasna koherencija i označava se sa R_{xy} , tj.

$$R_{xy} = \frac{|S(W_{xy})|}{[S(|W_x|^2)S(|W_y|^2)]^{1/2}},$$

sa $0 \leq R_{xy}(\tau, s) \leq 1$.²² Ugao ϕ_{xy} kompleksne koherencije naziva se fazna razlika (faza x je vodeća u odnosu na y), tj.

$$\phi_{xy} = \arctan \left(\frac{\Im(S(W_{xy}))}{\Re(S(W_{xy}))} \right)$$

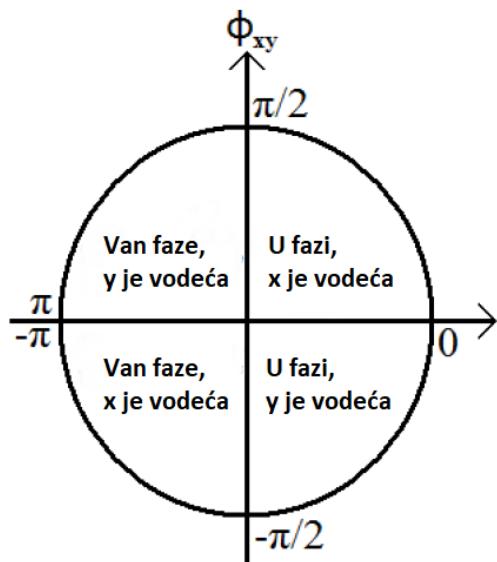
²⁰engl. the cross-wavelet power

²¹engl. complex wavelet coherency

²² $R_{xy}(\tau, s) = 0$ za sve (τ, s) za koje je $S(|W_x(\tau, s)|^2)S(|W_y(\tau, s)|^2) = 0$.

Može se zapisati i u sledećem obliku: $\arctan\left(\frac{\Im(W_{xy})}{\Re(W_{xy})}\right)$. U ovom slučaju, $\phi_{xy} = \phi_x - \phi_y$, otuda ime fazne-razlike. Prednost ove definicije je u tome što na faznu-razliku ne utiče izbor glatkoće, što je potpuno konzistentno sa pojedinačnim fazama.

Ako je fazna razlika nula onda se vremenske serije kreću zajedno na određenim frekvencijama. Serije se kreću u fazi i vremenska serija x je vodeća u odnosu na y , ako je $\phi_{xy} \in (0, \frac{\pi}{2})$, a ako je $\phi_{xy} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ y je vodeća. Vremenske serije su van faze i y vodeća ako je $\phi_{xy} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, a x je vodeća kada je $\phi_{xy} \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$. Ovo je prikazano na Slici 8.



Slika 8: Krug koji se koristi prilikom analize faznih razlika

Fazna-razlika se može pretvoriti u kašnjenje u vremenu između dve vremenske serije x i y :

$$(\Delta T)_{xy}(\tau, s) = \frac{\phi_{xy}(\tau, s)}{\omega(s)},$$

gde je $\omega(s)$ ugaona frekvencija koja odgovara skali s .

Primer: Unakrsni mali talasi i fazna razlika Sada se na primeru prikazuje malotalasna koherencija, faza i fazne razlike. Ovaj primer je preuzet iz [8]. U njemu se posmatraju dve vremenske serije koje dele dva uobičajna ciklusa, sa određenim kašnjenjima:

$$x_t = \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 3 \sin\left(\frac{2\pi}{6}t\right) + \varepsilon_{x,t}, \quad t = \frac{k}{12}, k = 0, 1, 2, \dots, 600 \quad (3.1)$$

$$y_t = \begin{cases} 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\left(t + \frac{5}{12}\right)\right) - 3 \sin\left(\frac{2\pi}{6}\left(t - \frac{10}{12}\right)\right) + \varepsilon_{y,t}, & t = \frac{k}{12}, \\ 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\left(t - \frac{5}{12}\right)\right) - 3 \sin\left(\frac{2\pi}{6}\left(t + \frac{10}{12}\right)\right) + \varepsilon_{y,t}, & t = 25 + \frac{k}{12}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 300 \quad (3.2)$$

Na Slici 9a. prikazane su dve vremenske serije x_t (plava linija) i y_t (crvena linija). Karakteristike ovih vremenskih serija date su na Slici 9b i 9c.

Na Slici 9b. prikazana je malotalasna koherencija između ove dve vremenske serije. Oblast visoke koherencije označena je crvenom bojom, a niske plavom bojom. Sa slike se vidi da se oblasti značajne koherencije javljaju za cikluse perioda od 2.5 do otprilike 3 i za cikuse perioda od 5 do 8 godina.

Na Slici 9c. date su fazne razlike za dva frekvencijska opsega od $2.5 \sim 3.5$ godine i od $5 \sim 7$ godina. Faza y_t prikazana je zelenom bojom, a x_t plavom bojom i fazna razlika između serija x_t i y_t prikazana je crvenom bojom. Analizirajući fazne razlike koristeći Sliku 8. možemo zaključiti da su vremenske serije u fazi za kraći frekvencijski opseg ($2.5 \sim 3.5$) jer se fazna razlika nalazi između $-\pi/2$ i $\pi/2$, pri čemu je y_t vodeća u prvoj polovini uzorka, a u drugoj polovini je vodeća x_t . Za duži frekvencijski period fazna razlika se nalazi između $-\pi$ i π što znači da vremenske serije nisu u fazi. U prvoj polovini uzorka vodeća je x_t , a u drugoj y_t .

3.5 Malotalasne udaljenosti

Izuzev malotalasne moći spektra, malotalasne koherencije i fazne razlike, u primenama se koristi mera različitosti između malotalasne transformacije dve vremenske serije koju su predložili Aguiar-Conraria i Soares.

Definicija 5. Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ za $m, n \in \mathbb{N}$. Onda se

$$A = U\Sigma V^*$$

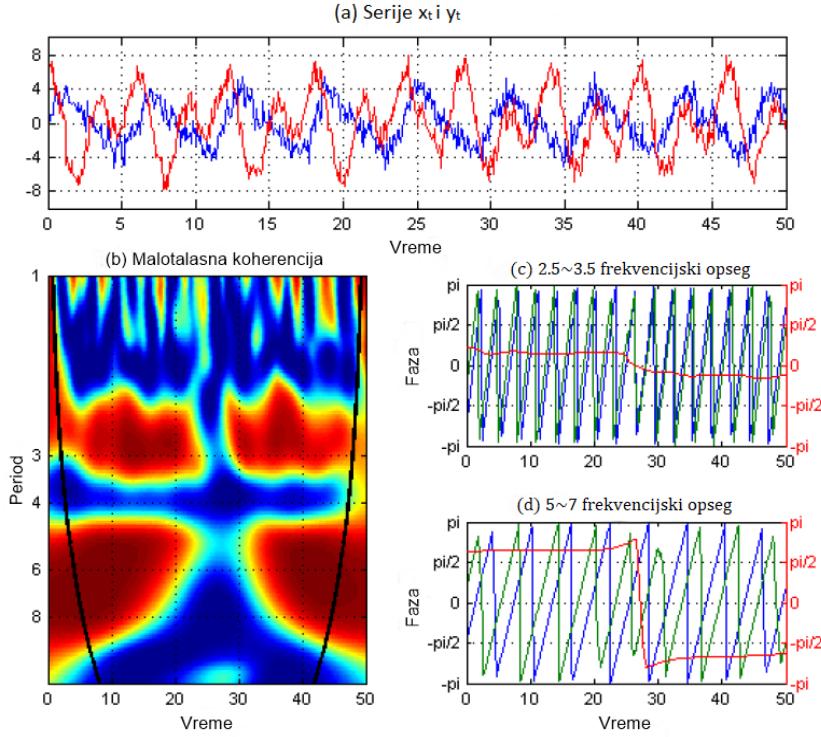
naziva dekompozicija na singularne vrednosti matrice A , ako su $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ i $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitarne, a $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times n}$ dijagonalna

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min(m,n)}),$$

pri čemu važi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$, a brojeve $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min(m,n)}$ nazivamo singularnim vrednostima matrice A . Kolone matrice U nazivamo levi, a kolone matrice V desni singularni vektori matrice A .

SVD dekompozicija kovarijansne matrice $C_{xy} := W_x W_y^H$, gde je W_y^H konjugovano transponovanje, poznatao kao hermitsko transponovanje W_y data je sa

$$C_{xy} = U\Sigma V^H,$$



Slika 9: (a) Vremenske serije x_t i y_t (b) Malotalasna koherencija. (c) - (d) Faze i fazna razlika serija za $2.5 \sim 3.5$ godišnji frekvenčni opseg i za $5 \sim 7$ godišnji frekvenčni opseg.

gde su matrice U i V unitarne matrice (tj. $U^H U = V^H V = I$), čje su kolone \mathbf{u}_k i \mathbf{v}_k singularni vektori za W_x i W_y , a Σ je dijagonalna matrica sa singularnim vrednostima poređanim od najveće ka najmanjoj, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_F \geq 0$. Broj singularnih vrednosti različitih od nule jednak je rangu matrice C_{xy} . SVD dekompozicija matrice C_{xy} garantuje da singularni vektori \mathbf{u}_k i \mathbf{v}_k rešavaju problem maksimizacije zajedničke kovarijanse W_x i W_y koji se zapisuje u obliku

$$\mathbf{p}_k^H C_{xy} \mathbf{q}_k = \mathbf{p}_k^H W_x W_y^H \mathbf{q}_k = \mathbf{p}_k^H W_x (\mathbf{q}_k^H W_y)^H$$

za sve vektore \mathbf{p}_k i \mathbf{q}_k koji zadovoljavaju ograničenja ortogonalnosti $\mathbf{p}_k^H \mathbf{p}_j = \delta_{kj}$, $\mathbf{q}_k^H \mathbf{q}_j = \delta_{kj}$, $j = 1, \dots, k$, gde je δ_{kj} Kronecker delta funkcija.²³ Drugim

²³Kronecker delta je funkcija dve promenljive i ne treba je mešati sa Dirakovom delta funkcijom. Funkcija je jednaka 1 ako su promenljive jednake, u suprotnom je 0 tj. $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j, \\ 1 & \text{if } i = j. \end{cases}$

rečima, tzv. vodeći obrasci²⁴ dobijeni su projekcijom svakog spektra W_x i W_y na odgovarajuće singularne vektore,

$$L_x^k := \mathbf{u}_k^H W_x \text{ i } L_y^k := \mathbf{v}_k^H W_y. \quad (3.3)$$

To su linearne kombinacije kolona W_x i W_y , koje maksimizuju njihovu zajedničku kovarijansu (pod uslovom ograničenja ortogonalnosti). Štaviše, pošto je $U^H W_x W_y V = U^H C_{xy} V = \Sigma$, direktno sledi da je (kvadrtna) kovarijansa k -tog vodećeg obrasca data sa:

$$|L_x^k (L_y^k)^H|^2 = \sigma_k^2.$$

Sa druge strane (kvadratna) kovarijansa W_x i W_y data je sa $\|C_{xy}\|_F^2$, gde je $\|\cdot\|_F$ Frobeniusova matrična norma definisana sa $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$. Pošto je ova norma invariantna u odnosu na unitarnu transformaciju, dobija se formula

$$\|C_{xy}\|_F^2 = \|U^H C_{xy} V\|_F^2 = \|\Sigma\|_F^2 = \sum_{i=1}^F \sigma_i^2.$$

(Kvadratne) singularne vrednosti, σ_k^2 su težine koje se pripisuju svakom vodećem obrascu.

Ako sa L_x i L_y označimo matrice čije su vrste vodeći obrasci L_x^k i L_y^k , jednačina (3.3) pokazuje da je $L_x = U^H W_x$ i $L_y = V^H W_y$, odakle se direktno dobija

$$W_x = U L_x = \sum_{k=1}^F \mathbf{u}_k L_x^k, \quad W_y = V L_y = \sum_{k=1}^F \mathbf{v}_k L_y^k.$$

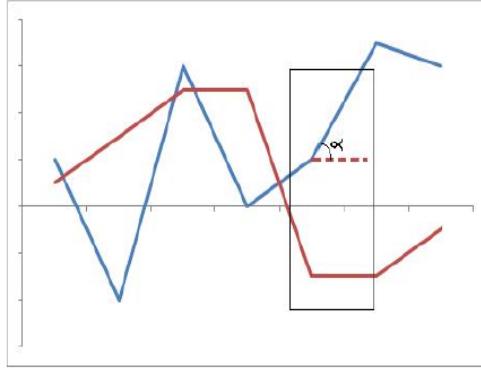
U praksi se odabere određeni broj $K < F$ vodećih obrasaca, garantujući, npr. da je razlomak kovarijansi $\frac{\sum_{k=1}^K \sigma_k^2}{\sum_{k=1}^F \sigma_k^2}$ iznad određenog praga, i primenjuje se aproksimacija

$$W_x \approx \sum_{k=1}^K \mathbf{u}_k L_x^k, \quad W_y \approx \sum_{k=1}^K \mathbf{v}_k L_y^k.$$

Sve što je do sada urađeno bilo je radi smanjenja informacija sadržanih u dva malotolasna spektra na nekoliko komponenti. Sada treba naći metriku za merenje udaljenosti između najrelevantnijih komponenti povezanih sa različitim malotolasnim spektrom. Treba izmeriti udaljenost između vodećih obrazaca, L_x i L_y , i između singularnih vektora, \mathbf{u}_k i \mathbf{v}_k . Da bi se to uradilo, porede se dva vektora mereći ugao između svakog para odgovarajućih segmenata. Ovo je lako izvesti ako su sve vrednosti realne (Slika 10).

Kako se koristi kompleksni talasić potrebno je definisati ugao u kompleksnom vektorskem prostoru.

²⁴engl. leading patterns



Slika 10: Ugao između realnih vektora

Za dva vektora \mathbf{a} i \mathbf{b} u Euklidskom vektorskem prostoru \mathbb{R}^n sa uobičajnim unutrašnjim proizvodom $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ i normom $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{R}^n}}$, ugao između dva vektora, $\Theta = \Theta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, može se naći koristeći formulu

$$\cos(\Theta) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{R}^n}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}, \quad \Theta \in [0, \pi]. \quad (3.4)$$

Sada, prepostavimo da su $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. Postoje dva načina da se definije realni ugao između \mathbf{a} i \mathbf{b} . Prvi način je razmatranje izomorfizma

$$\phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \mapsto \mathcal{R}(a_1), \mathcal{I}(a_1), \dots, \mathcal{R}(a_n), \mathcal{I}(a_n)$$

i jednostavno definisanje Euklidskog ugla između kompleksnih vektora \mathbf{a} i \mathbf{b} kao ugla (definisanog koristeći formulu 3.4) između realnih vektora $\phi(\mathbf{a})$ i $\phi(\mathbf{b})$.

Drugi pristup zasnovan je na korišćenju hermitskog unutrašnjeg proizvoda $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{C}} = \mathbf{a}^H \mathbf{b}$ i odgovarajuće norme $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{C}}}$. Hermitski ugao između dva kompleksna vektora \mathbf{a} i \mathbf{b} , $\Theta = \Theta_H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ definiše se formulom:

$$\cos(\Theta_H) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{C}}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}, \quad \Theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Ove mere nisu jednake, ali su povezane.

Rastojanje između k -tih vodećih obrazaca L_x^k i L_y^k se računa kao:

$$d(L_x^k, L_y^k) = \frac{1}{T-1} \sum_{n=1}^{T-1} \Theta_H(l_x^k(n), l_y^k(n)),$$

gde je $\mathbf{l}_x^k(n)$ vektor dve komponente definisan sa dve "tačke" $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $P_n = (n, L_x^k(n))$ i $P_{n+1} = ((n+1), L_x^k(n+1))$, tj. $\mathbf{l}_x^k(n) = (1, L_x^k(n+1) - L_x^k(n))$, gde $L_x^k(n)$ označava n -tu komponentu L_x^k . Udaljenost između singularnih vektora, $d(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$ definiše se analogno.

Da bi se uporedili malotalasni spektri između dve vremenske serije x i y , računa se sledeće rastojanje

$$\text{dist}(W_x, W_y) = \frac{\sum_{k=1}^K \sigma_k^2 [d(L_x^k, L_y^k) + d(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)]}{\sum_{k=1}^K \sigma_k^2} \quad (3.5)$$

U formuli (3.5) L_x^k i L_y^k su vodeći obrasci, \mathbf{u}^k i \mathbf{v}^k singularni vektori, i σ^k singularna vrednost. Dakle, udaljenost (rastojanje) između dva vektora izračunava se tako što se meri ugao između svakog para odgovarajućih segmenata, definisanih uzastopnim tačkama dva vektora, a zatim se uzima srednja vrednost ovih veličina.

Što je mera udaljenosti bliže nuli, sve sličnije su malotalasne transformacije serija $x(t)$ i $y(t)$.

Koncept malotalasne parcijalne koherencije je nastavak koncepta malotalasne koherencije kao što je parcijalna korelacija nastavak jednostavne korelacije.

4 Primene malotalasnih transformacija u ekonomiji

Za primenu koja je opisana u ovom poglavlju korišćena je literatura [9]. Za definisanje nekih ekonomskih termina i izraza korišćena je literatura [3], [4], [5] i [14].

4.1 Neki ekonomski pojmovi

Radi boljeg razumevanja primene koja sledi ovde ćemo objasniti neke ekonomске pojmove.

4.1.1 Poslovni ciklusi

Ekonomija nikad ne raste uravnoteženo, bez padova ili uspona. Nakon godina ekspanzije i napretka dolazi recesija, a kada se dođe do dna započinju oporavak i ekspanzija. Oporavak može biti spor ili brz, nepotpun ili potpun, a može značajno povećati životni standard.

Poslovni ciklus²⁵ je periodično fluktuiranje ukupnih ekonomskih aktivnosti i pojavljuje se kada se ekonomija udaljava od putanje dugoročnog trenda ostvarenja ukupne proizvodnje, odnosno bruto domaćeg proizvoda (BDP). Sastoji se prema tome od fluktuiranja outputa praćenog fluktuiranjem stope nezaposlenosti i stope inflacije.

Model ciklusa je nepravilan, pa su poslovni ciklusi nepravilne kontrakcije i ekspanzije ekonomске delatnosti u ekonomiji. Ne postoje dva potpuno jednaka poslovna ciklusa iako su često veoma slični. Obično traju od 2 do 10 godina, a osnovna karakteristika im je velika ekspanzija ili kontrakcija u većini sektora ekonomije. Ekonomski ciklusi su nepravilna, ali povratna fluktuiranja ekonomskih aktivnosti u ekonomiji, a u literaturi se nazivaju poslovnim ciklusima, trgovinskim ciklusima²⁶, ekonomskim ciklusima²⁷ ili samo ciklusima.

Poslovni ciklusi se obično dele na dve glavne faze: recesiju (prema dole) i ekspanziju (prema gore). Vrh²⁸ i dno²⁹ obeležavaju tačke obrta ciklusa. Ovo je prikazano na Slici 11. Vrh je tačka u kojoj ekspanzija završava, a recesija počinje. Dno je tačka u kojoj recesija završava, a ekspanzija počinje. Uobičajno je faza recesije kraća od faze ekspanzije. U fazi recesije obično opadaju, a u fazi

²⁵engl. business cycle

²⁶engl. trade cycles

²⁷engl. economic cycle

²⁸engl. peak

²⁹engl. through

ekspanzije rastu proizvodnja, zaposlenost, cene, kirija, kamatna stopa, profit, količina novca u opticaju.

Recesija počinje na vrhu, a završava se na dnu. Potrošnja raste sve sprije i počinje opadati. Proizvodnja opada. Akcije preduzeća rastu, smanjuju se investicije, smanjuje se i realni BDP. Smanjuje se potražnja za radom, raste nezaposlenost. Manja potražnja i rastuća nezaposlenost smanjuju inflatorni pritisak, smanjuju državni prihod od poreza i povećavaju državno trošenje na naknade za nezaposlene.

Dno je najniži nivo ekonomskih kretanja, a obeležavaju ga: visoka stopa preduzetničkog pesimizma, nizak profit, negativne neto investicije (preduzeća ne zamenjuju dotrajale mašine), pad potražnje za potrošnim i kapitalnim dobrima, visoka nezaposlenost i niska stopa uvoza. Ako se ovaj period produži može nastati depresija (ozbiljna i dugotrajna recesija). Dakle ako je dno duboko naziva se depresija.

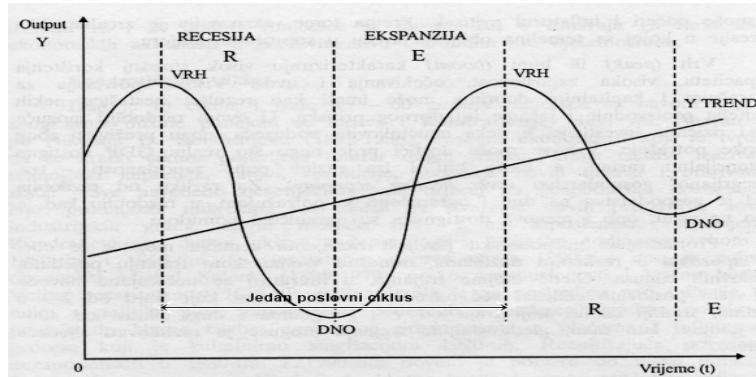
Ekspanzija počinje kada ekonomski kretanja sa najniže tačke počnu da rastu. Za ekspanziju se često koristi i naziv oporavak jer sledi nakon recesije, a počinje kada stopa realnog BDP raste u dva uzastopna tromesečja. Potrošnja se povećava, proizvodnja, profit i optimizam preduzetnika rastu, a neto investicije postaju pozitivne (dotrajala oprema se zamenjuje). Raste zaposlenost, što dalje stimuliše potražnju za potrošnim i kapitalnim dobrima, a može početi i inflatorni pritisak. Prema tome, ekspanzija je slika u ogledalu recesije u kojoj se obeležja kreću u suprotnom smeru.

Vrh ili bum³⁰ karakteriše visok stepen korišćenja kapaciteta, visoka zaposlenost, očekivanja i uvoz. Visoka potražnja za potrošnim i kapitalnim dobrima može imati kao rezultat nestašicu nekih činitelja proizvodnje i jačanje inflatornog pritiska. U ovom periodu moguće su i rizičnije investicije, a neka neefikasna preduzeća mogu opstati zbog visoke potražnje. Vrh se može dostići i pre nego što realni BDP dostigne potencijalnu stopu, a može biti i iza stope pune zaposlenosti - tzv. "pregrejana" ekonomija³¹. Za razliku od perioda kada je ekonomija na dnu i ograničeno je potražnjom, u periodu kada je ono na vrhu, ograničeno je ponudom.

U pogledu dužine trajanja razlikuju se tri ciklusa: kratki ciklusi (traju od 2 do 6 godina), srednji ciklusi (traju od 7 do 13 godina) i dugi ciklusi (traju od 40 do 50 godina).

³⁰engl. boom

³¹engl. over heating economy



Slika 11: Poslovni ciklusi

4.1.2 Indikator ekonomskog očekivanja

Indikator ekonomskog očekivanja³² je kompozitni indikator koji je stvorila Generalna direkcija za ekonomski i finansijski pitanja Evropske komisije. Njegov cilj je da prati rast BDP-a na nivou država članica, EU i evrozone. Sastoji se od pet sektorskih indikatora poverenja sa različitim udelima:

- Industrijski indikator poverenja (40%)
- Indikator poverenja usluga (30%)
- Indikator poverenja potrošača (20%)
- Indikator poverenja građevinarstva (5%)
- Indikator poverenja trgovine na malo (5%)

ESI je ponderisani prosek odgovora na izabrana pitanja dobijenih putem anketa. Ankete su upućene kompanijama u pet sektora i definisane su u okviru zajedničkog programa EU za konjunkturne ankete i ankete o očekivanjima potrošača.

Konjunkturne ankete pružaju kvalitativne informacije za praćenje tekuće poslovne situacije preduzeća kao i za predviđanje budućih kratkoročnih pitanja.

Ankete o očekivanjima potrošača pružaju kvalitativne informacije za praćenje tekuće ekonomski slike i baziraju se na uzorku domaćinstva.

ESI se izračunava kao indeks sa srednjom vrednošću 100 i standardnom devijacijom 10 tokom fiksнog standardizovanog vremena posmatranja. Vrednosti ESI-ja iznad 100 ukazuju na pozitivnu tendenciju, dok vrednosti ispod 100 ukazuju na negativnu tendenciju.

³²engl. Economic Sentiment Indicator, ESI

4.1.3 Co-movement

"Co-movement" se može definisati kao obrazac pozitivne korelacije. Ova definicija zasniva se na koeficijentu korelacije i ne opisuje eksplizitno značenje pojma co-movement. Drugim rečima, co-movement je definisan koeficijentom korelacije, ali ne postoji definicija samog pojma.

U literaturi ne postoji specijalna definicija "co-movement". To je specijalan tehnički izraz i ne može se naći u rečniku. Poreklo izraza može biti od glagola "commove" što znači kretati se intezivno, i takođe može biti povezan sa imenicom "commotion". Međutim, veruje se da je "co-movement" složenica koja se zasniva na prefiksu "con" što znači "sa". To je u skladu sa poreklom reči "correaltaion" koja je ekvivalenta sa "conrelation" i znači da postoji recipročna veza.

Definicija koja će se ovde uvesti zasniva se na ideji da je "co-movement" jednako sa "con-movement", što znači "kretanje sa" (engl. "moving with") ili deljenje pokreta (engl. "sharing movement") u istom smeru. Prema tome, "co-movement" je "zajedničko kretanje" (engl. "common movement") što je u skladu sa definicijama pojmova kao što su "co-integration", "co-breaking" ili "co-trending".

U matematičkom smislu, definicija je data na sledeći način.

Definicija 6. Neka je $x = (x_1, \dots, x_n)$ je n -dimenzionalni vektor. Onda:

- x pokazuje pozitivan co-movement ako je

$$\Phi(x) = \min(x_1, \dots, x_n) I_x^+ > 0$$

- x pokazuje negativan co-movement ako je

$$\Phi(x) = \max(x_1, \dots, x_n) I_x^- < 0$$

I_x^+ (I_x^-) je indikator promenljiva koja je jednaka jedan ako su svi elementi x pozitivni (negativni), u suprotnom je nula.

Sledeći primeri pomažu da se bolje razume ova definicija co-movement: realizacije bivarijantne slučajne promenljive $x = (-1, -1)$ daju negativan co-movement $\Phi(x) = -1$ jer je negativan movement vrednosti -1 zajednički za obe realizacije. $x = (-1, -0.5)$ daje $\Phi(x) = -0.5$ jer je -0.5 maksimum ove dve realizacije.

Multivarijantni vektor $x = (-2, -1, -3, -0.5)$ daje $\Phi(x) = -0.5$ i $x = (2, 1, 3, 0.5)$ daje $\Phi(x) = 0.5$. Co-movement vektora $x = (1, 1, 1, 0)$ i $x = (-1, -1, -1, 1)$ je nula jer nema zajedničkog kretanja u jednom smeru.

4.2 Konvergencija ciklusa ekonomskog očekivanja u evrozoni

U ovom poglavlju analizirane su sličnost i sinhronizacija ekonomskih ciklusa u evrozoni koje su detaljno ispitivali autori Aguiar-Conraria, M. F. Martins i M. F. Martins u radu "Convergence of Economic Sentiment Cycles in the Euro Area: a time frequency analysis".

Ekonomski i monetarni unija (EMU) je proces kojim države članice usklađuju svoju ekonomsku i monetarnu politiku u cilju usvajanja evra kao jedinstvene valute. Uspostavljanje Ekonomski i monetarne unije odvijalo se u tri faze. U ovom radu najbitnija je treća faza (od 1. januara 1999. godine) koja je vezana za uvođenje evra kao jedinstvene valute na devizna tržišta. Evro je kao jedinstvenu valutu 1. januara 1999. godine prihvatio 11 država članica EU: Austrija, Belgija, Finska, Francuska, Irska, Italija, Luksemburg, Holandija, Nemačka, Portugal i Španija. Ovim zemljama 2001. godine pridružila se i Grčka. Evrozona je naziv za grupu država članica EU koje su usvojile evro kao domaću valutu. Danas evrozonu čini 19 država (u vreme kada su navedeni autori radili istraživanje evrozonu je činilo 17 država). Izvan evrozone su Danska i Velika Britanija koje na osnovu izuzeća (opt-out clause) nisu obavezne da usvoje evro kao zvaničnu valutu. Švedska je takođe van evrozone jer su građani ove države dva puta odbili da usvoje evro kao zvaničnu valutu.

U ovoj primeni razmatra se tzv. Evro-10 agregat evrozone koji čine 10 država. To su Austrija, Belgija, Francuska, Nemačka, Grčka, Irska, Italija, Holandija, Portugal i Španija. Od tadašnjih 17 članica 7 se ne uzima u obzir jer su njihove vremenske serije indikatora ekonomskog očekivanja ili prevelike ili uključuju ograničen deo indikatora poverenja. Kao kontrolne zemlje u obzir se uzimaju Danska i Velika Britanija iako nisu članice Ekonomski i monetarne unije jer za njih postoji zadovoljavajuća količina podataka. Razmatranjem ekonomskog očekivanja Velike Britanije proverava se da li je režim plivajućeg kursa³³ doveo do drugačijeg

³³Plivajući kurs (engl. floating exchange-rate), poznat još po nazivu fluktuirajući (engl. fluctuating) ili fleksibilan (engl. flexible) devizni kurs je vrsta režima deviznog kursa u kom je dozvoljeno da vrednost jedne valute fluktuirala kao odgovor na događaje na deviznom tržištu. Dakle vrednost te valute se određuje ponudom i potražnjom na deviznom tržištu. Valuta koja koristi ovaj kurs poznata je kao plivajuća valuta (engl. floating currency). Kao suprotnost ovom kursu postoji fiksna valuta (engl. fixed currency). U slučaju ekstremnog povećanja vrednosti (apresijacije) ili obezvređivanja (depresijacije) valute, Centralna banka će intervenisati da stabilizuje valutu. Stoga metoda razmene plivajućih valuta može biti poznata kao rukovođeni devizni kurs (engl. managed float). U sistemu rukovođenog fluktuiranja monetarne vlasti određuju ciljani devizni kurs koji bi trebalo da odgovara ciljevima privrednog razvoja zemlje, ekonomskoj politici, platnom bilansu, deviznim rezervama, kao i kretanju cena i kamatnih stopa. Fleksibilni devizni kursevi se najčešće karakterišu visokim stopama fluktuacije (tj. menjanja i kolebanja), koje se kreću i do 60%.

učinka u pogledu sinhronizacije ekonomskog očekivanja, dok se razmatranjem ekonomskog očekivanja Danske proverava da li je čvrsta povezanost³⁴ Danske krune i evra imala drugačiji "co-movement" na ekonomsko očekivanje Danske za razliku od ostalih zemalja koje su članice Ekonomске i monetarne unije. Uzorački period je 1987:4-2010:12.

Za proučavanje sličnosti i sinhronizacije korišćene su malotalasne metode i indikatori ekonomskog očekivanja.³⁵ Indikatori ekonomskog očekivanja se koriste jer dobro oponašaju stopu rasta bruto domaćeg proizvoda na mesečnom nivou.

Procena konvergencije ekonomskog očekivanja između Velike Britanije i EA-10, i između Danske i EA-10 zahteva izračunavanje indikatora ekonomskog raspoloženja EA-10, dok procena indikatora ekonomskog očekivanja između svake zemlje koja pripada evrozoni i EA-10 zahteva računanje EA-9 (jer se isključuje zemlja ako je članica EMU).

U cilju procene sličnosti i sinhronizacije ciklusa ekonomskog očekivanja korišćena je neprekidna malatalasna transformacija koja je privukla pažnju u ekonomiji i političkim naukama. Procenjivana je sinhronizacija poslovnih ciklusa u vremensko-frekvencijskoj ravni i ispitivano je šta se dešava sa sličnošću i sinhronizacijom pre i posle kreiranja EMU.

Za procenu sinhronizacije koristi se metod koji istovremeno uzima u obzir i vreme i frekvenciju. Sinhronizacijom se procenjuje "co-movement" tj. procenjuje se u kom smeru se kreću indikatori ekonomskog očekivanja pri tome uzimajući u obzir da li je neka promenljiva vodeća ili zaostajuća.³⁶ Sinhronizacija se procenjuje pomoću malatalasne moći spektra, malatalasne koherencije i fazne razlike. Prvo se procenjuje malatalasna moć spektra za svaku vremensku seriju indikatora ekonomskog očekivanja i nakon toga izračunava se malatalasna koherencija

³⁴ Hard peg predstavlja uspostavljanje fiksног kursa između jedne nacionalne valute (obično male zemlje) i druge nacionalne valute (obično valute industrijske sile). Drugim rečima jedna država "prikači" (engl. "pegs") vrednost svoje valute na vrednost druge valute. To obično rade države sa istorijom monetarne nestabilnosti, koristi se kao sredstvo za obnavljanje i održavanje reda. Primer "hard-peg" je dolarizacija. Dolarizacija je opšti termin koji opisuje akt neke zemlje da se odrekne svoje domaće valute i usvoji valutu druge zemlje koja će se koristiti u svim transakcijama. Uprkos nazivu, zamena strane valute ne mora biti dolar. Više o ovom pojmu može se naći na internet stranici [12].

³⁵ Indikatori ekonomskog očekivanja (engl. Economic Sentiment Indicators, ESIs) su detaljnije objašnjeni u poglavljju 4.1.

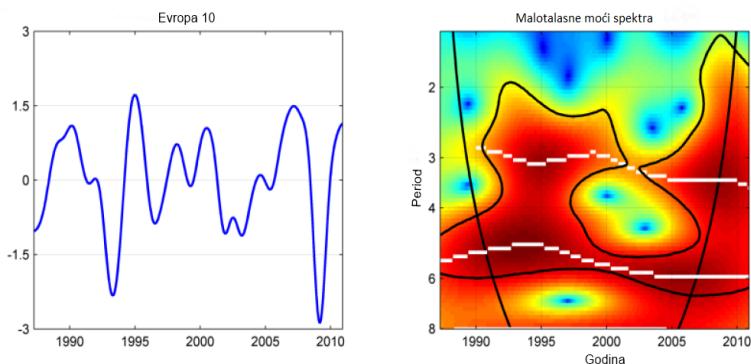
³⁶ "Lead-lag" efekat, posebno u ekonomiji opisuje situaciju gde je jedna (vodeća) promenljiva unakrsno korelisana sa vrednostima druge varijable (zaostajuće) u kasnijim vremenima. U međunarodnom poslovanju "leads and lags" se najčešće odnosi na promenu (ubrzanje ili odlaganje) uobičajenih plaćanja ili primanja u deviznoj transakciji na osnovu očekivane promene kursa. Vodeći indikatori (engl. leading indicators) su znak kojim putem se kreće tržište tj. oni signaliziraju promene pre nego što se one zaista dogode u ekonomiji. Pokazitelji zaostajanja (engl. lagging indicators) dolaze nakon pada ili rasta ekonomije i potvrđuju u kom smeru ekonomija i valuta idu ([13] i [15]).

i fazna razlika između indikatora ekonomskog očekivanja svake države i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja evrozone³⁷.

Sličnost se procenjuje tako što se prvo izračuna matrica malotalasnih udaljenosti (rastojanja). Nakon toga proverava se da li je rastojanje između malotalasnih transformacija indikatora ekonomskog očekivanja parova država (npr. indikator ekonomskog očekivanja između Belgije i Nemačke), i indikatora ekonomskog očekivanja svake države i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja evrozone statistički značajna, tj. proverava se da li su ti indikatori ekonomskog očekivanja slični.

4.2.1 Malotalasna moć spektra i indikator ekonomskog očekivanja EA-10

Na Slici 12. prikazan je indikator ekonomskog očekivanja 10 zemalja evrozone (EA-10) i malotalasna moć spektra. U cilju analize frekvencije poslovnih ciklusa procenjuje se malotalasna moć spektra u periodu od 1.5 do 8 godina. Interpretacija malotalasne moći spektra slična je onoj na Slici 7. samo što se ovde u obzir uzimaju i informacije o statističkoj značajnosti spektra. Tamne linije predstavljaju oblasti statistički značajnih moći na nivou od 5 procenata.



Slika 12: EA-10 Ekonomski indeks (1987:4-2010:12)

Na grafiku sa leve strane uočava se da je ekonomsko očekivanje 10 zemalja evrozone, EA-10 manje fluktuiralo u periodu između 1997. i 2000. godine nego na početku i na kraju uzoračkog perioda. Razlog za to su recesija koja se dogodila 1993. godine i finansijska i ekomska kriza 2008. godine. Na grafiku malotalasne moći spektra u periodu 1997-2007 uočavaju se rupe (oblast nižih koherencija-plava boja) za cikluse perioda između 3.5 i 5 godina. Kako

³⁷engl. aggregate Euro Area's ESI

tamne crne linije nestaju u periodu između 2000. i 2007. godine za cikluse perioda između 2 i 3 godine, ovaj period niskih fluktuacija može se tumačiti i kao gubitak značajnosti moći.

Početkom 90-tih i krajem 2000-ih godina na grafiku malotalasne moći mogu se uočiti oblasti vrlo velike energije tzv. vrhovi energije. To je period oštih fluktuacija indikatora ekonomskog očekivanja. Ovi vrhovi se uočavaju kod trogodišnjih ciklusa oko 1995. godine i kod petogodišnjih ciklusa između 1992. i 1997. godine. Krajem prve decenije XXI veka, ti vrhovi su više izraženi kod trogodišnjih ciklusa. U periodu od 2007. godine za cikluse sa dužim trajanjem spektar je pod uticajem konusa, pa ne treba previše uzimati u obzir značajnost ovih rezultata.

Za razliku od grafika vremenskog domena, malotalasni spektar govori nam da se fluktuacije indikatora ekonomskog očekivanja 10 država evrozone razvijaju duž dva ciklusa kroz većinu uzorka. Na grafiku moći bele linije pokazuju da postoje dva maksimuma moći. Jedan maksimum odgovara ciklusima trajanja od oko 3 godine, dok drugi odgovara ciklusima nešto manjim od 6 godina. Tokom ranih 2000-ih kraći ciklusi (perioda oko 3.5 godine) postaju duži. Do 1995. godine duži ciklusi su bili ciklusi od 5 godina, a od 2000. godine ti ciklusi postepeno postaju duži sve dok ne dostignu period od 6 godina.

4.2.2 Malotalasne udaljenosti

U ovom poglavlju procenjuje se "co-movement" tj. procenjuje se sličnost indikatora ekonomskog raspoloženja između svake od 12 parova država, kao i između svake zemlje i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja 10 zemalja evrozone (u slučaju ako je zemlja članica Ekonomskog i monetarne unije ona se isključuje, pa se poređenje vrši sa ukupnim indikatorom ekonomskog očekivanja za 9 država evrozone). Na osnovu formule (3.5) izračunava se mera udaljenosti između malotalasnih transformacija vremenskih serija indikatora ekonomskih očekivanja. Nadalje, kada se kaže ukupni indikator ekonomskog očekivanja evrozone, jasno je da se odnosi na ukupni indikator 10 posmatranih zemalja. Za podatke koji se ovde koriste ne postoje statistički značajne udaljenosti izvan oblasti "co-movement"-a (izvan oblasti "zajedničkog" kretanja) i zbog toga se udaljenost može smatrati dobrom merom sličnosti indikatora ekonomskog očekivanja poslovnih ciklusa.

Analiza malotalasnih udaljenosti za ceo uzorak. U Tabeli 2. data je matrica udaljenosti za ceo uzorak. Najpre se iz Tabele 2. uočava da bilateralne udaljenosti Grčke i Velike Britanije nisu značajne ni na nivou od 10 procenata. To znači da se indikatori ekonomskog očekivanja Grčke i Velike Britanije najviše razlikuju od indikatora ekonomskog očekivanja u drugim zemljama. Zatim se može uočiti da je indikator ekonomskog očekivanja Portugala prilično različit od

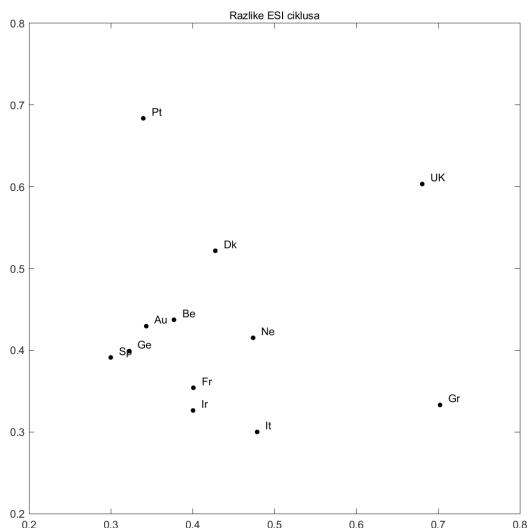
	Belgija	Nemačka	Irska	Grčka	Španija	Francuska	Italija	Holandija	Austrija	Portugal	Danska	Velika Britanija
Belgija		0.14*	0.19*	0.37	0.21**	0.13*	0.23**	0.19*	0.14*	0.27**	0.24**	0.38
Nemačka	0.14*		0.20*	0.41	0.21**	0.16*	0.26**	0.27***	0.17*	0.29***	0.35	0.43
Irska	0.19*	0.20*		0.36	0.26**	0.15*	0.18*	0.24**	0.27**	0.36	0.34	0.43
Grčka	0.37	0.41	0.36		0.44	0.34	0.34	0.33	0.41	0.52	0.43	0.34
Španija	0.21**	0.21**	0.26**	0.44		0.22**	0.22**	0.25**	0.18*	0.33	0.29***	0.47
Francuska	0.13*	0.16*	0.15*	0.34	0.22**		0.16*	0.23**	0.17*	0.35	0.27**	0.40
Italija	0.23**	0.26**	0.18*	0.34	0.22**	0.16*		0.21**	0.26**	0.45	0.30***	0.35
Holandija	0.19*	0.27***	0.24**	0.33	0.25**	0.23**	0.21**		0.25**	0.36	0.24**	0.34
Austrija	0.14*	0.17*	0.27**	0.41	0.18*	0.17*	0.26**	0.25**		0.30***	0.32	0.40
Portugal	0.27**	0.29***	0.36	0.52	0.33	0.35	0.45	0.36	0.30***		0.31	0.36
Danska	0.24**	0.35	0.34	0.43	0.29***	0.27**	0.30***	0.24**	0.32	0.31		0.38
Velika Britanija	0.38	0.43	0.43	0.34	0.47	0.40	0.35	0.34	0.40	0.36	0.38	
Evropa 10	0.11*	0.18*	0.16*	0.36	0.16*	0.11*	0.19*	0.22**	0.15*	0.32	0.27***	0.42

Tabela 2: Malotalasne udaljenosti (ceo uzorak): * $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, *** $p < 0.10$

indikatora ekonomskih očekivanja u drugim zemljama (sličan je samo sa indikatorom ekonomskog očekivanja Belgije, Nemačke i Austrije). Dalje se zapaža da su samo tri udaljenosti Danske značajne na nivou od 5 procenata.

Sada analiziramo sličnosti indikatora ekonomskog očekivanja svake zemlje sa ukupnim indikatorom ekonomskog očekivanja 10 posmatranih zemalja. U poslednjem redu Table 2. date su udaljenosti između malotalasne transformacije indikatora ekonomskog očekivanja i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja evrozone. Udaljenosti Belgije, Nemačke, Irske, Španije, Francuske, Italije i Austrije su značajne na nivou od 1 procenat. Holandija nije uključena u grupu ovih zemalja jer je njena udaljenost značajna na nivou od 5 procenata. Udaljenost između indikatora ekonomskog očekivanja Portugala i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja evrozone, i udaljenost između indikatora ekonomskog očekivanja Grčke i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja evrozone nisu značajne ni na nivou od 10 procenata. To znači da indikatori ekonomskog očekivanja Portugala i Grčke nisu slični sa ukupnim indikatorom ekonomskog očekivanja evrozone ni na nivou od 10 procenata. Što se tiče kontrolnih zemalja, udaljenost Danske koja je svoju valutu čvrsto vezala za evro značajna je na nivou od 10 procenata, a udaljenost Velike Britanije koja je imala plivajući kurs uopšte nije značajna.

Na Slici 13. prikazane su malotalasne udaljenosti na multidimenzionalnoj mapi. Sa slike se vidi da su indikatori ekonomskog očekivanja Portugala, Velike Britanije i Grčke različiti od ekonomskih očekivanja ostalih zemalja. Indikator ekonomskog očekivanja Danske je takođe poprilično različit od indikatora ekonomskog očekivanja ostalih zemalja. Na ovoj slici uočava se grupa evropskih država tzv. jezgro država koje čine: Španija, Nemačka, Austrija, Belgija, Holandija, Francuska, Irska i Italija. Ova grupa može se podeliti u dve podgrupe. Prva podgrupa je koncentrisana oko Nemačke i nju čine: Nemačka, Austrija, Belgija i Španija. Druga grupa koncentrisana je oko Francuske i čine je: Francuska, Irska i Italija. Holandija se nalazi između ove dve podgrupe.



Slika 13: Multidimenzionalna mapa skaliranja(ceo uzorak)

Analiza malotalasnih udaljenosti pre i posle prihvatanja evra Sada se posmatra uzorak pre i posle kreiranja Ekonomsko monetarne unije (Tabela 3 i 4). Uzorak je podeljen tačno na pola kako bi se izbegla pristrasnost rezultata. Prvi uzorački period je 1987:4-1999:02, a drugi uzorački period je 1999:02-2010:12. Malotalasne udaljenosti izračunate su za period pre i posle prihvatanja evra kao zvanične valute.

U Tabeli 3. posmatrajući udaljenosti malotalasnih transformacija između indikatora ekonomskog očekivanja svake države i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja evrozone, može se zaključiti da su udaljenosti Belgije, Nemačke, Austrije i Francuske značajne sa nivou od 1 procenat, dok su udaljenosti Irske, Španije i Italije značajne na nivou od 5 procenata. Indikatori ekonomskog očekivanja Grčke, Portugala, Holandije i dve kontrolne zemlje, Danske i Velike Britanije nisu bili slični ukupnom indikatoru ekonomskog očekivanja evrozone.

Nakon uvođenja evra (Tabela 4) uočava se da su sve udaljenosti između indikatora svake od zemalja i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja značajne na nivou od bar 5 procenata. Udaljenosti Belgije, Nemačke, Francuske i Austrije značajne su na nivou od 1 procenat, a sve ostale zemlje na nivou od 5 procenata. Što se tiče dve kontrolne zemlje nakon kreiranja Ekonomsko monetarne politike udaljenost Danske postala je značajna na nivou od 5 procenata, dok je udaljenost Velike Britanije opala, ali ona i dalje nije bila slična ni na nivou od 10 procenata sa ostatkom Evrope.

Dakle, na osnovu analize udaljenosti između indikatora ekonomskog očekivanja svake zemlje i evrozone pre i posle kreiranja Ekonomsko monetarne unije

	Belgija	Nemačka	Irska	Grčka	Španija	Francuska	Italija	Holandija	Austrija	Portugal	Danska	Velika Britanija
Belgija		0.12*	0.16**	0.36	0.13**	0.11*	0.17***	0.19***	0.09*	0.30	0.25	0.33
Nemačka	0.12*		0.19***	0.40	0.17***	0.11*	0.19***	0.27	0.09*	0.33	0.39	0.35
Irska	0.16***	0.19***		0.33	0.21	0.14**	0.15**	0.21	0.20***	0.36	0.34	0.27
Grčka	0.36	0.40	0.33		0.36	0.41	0.39	0.21	0.43	0.46	0.45	0.30
Španija	0.13**	0.17***	0.21	0.36		0.17***	0.16**	0.22	0.15**	0.27	0.22	0.30
Francuska	0.11*	0.11*	0.14**	0.41	0.17***		0.11*	0.27	0.11*	0.36	0.33	0.34
Italija	0.17***	0.19***	0.15**	0.39	0.16**	0.11*		0.27	0.20***	0.34	0.31	0.27
Holandija	0.19***	0.27	0.21	0.21	0.22	0.27	0.27		0.26	0.35	0.25	0.27
Austrija	0.09*	0.09*	0.20	0.43	0.15**	0.11*	0.20***	0.26		0.28	0.35	0.36
Portugal	0.30	0.33	0.36	0.46	0.27	0.36	0.34	0.35	0.28		0.26	0.48
Danska	0.25	0.39	0.34	0.45	0.22	0.33	0.31	0.25	0.35	0.26		0.32
Velika Britanija	0.33	0.35	0.27	0.30	0.30	0.34	0.27	0.27	0.36	0.48	0.32	
Evropa 10	0.09*	0.12*	0.15**	0.39	0.14**	0.07*	0.15**	0.25	0.10*	0.31	0.30	0.33

Tabela 3: Malotalasne udaljenosti (prva polovina uzorka - period pre evra): * $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, *** $p < 0.10$

	Belgija	Nemačka	Irska	Grčka	Španija	Francuska	Italija	Holandija	Austrija	Poljska	Danska	Velika Britanija
Belgija		0.09*	0.15**	0.15**	0.19***	0.09*	0.15**	0.16**	0.13**	0.17**	0.18***	0.16**
Nemačka	0.09*		0.14**	0.14**	0.16**	0.10*	0.14**	0.17**	0.12*	0.14**	0.20***	0.22
Irska	0.15**	0.14**		0.14**	0.25	0.10*	0.17**	0.18***	0.23	0.16**	0.21	0.33
Grčka	0.15**	0.14**	0.14**		0.26	0.15**	0.21	0.17***	0.21***	0.19***	0.25	0.29
Španija	0.19***	0.16**	0.25	0.26		0.19***	0.15**	0.21	0.13**	0.24	0.26	0.28
Francuska	0.09*	0.10*	0.10*	0.15**	0.19***		0.14**	0.19***	0.17**	0.16**	0.16**	0.22
Italija	0.15**	0.14**	0.17**	0.21	0.15**	0.14**		0.13**	0.17**	0.23	0.15**	0.27
Holandija	0.16**	0.17**	0.18***	0.17***	0.21	0.19***	0.13**		0.20***	0.21	0.16**	0.23
Austrija	0.13**	0.12*	0.23	0.21***	0.13**	0.17**	0.17**	0.20***		0.24	0.27	0.23
Portugal	0.17**	0.14**	0.16**	0.19***	0.24	0.16**	0.23	0.21	0.24		0.26	0.16**
Danska	0.18***	0.20***	0.21	0.25	0.26	0.16**	0.15**	0.16**	0.27	0.26		0.22
Velika Britanija	0.16**	0.22	0.33	0.29	0.28	0.22	0.27	0.23	0.23	0.16**	0.22	
Evropa 10	0.07*	0.07*	0.13**	0.14**	0.15**	0.11*	0.12**	0.15**	0.12*	0.16**	0.16**	0.20

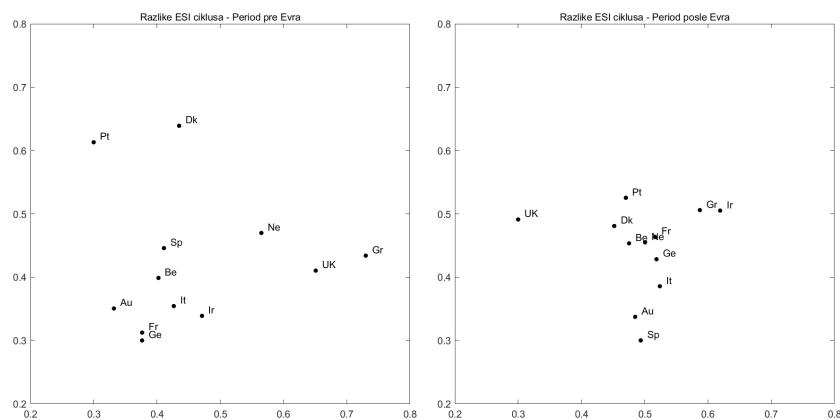
Tabela 4: Malotalasne udaljenosti (druga polovina uzorka - period posle evra): * $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, *** $p < 0.10$

može se zaključiti da su ove udaljenosti opale kod većine zemalja. Taj pad nije zabeležen kod Španije, Francuske i Austrije. Kod ove tri zemlje udaljenosti su bile nešto veće nakon uvođenja evra, ali su one i dalje ostale statistički značajne (udaljenosti Francuske i Austrije značajne su na nivou od 1 procenat, a Španije na nivou od 5 procenata).

Ostalo je još da se analiziraju bilateralne udaljenosti tj. udaljenosti između parova zemalja. U periodu pre kreiranja Ekonomskog monetarnog unija samo 13 od 45 bilateralnih udaljenosti je značajno na nivou od bar 5 procenata, a 25 bilateralnih udaljenosti nije slično ni na nivou od 10 procenata. U periodu nakon kreiranja Ekonomskog monetarnog unija 28 od 45 bilateralnih udaljenosti značajno je na nivou od bar 5 procenata, a svega 9 njih nije značajno ni na nivou od 10 procenata. Posmatrajmo sada bilateralne udaljenosti Danske i Velike Britanije. U periodu pre uvođenja evra kao zvanične valute ne postoje značajne bilateralne udaljenosti Danske i Velike Britanije. Drugim rečima indikatori ekonomskog očekivanja Danske i Velike Britanije ne pokazuju sličnost ni sa jednom od 10 evropskih zemalja, a ne postoji sličnost ni između njih dve. Nakon uvođenja evra indikator ekonomskog očekivanja Danske sličan je indikatoru ekonomskog očekivanja Francuske, Italije i Holandije na nivou od 5 procenata, a sa

indikatorima ekonomskog očekivanja Belgije i Nemačke sličan je na nivou od 10 procenata. Indikator ekonomskog očekivanja Velike Britanije posle uvođenja evra sličan je sa indikatorom ekonomskog očekivanja Belgije i Portugala na nivou od 5 procenata. Sličnost između indikatora ekonomskog očekivanja Danske i Velike Britanije nije zabeležena ni u periodu nakon uvođenja evra.

Na Slici 14. prikazane su bilateralne udaljenosti u periodu pre i posle uvođenja evra. Sa slike se jasno vidi da se Danska približila ostalim državama evrozone (bliža je od Grčke, Portugala i Irske), dok je Velika Britanija ostala udaljena od ostalih zemalja evrozone.



Slika 14: Multidimenzionalne mape skaliranja za uzorke pre i posle Evra

Dakle iz gore navedene analize možemo zaključiti da:

- kreiranje Ekomske i monetarne unije utiče na pad udaljenosti tj. dovodi do povećanja sličnosti između indikatora ekonomskog očekivanja svake zemlje i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja.
- se u periodu nakon kreiranje Ekomske i monetarne unije povećava broj bilateralnih udaljenosti koje su značajne.
- nakon kreiranje Ekomske i monetarne unije čvrsta povezanost Danske krune i evra dovela je indikator ekonomskog očekivanja Danske do uporedivog efekta, što se nije dogodilo u slučaju Velike Britanije s obzirom na plivajući režim Britanske funte koji je možda učinio Veliku Britaniju imunu na fluktuacije u evrozoni.

4.2.3 Malotalasne koherencije i fazne razlike

U ovom poglavlju procenjuje se sinhronizacija indikatora ekonomskih očekivanja tako što se analiziraju malotalasne koherencije i fazne razlike između

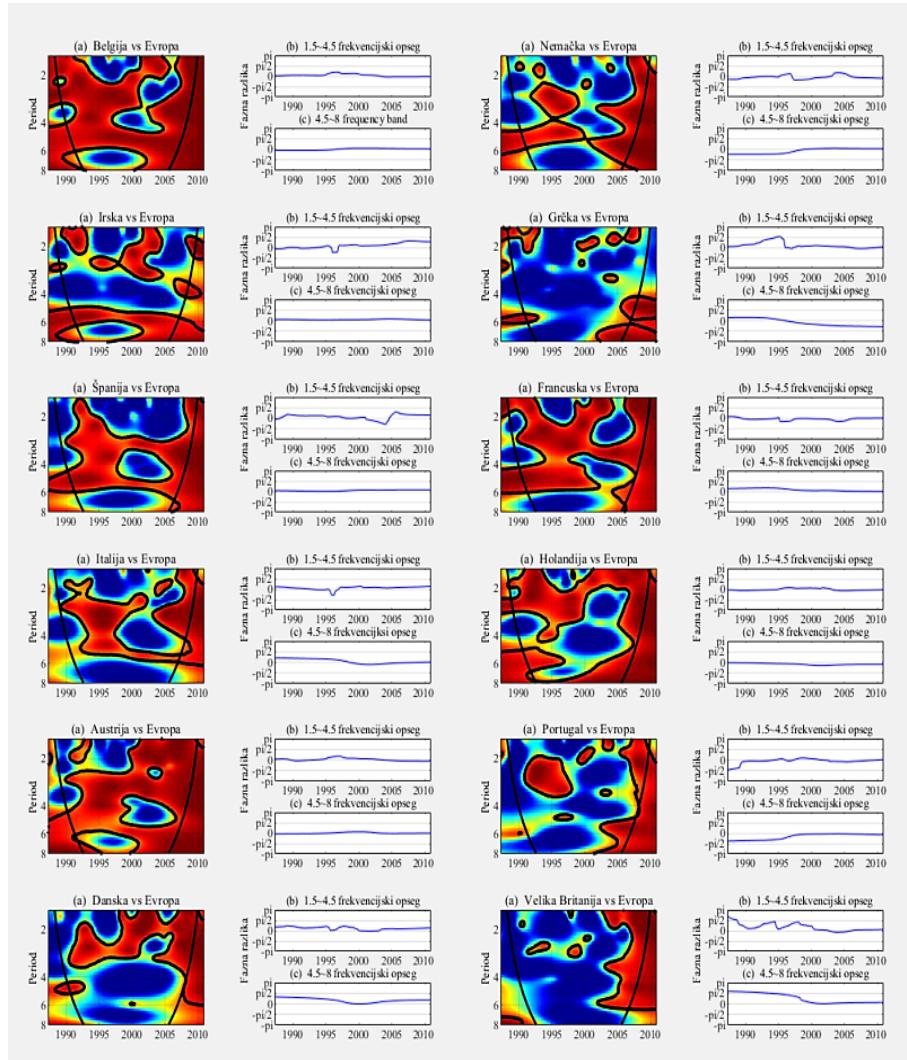
svake zemlje i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja 10 zemalja evrozone (ako je država članica evrozone ona se isključuje tj. za sve države osim Danske i Velike Britanije izračunava se ukupni indikator ekonomskog očekivanja za 9 država). Unakrsni talasići omogućuju procenu "co-movement"-a u vremensko-frekvencijskom domenu; procenjuje se koji od indikatora ekonomskog očekivanja je vodeći, a koji zaostajući (lead-lag).

Prvo se proveravaju oblasti u kojima je koherencija statistički značajna. Nakon toga se za te oblasti analiziraju fazne razlike da bi se utvrdilo da li je "co-movement" bio pozitivan ili negativan i koje ekonomsko očekivanje je bilo vodeće, a koje zaostajuće.

Na Slici 15. prikazane su malotalasne koherencije i fazne razlike između indikatora ekonomskog očekivanja svake države i evrozone.

Analiza malotalasnih koherencija Najpre se sa Slike 15. vidi da se nakon 2005. godine za sve zemlje uočavaju oblasti značajne koherencije (oblast označena crvenom bojom - visoka koherencija) u vremensko-frekvencijskoj ravni. Delovi tih oblasti su izvan konusa uticaja (oblast označena crnom linijom). Pojava tih oblasti je verovatno povezana sa ekonomskim i finansijskim procvatom i krahom.

Sada se posmatraju malatalasne koherencije između indikatora ekonomskog očekivanja pojedinačne zemlje i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja evrozone (Slika 15, grafici malatalasnih koherencija na levoj strani). Oblasti značajne koherencije kroz ceo uzorak (oblasti označene crvenom bojom na Slici 15) javljaju se kod Austrije, Belgije, Nemačke i Francuske. Krajem 90-tih i početkom 2000-ih godina kod Holandije, Španije i Irske uočavaju se oblasti niske koherencije (na grafiku izgledaju kao rupe, oblasti označene plavom bojom). U slučaju Irske oblast značajne koherencije zabeležena je za petogodišnje cikluse tokom celog uzorka, dok je za kraće cikluse koherencija slabija. Kod Portugala je oblast značajne koherencije zabeležena u periodu između 1992. i 1998. godine za cikluse perioda 2 i 3.5 godine, ali se ispostavilo da je ta epizoda prolazna. Grčka je država sa manje sinhronizovanim ekonomskim očekivanjem. U slučaju Grčke oblast značajene koherencije zabeležena je samo za cikluse perioda 6 ~ 8 godina od 2002. godine i za cikluse perioda 4 ~ 6 godina od 2006. godine. Na kraju se još analiziraju malatalasne koherencije dve kontrolne zemlje, Danske i Velike Britanije. Posmatrajući malatalasnu koherenciju između indikatora ekonomskog očekivanja Velike Britanije i ukupnog očekivanja evrozone uočava se da se oblast značajne koherencije pojavljuje tek od 2005. godine za cikluse perioda od 1.5 do 6 godina. Pretpostavlja se da je pojava značajnosti koherencije u ovom periodu vezana za procvat ekonomije koji traje do otprilike 2007. godine. U slučaju Danske, oblasti značajne koherencije javljaju se u periodu 1990-2000. godine za cikluse peri-



Slika 15: Malotalasne koherencije i fazne razlike

oda trajanja od 1.5 do 3. godine. Nakon toga oblast značajnosti koherencije se smanjuje i posle 2005. godine značajnost se proširuje na cikluse dužeg trajanja koji dostižu šestogodišnji ciklus 2007. godine. Dakle, iz poređenja malotalasnih koherencija zaključuje se da je stvaranje Ekonomске i monetarne unije uticalo na "co-movement" Danske u odnosu na ekonomsko očekivanje evrozone. Drugim rečima čvrsta povezanost Danske krune i evra omogućila je kretanje ekonomskog očekivanja Danske ka ekonomskom očekivanju evrozone.

Analiza faznih razlika. Fazne razlike su podeljene na dva grafika. Jedan grafik odgovara frekvencijskom opsegu od $1.5 \sim 4.5$ godina, a drugi periodu $4.5 \sim 8$ godina.

Za analizu faznih razlika koristi se Slika 8, pri čemu je x predstavlja državu, a y evrozonu.

Prvo što se uočava sa Slike 15. jeste da se fazne razlike nalaze između $-\pi/2$ i $\pi/2$ što znači da su indikatori ekonomskog očekivanja u fazi tj. indikatori se kreću u pozitivnom smeru (pozitivan "co-movement"). Dakle, ove oblasti značajne koherencije odgovaraju ili epizodama sinhronizacije ili epizodama u kojima je neki od indikatora ekonomskog očekivanja vodeći ili zaostajući, ali se kreću u istom smeru.

Posebna pažnja posvećuje se analizi faznih razlika Nemačke, Francuske i Italije, kao vodećim ekonomijama u tom periodu.

Posmatrajući fazne razlike za cikluse perioda $4.5 \sim 8$ uočava se da fazne razlike osciluju nešto pre 1999. godine. Pre 1999. godine fazne razlike Nemačke se nalaze između $-\pi/2$ i 0 , pa se na osnovu Slike 8. zaključuje da je ukupni indikator ekonomskog očekivanja evrozone vodeći u odnosu na indikator ekonomskog očekivanja Nemačke. Fazne razlike Francuske i Italije se nalaze između 0 i $\pi/2$ što znači da su indikatori ekonomskog očekivanja ove dve zemlje vodeći u odnosu na indikator ekonomskog očekivanja evrozone. Posle 1999. godine fazne razlike sve tri zemlje Nemačke, Italije i Francuske se nalaze oko nule, što znači da se indikatori ekonomskog očekivanja ove tri zemlje kreću uporedo sa ukupnim indikatorom ekonomskog očekivanja evrozone. Dakle, posmatrajući duže cikluse Nemačke, Francuske i Italije kreiranje Ekonomске i monetarne politike dovelo je do sinhronizacije poslovnih ciklusa.

Kada se posmatra kraći frekvencijski opseg (period $1.5 \sim 4.5$ godine) u skoro svim državama uočava se promena kretanja faznih razlika u periodu između 1995. i 1997. godine. Krajem 90-tih ukupno ekonomsko očekivanje evrozone je vodeće u odnosu na ekonomsko očekivanje Nemačke, Francuske i Italije (fazna razlika je smeštena između 0 i $-\pi/2$). Generalno gledajući od 2000. godine ekonomsko očekivanje je postalo sinhronizovano u evrozoni.

Zanimljivo je opažanje da fazne razlike Nemačke i Francuske izgledaju kao

slika u ogledalu za oba frekvencijska opsega. Recimo za duži frekvencijski opseg pre 1999. godine ukupni indikator ekonomskog očekivanja evrozone je vodeći u odnosu na indikator ekonomskog očekivanja Nemačke, a zaostajući je u odnosu na indikator ekonomskog očekivanje Francuske. Za kraći frekvencijski opseg u periodu 1995-1997 ukupni indikator ekonomskog očekivanja evrozone bio je vodeći u odnosu na indikator ekonomskog očekivanja Francuske, a zaostajući u odnosu na indikator ekonomskog očekivanja Nemačke. U periodu 2004-2006 u faznim razlikama Nemačke uočava se uspon, a Francuska beleži pad u faznim razlikama, prema tome indikator ekonomskog očekivanja Nemačke je vodeći u odnosu na ukupni indikator ekonomskog očekivanja evrozone, a indikator ekonomskog očekivanja evrozone je vodeći u odnosu na indikator ekonomskog očekivanja Francuske.

5 Dodatak

5.1 Kod

U ovom poglavlju navodi se kod koji se koristio za izračunavanje malotalasnih udaljenosti između para zemalja u periodu pre i nakon uvođenja evra (Tabela 3 i 4). Ovaj kod, kao i svi kodovi navedenih podfunkcija u ovom dodatku dostupni su na sajtu [17] iz spiska literature u okviru ASToolbox2014. Ovaj toolbox omogućava upotrebu generalizovanog Morseovog talasića koji obuhvata najpopularnije analitičke talasiće i Morletov-og talasića. Testovi značajnosti zasnivaju se na Monte Karlo simulacijama. Serije su formirane koriteći ARMA(p, q) i izgradnjom novih uzoraka metodom reuzrokovana (tzv. bootstrap) ili crtanjem grešaka Gausove raspodele.

Podaci u Tabelama 3 i 4. su dobijeni pomoću koda prikazanog ispod (Listing 1). Rezultat ovog koda su procenjene distance i kritične vrednosti koje se dobijaju u formi excel fajla. U excel fajlu za jedan period uzorka dobiju se četiri tabele, jedna odgovara procenjenim distancama i tri tabele su kritične vrednosti izračunate na nivou od 1,5 i 10 procenata. Značajnost se određuje poređenjem kritičnih vrednosti sa dobijenim distancama. Ukoliko je kritična vrednost veća od odgovarajuće procenjene distance, onda je udaljenost značajna. Kako je izračunavanje bazirano na simulacijama, mogu se javiti male razlike. Izračunavanje kritičnih vrednosti zahtevaće mnogo vremena.

Ovaj kod sam koristila u verziji 2009a. Prvobitno sam probala da ga pokrenem u verziji 2019a, ali se javi greška jer funkcije GARCHFIT, GARCHSET i GARCHSIM iz Econometrics Toolbox ne postoje u ovoj verziji matlab-a.

Listing 1: Kod koji se unosi u MATLAB za izračunavanje malotalasnih udaljenosti i crtanje mape skaliranja za dva uzorka

```
1 %% Azurirajte putanju
2 addpath('D:\MATLAB 2009\Wavelets');
3 matrixCS=xlsread('\Data.xlsx'); %ucitavanje podataka
4
5 countries=12;
6 matrixCS=matrixCS(:,1:countries+1);
7 matrixCS(any(isnan(matrixCS)),:) = [];
8 Time=matrixCS(:,1);
9 matrixCS=log(matrixCS(:,2:end));
10 for k=1:countries
11 matrixCS(:,k)=WaveletBPF(matrixCS(:,k)
12 ,1/12,1/30,[],[],0,1.25,10);
13 matrixCS(:,k)=matrixCS(:,k)/std(matrixCS(:,k));
14 end
15 % Racunanje spektra pomocu funkcije WaveletSpectra
```

```

15 | espectrosCS=WaveletSpectra(matrixCS ,1/12,1/30,1.49,8.2,0 , 'Morlet
16 |   ,6,10);
17 | for metade=1:2 % metade=1 odgovara prvoj polovini uzorka
18 |           % metade=2 odgovara drugoj polovini uzorka
19 |
20 | % Racunanje matrice udaljenosti datog spktra pomocu funkcije
21 | distances i
22 | % crtanje odgovarajuce mape skaliranja pomocu funkcije scalMap
23 | if metade==1
24 |     [matDistCS , vecDistCS]=distances(espectrosCS ,1);
25 |     figure(1)
26 |     subplot(1,2,1)
27 |     scalMap(matDistCS)
28 |     title('ESI Cycles Dissimilarities — Pre—Euro')
29 | else
30 |     [matDistCS , vecDistCS]=distances(espectrosCS ,2);
31 |     figure(1)
32 |     subplot(1,2,2)
33 |     scalMap(matDistCS)
34 |     title('ESI Cycles Dissimilarities — Post—Euro')
35 | end
36 | A=vecDistCS ;
37 | %%
38 | matrixCS=[Time matrixCS];
39 | nsur=5000;
40 | YY=[];
41 | for k=1:countries-1
42 |     for kk=k:countries-1;
43 |         matrixEC=[matrixCS(:,1) matrixCS(:,k+1) matrixCS(:,kk+2)
44 |                     ];
45 |         Time=matrixEC(:,1);
46 |         country1=(matrixEC(:,2));
47 |         country2=(matrixEC(:,3));
48 |         %izracunava surrogat serije za datu vremensku seriju country1
49 |         sur1 = SurrogateARMAEcon(country1,1,1,nsur);
50 |         %izracunava surrogat serije za datu vremensku seriju country2
51 |         sur2 = SurrogateARMAEcon(country2,1,1,nsur);
52 |         Vector=[];
53 |         for kkk=1:nsur
54 |             sur=[sur1(:,kkk) sur2(:,kkk)];
55 |             espectrosCSsur=WaveletSpectra(sur
56 |                 ,1/12,1/30,1.49,8.2,0 , 'Morlet' ,6,[] );
57 |
58 |             if metade==1
%umesto "ThisVariableWillNotBeUsed" u verziji Matlab2009b
moze se korisiti ~

```

```

59      [ ThisVariableWillNotBeUsed , vecDistEC]=distances(
60          espectrosCSsur ,1);
61      clear ThisVariableWillNotBeUsed
62  else
63      [ ThisVariableWillNotBeUsed , vecDistEC]=distances(
64          espectrosCSsur ,2);
65      clear ThisVariableWillNotBeUsed
66  end
67      Vector=[Vector ; vecDistEC ];
68  end;
69 end
70 %%%
71 matDist01=squareform(YY(:,1));
72 matDist05=squareform(YY(:,2));
73 matDist10=squareform(YY(:,3));
74 if metade ==1
75     xlswrite('Distances_signALT.xls',matDist01,'1%_1st_half','b2'
76             );
76     xlswrite('Distances_signALT.xls',matDist05,'5%_1st_half','b2'
77             );
77     xlswrite('Distances_signALT.xls',matDist10,'10%_1st_half','
78             b2');
78     xlswrite('Distances_signALT.xls',matDistCS,'Table2_1st_half'
79             , 'b2');
80 else
80     xlswrite('Distances_signALT.xls',matDist01,'1%_2nd_half','b2'
81             );
81     xlswrite('Distances_signALT.xls',matDist05,'5%_2nd_half','b2'
82             );
82     xlswrite('Distances_signALT.xls',matDist10,'10%_2nd_half','
83             b2');
83     xlswrite('Distances_signALT.xls',matDistCS,'Table2_2nd_half'
84             , 'b2');
85 end
85 end

```

Najpre se za filtriranje serije koristi funkcija **WaveletBPF**. Ovde je reč o wavelet band-pass filtriranju serija tj. filtriranju serija pomoću pojasnog filtera. Idealni pojredni filter uklanja određene komponente vremenskih serija, koje leže u određenom opsegu frekvencije. U praksi je veoma teško konstruisati idealni pojredni filter jer to zahteva beskonačan broj podataka. Stoga se koristi približan idealan filter za izvlačenje komponenti vremenskih serija u određenom opsegu frekvencija, kao što su poslovni ciklusi sa određenim vremenom trajanja. Filtriranje se vrši tako što se prvo uradi dekompozicija serije x koristeći malotalasnu transformaciju sa zadatim parametrom, a zatim se serija rekonstruiše u izabra-

nom frekvencijskom opsegu.

Ulagni argumenti kod funkcije WaveletBPF su:

- x - vektor (serija) koju želimo da filtriramo
- Opcioni ulazni argumenti:
 - dt - uzoračka stopa (zadana vrednost=1)
 - dj - frekvencijska rezolucija (zadana vrednost:1/4)
 - $lowPeriod$ - donji period dekompozicije (zadana vrednost: $2 * dt$)
 - $upPeriod$ - gornji period dekompozicije (zadana vrednost: $length(y) * dt$)
 - pad - celi broj koji definiše ukupnu dužinu vektora x nakon zero padding³⁸
 - $lowRecPeriod$ - donji period korišćen za rekonstrukciju
 - $upRecPeriod$ - gornji period korišćen za rekonstrukciju

Izlazni argument je:

- $\text{filt}x$ - filtrirana serija

AWT izračunava analitičku malotalasnu trasnfrmaciju (wave) date serije x koristeći Morlet-ov ili generalizovani Morseov talasić. Dekompozicija se vrši između dva perioda ($lowPeriod$ i $upPeriod$). Takođe računa i malotalasnu moć spektra (power) i njegove p-vrednosti (pvPower). Za izračunavanja se koriste Monte Karlo simulacije. Surogat serije se mogu formirati na dva načina: podešavanjem ARMA(p, q) modela i izgradnjom novog uzorka bootstrap metodom ili prilagođavanjem ARMA(p, q) modela i konstruisanjem novog uzorka crtanjem grešaka iz Gausove distribucije.

Ulagni argumenti funkcije AWT su:

- x - vektor (vremenska serija)
- Opcioni ulazni argumenti:
 - dt - uzoračka stopa (zadana vrednost=1)
 - dj - frekvencijska rezolucija (zadana vrednost:1/4)
 - $lowPeriod$ - donji period dekompozicije (zadana vrednost: $2 * dt$)

³⁸Zero-padding je jednostavan koncept. Odnosi se na dodavanje nula uzorku radi produženja dužine signala.

- upPeriod - gornji period dekompozicije (zadana vrednost: $length(x) * dt$)
- pad - celi broj koji definiše ukupnu dužinu vektora x nakon zero padding
- lowRecPeriod - donji period korišćen za rekonstrukciju
- upRecPeriod - gornji period korišćen za rekonstrukciju
- mother - mother wavelet funkcija
 - 0 ili 'Morlet' → Morlet mali talas (generalno se on koristi)
 - 1 ili 'GMW' → Generalizovani Morseov mali talas
- be - beta parametar za GMW ili Morlet (ω_0) parametar. Zadane vrednosti: 6.0 za 'Morlet' i 3.0 za 'GMW'
- ga - gama parametar za GMW (zadana vrednost: 3.0)
- nSur - ceo broj, broj surogat serija, ako želimo da izračunamo p-vrednosti malotalasne moći spektra (zadana vrednost: 0 - nema izračunavanja)
- surType - vrsta serija surogat serija
 - 0 ili 'ARMABoot' → serije su formirane na osnovu ARMA(p,q) modela plus bootstrap (zadana vrednost)
 - 1 ili 'ARMAEcon' → serije su formirane na osnovu ARMA(p,q) modela plus Gaus
- p,q - nenegativni celi brojevi, redovi ARMA procesa (zadane vrednosti: p=0, q=0)

izlazni argumenti su:

- wave - matrica malotalasne transformacije (broj vrste = broju skala, broj kolona = $length(x)$)
- periods - vektor Furijeovih perioda (u jedinici vremena) koji odgovara korišćenim skalam
- scales - vektor skala dat je sa $s_0 * 2^{(j * d_j)}$; $j = 0, \dots, j_1$, gde je s_0 skala minimuma
- coi - konus uticaja, koji je vektor iste veličine kao x koji sadrži granicu oblasti u kojoj je malotalasna transformacija pod uticajem graničnih efekata
- power - malotalasna moć spektra (Wavelet Power Spectrum) (tj. $abs(wave)^2$)
- pvPower - nenegativni celi brojevi, redovi ARMA(p,q) modela (zadane vrednosti: p=0, q=0)

WReconstruct rekonstruiše seriju iz svoje malotalasne transformacije (wave) koristeći odabrani opseg frekvencija (skala) koji odgovara periodima lowRecPeriod i upRecPeriod. Transformacije moraju koristiti zadane parametre malog talasa.

Ulagani argumentni funkcije WReconstruct su:

- wave - malotalasna transformacija date serije (izračunava se pomoću funkcije AWT sa zadanim parametrima)
- periods - vektor perioda korišćen za izračunavanje malotalasne transformacije (output funkcije AWT)
- dt - posmatrani vremenski korak (koristi se u malotalasnoj transformaciji)
- dj - frekvencijska rezolucija (koristi se u malotalasnoj transformaciji)
- lowRecPeriod - donji period korišćen za rekonstrukciju (zadani parametar: $2 * dt$)
- upRecPeriod - gornji period korišćen za rekonstrukciju

Izlazni argument je:

- recseries - rekonstruisana serija (između lowRecPeriod i upRecPeriod)

Funkcija **WaveletSpectra** računa sve malotalasne spekture (tj. malotalasne transformacije) nekoliko serija (kolona matrice). Malotalasna transformacija se može izračunati pomoću Morlet ili generalizovanih Moresovih talasića koristeći funkciju AWT.

Ulagani argumentni funkcije WaveletSpectra su:

- mat - matrica (kolone su serije čije malotalasne transformacije želimo da izračunamo)
- Opcioni ulazni argumenti:
 - dt - uzoračka stopa (zadana vrednost=1)
 - dj - frekvencijska rezolucija (zadana vrednost: 1/4)
 - lowPeriod - donji period dekompozicije (zadana vrednost: $2 * dt$)
 - upPeriod - gornji period dekompozicije (zadana vrednost: $\text{size}(\text{mat}, 1) * dt$)
 - pad - celi broj koji definiše ukupnu dužinu svake kolone nakon zero padding

- mother - mother wavelet funkcija
 - 0 ili 'Morlet' → Morlet mali talas (podrazmevani izbor)
 - 1 ili 'GMW' → Generalizovani Morseov mali talas
- be - beta parametar za GMW ili Morlet (ω_0) parametar. Zadane vrednosti: 6.0 za 'Morlet' i 3.0 za 'GMW'
- ga - gama parametar za GMW (zadana vrednost: 3.0)

Izlazni argument je:

- cspectra - red-ćelija koji sadrži sve izračunate spekture

Za izračunavanje udaljenosti koristi se funkcija **distances**. Ova funkcija računa matricu (i vektor) udaljenosti datog spektra (koristeći SVD-dekompoziciju matrice kovarijanse i hermitske uglove). Za izračunavanje (srednje) vrednosti ugla između dve kompleksne serije koristi se funkcija **angleSeries**. Ulazni (input) argumenti funkcije angleSeries: A, B - vektori (serije) iste veličine, kompleksnih brojeva. Izlazni (output) argument funkcije angleSeries: meanAngle - srednja vrednost hermitskih uglova između kompleksnih vektora formiranih uzastopnim tačkama A i B.

Mogu se računati udaljenosti (rastojanja) za prvu polovinu uzorka (period pre evra), za drugu polovinu uzorka (period posle evra) i za ceo uzorak.

Ulazni argumetni funkcije distances su:

- spectra - ćelija sa spektrima (matrica) čije udaljenosti želimo da izračunamo
- part - broj 1, 2 ili 3 koji ukazuje koji deo želimo da izračunamo. 1 - prva polovina, 2 - druga polovina, bilo šta drugo ili ako izostavimo označava ukupan uzorak.
- Opcioni ulazni argumenti:

Izlazni argumenti su:

- matDist - matrica udaljenosti između parova spektra
- vecDist - vektor udaljenosti

Poslednja funkcija koja se koristi u kodu za dobijanje rezultata koji su prikazani u Tabeli 3 i 4. je **SurrogateARMAEcon**. Ova funkcija izračunava surrogat serije date vremenske serije x . Te serije se formiraju koristeći matlab funkcije: GARCHFIT, GARCHSET i GARCHSIM iz Econometrics Toolbox-a. Prvo se pođešava ARMA(p, q) model za seriju x , a zatim se konstruišu novi uzorci crtanjem grešaka iz Gausove raspodele. Ulazni argumetni ove funkcije SurrogateARMAEcon su:

- x - vektor (serija)
- Opcioni ulazni argumenti:
 - p, q - celi brojevi, redovi ARMA procesa (zadana vrednost: $p=1, q=0$)
 - $nSur$ - pozitivni celi brojevi, broj surogata (zadana vrednost: 1)

Izlazni argument je:

- $surx$ - matrica veličine $(length(x) \times nSur)$ čije kolone sadrže surogate vektora x .

5.2 Koherencije višeg reda: Parcijalne i višestruke koherencije

U cilju procene povezanosti između više od dve vremenske serije uvodi se pojam višestruke malotalasne koherencije i parcijalne malotalasne koherencije. Korišćena je literatura [8].

Neka je data vremenska serija x_1, x_2, \dots, x_p , $p > 2$ gde je $x_i = \{x_{in}, n = 0, \dots, T-1\}$. S_{ij} dat je sa

$$S_{ij} = S(W_{ij}),$$

gde je S određeni operator glatkoće.

\mathcal{S} je matrica formata $p \times p$ svih glatkih unakrsnih malotalasnih spektara S_{ij} :

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix}$$

Gornja matrica zavisi od specifične vrednosti (τ, s) . Matrica \mathcal{S} je hermitska matrica tj. $\mathcal{S} = \mathcal{S}^H$ gde simbol H označava konjugovano transponovanu matricu tj. važi $S_{ij} = S_{ji}^*$ za sve $i \neq j$ i $S_{ii} = S(|W_i|^2)$ je realan (pozitivan) broj za sve i .

A_{ij}^d je kofaktor elemenata a_{ij} matrice A definisan sa

$$A_{ij}^d = (-1)^{(i+j)} \det A_i^j,$$

gde je A_i^j podmatrica matrice A dobijena brisanjem njene i -te vrste i j -te kolone.

Višestruka malotalasna koherencija

Kvadrat višestruke malotalasne koherencije između serije x_1 i svih ostalih serija x_2, \dots, x_p označavaće se sa $R_{1(23\dots p)}^2$ i dat je formulom

$$R_{1(23\dots p)}^2 = 1 - \frac{\mathcal{S}^d}{S_{11}\mathcal{S}_{11}^d} \quad (5.1)$$

Višestruka malotalasna koherencija $R_{1(23\dots p)}$ definiše se kao pozitivan kvadratni koren veličine date formulom (5.1). Takođe se koristiti i kraći zapis $R_{1(\mathbf{q})}^2$ za $R_{1(2\dots p)}^2$ tj. jednostavno će sa \mathbf{q} označavati svi indeksi serija, sem indeksa 1.

Parcijalna malotalasna koherencija

Kompleksna parcijalna malotalasna koherencija x_1 i x_j ($2 \leq j \leq p$) označena je $\varrho_{1j,\mathbf{q}_j}$ i data je sa

$$\varrho_{1j,\mathbf{q}_j} = -\frac{\mathcal{S}_{j1}^d}{\sqrt{\mathcal{S}_{11}^d \mathcal{S}_{jj}^d}}, \quad (5.2)$$

gde je \mathbf{q}_j skraćena oznaka za sve indekse \mathbf{q} isključujući indeks j , tj. $\mathbf{q}_j = \{2, \dots, p\} \setminus \{j\}$.

Parcijalna malotalasna koherencija x_1 i x_j označava se sa r_{1j,\mathbf{q}_j} i definisana je kao apsolutna vrednost veličine (5.2), tj.

$$r_{1j,\mathbf{q}_j} = \frac{|\mathcal{S}_{j1}^d|}{\sqrt{\mathcal{S}_{11}^d \mathcal{S}_{jj}^d}},$$

dok je kvadratna parcijalna koherencija x_1 i x_j data sa

$$r_{1j,\mathbf{q}_j}^2 = \frac{|\mathcal{S}_{j1}^d|^2}{\mathcal{S}_{11}^d \mathcal{S}_{jj}^d},$$

Formule višestruke i parcijalne koherencije mogu se definisati i pomoću matrice \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1p} \\ \varrho_{21} & 1 & \cdots & \varrho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho_{p1} & \varrho_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Elementi ove matrice su kompleksne malotalasne koherencije ϱ_{ij} i $\varrho_{jj} = \frac{S(W_{jj})}{(S(|W_j|^2)S(|W_j|^2))^{1/2}} = \frac{S(|W_j|^2)}{S(|W_j|^2)} = 1$. Kao i \mathcal{S} , matrica \mathcal{C} je takođe hermitska matrica.

Odgovarajuće formule višestruke i parcijane malotalasne koherencije su:

$$R_{1(\mathbf{q})}^2 = 1 - \frac{\mathcal{C}_{11}^d}{\mathcal{C}_{11}^d},$$

$$\varrho_{1j.\mathbf{q}_j} = -\frac{\mathcal{C}_{j1}^d}{\sqrt{\mathcal{C}_{11}^d \mathcal{C}_{jj}^d}},$$

$$r_{1j.\mathbf{q}_j} = \frac{|\mathcal{C}_{j1}^d|}{\sqrt{\mathcal{C}_{11}^d \mathcal{C}_{jj}^d}}.$$

Izraz višestruke koherencije u pogledu parcijalnih koherencija

Kvadratna višestruka koherencija može se izraziti u obliku kvadratnih parcijalnih koherencija, koristeći sledeću formulu

$$1 - R_{1(2\dots p)}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13.2}^2) \cdots (1 - r_{1p.23\dots(p-1)}^2).$$

Parcijalna fazna razlika

Parcijalna fazna razlika $\phi_{1j.\mathbf{q}_j}$ definiše se kao ugao parcijalne malotalasne koherencije $\varrho_{1j.\mathbf{q}_j}$, tj.

$$\phi_{1j.\mathbf{q}_j} = \arctan \left(\frac{\Im(\varrho_{1j.\mathbf{q}_j})}{\Re(\varrho_{1j.\mathbf{q}_j})} \right)$$

5.3 Modeli linearnih vremenskih serija

U ovom delu daćemo definicije i kratko objašnjenje pojmove koji se koriste gore u kodu, radi boljeg razumevanja. Korišćen je izvor [11] sa spiska literature.

Autoregresioni model reda p , $\text{AR}(p)$ Autoregresioni procesi impliciraju regresiju na sopstvene vrednosti, otuda i prefiks auto u imenu ovog procesa. Proces X_t je autoregresioni proces reda p ako je opisan sledećom jednačinom

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (5.3)$$

gde su $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ autoregresioni parametri, a ε_t je proces belog šuma. Dakle, trenutna vrednost procesa je linearna kombinacija $t-1, \dots, t-p$ prošlih vrednosti plus slučajni poremećaj ε_t .

Autoregresioni proces (5.3) može se napisati u kraćem obliku korišćenjem operatora pomeraja B :

$$\phi(B)X_t = \varepsilon_t,$$

gde je $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$. Autoregresioni model (proces) reda p se skraćeno obeležava kao $\text{AR}(p)$ proces.

Autoregresioni model prvog reda, AR(1) Autoregresioni proces prvog reda dat je jasnino

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

odnosno korišćenjem operatora pomeraja B u skraćenom obliku AR(1) proces pišemo u obliku

$$(1 - \phi_1 B) X_t = \varepsilon_t.$$

Model pokretnih proseka reda q , MA(q) Model (proces) pokretnih proseka reda q dat je sa

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (5.4)$$

gde je ε_t proces belog šuma, dok su $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ parametri modela. Korišćenjem operatora pomeraja (5.4) se može napisati i u skraćenom obliku:

$$X_t = \theta(B) \varepsilon_t,$$

gde je $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$. Model pokretnih proseka koristan je u modeliranju pojava kod kojih događaji uzrokuju trenutne efekte, a koji traju kratak vremenski period. Ovaj model skraćeno označavamo sa MA(q).

Model pokretnih proseka prvog reda Kada se u izrazu (5.4) zameni $q = 1$ dobija se pokretni prosek prvog reda

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} = (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t.$$

Autoregresioni model pokretnih proseka, ARMA(p, q) Obe reprezentacije i AR i MA, mogu da sadrže relativno mnogo koeficijenata što umanjuje efikasnost takvih modela. Da bi se rešio ovaj problem, uveden je novi model za opisvanje vremenskih serija. Taj model se naziva autoregresioni model pokretnih proseka ili ARMA, i on je kombinacija AR i MA modela.

ARMA(p, q) proces se definije na sledeći način:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

koji se preko operatora pomeraja može napisati u obliku

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) X_t = (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$

odnosno u sažetom obliku

$$\phi(B) X_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

ARMA(1,1) proces Najjednostavniji iz klase mešovitih procesa je ARMA(1,1) proces. Definiše se na sledeći način

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1},$$

osnosno korišćenjem operatora pomeraja piše se u obliku

$$(1 - \phi B)X_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t.$$

5.4 Monte Karlo simulacije

Naziv „Monte Karlo metod“ se odnosi na širok spektar matematičkih modela i algoritama čija je glavna karakteristika stohastički pristup, odnosno upotreba slučajnih brojeva u rešavanju različitih problema. Najčešće se radi o matematičkim problemima čija se rešenja ne mogu odrediti analitički ili za to ne postoje efikasni numerički algoritmi. Pored toga, često se koriste i za proveru rezultata dobijenih analitičkim ili drugim metodama.

Osnovna ideja Monte Karlo metode je aproksimacija očekivane vrednosti $E(X)$ aritmetičkom sredinom rezultata velikog broja nezavisnih ogleda koji svi imaju istu raspodelu kao X . Osnova ovog metoda je jak zakon velikih brojeva.

Monte Karlo simulacije su tehnika koja se koristi da se prouči kako model reaguje na nasumično generisane inpute. Obično uključuje proces u tri koraka [16]:

1. Nasumično generisati "N" inputa (koji se ponekad nazivaju scenariji).
2. Izvršiti simulacije za svaki od "N" inputa. Simulacije se izvode na kompjuterizovanom modelu koji se analizira.
3. Objediniti i proceniti rezultate simulacija. Uobičajne mere uključuju srednju vrednost rezultata, raspodelu izlaznih vrednosti i minimalnu ili maksimalnu izlaznu vrednost.

Za više o Monte Karlo simulacijama pogledati u [2].

6 Zaključak

Tema ovog rada je bila da se uvedu pojmovi malotalasne i unakrsne malotalasne transformacije s osvrtom na Furijeovu analizu i da se opiše jedna od njenih primena u ekonomiji. Osnovu rada čini koncept unakrsne malotalasne transformacije koja se koristi za analizu vremenskih serija. Malotalasna transformacija omogućava da se uzmu u obzir oba domena (vremenski i frekvencijski) unutar jedinstvenog okvira. Ona omogućava da se istovremeno proceni kako su promenljive povezane na različitim frekvencijama i kako se takav odnos menjao tokom vremena. Primena malotalasnih transformacija opisana je kroz ispitivanje sličnosti i sinhronizacije indikatora različitih zemalja i ukupnog indikatora ekonomskog očekivanja evrozone. Na osnovu analize ove dve osobine dobijene su ralzičite informacije o kretanju ekonomskog očekivanja poslovnih ciklusa u vremensko frekvencijskoj ravni.

Literatura

- [1] António Rua, Wavelets in Economics, Banco de Portugal, Economics and Research Department.
- [2] Dejana Vukić, Master rad, Monte Karlo metode u aktuarskom modeliranju, Novi Sad, Septembar 2012.
- [3] Dirk Baur, What is Co-movement? Institute for the Protection and the Security of the Citizen Technological and Economic Risk Management Unit 1-21020 Ispra (VA) Italy, 2003.
- [4] Dirk Baur, What is Co-movement? European Commission, Joint Research Center, Ispra (VA), Italy IPSC - ESAF, July 2004.
- [5] Dr. sc. Đuro Benić, Poslovni ciklusi, Fakultet za turizam i vanjsku trgovinu, Dubrovnik, 2002.
- [6] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [7] Luís Aguiar-Conraria, Maria Joana Soares, Business Cycle Synchronization Across the Euro Area: a Wavelet Analysis, February, 2009.
- [8] Luís Aguiar-Conraria, Maria Joana Soares, The Continuous Wavelet Transform: A Primer, NIPE – WP 16/2011, Minho, 2011.
- [9] Luís Aguiar-Conraria, Manuel M. F. Martins, Maria Joana Soares Convergence of Economic Sentiment Cycles in the Euro Area: a time frequency analysis, Journal of Common Market Studies, 2012, <https://doi.org/10.1111/j.1468-5965.2012.02315.x>.
- [10] S. Mallat, A wavelet tour of signal processing - The Sparse way, Third Edition, 2009.
- [11] Zlatko J. Kovačević, Analiza vremenskih serija, Beograd, 1995.
- [12] <https://www.dummies.com/education/finance/international-finance/hard-currency-pegs/>
- [13] <https://www.dummies.com/personal-finance/investing/leading-lagging-or-coinciding-the-timeliness-of-economic-indicators/>
- [14] <https://ec.europa.eu/eurostat/web/products-datasets/-/teibs010>
- [15] <https://www.investopedia.com/terms/l/leadsandlags.asp>

- [16] <https://www.mathworks.com/discovery/monte-carlo-simulation.html>
- [17] <https://sites.google.com/site/aguiarconraria/joanasoares-wavelets/the-astoolbox>

Biografija

Slađana Mandić rođena je 11.07.1992. godine u Bosanskom Petrovcu. Nakon završene osnovne škole "Miroslav Antić" u Futogu, upisala je gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj", prirodno-matematički smer u Novom Sadu. Zbog interesovanja prema matematici 2011. godine upisala je onovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Osnovne studije završava 2015. godine i na istom fakultetu upisuje master akademske studije, smer Primjenjena matematika, modul Matematika finansija. Zaključno sa oktobarskim rokom 2017. godine, položila je sve ispite predviđene planom i programom i stekla uslov za odbranu master rada. Od 2018. godine zaposlena je u kompaniji Sixsentix u Novom Sadu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Slađana Mandić

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

ME

Naslov rada: Primena malih talasa i unakrsne malotalasne analize u ekonomiji

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2020

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (5/70/0/4/15/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

FO:

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Matematička analiza

ND

Ključne reči: Furijeova transformacija, malotalasna transformacija, mali talasi, talasići, unakrsna malotalasna transformacija, malotalasna moć spektra, malotalasna koherencija, malotalasne udaljenosti, ekonomski ciklusi, indikatori ekonomskog očekivanja (ESI)

PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U ovom radu opisana je primena malih talasa tj. unakrsne malotalasne analize u ekonomiji. Tačnije opisana je konvergencija ciklusa ekonomskih očekivanja u evrozoni koristeći pojmove unakrsne malotalasne analize. Najpre su uvedeni pojmovi Furijeove transformacije i neke njene osobine, potom malotalasne analize, te unakrsne malotalasne analize. Potom su analizirane sličnosti i sinhronizacija ciklusa ekonomskih očekivanja u evrozoni koristeći koncepte unakrsne malotasne metode i indikatore ekonomskog očekivanja.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 13.02.2020.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Nataša Krklec Jerinkić, vandredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC Author: Sladjana Mandić

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

MN

Title: The application of wavelets and cross-wavelet analysis in economy

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s / en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2017

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (5/70/0/4/15/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematical analysis

SD

Subject/Key words: Fourier transformation, wavelets transform, wavelets, cross-wavelets transform, wavelets power spectrum, wavelets coherency, wavelets distances, wconomic cycles, economic sentiment indicators (ESI)

SKW Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This thesis describes application of wavelets, ie. cross-wavelets analysis in economy. More precisely, here is described convergence of economic sentiment cycles in Euroarea. Firstly, Fourier transform and its properties are introduced, then wavelets transform and cross-wavelets transform. After that, similarity and synchronization of economic sentiment cycles are analyzed in Euroarea using concepts of cross-wavelets methods and economic sentiment indicators (ESI).

AB

Accepted by the Scientific Board on: 13.02.2020.

ASB Defended:

DE

Thesis defend board:

DB President: dr Marko Nedeljkov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Member: dr Nataša Krklec Jerinkić, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad

Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad