Optimalni portfolio strategija trgovanja za različite mere rizika

Milan Tokić

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-Matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku
Avgust, 2020

Sadržaj

1 Uvod

> A good portfolio is more than a long list of good stocks and bonds. It is a balanced whole, providing the investor with protections and opportunities with respect to a wide range of contingencies.
>
> *Harry Markowitz*

Konstrukcija optimalnog portfolija je problem koji je zbog neizvesnosti tržišta često analiziran, kako sa praktične strane investitora tako i sa naučne strane u teoriji portfolija. Pronaći idealan portfolio koji minimizira rizik, a maksimizira prinos investicije je često izazovno. Neizvesnost kretanja tržišta nam garantuje da ne postoji portfolio koji ne nosi nikakav rizik. Svakodnevni napredak tehnologije je omogućio računarima visokih performansi da aktivno učestvuju na tržištu. Algoritamske stategije koje koriste predeterminisana pravila kako i kada ulagati u pojedine aktive sve su popularnije među investitorima, ali one, kao i svaki učesnik na tržištu ne mogu konstantno i konzistentno da ostvaruju pozitivan prinos. Kako je optimizacija samih odluka unutar strategija veoma težak zadatak, alternativno možemo da posmatramo kombinovani portfolio više strategija i njega optimizujemo u nadi da će odabrana kombinacija strategija izvući najbolje iz svake pojedinačne.
Tema ovog rada je konstrukcija portfolija koji su rešenje problema optimizacije portfolija strategija za trgovanje. Za potrebe optimizacije, predstavićemo alternativne mere rizika koje su izvedene iz pokazatelja performansi Drawdown i Drawup. Drawdown i Drawup kao pokazatelji konstantnih promena prinosa ka gore ili ka dole predstavljaju potencijalno dobar indikator količine rizika koju strategije nose sa sobom i indikator zajedničkih tendencija kretanja prinosa između dve strategije trgovanja. Karakteristike ovih portfolija su zatim upoređene sa optimalnim portfoliom koji je rešenje Markowitz-ovog modela minimiziranja varijanse strategija trgovanja gde je varijansa računata na tradicionalan način i portfolija koji je rešenje problema minimizacije mere rizika Value-at-risk (VaR) na istom skupu strategija trgovanja. Cilj ovog rada je

da da uvid u to, da li se prinosi pojedinačnih strategija trgovanja mogu optimizovati u jedan portfolio i da li mere rizika definisane na alternativan način mogu da pomognu pri konačnom odabiru strategija trgovanja i optimizaciji portfolija u celini.

Bitno je naglasiti, da su podaci na kojima se primenjuje numerička optimizacija realni i predstavljaju kretanje prinosa 24 strategije trgovanja u periodu nešto dužem od godinu dana. Zahvaljujem se dr Nataši Krejić na formulaciji problema, savetima i velikoj pomoći pri pisanju ovog rada.

1.1 Osnovni pojmovi

U ovom delu definisaćemo pojmove koji su nam potrebni za dalju analizu podataka i optimizaciju portfolija [1].

Definicija 1. *(σ-**algebra**) Neka je Ω skup svih mogućih ishoda (skup elementarnih događaja) nekog eksperimenta. σ-algebra (σ-polje) nad skupom Ω je podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ ukoliko važe sledeći uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\mathcal{A} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{A}^C \in \mathcal{F}$, *gde je* $\mathcal{A}^C$ *komplement skupa* $\mathcal{A}$
3. $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{A} \in \mathcal{F}$.

Definicija 2. *(Borelova σ-**algebra**) Najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove skupa realnih brojeva se naziva Borelova σ-algebra i označava se sa $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Definicija 3. *Prostor verovatnoće Neka je Ω skup elementarnih događaja i $\mathbb{F}$ σ-polje nad Ω. Funkcija $P : \mathbb{F} \to [0,1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega,\mathbb{F})$ ako zadovoljava sledeće uslove:*

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{F}$, $\mathcal{A}_i \bigcap \mathcal{A}_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i,j = 1,2, \ldots$ *važi*

$$P(\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{A}_i) = \sum_{i=1}^{\infty}P(\mathcal{A}_i)$$

Uređena trojka (Ω,F,P) se naziva prostor verovatnoća

Definicija 4. *(Slučajna promenljiva) Preslikavanje X: $\Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Definicija 5. *(Diskretna slučajna promenljiva) Slučajna promenljiva X je diskretna ako postoji prebrojiv skup različitih vrednosti $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ takav da je $P\{X \in R_{X^c}\} = 0$, gde je R_{X^c} komplementarni skup od R_X. Verovatnoću događaja $\{X = x_i\}$ označavamo sa $p(x_i)$:*

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \ldots$$

Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\{x_1, x_2, \ldots\}$ i odgovarajuće verovatnoće $P(x_i)$ čine zakon raspodele slučajne promenljive X.

Definicija 6. *(Funkcija raspodele) Funkcija* $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ *definisana sa* $F_X(x) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}$*, naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X.*

Definicija 7. *(Očekivanje) Za slučajnu promenljivu X diskretnog tipa sa raspodelom verovatnoća* $p(x_k), k = 1, 2, \ldots$ *za koju važi* $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty$ *očekivanje slučajne promenljive se označava sa E(X) i definiše kao*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$$

.

Definicija 8. *(Momenat)*

Momenat reda r, $r = 1, 2, \ldots$ *slučajne promenljive X,* μ_r*, definišemo kao* $\mu_r = E(X^r)$*, odnosno za diskretnu slučajnu promenljivu momenat reda r,* $r = 1, 2, \ldots$*:*

$$\mu_r = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^r p(x_k)$$

Definicija 9. *(Centralni momenat)*

Centralni momenat reda r, u oznaci m_r $r = 1, 2, \ldots$ *slučajne promenljive X,* μ_r*, definišemo kao* $\mu_r = E((X - E(X))^r)$*, odnosno za diskretnu slučajnu promenljivu centralni momenat reda r,* $r = 1, 2, \ldots$*:*

$$m_r = \sum_{k=1}^{\infty} (x_i - E(x_i))^r p(x_i)$$

Definicija 10. *(Disperzija)*

Centralni momenat drugog reda slučajne promenljive X zove se disperzija (varijansa) i označava se sa D(X) ili σ_X^2*.*

Definicija 11. *(Standardna devijacija)*

Standardna devijacija ili standardno odstupanje slučajne promenljive X se definiše kao

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}$$

Definicija 12. *(Kovarijansa)*

Neka su X, Y slučajne promenljive, kovarijansa, u oznaci cov(X,Y) ili σ_{XY} *je*

$$cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- **Prinos** je promena vrednosti neke investicije kroz neki vremenski period, može biti pozitivan, ukoliko je vrednost investicije porasla, odnosno negativan ako je vrednost u posmatranom vremenskom periodu opala. Prinos se može meriti u nominalnoj vrednosti ili u procentualnoj promeni u odnosu na prethodnu vrednost aktive. Mi ćemo prinos definisati kao slučajnu promenljivu.

- **Strategija trgovanja** je algoritam koji na predefinisan konzistentan način deluje na tržištu sa namerom da ostvari pozitivan prinos. Primeri poznatih strategija su: Volume Weighted Average Price (VWAP) i Moving Volume Weighted Average Price (MVWAP).

- **Rizik investicije** je mogućnost nepovoljnog ishoda u smislu negativog prinosa po investitora. Odnosno, rizik je mogućnost da investitor izgubi deo uloženog novca ili sav novac.

- **Portfolio** je skup, odnosno kombinacija finansijske imovine pojedinca koji za cilj ima da ostvari pozitivan prinos.

- **Drawdown** je pokazatelj koji govori koliko se vrednost neke investicije najviše smanjila u odnosu na dva pokretna maksimuma.

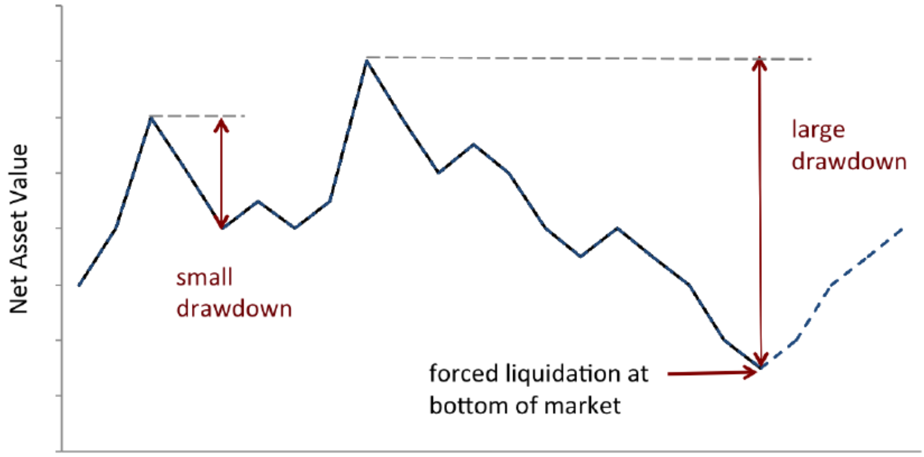
  Recimo da je cena aktive danas 1000 USD, počevši od sutra cena počinje da opada i pre nego sto dostigne cenu veću od 1000 USD najniža cena je bila 900 USD, ovo znači da je Drawdown u ovom periodu bio 10%.

  Maksimalni Drawdown je maksimalan vrednost koju je dostigao pokazatelj Drawdown na posmatranom intervalu, odnosno maksimalni Drawdown nam govori koliko je cena aktive uzastopno padala pre nego što je zatim porasla iznad sadašnjeg maksimuma.

- **Drawup** možemo da razumemo kao suprotno od Drawdown-a, odnosno to pokazatelj koji govori koliko je najviše uzastopno cena rasla između dva pokretna minimuma u posmatranom periodu.

- **VaR**, odnosno Value at Risk je pokazatelj koji govori koliko očekujemo da izgubimo u ekstrmnim slučajevima nepovoljnog kretanja prinosa investicije u određenom vremenskom periodu sa određenom verovatnoćom. Ovaj pokazatelj je jedan od najkorisnijih pokazatelja izloženosti riziku. Definicija VaR pokazatelja je

$$P\{G \geq VaR\} \leq 1 - \alpha$$



Slika 1: Drawdown [2]

Gde G označava gubitak a α verovatnoću da do najmanje takvog gubitka dođe, odnosno α je nivo poverenja. Više o ovim pokazateljima će biti reči u drugoj glavi, gde ćemo konstruisati optimalna portfolija i za potrebe kovarijanse koristiti pokazatelje Drawdown i Drawup.

U moderno doba postaje sve popularnije da na tržištima deluju algoritmi isprogramirani da prate veliki broj tržišnih pokazatelja i reaguju u skladu sa njima. Naravno, bitna razlika između algoritamskog trgovanja i ponašanja čoveka na tržištu je ta, što kod delovanja strategije ne postoji faktor pristrasnosti i emocionalnog delovanja, umesto čega postoji niz definisanih pravila i duboke analitike, koji utiču na to, kako će jedna strategija da se postavi u datoj situaciji ka konkretnoj aktivi. Da li će ta strategija odlučiti da izbegne ulaganje u posmatranu aktivu ili će da proceni da će cena da raste i zauzme dugu poziciju, ili pak kratku. Sve su ovo karakteristike i osobenosti strategija trgovanja. Bitno je naglasiti da, koliko god da je strategija dobro definisana i koliko god da je aparat koji koristi za analizu instrumenata i donošenje odluka moderan i dubok, zbog neizvesnosti kretanja tržišta i nepredvidivosti kretanja cena, ni jedna strategija nije dovoljno dobra i pouzdana da nam garantuje pozitivan prinos. Zbog toga nam je zanimljivo i korisno, da na sličan način, kako bismo pravili kombinacije pojedinačnih aktiva, pravimo i kombinacije ulaganja u strategije trgovanja kako bismo maksimizirali njihov uspeh i na kraju prinos koji će nam sveukupno ulaganje u skup dostupnih strategija doneti. Pokušaćemo da definišemo alternativne načine na koji se računa međusobna povezanost različitih strategija, koja će zatim biti korišćena za računanje optimalnog portfolija. Više reči o ovome će biti u narednoj glavi.

2 Optimizacija portfolija strategija trgovanja

Kako posmatrane strategije, iako su skup algoritama koji po predodređenim pravilima deluju na tržištu, imaju svoje prinose i svoje varijanse, možemo ih posmatrati kao klasične aktive kojima se trguje i koje imaju svoju cenu, npr. akcije i primeniti optimizaciju portfolija strategija trgovanja na sličan način kao što bismo i sa uobičajenim aktivama. Problem sa kojim smo suočeni jeste kako i u kojim merama odabrati strategije trgovanja koje ćemo uvrstiti u naš portfolio. Ovaj problem posmatramo kao problem optimizacije portfolija.

Definisaćemo formalno osnovne pojmove koji su nam bitni za konstrukciju pojedinih modela. Neka je A = {S$_1$,S$_2$, ...S$_n$ } skup strategija trgovanja od kojih svaka ima svoj prinos $r_1, r_2, ...r_n$.

Portfolio obeležavamo kao vektor $x \in \mathbb{R}^n$, gde je svaka komponenta x_i vektora x težinski koeficijent koji nam govori koji smo deo uložili u strategiju broj i. Podrazumevamo da je kratka prodaja zabranjena odnosno podrazumevamo da je $\forall i$ $x_i > 0$.

Takođe pretpostavljamo da će investitor odlučiti da uloži svoje celo bogatstvo u neki od portfolija. Ovo pravilo možemo da zapišemo u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Definišemo $r_i x_i$ kao ostvaren prinos od ulaganja u i-tu strategiju, na sličan način dolazimo do ukupnog prinosa ostvarenog od ulaganja u odabrani portfolio x

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \tag{1}$$

Odnosno ako vektor prinosa pojedinačnih strategija obeležimo sa r, onda prinos celog portfolija možemo zapisati kao proizvod

$$R = rx$$

Osnovni cilj svakoga ko ulaže novac u rizičnu aktivu je da maksimizira očekivani prinos ili minimizira rizik da izgubi uloženi novac ili nekada pravi kombinaciju prethodnog kako bi na račun manjeg prinosa smanjio rizik.

U daljem radu ćemo odabrati da minimiziramo rizik da prinos bude nepovoljan po ulagača, za to definišemo funkciju $V(x)$ koja predstavlja meru rizika za odabrane vrednosti vektora x odnosno za strategije koje smo uvrstili u portfolio. Tradicionalno, za funkciju $V(x)$ se uzima varijansa portfolia gde su vrednosti matrice kovarijanse Σ definisane u klasičnom smislu, odnosno

$$\Sigma_{ij} = cov(S_i, S_j) = E[(S_i - E[S_i])(S_j - E[S_j])] \tag{2}$$

Miminizacija $V(x)$ korišćenjem matrice Σ sa ovako dobijenim vrednostima će služiti za proveru i poređenje numeričkih rezultata sa rezultatima dobijenih iz izvedenih mera rizika.

Da bismo pristupili procesu optimizacije, prvo ćemo definisati pojam nelinearnog programiranja i uslove optimalnosti.

2.1 Problem nelinearnog programiranja

Posmatrajmo sledeći problem:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{3}$$

gde je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $S \subset \mathbb{R}^n$. Skup S se naziva dopustiv skup, a problem 3 se naziva opšta forma problema nelinearnog programiranja. Razlikujemo dva tipa rešenja ovog problema.

Definicija 13. *(Lokalni minimizator) Tacka $x^* \in S$ je lokalni minimizator funkcije f na S ako i samo ako postoji $\epsilon > 0$ tako da je $f(x) \geq f(x^*)$ za sve $x \in S$ za koje $||x - x^*|| < \epsilon$. Ako je $f(x) > f(x^*)$ za sve $x \in S$ za sve x za koje je $x \neq x^*$ i $|||x - x^*|| < \epsilon$ onda kažemo da je x^* striktni lokalni minimizator funkcije f.*

Definicija 14. *(Globalni minimizator) Tačka $x^* \in S$ je globalni minimizator funkcije f na S ako i samo ako je $f(x) \geq f(x^*)$ za sve $x \in S$. Ako je $f(x) > f(x^*)$ za sve*

$x \in S$ za sve x za koje je $x \neq x^*$ onda kažemo da je x^* striktni globalni minimizator funkcije f.

Na sličan način se definišu i lokalni i globalni maksimizator funkcije f.

2.1.1 Uslovi optimalnosti za problem minimizacije bez ograničenja

Slučaj kada je $S = \mathbb{R}^n$ (3) postaje problem nelinearnog programiranja bez ograničenja i za ovaj slučaj definišemo potrebne i dovoljne uslove.

Teorema 1. *(Potrebni uslovi prvog reda) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^1$. Ako je $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokalni minimizator funkije f na $\mathbb{R}^n$ onda je :*

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Teorema 2. *(Potrebni uslovi drugog reda) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$. Ako je $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokalni minimizator funkije f na $\mathbb{R}^n$ onda je :*

- $\nabla f(x^*) = 0$
- $\nabla^2 f(x^*)$ *je pozitivno semidefinitna matrica*

Teorema 3. *(Dovoljni uslovi drugog reda) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$. Ako je $x^* \in \mathbb{R}^n$. $\nabla f(x^*) = 0$ i $\nabla^2 f(x^*)$ je pozitivno definitna, onda je x^* striktni lokalni minimizator funkcije f na dopustivom skupu.*

Problem optimizacije portfolija najčešće zahteva neki tip ograničenja na skupu dostupnih aktiva i zbog toga definišemo uslove optimanolsti kada je dopustiv skup na neki način ograničen, može biti ograničen na tri načina:

- Ograničenja tipa jednakosti
- Ograničenja tipa nejednakosti
- Ograničenja tipa jednakosti i nejednakosti

2.1.2 Minimizacija sa linearnim ograničenjima tipa jednakosti

Posmatrajmo problem:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b. \end{aligned} \tag{4}$$

gde je $A \in \mathbb{R}^{mxn}, 1 \leq m < n$ i rang(A)=m.

Skup $S = \{x \in \mathbb{R} : Ax = b\}$ zovemo dopustiv skup nelinearnog problema definisanog sa (4).

Skup rešenja sistema linearnih jednačina $Ax = 0$ se naziva nula-prostor matrice A i označava se sa $N(A)$. Znamo da je $rang(A) = m$ pa je skup $N(A) \subset \mathbb{R}^n$ dimenzije $n - m$. Vrste matrice A su linearno nezavisni vektori i generišu potprostor dimenzije m koji je ortogonalan na nula prostor $N(A)$. Skup koji vrste matrice A generišu se označava sa $Im(A^T)$ i on je u stvari skup slika matrice A^T.

Neka je x^* rešenje sistema $Ax = b$ i vektor $d \in N(A)$, odnosno vektor d takav da je $Ad = 0$, onda je i $x = x^* + \alpha d$ rešenje istog sistema. Odnosno ako imamo rešenje sistema x^* možemo iz njega da se pomerimo u pravcu vektora d za dužinu koraka α i dalje ćemo ostati u dopustivom skupu.

Označimo sa $\{z^1, z^2, ..., z^m\}$ bazu prostora $N(A)$ i sa $Z \in \mathbb{R}^{nxm}$ matricu čije su kolone baza prostora $N(A)$. Znamo da za svako $d \in N(A)$ postoji vektor $\gamma \in \mathbb{R}^m$ tako da važi $d = Z\gamma$.

Neka je X^* rešenje sistema $Ax = b$, tada skup S možemo da zapišemo na sledeći način:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x^* + Z\gamma, \gamma \in \mathbb{R}^m\}$$

Sada možemo da definišemo sledeću funkciju, $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$\phi(\gamma) = f(x^* + Z\gamma)$$

Sada se problem sa početka svodi na problem bez ograničenja:

$$\min_{\gamma} \quad \phi(\gamma) \tag{5}$$

Teorema 4. *(Potreban uslov prvog reda) Vektor γ^* je lokalni (globalni) minimum funkcije ϕ na $\mathbb{R}^m$ ako i samo ako je $\tilde{x} = x^* + Z\gamma^*$ lokalni (globalni) minimum problema (4).*

Od ranije znamo da je potreban uslov prvog reda za problem (5)

$$\nabla\phi(\gamma^*) = 0$$

Kako je $\phi(\gamma) = f(g(\gamma))$, gde je $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definisana sa $g(\gamma) = x^* + Z\gamma$ znamo da je

$$\phi'(\gamma) = f'(g(\gamma))g'(\gamma) = \nabla^T f(g(\gamma))Z.$$

odatle je $\nabla\phi(\gamma) = Z^T\nabla f(g(\gamma))$ i znamo da ako je γ^* lokalni minimizator važi:

$$\nabla\phi(\gamma^*) = Z\nabla f(x^* + Z\gamma^*) = Z^T\nabla f(\tilde{x}) = 0$$

Vidimo da je potreban uslov prvog reda da $\tilde{x}$ bude rešenje problema (4) taj da važi $Z^T\nabla f(\tilde{x}) = 0$ odnosno da je $\nabla f(\tilde{x})$ ortogonalno na $N(A)$. Dalje, ovo znači da je tada $\nabla f(\tilde{x}) \in Im(A^T)$ te da je $\nabla f(\tilde{x})$ linearna kombinacija vrsta matrice A, odnosno postoji $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tako da je (x^*, λ^*) rešenje sistema od $n+m$ jednačina:

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= A^T\lambda^* \\ A\tilde{x} &= b. \end{aligned} \tag{6}$$

Sada definišemo uslove drugog reda.

Potreban uslov drugog reda za rešenje problema (5) je

$$\nabla^2\phi(\gamma^*) \geq 0.$$

Znamo da je

$$\nabla^2\phi(\gamma) = Z^T\nabla^2 f(x^* + Z\gamma)Z.$$

kako je $\nabla^2\phi(\gamma^*) \geq 0$ odavde sledi

$$Z^T\nabla^2 f(\tilde{x})Z \geq 0$$

Matrica $Z^T\nabla^2 f(\tilde{x})Z \in \mathbb{R}^{mxm}$ je pozitivno semidefinitna ako je $y^T\nabla^2 f(\tilde{x})y \geq 0$, za sve $y \in N(A)$,

Sada možemo da definišemo dovoljne uslove drugog reda: Vektor $\tilde{x}$ je rešenje problema (4) ako je $A\tilde{x} = b$ i ako važi:

- $Z^T\nabla f(\tilde{x}) = 0$
- $Z^T\nabla^2 f(\tilde{x})Z > 0$

2.1.3 Minimizacija sa linearnim ograničenjima tipa nejednakosti

Posmatrajmo problem:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b. \end{aligned} \tag{7}$$

gde je $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{mxn}$.

Označimo sa a_i vektor i-te vrste matrice A. Tada dopustiv skup S možemo da zapišemo u obliku: $S = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \leq b_i, i =, ..., m\}$

Dakle svaka nejednakost $a_i x \leq b_i$ definiše jedan potprostor prostora $\mathbb{R}^n$ i on se nalazi sa suprotne strane potprostora $a_i x = b$ koju pokazuje vektor a_i.

Sada za neku tačku $x \in S$ treba da odredimo dopustive pravce po kojima se možemo pomeriti a da ostanemo u skupu S. Odnosno tražimo vektor pravca $d \in \mathbb{R}^n$ takav da postoji $\bar{\gamma} > 0$ tako da je $x + \gamma d \in S$ za sve $\gamma \in [0, \bar{\gamma}]$.

Za svako $x \in S$ možemo pridružiti broj $r(x)$, $0 \leq r(x) \leq m$ koji govori za koliko restrikcija je ispunjeno $a_i x = b_i$ za odabrano x. Za te restrikcije kažemo da su aktivne u tački x.

Koliko postoji dopustivih pravaca iz tačke x zavisi od broja aktivnih ograničenja u toj tački. Ako je $r(x) = 0$ to znači da je tačka x u unutrasnjosti skupa S i da je svaki pravac iz nje dopustiv.

Neka je $r(x) = p$ za $0 < p \leq m$ za neku tačku $x \in S$. Definišimo skup aktivnih ograničenja $I(x) \subset \{1, 2, ..., m\} \equiv M$ kao

$$I(x) = \{j \in M : a_j x = b_j\}$$

.

Odnosno skup $I(x)$ je skup indeksa aktivnih ograničenja u tački x.

Ako se iz tačke x pomeramo po pravcu d dužinom koraka $\alpha > 0$ ostajemo u skupu S ako i samo ako je $A(x + \alpha d) \leq b$.

Posmatrajmo tačku $x \in S$ takvu da je $a_j x \leq b_j, \forall j \in M$, pravac $d \in \mathbb{R}^n$ i dužinu koraka $\alpha > 0$ imamo:

$$a_j x \leq b_j$$

$$a_j x + \alpha a_j d \leq b_j + \alpha a_j d$$

$$a_j (x + \alpha d) \leq b_j + \alpha a_j d$$

Postoje dve mogućnosti [3]:

- $a_j d \leq 0, \forall j \in M$ Može se pokazati da u ovom slučaju za proizvoljno $\alpha > 0$ možemo da se krećemo po pravcu d i da ostanemo u dopustivom skupu.

- $\exists j \in M, a_j d > 0$ Može se pokazati da u ovom slučaju postoji granica

$$\bar{\alpha} = \overset{a_j d > 0}{\min_{j \in M}} \frac{b_j - a_j x}{a_j d}$$

takva da za svako $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ $x + \alpha d \in S$ dok za $\alpha \in [\bar{\alpha}, \infty]$ važi $x + \alpha d \notin S$

Sada prelazimo na definisnje uslova optimalnosti

- Ako je $r(x) = 0$ tačka x je u unutrašnjosti skupa S pa je svaki pravac dopustiv i važe uslovi optimalnosti kao i kod problema bez ograničenja
- Za $r(x) \geq 1$ definišemo uslove optimalnosti

Teorema 5. *Posmatrajmo problem:*

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Ax \leq b. \end{aligned} \tag{8}$$

gde je $f \in C^1$ *i* $x^* \in S$ *takvo da je* $1 \leq r(x^*) \leq m$. *Neka je* $I(x^*) = I \subset M$ *skup aktivnih ograničenja u tački* x^*.

Označimo sa $A_I \in \mathbb{R}^{r(x^*)xn}$ *podmatricu skupa* A *čije su vrste one koje su aktivna ograničenja u tački* x^*, *odnosno one čiji su indeksi u skupu* I. *Na sličan način definišemo* b_I *kao deo vektora čiji se indeksi nalaze u skupu* I.

Ako je x^* *lokalni minimizator problema 8 onda postoji* $\lambda \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ *tako da je*

$$\nabla f(x^*) = \sum_{k=1}^{r(x^*)} \lambda_k a_{i_k}$$

gde je $\lambda_k \leq 0$ *i* $1 \leq k \leq r(x^*)$ *a* a_{i_k} *vrsta matrice* A_I.

Možemo napisati kao

$$\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda$$

gde je $\lambda \in \mathbb{R}^r(x^*)$.

Teorema 6. *Neka je* $f \in C^2$ *a* x^* *lokalni minimizator problema 8. Tada je*

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ *tako da je*

  $$\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda$$

  gde je $\lambda_i \leq 0, i \in \{1, 2, ..., r(x^*)\}$.

- *Za svako* $y \in N(A_I)$ *vazi:*

  $$y^T \nabla^2 f(x^*) y > 0$$

  gde je $y \in A_J, y \neq 0, J = \{i \in \{1, 2, ..., r(x^*)\} : \lambda_i < 0\}$, *onda je* x^* *lokalni minimizator za nelinearan problem 8.*

2.1.4 Minimizacija sa linearnim ograničenjima tipa jednakosti i nejednakosti

Nama će ovaj slučaj biti posebno bitan, jer u postavci optimizacije portfolija imamo uslov jednakosti da je investitor uložio svoje celokupno bogatstvo $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ i uslov nejednakosti gde zahtevamo da očekivani prinos bude veći od neke granice $\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{r}_i \geq \bar{R}$. Ovakav problem ima oblik:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b. \\ & Wx \leq c. \end{aligned} \tag{9}$$

gde je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n, rang(A) = m, W \in \mathbb{R}^{p \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^p$.

Dopustiv skup S za ovako postavljen problem je tada:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, Wx \leq c\}$$

.

Primećujemo da je broj aktivnih ograničenja u tački x koje dolaze iz uslova $Ax = b$ uvek m. Neka je $p(x)$ broj aktivnih ograničenja koje dolaze iz uslova $Wx \leq c$. Skup indeksa aktivnih ograničenja za tačku x definišemo sa:

$$I(x) = \{1, 2, ..., m, i_1, i_2, ...i_{p(x)}\}$$

Ako sa $r(x)$ obeležimo ukupan broj aktivnih ograničenja u tački x onda važi $m \leq r(x) \leq m + p$.

Na sličan način kao i ranije se može pokazati da polazeći iz tačke $x \in S$ krećemo u pravcu $d \in \mathbb{R}^n$ koji je dopustiv ako i samo ako je $Ax = 0$ i $w_J d \leq 0$ za sve $j \in J(x) = \{i_1, i_2, ..., i_{p(x)}\}$.

Sada možemo da definišemo uslove optimalnosti za problem opisan sa (9).

Teorema 7. *Neka je u problemu (9) zadovoljeno $f \in C^1$ i neka je $x^* \in S$ takvo da je $m \leq r(x^*) \leq n$ i $p(x^*) \geq 1$. Neka su $I(x^*)$ i $J(x^*)$ definisani kao ranije. Označimo sa W_J podmatricu matrice W čije su vrste one čiji su indeksi u J i sa $c_j \in \mathbb{R}^{p(x^*)}$ vektor koji je formiran od vektora c na isti način.*

Neka je matrica $B \in \mathbb{R}^{(p(x^*)+m) \times n}$ definisana sa :

$$B = \begin{pmatrix} A \\ W_J \end{pmatrix}$$

Pri čemu je broj vrsta matrice B $r(x^*)$. Ako je x^* lokalni minimizator problema (9) onda gde je $\mu_k \leq 0, 1 \leq \mu_k \leq p(x^*)$

Teorema 8. *Neka je $f \in C^2$ i x^* lokalni minimizator problema (9). Neka su $r(x^*), p(x^*)$ definisani kao ranije. Tada važi:*

- *Postoje $\lambda \in \mathbb{R}^m$ i $\mu \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ takvi da je:*

  $$\nabla f(x^*) = A^T \lambda + W_J^T \mu$$

  $\lambda_k \leq 0,\ 1 \leq k \leq p(x^*)$

- *$y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0$ za sve $y \in N(B)$*

Teorema 9. *Neka je $f \in C^2$ i $x^* \in S$ i neka x^* zadovoljava:*

- *Postoje $\lambda \in \mathbb{R}^m$ i $\mu \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ takvi da je:*

  $$\nabla f(x^*) = A^T \lambda + W_J^T \mu$$

  $\lambda_k \leq 0,\ 1 \leq k \leq p(x^*)$

- *Za sve $y \in \tilde{B}$ je*

  $$y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0$$

  gde je

  $$\tilde{B} = \begin{pmatrix} A \\ W_K \end{pmatrix}$$

  $$K = \{j \in J : \mu_j < 0\}$$

  Onda je x^* lokalni minimizator problema 9.

Sada kada smo definisali sve uslove optimalnosti, možemo da pređemo na postavljanje problema minimizacije portfolija u različitim modelima i da na kraju numeričkim metodama pronađemo optimalan portfolio.

2.2 Optimizacija portfolija korišćenjem Markowitz-ovog modela

U ovom delu ćemo se baviti optimizacijom portfolija na skupu strategija trgovanja i koristićemo Markowitz-ov pristup minimizacije varijanse portfolija [4], tražićemo portfolio koji ima minimalnu varijansu sa uslovom da očekivani prinos nije ispod unapred određene vrednosti. Ovaj problem se svodi na nelinearni problem numeričke optimizacije.

Pre svega treba da definišemo funkciju $V(x)$ koju minimiziramo, u ovom slučaju to je varijansa portfolia. Radi jednostavnosti i postepenog uvođenja pojma varijanse počinjemo sa posmatranjem portfolija koji se definiše na skupu od 2 strategije trgovanja, označimo ih sa A i B i neka je alokacija našeg bogatstva u ove dve strategije raspodeljena na način da smo u prvu i drugu strategiju uložili x_a i x_B delova našeg bogatstva, respektivno. Ako je r_A očekivani prinos prve strategije a r_B očekivani prinos druge strategije onda je analogno kao i u (1) očekivani prinos portfolija

$$r_{p,x} = r_A x_A + r_B x_B$$

ako sa σ_A^2 obeležimo varijansu prve strategije, sa σ_B^2 varijansu druge i sa $\sigma_A B$ kovarijansu strategija onda dobijamo da je varijansa prinosa portfolija

$$\sigma_{p,x}^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2 x_A x_B \sigma_{AB}$$

Kada sa skupa od 2 strategije prelazimo na skup sa n strategija, na sličan način pronalazimo varijansu prinosa, u opštem slučaju formula za izačunavanje varijanse prinosa je data sa

$$\sigma_{p,x}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \tag{10}$$

Ovo u matričnoj formi možemo da zapišemo kao

$$\sigma_{p,x}^2 = x^T \Sigma x \tag{11}$$

gde je Σ matrica kovarijanse čije su komponente definisane kao u (2).

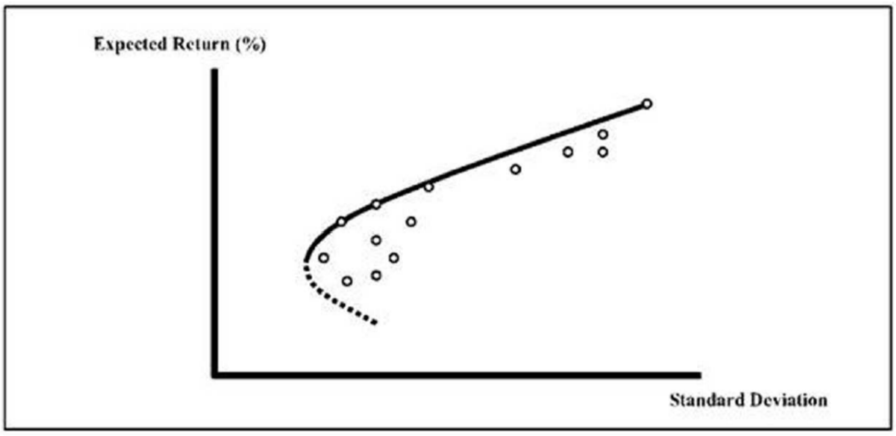
Kako je cilj optimizacije portfolia da odaberemo kombinaciju strategija koje će pri nekom očekivanom prinosu imati minimalnu varijansu, mi ćemo prilikom rešavanja problema optimizacije minimizirati vrednost funkcije iz (11) jer rizik od naglog pada prinosa leži u volatilnosti odnosno varijansi prinosa portfolija. Zbog toga prilikom rešavanja problema minimizacije za našu funkciju cilja $V(x)$ uzimamo baš funkciju iz (11). Definišemo problem nelinearne optimizacije sa ograničenjima:

$$\begin{aligned} \min \quad & V(x) = \frac{1}{2} x^T \Sigma x \\ \text{s.t.} \quad & rx \geq \bar{r} \\ & \sum_{i=1}^{n} = 1 \\ & \forall i \; x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Svi portfoliji koji zadovoljavaju uslov

$$\sum_{i=1}^{n} = 1$$

se mogu grafički predstaviti u zavisnosti od vrednosti očkivanog prinosa i standardne devijacije, i oni se nalaze unutar skupa dopustivih portfolija koji ima oblik:

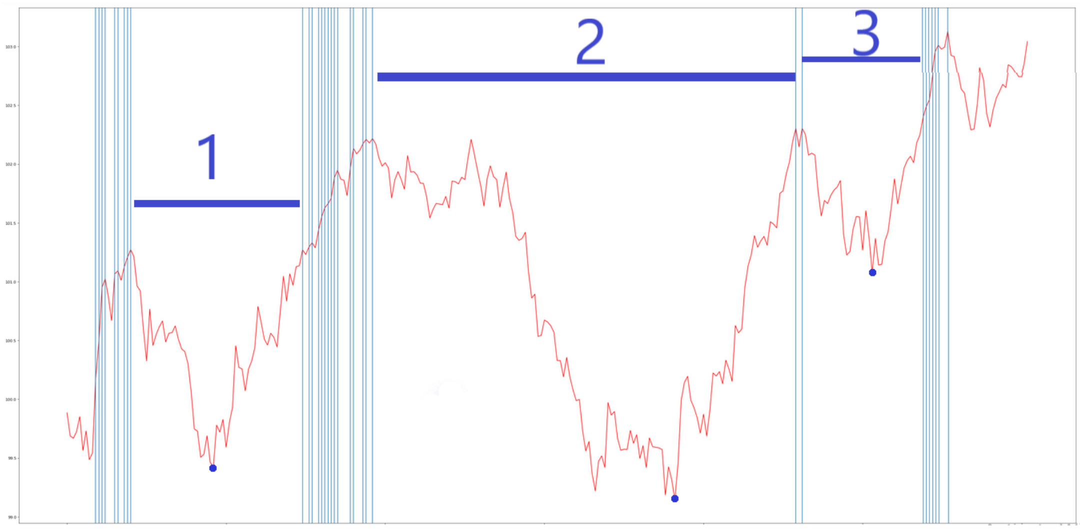


Slika 2: Dopustiv skup i efikasna granica [5]

Ovde vidimo da u skupu dopustivih portfolija postoje oni koji imaju istu standardnu devijaciju ali različit očekivani prinos, u interesu ulagača je da odabere onaj portfolio sa većim prinosom. Zbog toga se gornja granica ovog skupa naziva i efikasna granica dopustivog skupa. Dodavši uslov $rx \geq \bar{r}$ fiksiramo očekivani prinos i tražimo portfolio koji ima minimalnu varijansu i traženi prinos. Numeričkim metodama će ovaj problem biti rešen u narednoj glavi.

2.3 Optimizacija portfolija korišćenjem Drawdown modela

U prethodnom modelu smo za potrebe merenja rizika odnosno merenja povezanosti kretanja prinosa među strategijama koristili kovarijansu u standardnom smislu. U ovom delu ćemo pokušati da uvedemo drugačije matrice međusobnih odnosa strategija koje će služiti kao alternativne mere rizika izvedene iz pokazatelja **Drawdown** i **Drawup**.
Pristup korišćenja Drawdown-a i Drawup-a za poređenje odnosa strategija na način koji je definisan u ovom delu je doprinos autora teoriji optimizacije portfolija, pa je samim tim nedostatak adekvatne literature očekivan i opravdan.
Drawdown je pokazatelj koji nam govori o minimalnoj vrednosti prinosa jedne od strategija koja je dostignuta između dva pokretna maksimuma.
Radi jednostavnosti, svojstva Drawdown-a i Drawup-a će biti pokazana na realnim podacima strategija trgovanja kako bi se došlo do uopštenja pristupa optimizacije. Detaljnije, posmatrajmo grafik strategije $S4$

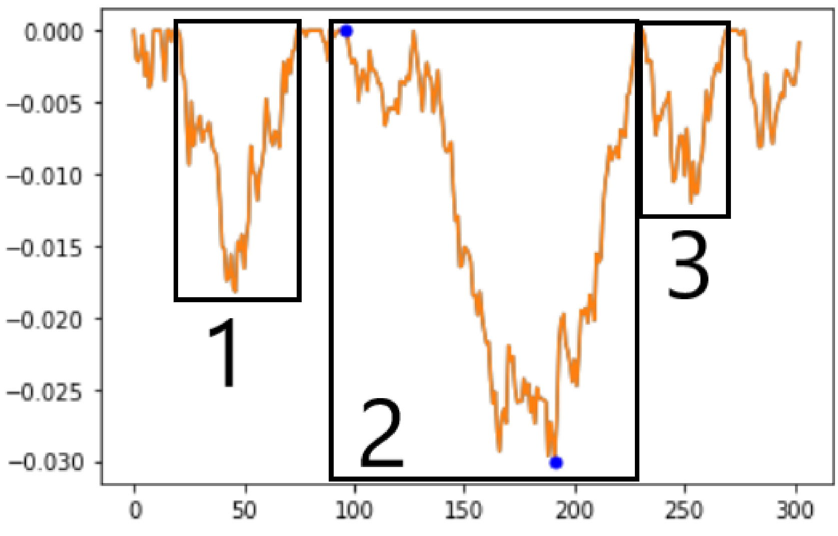


Slika 3: Prinos strategije S4 sa pokretnim maksimumom

Na slici 3 vidimo prinos strategije $S4$. Na ovoj slici je vertikalnom linijom obeležen pokretni, tj. aktuelni maksimum. Svaki put kada prinos posmatrane strategije postane veći od aktuelnog maksimuma, tada novi maksimum postaje aktuelan, i baš ono sto se dešava između dva maksimuma je ono što nas zanima. Na slici 3 možemo da uočimo 3 intervala koje karakteriše to da je interval između dva maksimuma znatno veći nego između ostalih vertikalnih linija, odnosno maksimuma. Ovo je značajno jer ovo znači da je u tim intervalima prinos opadao, a Drawdown je indikator koji govori baš koliko je u posmatranom intervalu prinos najviše opao pre nego što se vratio rastu i probio prethodni maksimum. Iz analize Drawdown-a se mogu izvući razne korisne informacije kao sto su: Koliko često strategija pravi serije u kojima ne ostvaruje pozitivne prinose, koliko dugo te serije traju i koji deo svoga novca tada ulagač gubi i kada može da očekuje da će to bogatstvo da povrati.

Sada se vraćamo na sliku 3 i posmatramo 3 označena intervala. Želimo nekako da ih uporedimo. Dakle sam početak svakog od 3 intervala je aktuelan maksimum posle kojeg prinos počinje da opada, dostiže minimalnu vrednost, a zatim raste, da bi prešao aktuelan maksimum, sa plavom tačkom je obeležena minimalna vrednost prinosa u ovim intervalima nakon čega je prinos počeo da raste, odnos aktuelnog maksimuma i minimalne vrednosti koju prinos dostiže do sledećeg maksimuma je zapravo Drawdown. Na slici imamo prikazana 3 velika Drawdowna, za svaki interval po jedan. U skupu svih Drawdown vrednosti, ona koja ima najveću se naziva Maksimalni Drawdown. Posebno je interesantan Maksimalni Drawdown jer nam on govori koliko najviše možemo da očekujemo da ćemo prinosa izgubiti u nizu negativnih prinosa strategije.

Kretanje Drawdown-a je lakše vidiljivo na sledećem grafiku.



Slika 4: Vrednost Drawdown-a za strategiju $S4$

Na ovom grafiku vidimo kretanje vrednosti Drawdown pokazatelja, intervali obeleženi na slici 4 odgovaraju onima sa slike 3, odnosno kada gledamo interval broj

1 na slici 4, možemo da vidimo koliko je najviše opao prinos strategije između dva posmatrana maksimuma, u ovom slučaju je prinos najviše padao do vrednosti koja je za 1.8% manja od aktuelnog maksimuma.

Od sva tri posmatrana intervala očigledno je da je najveću vrednost Drawdown dostigao u intervalu 2, čak 3%, dakle vrednost Maksimalnog Drawdown-a za strategiju $S4$ je 3%.

Sada ćemo i formalno definisati Drawdown i Maksimalni Drawdown [2], [6].

Definicija

Definicija 15. *(Drawdown proces) Za posmatrani period $T \in (0, \infty)$, Drawdown proces $D^{(X)} := \{D_t^{(X)}\}_{t \in [0,T]}$ koji odgovara stohastičkom procesu $X \in \mathbb{R}^\infty$ je definisan sa*

$$D_t^{(X)} = M_t^{(X)} - X_t$$

gde je

$$M^{(X)} = \sup_{u \in [0,t]} X_u$$

pokretni maksimum procesa X do momenta t.

Definicija 16. *(Maksimalni Drawdown [2]) Za fiksiran vremenski trenutak $T \in (0, \infty$, Maksimalni Drawdown stohastičkog procesa $X \in \mathbb{R}^\infty$ je najveći pad od vrha do dna procesa X na intervalu $[0, T]$, a time i najveći među svim Drawdown vrednostima $D_t^{(X)}$:*

$$\mu(X) = \sup_{t \in [0,T]} \{D_t^{(X)}\}$$

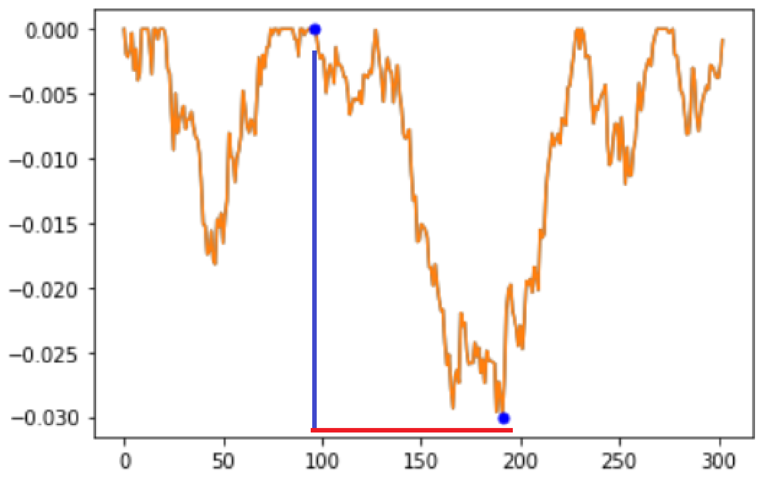
Ekvivalentno, Maksimalni Drawdown se može definisati kao slučajna promenljiva dobijena sledećom transformacijom posmatranog stohastičkog procesa X:

$$\mu(X) = \sup_{t \in [0,T]} \sup_{s \in [t,T]} \{X_s - X_t\}$$

Nama će posebno biti zanimljiv Maksimalni Drawdown jer ćemo njega koristiti kako bismo konstruisali meru rizika izvedenu iz Drawdown-a.

Dakle, svaka strategija ima svoj Maksimalni Drawdown, posmatrajmo sliku 3 i interval broj 2 gde je dostignut Maksimalni Drawdown.

Kako se Maksimalni Drawdown definiše na intervalu od vrha do dna u posmatranom periodu možemo da izdvojimo taj interval. Ovaj interval je lakše uočiv na sledećoj slici.



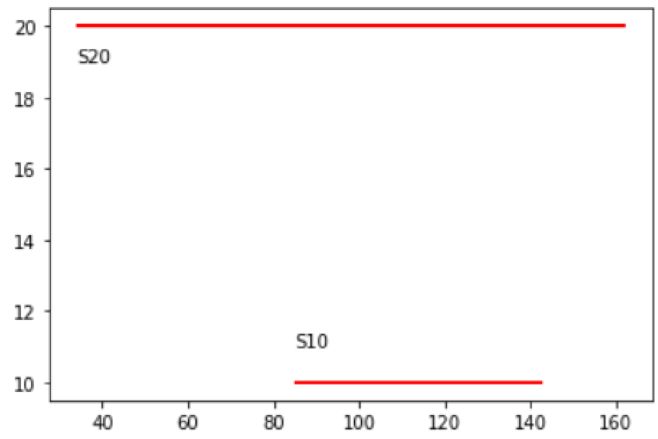
Slika 5: Interval na kom je dostignut Maksimalni Drawdown

Za strategiju $S4$ ovaj interval je obeležen crvenom bojom na slici 5. Početak intervala je 21.11.2012 a kraj je 03.4.2013. Dakle strategija $S4$ je svoj najveći uzastopan pad imala u tom intervalu koji je trajao 96 dana i za to vreme je njen prinos najviše pao za 3%.

Ovaj interval možemo pronaći za svaku strategiju i zatim želimo tako dobijene intervale na neki način da upoređujemo.

Posmatrajmo sledeća dva primera:

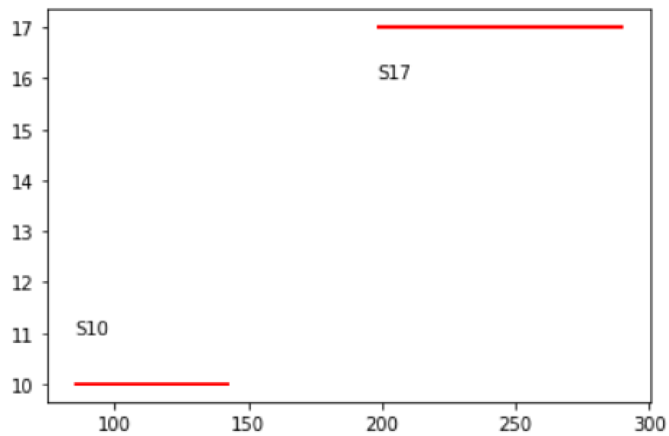
Prvi primer: Posmatrajmo strategije $S10$ i $S20$ i njihove intervale na kojima je dostignut Maksimalni Drawdown. Na sledećoj slici možemo da vidimo poređenje tih intervala.



Slika 6: Poređenje intervala maks. Drawdown za S10 i S20

Posmatramo sliku 6 sa intervalima maksimalnog drawdown-a za ove dve strategije. Na x-osi se nalaze vremenski trenuci (izraženi u danima), odavde vidimo da je interval gde je strategija $S10$ dostigla svoj Maksimalni Drawdown zapravo podinterval intervala kada je strategija $S20$ dostigla svoj Maksimalni Drawdown. U ovom slučaju presek ova dva intervala nije prazan skup, to može da znači da su naše posmatrane strategije trgovanja možda pravile slične odluke u posmatranim intervalima koje su dovele do negativnog prinosa.

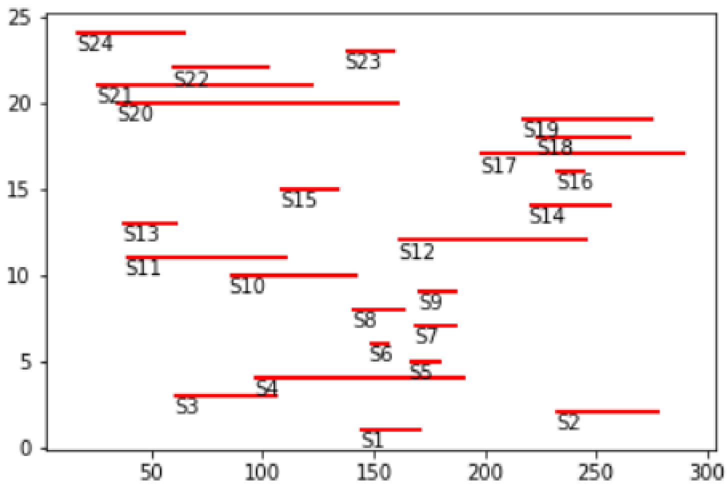
Drugi primer: Posmatrajmo sada strategije $S10$ i $S17$ i njihove intervale gde je dostignut Maksimalni Drawdown.



Slika 7: Poređenje intervala Maks. Drawdown-a za S10 i S17

Ovaj slučaj je grafički prikazan na slici 7. Vidimo da se intervali ne poklapaju, odnosno da ne postoji zajednički podinterval gde je drawdown bio maksimalan. Ovo može da sugeriše da su strategije na nekom nivou različite i da je možda strategija $S17$ reagovala znatno drugačije od $S10$ u intervalu koji je doveo do maksimalnog drawdowna strategije $S10$ i obrnuto.

Na sličan način kao što smo posmatrali intervale u prethodna dva primera, sada možemo da prikažemo poređenje intervala Maksimalnog Drawdown-a svih strategija sledećim grafikom.



Slika 8: Poređenje intervala maks. Drawdown za sve strategije

Na ovom grafiku uočavamo da iako se za različite strategije dužine intervala razlikuju, možemo da primetimo da se pojavljuju grupe strategija koje imaju veća preklapanja i grupe koje nemaju nikakva preklapanja.

Odavde vidimo da preklapanje intervala Maksimalnog Drawdowna možemo da iskoristimo kao alternativnu kovarijansu, i da pomoću nje definišemo matricu međusobnih odnosa strategija koju ćemo da koristimo u optimizaciji portfolija. Koristiti presek intervala maksimalnog drawdowna kao model za kovarijansu se nameće, jer nam ti intervali govore o tome kako su određene strategije donosile odluke pod određenim tržišnim uslovima. Možemo da zaključimo da ako su strategije imale isti interval Maksimalnog Drawdown-a, ponašaju se sličnije nego strategije čiji se intervali Maksimalnog Drawdown-a dijametralno razlikuju.

Kako bismo optimizovali portfolio moramo da definišemo vrednosti matrice odnosa strategija. U nastavku rada ćemo matricu koja sadrži vrednosti dobijene na ovaj način obeležavati sa Σ'. Ideja je da mera podudaranja intervala Maksimalnog Drawdowna za strategije S_i i S_j za $i \neq j$ bude definisana sa

$$\Sigma'_{ij} = \frac{\text{Broj dana u preseku intervala}}{\text{Zbir dužina intervala (u danima)}}$$

Za slučaj kada je $i = j$ uzimamo da je Σ_{ij}' $= 1$ Formalno, neka je $[t^i, T^i]$ interval koji odgovara maksimalnom drawdown intervalu za strategiju i, odnosno $[t^j, T^j]$ interval koji odgovara maksimalnom drawdown intervalu za strategiju j onda je

$$\Sigma'_{ij} = \begin{cases} \frac{\max\{0, \min\{T^i, T^j\} - \max\{t^i, t^j\}\}}{T^i - t^i + T^j - t^j} & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{13}$$

Naravno ovo implicira da ukoliko dve strategije nemaju preklapanje intervala tada je vrednost komponente u matrici 0.

Sada kada imamo definisano sve što nam je potrebno možemo da pristupimo numeričkoj optimizaciji portfolija gde ćemo umesto matrice kovarijanse koristiti matricu Σ'. Odnosno želimo da napravimo takav portfolio strategija da poklapanje intervala maksimalnog drawdowna bude minimalno.

Slično kao i u prethodnom delu problem je sada dat sa:

$$\begin{aligned} \min \quad & V(x) = \frac{1}{2} x^T \Sigma' x \\ \text{s.t.} \quad & rx \geq \bar{r} \\ & \sum_{i=1}^{n} = 1 \\ & \forall i \ x_i \geq 0. \end{aligned} \tag{14}$$

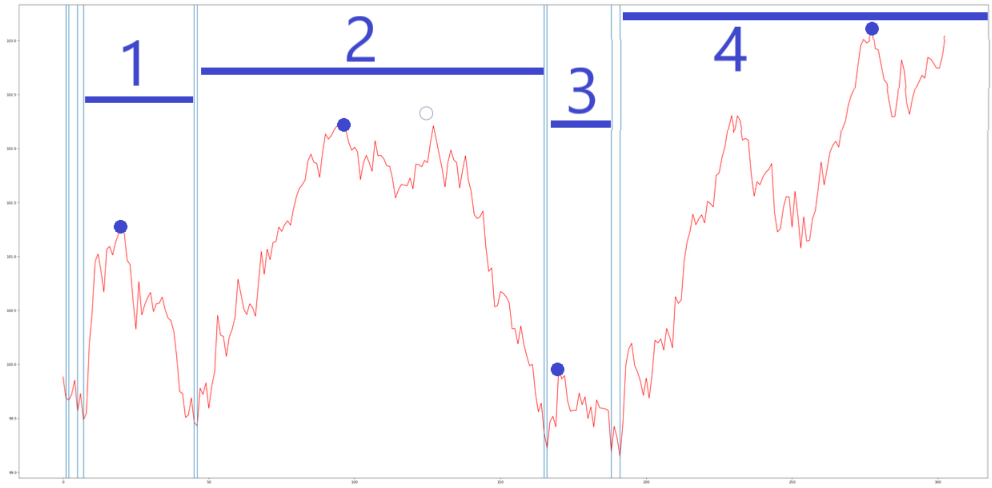
Rešenje problema definisanog sa (14) je portfolio koji minimizira preklapanje intervala Maksimalnog Drawdown-a, je numerički rešen u narednoj glavi i kvalitet portfolija je poređen sa ostalim optimalnim portfolijima iz ostalih modela.

2.4 Optimizacija portfolija korišćenjem Drawup modela

U ovom delu ćemo detaljnije objasniti Drawup, Maksimalni Drawup i na sličan način definisati matricu koju ćemo koristiti kao zamenu za matricu kovarijanse prilikom numeričke optimizacije portfolija.

Drawup možemo da gledamo kao suprotno od Drawdown-a, odnosno Drawup je pokazatelj koji nam govori o maksimalnoj vrednosti prinosa koju je strategija ostvarila između dva pokretna minimuma.

Posmatrajmo opet grafik strategije $S4$



Slika 9: Prinos strategije S4 sa pokretnim maksimumom

Na slici 9 vidimo prinos strategije $S4$. U prethodnom delu su plavim linijama bili obeleženi pokretni maksimumi, a sada su na isti način obeleženi pokretni minimumi. Analogno analizi Drawdowna, vidimo da svaki put kada prinos postane manji od aktuelnog minimuma tada dostignuti mininum postaje aktuelan. Posmatramo kretanje prinosa između pomenuta dva minimuma, odnosno gledamo koliko je prinos najviše rastao između dva uzastopna minimuma. Jednostavno rečeno, Drawup nam govori koliko je naša posmatrana strategija efikasno vratila prinos ka pozitivnom rastu nakon serije negativnih prinosa. Iz analize Drawup-a možemo da uočimo četiri dela grafika koji su obeleženi brojevima od 1 do 4, posmatrajmo deo slike koji je obeležen brojem 3. Na ovom delu grafika vidimo da je prinos dostigao aktuelne minimume na početku i na kraju posmatranog perioda, a u tom intervalu je dostigao maksimum koji je na grafiku obeležen plavom tačkom. Drawup je odnos minimuma na početku intervala i maksimuma dostignutog do sledećeg minimuma.

U skupu svih Drawup vrednosti Maksimalni Drawup je onaj koji je najveći, odnosno

Maksimalni Drawup je ona vrednost koja predstavlja najveći rast iz minimuma na posmatranom vremenskom intervalu, u slučaju strategije $S4$ Maksimalni Drawup je uzeo vrednost u intervalu broj 4.

Sada ćemo formalno definisati Drawup i Maksimalni Drawup [6]

Definicija

Definicija 17. *(Drawup proces) Za posmatrani period $T \in (0, \infty)$, Drawup proces $U^{(X)} := \{U_t^{(X)}\}_{t \in [0,T]}$ koji odgovara stohastičkom procesu $X \in \mathbb{R}^\infty$ je definisan sa*

$$U_t^{(X)} = X_t - m_t^{(X)}$$

gde je

$$m^{(X)} = \min_{u \in [0,t]} X_u$$

pokretni minimum procesa X do momenta t.

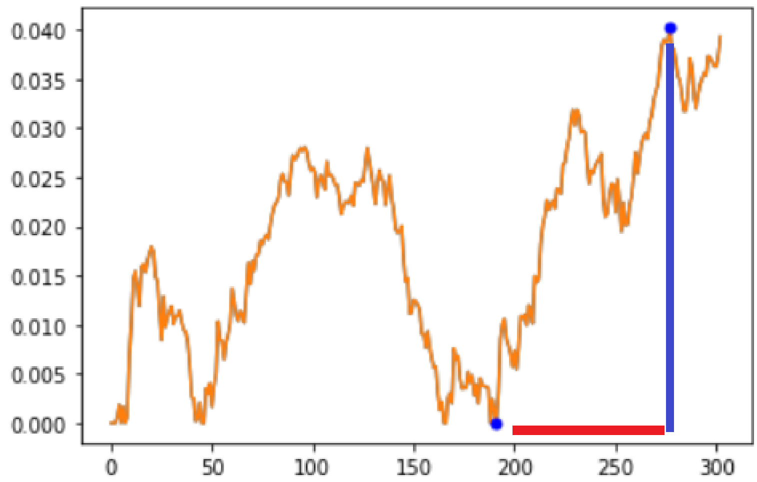
Definicija 18. *(Maksimalni Drawdown) Za fiksiran vremenski trenutak $T \in (0, \infty)$ Maksimalni Drawup stohastičkog procesa $X \in R^\infty$ je najveći rast od dna do vrha procesa X na intervalu $[0, T]$, a time i najveći među svim Drawup vrednostima $U_t^{(X)}$:*

$$\mu'(X) = \sup_{t \in [0,T]} \{U_t^{(X)}\}$$

Ekvivalentno, Maksimalni Drawup se može definisati kao slučajna promenljiva dobijena sledećom transformacijom posmatranog stohastičkog procesa X:

$$\mu'(X) = \sup_{t \in [0,T]} \inf_{s \in [t,T]} \{X_s - X_t\}$$

Same vrednosti Drawupa za strategiju $S4$ se mogu lakše videti na sledećem grafiku.

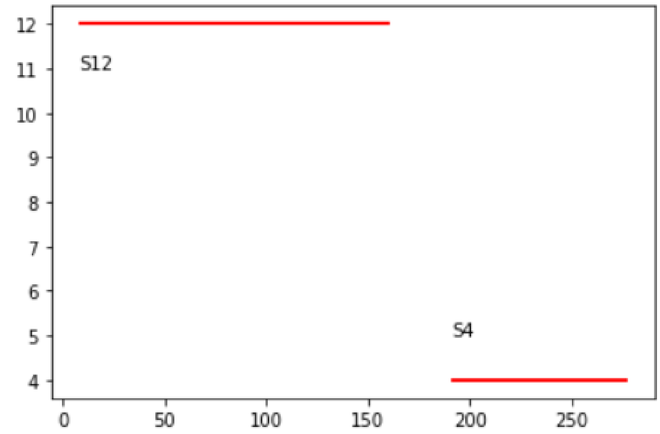


Slika 10: Prinos strategije S4 sa vrednostima Drawup

Kako se Maksimalni Drawup definiše na intervalu od dna do vrha u posmatranom periodu možemo da izdvojimo taj interval. Ovaj interval je lakše uočiv na slici 10. Za strategiju $S4$ ovaj interval je obeležen crvenom bojom na slici 10. Početak intervala je 04.04.2013 a kraj je 01.08.2013 . Dakle strategija $S4$ je svoj najveći uzastopan rast imala u tom intervalu koji je trajao 87 dana i za to vreme je prinos strategije od dna do vrha porastao za oko 4%. Odavde možemo da primetimo dve zanimljive stvari. Prva je ta da grafik sa slike 10 ne izgleda mnogo drugačije od samog grafika prinosa za strategiju $S4$ iako predstavlja vrednost drawup-a na celom intervalu koji je obuhvaćen dostupnim podacima. Ovo je zato što se dugoročno posmatrano, prinosi strategija (i često cene ostalih aktiva na tržištima) kreću ka gore, pa je mala verovatnoća da će se u budućnosti probijati minimalni prinosi (ili cene). Druga zanimljiva stvar je ta, što je za strategiju $S4$ kraj intervala koji predstavlja Maksimalni Drawdown zapravo početak intervala gde je ostvaren Maksimalni Drawup, odnosno prinos strategije je opadao 96 dana kako bi došao do minimuma posmatranog perioda, a zatim naglo rastao u narednih 87 dana toliko da probije prethodni maksimum pre početka serije negativnih prinosa.

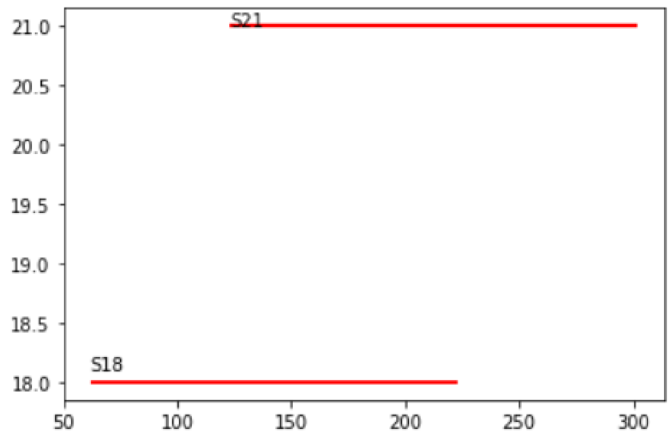
Kao i kod Drawdowna mi ćemo posmatrati Maksimalni Drawup, odnosno interval na kom je dostignut i na osnovu njega ćemo praviti matricu međusobnih odnosa strategija koju ćemo koristiti u traženju optimalnog portfolija.

Kao i kod drawdowna posmatrajmo dva primera poređenja intervala gde je uočen Maksimalni Drawup.



Slika 11: Poređenje intervala za strategije S4 i S12

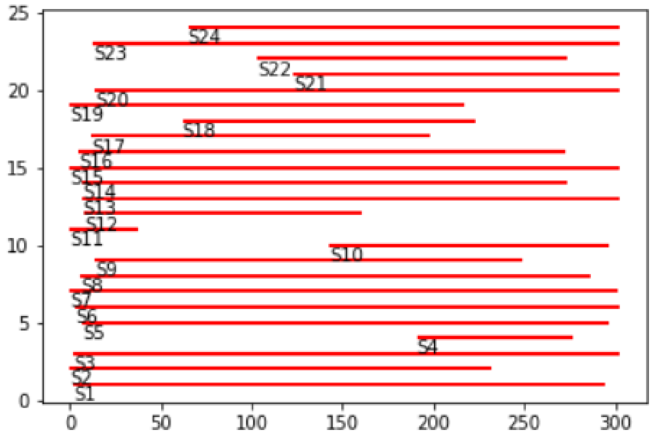
U prvom primeru na slici 11 vidimo intervale Maksimalnog Drawup-a za strategije $S4$ i $S12$, možemo da uočimo da se intervali u ovom slučaju ne poklapaju. Ako sa Θ obeležimo matricu koja će predstavljati odnose među strategijama izmerene preko Maksimalnog Drawup-a, koristeći analogiju iz dela o Drawdown-u, vrednost matrice Θ za ove dve strategije je 0. U sledećem primeru možemo da vidimo drugi slučaj, kada se intervali Maksimalnog Drawup-a dve posmatrane strategije preklapaju na nekom vremenskom podintervalu.



Slika 12: Poređenje intervala za strategije S18 i S21

Na slici 12 vidimo intervale Maksimalnog Drawupa za strategije S18 i S21 i primećujemo da se one preklapaju na nekom vremenskom intervalu. U nastavku ćemo slično kao i ranije definisati meru ovog preklapanja, odnosno kako definišemo matricu Θ.

Na isti ovaj način možemo da prikažemo intervale Maksimalnog Drawup perioda za sve strategije.



Slika 13: Pregled intervala Maksimalnog Drawup-a za sve strategije

Sada vidimo su preklapanja intervala mnogo veća i češća nego kod maksimalnog drawdowna. Razlog tome je taj, što je dugoročna tendencija prinosa strategija da rastu i retko se dešava da se aktuelni minimalni prinos probije, odnosno drastična opadanja prinosa strategija su retko dovoljna da pomere aktuelno dno ka dole.

Analogno delu kao kod Drawdowna, na isti način definišemo vrednosti matrice Θ koje dobijamo iz dužina preseka intervala za svake dve posmatrane strategije. U nastavku rada ćemo matricu koja sadrži vrednosti dobijene na ovaj način obeležavati sa Θ.

Iako je veći Maksimalni Drawup pojedine strategije dobra stvar za ulagača, jer to znači da postoji duži vremenski interval u kojem strategija donosi profit, minimiziranje Maksimalnog Drawup-a portfolija je od koristi investitoru, jer se na taj način može zaštiti od rizika da većina pojedinačnih strategija u portfoliju ima negativne prinose u istom vremenskom intervalu, što bi naravno dovelo do većih gubitaka. Dakle, mera preseka istog intervala maksimalnog drawupa za strategije S_i i S_j za $i \neq j$ je definisana sa

$$\Theta_{ij} = \frac{\text{Broj dana u preseku intervala}}{\text{Zbir dužina intervala (u danima)}}$$

Za slučaj kada je $i = j$ uzimamo da je $\Theta_{ij} = 1$ Formalno, neka je $[t^i, T^i]$ interval koji odgovara maksimalnom drawdown intervalu za strategiju i, odnosno $[t^j, T^j]$ interval koji odgovara maksimalnom drawdown intervalu za strategiju j onda je

$$\Theta_{ij} = \begin{cases} \frac{\max\{0, \min\{T^i, T^j\} - \max\{t^i, t^j\}\}}{T^i - t^i + T^j - t^j} & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{15}$$

Sada kada imamo definisnu matricu Θ možemo da definišemo problem nelinearne optimizacije čije je rešenje portfolio koji minimizira međusobno preklapanje intervala maksimalnog Drawup-a.

Sada ćemo postaviti problem nelinearne optimizacije:

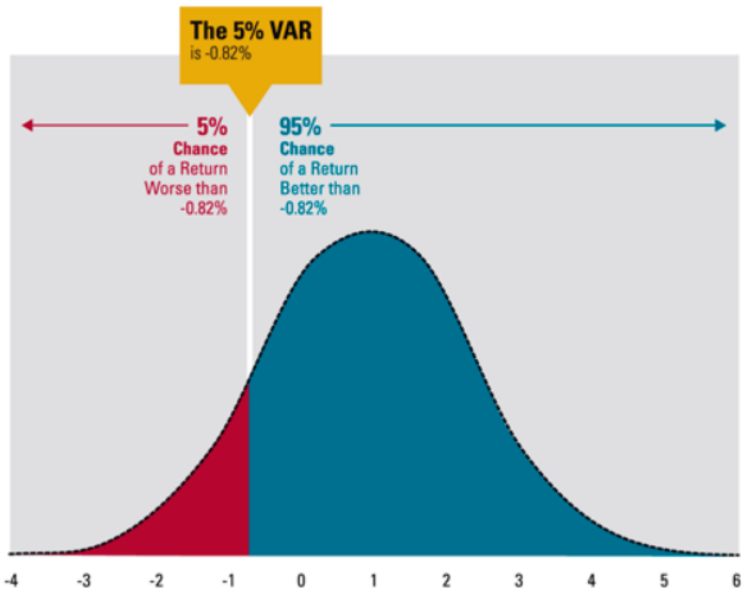
$$\begin{aligned} \min \quad & V(x) = \frac{1}{2} x^T \Theta x \\ \text{s.t.} \quad & rx \geq \bar{r} \\ & \sum_{i=1}^{n} = 1 \\ & \forall i \ x_i \geq 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Rešenje problema definisanog sa (16) je portfolio koji minimizira preklapanje intervala Maksimalnog Drawup-a je numerički rešen u narednoj glavi i kvalitet portfolija je poređen sa drugim optimalnim portfolijima iz ostalih modela.

2.5 Optimizacija portfolija minimizacijom Value-at-Risk

U ovom delu ćemo definisati Value at Risk (VaR) i postaviti problem čije je rešenje optimalan portfolio koji minimizira VaR na našem strategija trgovanja. VaR je jedan od najpopularnijih načina merenja potencijalnog gubitka i količine izloženosti portfolija tržišnom riziku, VaR je mera jačine potencijalno nepovoljnog ishoda u nekom vremenskom periodu (dan, nedelja, mesec...), odnosno, VaR je vrednost, koja govori koliko nominalno može da padne vrednost portfolija sa nekom verovatnoćom u posmatranom periodu.

Posmatrajmo sledeću sliku



Slika 14: Primer VaR-a [7]

Neka je na slici predstavljena funkcija gustine dnevnih prinosa neke aktive, sa leve strane broja 0 su nam dakle gubici, a sa desne pozitivni prinosi. Bela linija je kvantil koji razdvaja naše prinose na levu stranu (najgorih 5% negativnih prinosa) i desnu stranu, svi ostali. Vrednost prinosa posmatrane aktive gde se nalazi kvantil 5% je vrednost našeg 5% VaR-a. U ovom slučaju to je -0.82%. Ovo tumačimo na sledeći način: Verovatnoća je 5% da će dnevni prinos posmatrane aktive biti manji od -0.82 %. Suprotno tome, možemo da kažemo, da smo 95% sigurni da će prinos u toku dana da bude veći od -0.82%. U zavisnosti od potrebnih informacija možemo da menjamo posmatrani interval poverenja i na 90% ili 99%. Naravno, smanjenje kvantila (verovatnoće ekstremno nepovoljnog prinosa) povlači VaR vrednost u levo.

VaR se može i izraziti i u nominalnoj vrednosti aktive. Tako bi na primer značilo da, ako je za neki portfolio 1% dnevni VaR 1M USD, da sa verovatnoćom od 1% portfolio može da izgubi vrednost bar za 1M USD u toku jednog dana, odnosno očekujemo da će na 100 dana biti jedan gde će cena portfolija da padne bar za milion dolara.

Kao što je kratko opisano u prvoj glavi, formalna definicija VaR pokazatelja je

$$P\{G \geq VaR\} \leq 1 - \alpha$$

gde G označava gubitak a α verovatnoću da do najmanje takvog gubitka dođe, odnosno α je nivo poverenja.

Naravno, kako strategije trgovanja i njihove prinose posmatramo na isti način kao i akcije i ostale aktive, mi želimo da optimizujemo portfolio strategija trgovanja na način da VaR bude minimalan, odnosno želimo da smanjimo potencijalno ekstremno loše prihode.

Iako je VaR veoma praktičan u smislu informacija koje doprinosi, njegova matematička svojstva nisu idealna i stvaraju probleme prilikom optimizacije portfolija. Za meru rizika kažemo da je koherentna ako je: **Monotona**, **Pozitivno homogena**, **Sub-aditivna** i **Invarijantna na translaciju** [8].

Definicija 19. *(Koherentna mera rizika)*

Neka je X slučajna promenljiva sa skupom vrednosti G. Mera rizika ρ je preslikavanje

$$\rho : G \rightarrow \mathbb{R}$$

Dakle neka je X slučajan ishod, $X \in G$, onda je $\rho(X)$ je rizik slučajne promenljive. Kažemo da je mera rizika koherentna ako ima sledeća svojstva:

- ***Monotonost*** *$\forall X_1, X_2 \in G$ takva da $X_1 \leq X_2$, onda je $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$*
- ***Pozitivno homognena*** *Za $\alpha \geq 0$ i $X \in G$ važi $\rho(\alpha * X) \leq \alpha * \rho(X)$*
- ***Sub-aditivnost*** *Za $X_1, X_2 \in G$ važi $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$*
- ***Invarijantnost na translaciju*** *Za $X \in G$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ važi $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$*

Međutim, ispostavlja se da za VaR ne važi sub aditivnost, odnosno za dve strategije A i B važi:

$$VaR_\alpha(A+B) \nleq VaR_\alpha(A) + VaR_\alpha(B) \tag{17}$$

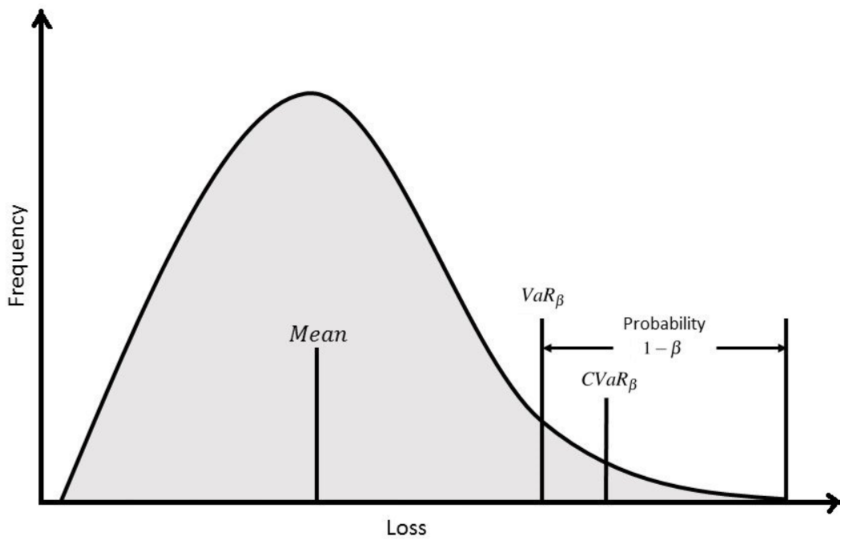
Takođe, problem kod osobina VaR-a je taj, što iako konveksan, ima više lokalnih minimuma [9] što nam otežava računanje globalnog minimuma prilikom traženja optimalnog portfolija.

Da bismo izbegli probleme prilikom optimizacije koji se nameću zbog nepovoljnih osobina VaR-a, definišemo meru rizika uvedenu u [10] koja se naziva Uslovni Value at Risk (Conditional VaR, Expected Shortfall, Tail VaR). Ova mera govori koliko možemo da očekujemo da ćemo imati gubitak ako se dostigne vrednost koja je veća od VaR vrednosti, odnosno CVaR definišemo kao

$$\forall \alpha \in (0,1) \quad CVaR_\alpha(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} z dF_X^\alpha$$

$$\mathrm{F}_X^\alpha(z) = \begin{cases} 0 & z < VaR_\alpha(X) \\ \frac{F_X(z)-\alpha}{1-\alpha} & z \geq VaR_\alpha(X) \end{cases} \tag{18}$$

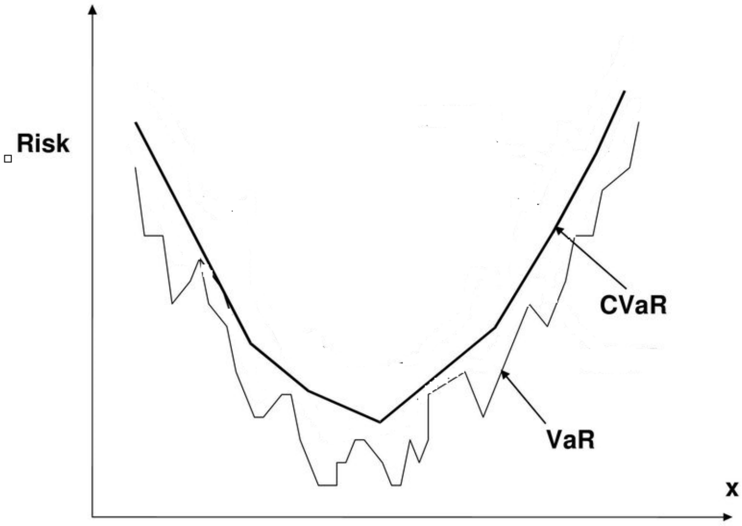
CVaR je očekivana vrednost gubitka većeg od VaR-a, zbog ovoga se naziva i Tail VaR jer uzima negativne prinose manje od VaR-a i računa njihovu očekivanu vrednost, pokazano je u [9] da je optimizacija vrednosti CVaR-a portfolija ujedno i minimizira VaR portfolija. Detaljnije se vidi na sledećoj slici 15.



Slika 15: Primer CVaR-a [11]

CVaR ima lepše osobine i zato je lakše minimizirati CVaR nego VaR, takođe kako je po definiciji, CVaR vrednost koja je uvek veća od VaR-a znamo da ako minimizujemo CVaR takođe će se minimizirati i VaR [9].

Odnos i izgled CVaR-a i VaR-a se mogu videti na sledećoj slici.



Slika 16: Odnos CVaR-a i VaR-a [10]

Nama je cilj da odredimo kombinaciju strategija trgovanja takvih da portfolio odabranih strategija minimizuje CVaR.

Minimizacija CVaR-a opisanog na način gore spada u problem stohastičke optimizacije, odnosno problem stohastičkog programiranja zbog postojanja očekivanja u definiciji CVaR-a.

3 Poređenje numeričkih rezultata optimalnih portfolija

U ovom delu ćemo na realnim podacima numerički rešiti probleme optimizacije portfolija, a zatim analizirati kako se vektori optimalnih portfolija strategija trgovanja dobijenih iz različitih modela ponašaju na testnim podacima. U našem skupu dostupnih strategija posmatramo 24 strategije trgovanja koje su delovale na tržištu i njihove dnevne prinose, posmatrani vremenski period je od 13.7.2012 do 17.10.2013, ukupno 330 dnevnih prinosa za svaku strategiju. Ove podatke ćemo podeliti na trening uzorak i testni deo uzorka. Sve optimizacije će biti numerički rađene na trening uzorku koji broji 90% ukupnih podataka dok će kvalitet optimalnih portfolia biti analiziran na ostalih 10% podataka.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
count	330	330	330	330	330	330	330	330	330	330	330	330
mean_d	0.00016	0.00021	0.00014	6.3E-05	0.0003	0.0003	0.00025	9.3E-05	6.9E-05	0.00018	4.9E-05	0.00011
std	0.002	0.00162	0.00093	0.0017	0.00259	0.00174	0.00276	0.00191	0.00189	0.00206	0.00213	0.0015
min	-0.0059	-0.0052	-0.0026	-0.0046	-0.0084	-0.0047	-0.0098	-0.0054	-0.006	-0.007	-0.0078	-0.0047
25%	-0.0011	-0.0007	-0.0005	-0.0011	-0.0012	-0.0009	-0.0013	-0.001	-0.0012	-0.001	-0.0013	-0.0009
50%	7.7E-05	0.0002	8.1E-05	-1E-05	5.8E-05	0.00028	0.0002	2E-06	-3E-05	4.8E-05	-3E-05	0.0001
75%	0.00143	0.00114	0.00063	0.00111	0.00189	0.00145	0.00168	0.00112	0.0012	0.00157	0.00136	0.00098
max	0.00963	0.00606	0.00373	0.00635	0.01013	0.00583	0.01089	0.00933	0.00602	0.00525	0.00644	0.00529
mean_y	0.03989	0.05235	0.03496	0.0159	0.07571	0.0744	0.06232	0.02354	0.01728	0.04468	0.01247	0.02886

	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24
count	330	330	330	330	330	330	330	330	330	330	330	330
mean_d	0.00032	0.00015	0.00026	0.00015	0.00012	0.00023	0.00031	0.0003	0.00031	8.7E-05	0.00033	0.00023
std	0.00347	0.00167	0.00201	0.00201	0.00246	0.00294	0.00287	0.00287	0.00337	0.00198	0.00344	0.00305
min	-0.0105	-0.0076	-0.0063	-0.0084	-0.0066	-0.0114	-0.0073	-0.0099	-0.012	-0.0054	-0.0155	-0.0116
25%	-0.0018	-0.0008	-0.0006	-0.001	-0.0012	-0.0016	-0.0016	-0.0013	-0.0016	-0.001	-0.0017	-0.0016
50%	-3E-05	0.00017	9.1E-05	4.4E-05	0.00015	8.6E-05	0.00017	0.0003	9.6E-05	-0.0001	0.00033	-1E-06
75%	0.00237	0.00113	0.00105	0.00132	0.00162	0.00199	0.00187	0.00189	0.00195	0.00109	0.00221	0.00204
max	0.01497	0.00503	0.01468	0.00789	0.00728	0.01016	0.01131	0.01182	0.0153	0.00898	0.0171	0.01508
mean_y	0.08083	0.03875	0.06578	0.0369	0.03029	0.05735	0.077	0.07587	0.07701	0.02186	0.08366	0.05822

Slika 17: Osnovne deskriptivne karakteristike podataka

3.1 Numeričko rešavanje problema optimizacije portfolija korišcenjem Markowitz-ovog modela

Za primenu ovakvog modela optimizacije na našem skupu podataka korišćen je programski jezik Python i ugrađena funkcija *minimize* koja je sadržana u paketu *Scipy*, u ovoj funkciji, metod koji računa minimum se koristi metodom najmanjih kvadrata. Za donju granicu prinosa koji želimo biramo vrednost $\bar{r} = 0.06$

Listing 3.1: Primer koda

```
#Vraca minimalnu varijansu za trazeni prinos
import numpy as np
from scipy.optimize import minimize
cov  = temp.cov().values*252
r = temp.mean()*252
def objective(x):
    cov = temp.cov().values*252
    return np.sqrt(np.dot(x.T,np.dot(cov,x)))
def constraint1(x):

    r = temp.mean()*252
    return np.dot(x.T,r) - 0.06
def constraint2(x):
    ret = np.dot(x.T, np.ones(24)) - 1
    return  ret
x0 = np.zeros(24)
for i in range(24):
    x0[i] = 1/24

b = [0.0, 1.1 ]
bnds = [b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b]

con1 = {'type': 'ineq', 'fun': constraint1}
con2 = {'type': 'eq', 'fun': constraint2}
cons = [con1, con2]

sol = minimize(objective,x0,method  = 'SLSQP', bounds = bnds, constraints = c

w  = sol.x

w=w*100
```

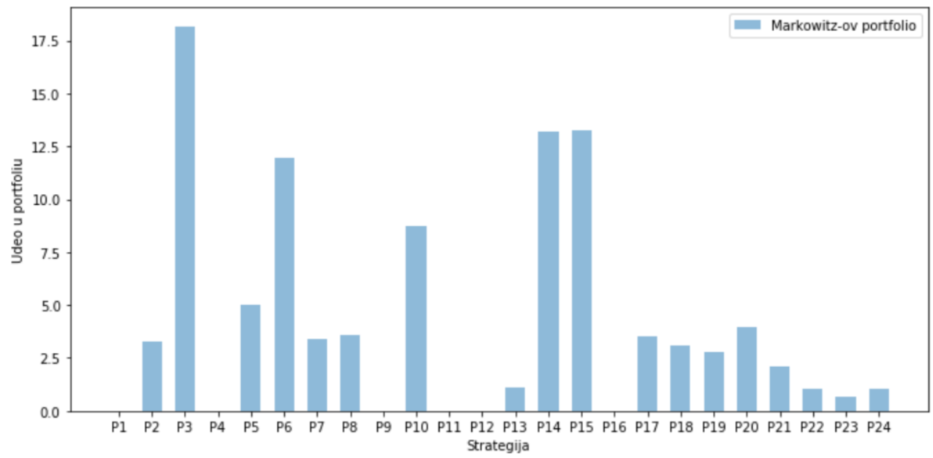
```
print("Udeo strategije: ")
for i in range(24):

print(temp.columns.tolist()[i],"   ",'%.2f' % w[i], "%")
```

Rezultat optimizacije je vektor $x \in \mathbb{R}^{24}$ čije su komponente procenti odnosno udeli svake strategije u portfoliju:

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
0%	3.28%	18.16%	0%	5.04%	11.95%	3.39%	3.6%	0%	8.73%	0%	0%

S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	S23	S24
1.13%	13.21%	13.29%	0%	3.54%	3.12%	2.76%	3.96%	2.08%	1.07%	0.67%	1.03%

Grafički predstavljeno odnos udela pojedinačnih strategija u Markowitz-ovom optimalnom portfoliju je:



Slika 18: Grafički prikaz sastava optimalnog portfolija dobijenog na gore definisan način

Standardna devijacija prinosa portfolia koji je dobijen na ovaj način iznosi **0.01022** odnosno možemo da očekujemo da će na godišnjem nivou prinos da varira za **1.022%** od očekivane vrednosti od 6%.

3.2 Numeričko rešavanje problema optimizacije portfolija korišcenjem Drawdown modela

Za računanje pojedinačnih vrednosti matrice Σ' koja će nam služiti za predstavljanje odnosa među strategijama, definisane su dve funkcije u jeziku Python od kojih prva računa interval maksimalnog Drawdowna za odabranu strategiju.

Listing 3.2: Primer koda 2

```
    #Funkcija koja za odabranu strategiju racuna interval i vrednost
    najveceg drawdown-a
def max_drawdown_int(s1):
    cum_rets = data2.iloc[:,s1]
    # Racuna se pokretni maksimum
    running_max = np.maximum.accumulate(cum_rets)


    running_max[running_max < 1] = 1

    # Racuna se procenat Drawdown-a
    drawdown = (cum_rets)/running_max - 1





     # Kraj intervala
    i = np.argmax(np.maximum.accumulate(cum_rets) - cum_rets)
    # Pocetak intervala
    j = np.argmax(cum_rets[:i])
    #Vrednost maksimalnog Drawdown-a
    k = drawdown[i]
    return [i,j,k]
```

Zatim je definisana funkcija koja na način opisan u drugom delu računa preklapanje intervala dve odabrane strategije izraženo u danima

Listing 3.3: Primer koda 3

```
def getOverlap(s1, s2):
    a = max(0,
    min(max_drawdown_int(s1)[0], max_drawdown_int(s2)[0])
    - max(max_drawdown_int(s1)[1], max_drawdown_int(s2)[1]))
    c = max_drawdown_int(s1)[0]-max_drawdown_int(s1)[1] +
```

```
    max_drawdown_int(s2)[0] - max_drawdown_int(s2)[1]
    return a/c
```

Primenom ove dve funkcije na svake dve strategije dolazimo do matrice Σ' koja ima oblik

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	S23	S24
S1	1.00	0.00	0.00	0.23	0.14	0.24	0.08	0.38	0.04	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00	0.31	0.00
S2	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.00	0.30	0.00	0.22	0.34	0.38	0.42	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S3	0.00	0.00	1.00	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.21	0.39	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.32	0.47	0.00	0.05
S4	0.23	0.00	0.08	1.00	0.14	0.09	0.17	0.20	0.16	0.31	0.09	0.17	0.00	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.30	0.14	0.05	0.19	0.00
S5	0.14	0.00	0.00	0.14	1.00	0.00	0.37	0.00	0.33	0.00	0.00	0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S6	0.24	0.00	0.00	0.09	0.00	1.00	0.00	0.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.00	0.00	0.28	0.00
S7	0.08	0.00	0.00	0.17	0.37	0.00	1.00	0.00	0.47	0.00	0.00	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S8	0.38	0.00	0.00	0.20	0.00	0.27	0.00	1.00	0.00	0.04	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14	0.00	0.00	0.43	0.00
S9	0.04	0.00	0.00	0.16	0.33	0.00	0.47	0.00	1.00	0.00	0.00	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S10	0.00	0.00	0.21	0.31	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	1.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.32	0.00	0.00	0.00	0.00	0.31	0.24	0.18	0.07	0.00
S11	0.00	0.00	0.39	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	1.00	0.00	0.24	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.36	0.43	0.38	0.00	0.22
S12	0.10	0.11	0.00	0.17	0.15	0.00	0.19	0.03	0.17	0.00	0.00	1.00	0.00	0.21	0.00	0.13	0.27	0.18	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S13	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.24	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.16	0.20	0.04	0.00	0.34
S14	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.21	0.00	1.00	0.00	0.26	0.29	0.43	0.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S15	0.00	0.00	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.32	0.03	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17	0.12	0.00	0.00	0.00
S16	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.00	0.26	0.00	1.00	0.12	0.23	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S17	0.00	0.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.29	0.00	0.12	1.00	0.32	0.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S18	0.00	0.38	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	0.43	0.00	0.23	0.32	1.00	0.42	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S19	0.00	0.42	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.39	0.00	0.18	0.39	0.42	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S20	0.12	0.00	0.27	0.30	0.00	0.07	0.00	0.14	0.00	0.31	0.36	0.00	0.16	0.00	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.39	0.26	0.15	0.18
S21	0.00	0.00	0.32	0.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.24	0.43	0.00	0.20	0.00	0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.39	1.00	0.31	0.00	0.27
S22	0.00	0.00	0.47	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.38	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.26	0.31	1.00	0.00	0.06
S23	0.31	0.00	0.00	0.19	0.00	0.28	0.00	0.43	0.00	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	0.00	0.00	1.00	0.00
S24	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.22	0.00	0.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.27	0.06	0.00	1.00

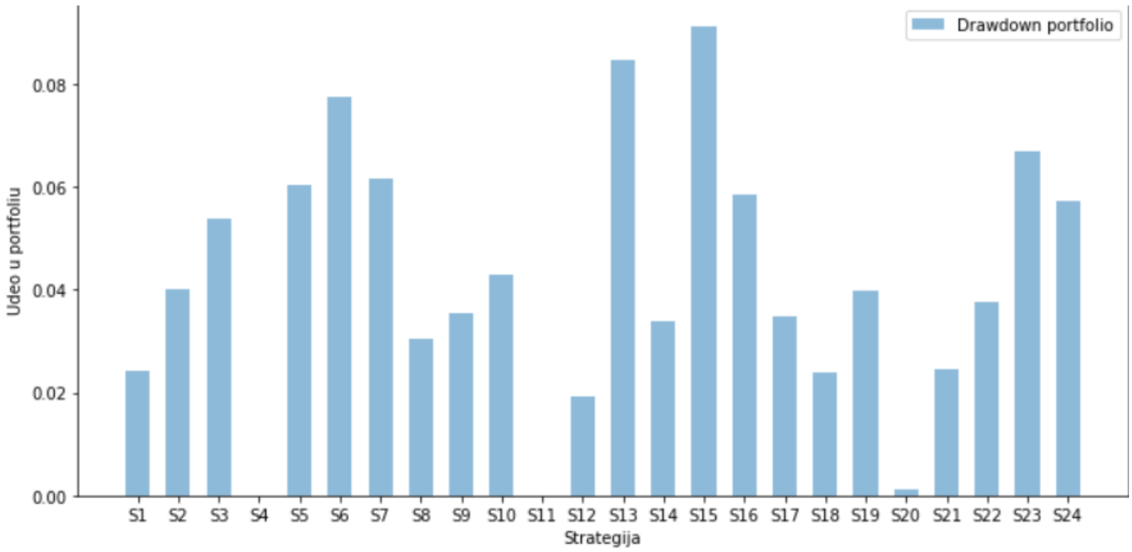
Slika 19: Matrica izvedene mere povezanosti

Sada kada imamo definisano sve što nam je potrebno, možemo da pristupimo numeričkoj optimizaciji portfolija gde ćemo umesto matrice kovarijanse koristiti matricu Σ'. Odnosno želimo da napravimo takav portfolio strategija da poklapanje intervala Maksimalnog Drawdown-a bude minimalno.

Rezultat numeričke optimizacije je vektor $x \in \mathbb{R}^{24}$ čije su komponente procenti odnosno udeli svake strategije u portfoliju koji smo dobili na ovaj način:

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
2.42%	4%	5.38%	0%	6%	7.7%	6.2%	3%	3.6%	4.3%	0%	1.9%
S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	S23	S24
8.4%	3.4%	9.1%	5.8%	3.5%	2.4%	4%	0.1%	2.4%	3.8%	6.7%	5.7%

Grafički se ovi udeli mogu predstaviti sa



Slika 20: Udeli strategija u Drawdown portfoliju

Standardna devijacija prinosa portfolija koji je dobijen na ovaj način, korišćenjem alternativne matrice za povezanost strategija definisane na gore opisan način iznosi **0.01315** odnosno možemo da očekujemo da će na godišnjem nivou prinos da varira za **1.315%** od očekivane vrednosti od 6%.

Na slici 20 možemo da uočimo da iako neke strategije imaju znatno veće intervale Maksimalnog Drawdowna, portfolio dobijen na ovaj način je veoma diversifikovan, samo dve strategije nisu uključene u portfolio. Strategije $S4$, $S11$ i $S20$ zaista imaju široke Maksimalne Drawdown intervale i zato ima smisla da se one isključe iz optimalnog portfolija, odnosno da udeo $S20$ bude skoro nepostojeći.

3.3 Numericko rešavanje problema optimizacije portfolija korišcenjem Drawup modela

Za računanje Maksimalnog Drawup-a i poređenje preklapanja dva intervala korišćena je funkcija, koja je predstavljena u Listing 3.4 Primer koda 2 i varijacija funkcije koja je predstavljena u Listing3.3 Primer koda 3.

Listing 3.4: Primer koda 2

```
    #Funkcija koja za odabranu strategiju racuna interval i vrednost
    najveceg drawup-a
def max_drawdown_int(s1):
    cum_rets = data2.iloc[:,s1]
```

```
# Racuna se pokretni minimum
running_min = np.minimum.accumulate(cum_rets)
running_min[running_min < 0] = 0
# Racuna se procenat Drawup-a
drawup = (cum_rets)/running_min - 1

 # Kraj intervala
i = np.argmin(np.minimum.accumulate(cum_rets) - cum_rets)
# Pocetak intervala
j = np.argmin(cum_rets[:i])
#Vrednost maksimalnog Drawup-a
k = drawup[i]
return [i,j,k]
```

Primenom gore navedene dve funkcije na sve strategije možemo da sastavimo matricu Θ, koju ćemo prilikom traženja optimalnog portfolija koristiti kao matricu međusobnih odnosa strategija izvedenih iz Drawup pokazatelja, ta matrica ima sledeće vrednosti.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	S23	S24
S1	1	0.44	0.49	0.23	0.49	0.49	0.49	0.49	0.45	0.34	0.11	0.34	0.49	0.48	0.49	0.48	0.39	0.35	0.42	0.48	0.36	0.37	0.48	0.43
S2	0.44	1	0.43	0.13	0.43	0.43	0.44	0.44	0.47	0.23	0.14	0.4	0.43	0.45	0.43	0.45	0.44	0.41	0.48	0.42	0.27	0.32	0.42	0.36
S3	0.49	0.43	1	0.22	0.49	0.5	0.5	0.48	0.44	0.34	0.11	0.34	0.5	0.47	0.5	0.47	0.38	0.35	0.42	0.49	0.37	0.36	0.49	0.44
S4	0.23	0.13	0.22	1	0.23	0.22	0.22	0.23	0.18	0.36	0	0	0.23	0.24	0.22	0.23	0.03	0.13	0.09	0.23	0.32	0.32	0.23	0.27
S5	0.49	0.43	0.49	0.23	1	0.49	0.49	0.49	0.45	0.35	0.09	0.35	0.5	0.48	0.49	0.48	0.39	0.36	0.41	0.49	0.37	0.37	0.49	0.44
S6	0.49	0.43	0.5	0.22	0.49	1	0.5	0.48	0.44	0.34	0.1	0.34	0.5	0.47	0.5	0.47	0.38	0.35	0.41	0.49	0.37	0.36	0.49	0.44
S7	0.49	0.44	0.5	0.22	0.49	0.5	1	0.48	0.44	0.34	0.11	0.34	0.49	0.47	0.5	0.47	0.38	0.35	0.42	0.49	0.37	0.36	0.49	0.44
S8	0.49	0.44	0.48	0.23	0.49	0.48	0.48	1	0.46	0.33	0.1	0.35	0.49	0.49	0.48	0.49	0.4	0.36	0.42	0.48	0.36	0.38	0.48	0.43
S9	0.45	0.47	0.44	0.18	0.45	0.44	0.44	0.46	1	0.27	0.09	0.38	0.44	0.47	0.44	0.47	0.44	0.41	0.45	0.45	0.3	0.36	0.45	0.39
S10	0.34	0.23	0.34	0.36	0.35	0.34	0.34	0.33	0.27	1	0	0.06	0.34	0.31	0.34	0.31	0.16	0.25	0.2	0.35	0.46	0.4	0.35	0.39
S11	0.11	0.14	0.11	0	0.09	0.1	0.11	0.1	0.09	0	1	0.16	0.09	0.1	0.11	0.11	0.12	0	0.15	0.07	0	0	0.08	0
S12	0.34	0.4	0.34	0	0.35	0.34	0.34	0.35	0.38	0.06	0.16	1	0.34	0.36	0.34	0.36	0.44	0.32	0.41	0.33	0.11	0.18	0.33	0.25
S13	0.49	0.43	0.5	0.23	0.5	0.5	0.49	0.49	0.44	0.34	0.09	0.34	1	0.48	0.49	0.47	0.39	0.35	0.41	0.49	0.38	0.37	0.49	0.45
S14	0.48	0.45	0.47	0.24	0.48	0.47	0.47	0.49	0.47	0.31	0.1	0.36	0.48	1	0.47	0.5	0.41	0.38	0.43	0.47	0.34	0.39	0.47	0.41
S15	0.49	0.43	0.5	0.22	0.49	0.5	0.5	0.48	0.44	0.34	0.11	0.34	0.49	0.47	1	0.47	0.38	0.35	0.42	0.49	0.37	0.36	0.49	0.44
S16	0.48	0.45	0.47	0.23	0.48	0.47	0.47	0.49	0.47	0.31	0.11	0.36	0.47	0.5	0.47	1	0.41	0.38	0.44	0.47	0.34	0.39	0.47	0.41
S17	0.39	0.44	0.38	0.03	0.39	0.38	0.38	0.4	0.44	0.16	0.12	0.44	0.39	0.41	0.38	0.41	1	0.39	0.46	0.39	0.21	0.27	0.39	0.31
S18	0.35	0.41	0.35	0.13	0.36	0.35	0.35	0.36	0.41	0.25	0	0.32	0.35	0.38	0.35	0.38	0.39	1	0.41	0.36	0.29	0.36	0.36	0.4
S19	0.42	0.48	0.42	0.09	0.41	0.41	0.42	0.42	0.45	0.2	0.15	0.41	0.41	0.43	0.42	0.44	0.46	0.41	1	0.4	0.24	0.29	0.4	0.33
S20	0.48	0.42	0.49	0.23	0.49	0.49	0.49	0.48	0.45	0.35	0.07	0.33	0.49	0.47	0.49	0.47	0.39	0.36	0.4	1	0.38	0.37	0.5	0.45
S21	0.36	0.27	0.37	0.32	0.37	0.37	0.37	0.36	0.3	0.46	0	0.11	0.38	0.34	0.37	0.34	0.21	0.29	0.24	0.38	1	0.43	0.38	0.43
S22	0.37	0.32	0.36	0.32	0.37	0.36	0.36	0.38	0.36	0.4	0	0.18	0.37	0.39	0.36	0.39	0.27	0.36	0.29	0.37	0.43	1	0.37	0.42
S23	0.48	0.42	0.49	0.23	0.49	0.49	0.49	0.48	0.45	0.35	0.08	0.33	0.49	0.47	0.49	0.47	0.39	0.36	0.4	0.5	0.38	0.37	1	0.45
S24	0.43	0.36	0.44	0.27	0.44	0.44	0.44	0.43	0.39	0.39	0	0.25	0.45	0.41	0.44	0.41	0.31	0.4	0.33	0.45	0.43	0.42	0.45	1

Slika 21: Pregled matrice Θ

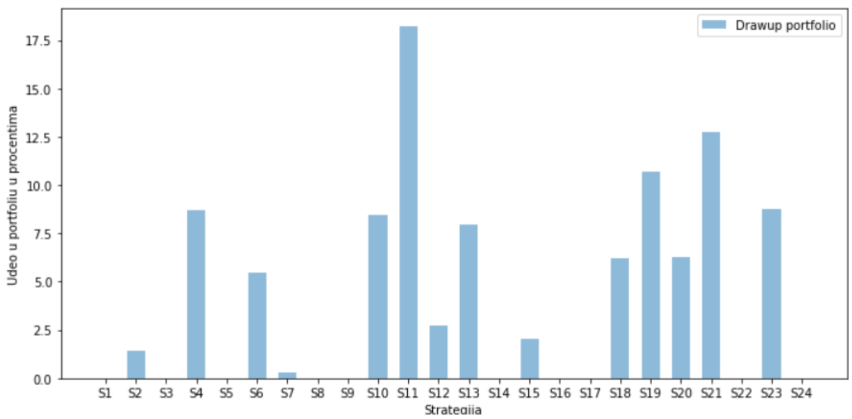
Ovde možemo da primetimo da su vrednosti u matrici znatno veće i češće različite od 0 u odnosu na matricu Σ' koju smo na sličan način dobili iz Drawdowna. Razlog tome je taj, što smo videli da su intervali za Maksimalni Drawup kod najviše strategija drastično veći nego što je to slučaj za intervale kod maksimalnog drawdowna, pa je za očekivati da će njihov presek biti veća vrednost.

Sada imamo definisano sve što nam treba da bismo numerički rešili problem definisan sa (16). Slično kao i za Drawdown, umesto matrice kovarijanse koristimo matricu Θ. Kao rešenje ovog problema očekujemo da nađemo portfolio koji sadrži kombinaciju strategija takvu da je preklapanje intervala maksimalnog Drawup-a minimalno.

I u ovom slučaju želimo da očekivani prinos bude **6%** u postavci problema obeleženo sa $\bar{r}$. Za numeričko rešavanje ovog nelinearnog problema optimizacije je korišćen primer koda koji se nalazi na mestu Listing 3.1. Rešenje ovog problema je vektor $x \in \mathbb{R}^{24}$ koji minimizira vrednost funkcije $V(x)$ iz (16). Nas Drawup optimalan portfolio sadrži sledeće strategije.

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
0%	1.4%	0%	8.7%	0%	5.5%	3.2%	0%	0%	8.5%	1.8%	2.7%
S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	S23	S24
8%	0%	2%	0%	0%	6.2%	10.7%	6.2%	12.7%	0%	8.8%	0%

Grafički odnos strategija u portfoliju se može lakše prikazati na sledećem grafiku.



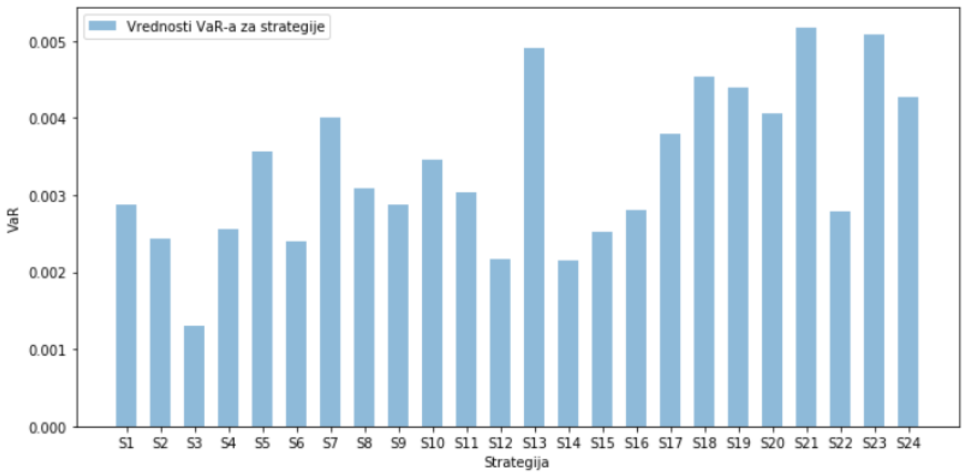
Slika 22: Udeli strategija u optimalnom Drawup portfoliju

Primećujemo da je alokacija bogatstva u Drawup portfoliju takođe diversifikovana, primećujemo da su iz portfolija izbačene strategije koje imaju najduže Drawup periode. Strategija $S11$ ima najveći udeo u portfoliju, ovo se može objasniti time što je njen interval Maksimalnog Drawup-a najmanji pa je samim tim i korelacija definisana na ovaj način manja.

Kao i u prethodnim slučajevima sada smo zahtevali da optimalni portfolio ima očekivani prinos od **6%**, portfolio definisan na ovaj način ima standardnu devijaciju od **1.8343%**, što je za oko 0.5% više od standardne devijacije optimalnog Drawdown portfolija.

3.4 Numericko rešavanje problema optimizaije VaR portfolija

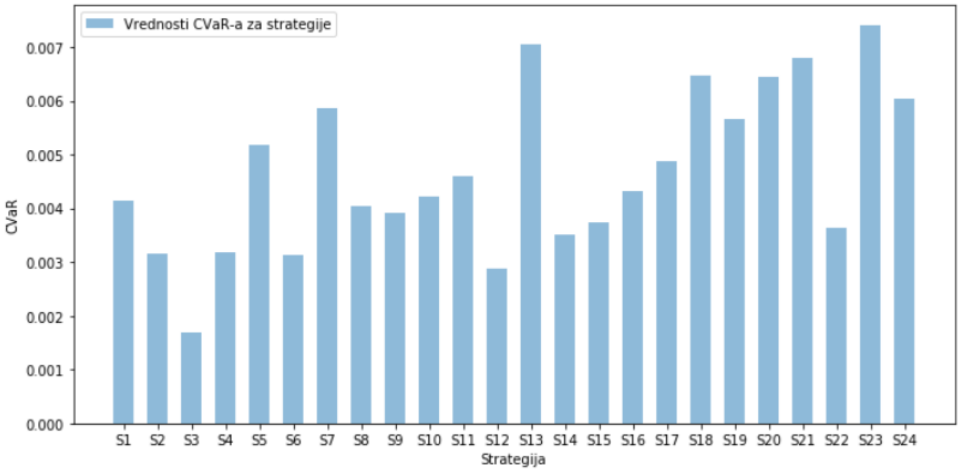
U ovom delu ćemo primeniti CVaR portfolio optimizaciju na skupu od 24 strategija trgovanja. Za računanje pojedinačnih vrednosti VaR-a i CVaR-a korišćen je programski jezik Python. Posmatrajmo sada vrednosti VaR-a i CVaR-a pojedinačnih strategija trgovanja



Slika 23: VaR strategija trgovanja

Na grafiku sa figure 23 možemo da uporedimo pojedinačne vrednosti VaR-a, izražene u negativnim dnevnim prinosima sa intervalom poverenja od 95%, primećujemo da strategija $S3$ ima najmanji VaR dok $S13$, $S21$ i $S23$ imaju veliki VaR.

Posmatrajmo sada grafik 24 koji predstavlja vrednosti CVaR-a za pojedinačne strategije.



Slika 24: CVaR strategija trgovanja

Ovde vidimo da su vrednosti CVaR-a veće, ali da se izgled grafika nije promenio drastično, pa je odnos CVaR-a između strategija ostao relativno isti odnosu VaR-a.

Kako mi minimizujemo CVaR, očekujemo da će strategije sa manjim CVaR-om biti više zastupljene u portfoliju. Za ovu optimizaciju je korišćen programski jezik R i paket Portfolio.optimization koji se poziva na [10].

Listing 3.5: Primer koda 4

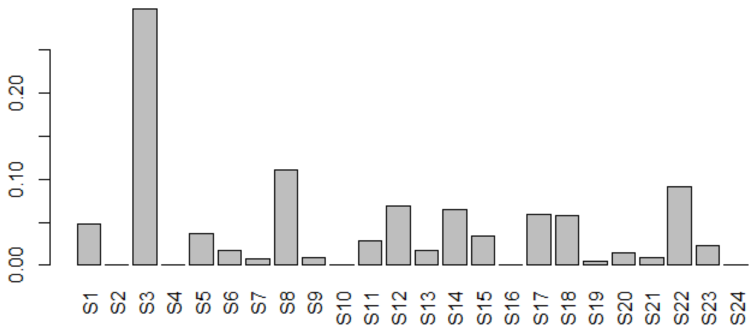
```
library(portfolio.optimization)
df <- read_excel("C:\\data.xlsx")
df2 <- as.matrix(df)

model <- portfolio.model(df2)
model2 <- objective(model,objective = "expected.shortfall")

cvar <- optimal.portfolio(model2)
```

Kao rezultat ove optimizacije dobijen je vektor težinskih koeficijenata koji minimiziraju CVaR portfolija i on ima sledeću strukturu:

S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
4.8%	0%	29.7%	0%	3.7%	1.7%	0.7%	11.1%	0.9%	0%	2.8%	6.9%

S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	S22	S23	S24
1.7%	6.5%	3.4%	0%	5.9%	5.7%	0.5%	1.5%	1%	9%	2.2%	0%

Grafički predstavljeno, optimalan CVaR portfolio strategija trgovanja ima sledeću strukturu:



Slika 25: Optimalan CVaR portfolio

Ovde vidimo da najveći deo portfolija čini strategija $S3$, ovo se slaže sa prethodnim da $S3$ ima najmanji CVaR a time i VaR, takođe vidimo da su strategije koje imaju velike vrednosti CVaR-a u portfoliju zastupljene u malom delu.

Portfolio strategija trgovanja definisan na ovaj način ima očekivani godišnji prinos 4.03%, a standardnu devijaciju prinosa 0.978%.

3.5 Sumiranje numeričkih rezultata

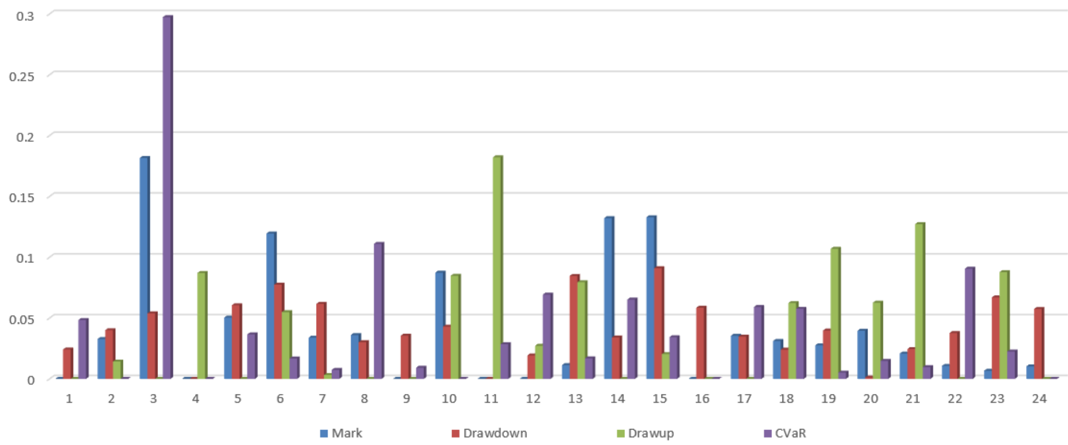
Sada kada smo konstruisali optimalne portfolije iz sva četiri modela, možemo da ih poredimo, na slici 26 vidimo razliku u konstrukciji optimalnih portfolija iz različitih modela.

Posmatrajmo tabelu na slici 27, vidimo dnevne prinose svakog od četiri optimalna portfolija koji su realizovani na testnim podacima.

Nas zanima kako se kretao kumulativni prinos ovih portfolija, odnosno želimo da uporedimo kretanje prinosa portfolija.

Na grafiku 28 vidimo kretanja prinosa ostvarenih na testnim podacima, na grafiku je početna vrednost nultog dana 100, ovo je zato što pretpostavljamo da smo u svaki portfolio srategija uložili 100 jedinica bogatstva i posmatramo kako se naše bogatstvo menjalo kroz vreme. Primećujemo da postoje intervali gde se prinosi slično kreću, takođe vidimo nagli pad prinosa pred kraj posmatranog intervala.

Na posmatranim testnim podacima najbolji prinos je imao Drawdown portfolio, rast od 0.5%, slične performanse je imao i CVaR portfolio koji je imao rast prinosa od 0.47%.



Slika 26: Pregled udela strategija u svakom portfoliju

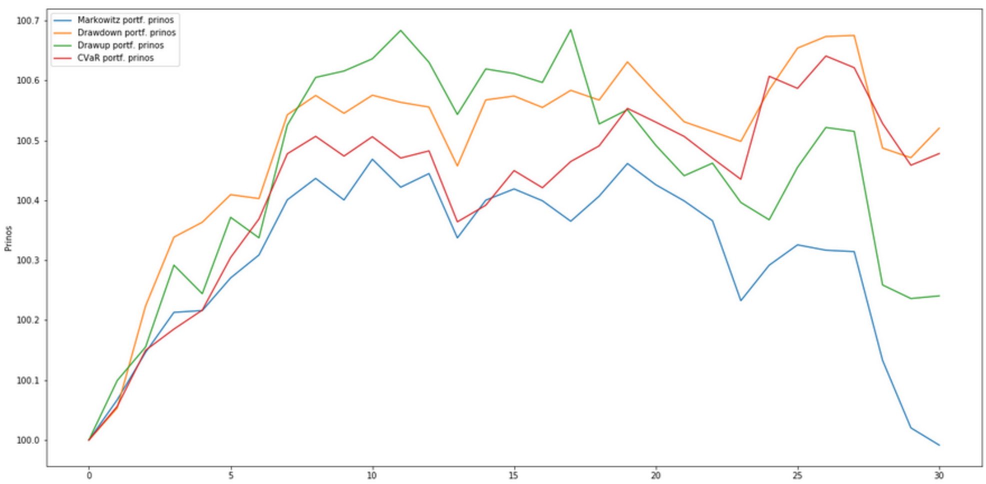
Znatno manji ali i dalje pozitivan prinos od od 0.24% je ostvarila kombinacija strategija sadržana u Drawup portfoliju, dok Markowitz portfolio na kraju posmatranog intervala gotovo nije napravio promenu u ostvarenom prinosu.

Da sumiramo, da smo uložili 100 jedinica bogatstva u svaki od ovih portfolija, posle 29 dana delovanja strategija kako je opisano u testnom delu podataka bismo imali:

Markowitz	Drawdown	Drawup	CVaR
99.991	100.52	100.24	100.478

	Markowitz	Drawdown	Drawup	CVaR
0	0.0006722	0.00053593	0.0009936	0.00056345
1	0.0007917	0.00170266	0.0005594	0.00093498
2	0.0006659	0.00114382	0.0013635	0.00035248
3	2.973E-05	0.00024681	-0.000476	0.00031788
4	0.0005443	0.00046084	0.0012735	0.00087384
5	0.0003826	-6.151E-05	-0.00034	0.00064361
6	0.0009155	0.00139014	0.0018684	0.00108089
7	0.0003579	0.00032283	0.0007942	0.00029235
8	-0.000362	-0.0002992	0.0001014	-0.00032967
9	0.0006767	0.00029748	0.0002036	0.0003217
10	-0.000466	-0.0001189	0.0004739	-0.0003541
11	0.0002286	-7.505E-05	-0.00053	0.00011993
12	-0.001067	-0.0009745	-0.000855	-0.00117394
13	0.0006323	0.00109635	0.0007583	0.0002783
14	0.0001865	6.3306E-05	-7.92E-05	0.00057362
15	-0.000198	-0.0001915	-0.000151	-0.00028367
16	-0.000341	0.0002889	0.0008706	0.00043646
17	0.0004166	-0.0001645	-0.001561	0.00026084
18	0.000542	0.00063244	0.0002375	0.00061705
19	-0.000356	-0.0005115	-0.000592	-0.00023198
20	-0.000266	-0.0004835	-0.000504	-0.00023425
21	-0.00033	-0.0001626	0.000213	-0.00035924
22	-0.001341	-0.0001742	-0.000658	-0.00035784
23	0.0005926	0.00086121	-0.000294	0.00171455
24	0.000342	0.00069699	0.0008729	-0.00020196
25	-9.57E-05	0.00018971	0.0006532	0.00053625
26	-2.96E-05	1.2615E-05	-7.14E-05	-0.00019948
27	-0.001815	-0.0018723	-0.002549	-0.00092627
28	-0.00113	-0.0001613	-0.00022	-0.00069958

Slika 27: Ostvareni dnevni prinosi portfolija



Slika 28: Kumulativno kretanje prinosa

4 Zaključak

U ovom radu smo analizirali optimizaciju portfolija na skupu strategija trgovanja. Korišćene su dve standardne mere rizika varijansa i VaR ali smo i uveli dve nove mere rizika, koje na nestandardan način porede kretanje prinosa strategija. Želeli smo da istražimo da li je korisno posmatrati varijansu kao preklapanje sličnog ponašanja prinosa strategija (Drawdown i Drawup). Na osnovu rezultata dobijenih iz portfolio optimizacija, definisanih u prethodnim delovima, možemo da vidimo da je korisno za odabir portfolija strategija trgovanja, posmatrati Drawdown i Drawup na način definisan u prethodnom delu. Naravno, performanse dobijenih portfolija bi detaljnije bile vidljive na većem broju testnih podataka.
Pristup korišćenja Drawdown-a i Drawup-a kao mere rizika definisan u ovom radu je veoma simplifikovan. Vremenski interval koji je obuhvaćen podacima nije velik i povećava šansu da se intervali maksimalnog Drawdown-a i Drawup-a preklapaju. Ovo možda ne bi bio slučaj da se podaci protežu kroz više godina, zbog toga je jedna ideja za naredno istraživanje, ta da se posmatraju maksimalni Drawdown i Drawup po godinama, ili da se posmatraju intervali Drawdown-a i Drawup-a većeg reda.

Strategije trgovanja svakako predstavljaju relativno nov pristup delovanja na tržištu i njihove karakteristike su atraktivne, kako za potencijalne ulagaće tako i za one koji ih razvijaju i optimizuju. Pronalaženje idealnog portfolija je veoma zanimljiv i izazovan problem, svrha ovog rada je ne samo da primeni snažne teorijske metode pristupu optimizacije strategija trgovanja, već i da doprinese merenju i razumevanju rizika kroz uvođenje novih metoda.
Nada autora je da će ovaj rad pomoći zainteresovanima koji žele da učestvuju na tržištu i da će pristup merenju tržišnog rizika koji je predložen u ovom radu biti ideja za dalje istraživanje.

Bibliografija

[1] D. Rajter-Ciric, "Verovatnoca," *Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematicki fakultet*, 2009.

[2] L. R. Goldberg and O. Mahmoud, "Drawdown: from practice to theory and back again," *Mathematics and Financial Economics*, vol. 11, no. 3, pp. 275–297, 2017.

[3] D. Nataša, *Optimalna trajektorija trgovanja kod BB modela.* Prirodno Matematički fakultet Novi Sad, 2015.

[4] H. Markowitz, "Portfolio selection," *The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.*

[5] M. Ivanova and L. Dospatliev, "Application of markowitz portfolio optimization on bulgarian stock market from 2013 to 2016," *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 117, no. 2, pp. 291–307, 2017.

[6] H. Zhang, *Drawdowns, drawups, and their applications.* Citeseer, 2010.

[7] r3analytics, "Var: Why knowing value-at-risk helps risk managers sleep at night." `http://www.r3analytics.com/blog/exposing_downsides_var`, 2014.

[8] T. W. Elisabet Gulevska, "Coherent risk measures," *Mathematical Sciences Chalmers University of Technology University of Gothenburg Gothenburg 2010.*

[9] S. Uryasev, "Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications," in *Proceedings of the IEEE/IAFE/INFORMS 2000 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering (CIFEr)(Cat. No. 00TH8520)*, pp. 49–57, IEEE, 2000.

[10] R. T. Rockafellar, S. Uryasev, *et al.*, "Optimization of conditional value-at-risk," *Journal of risk*, vol. 2, pp. 21–42, 2000.

[11] J. McAllister, Z. Li, J. Liu, and U. Simonsmeier, "Epo dosage optimization for anemia management: Stochastic control under uncertainty using conditional value at risk," *Processes*, vol. 6, no. 5, p. 60, 2018.

Kratka Biografija

Milan Tokić je rođen 17. jula 1994. godine u Subotici. Završio je Osnovnu školu „Sveti Sava"u Subotici 2009. godine. Nakon toga upisuje srednju školu Gimnazija „Svetozar Marković", društveno-jezički smer koju završava 2013. godine. Nakon srednje škole upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, na departmanu za Matematiku i Informatiku, smer Primenjena matematika, modul matematika finansija i uspešno ih završava 2017. godine. Iste godine nastavlja master studije matematike na istom programu gde sve fakultetske obaveze i ispite predviđene planom i programom fakulteta završava zaključno sa oktobarskim ispitnim rokom 2020. godine. Od maja 2019. godine je zaposlen kao konsultant u kompaniji Synechron u Novom Sadu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Milan Tokić
AU
Mentor: dr Nataša Krejić
MN
Naslov rada: Optimalni portfolio strategija trgovanja za različite mere rizika
NR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s/e
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2020.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja, 49 strana, 11 lit. citata, 28 grafika
FO
Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika

ND

Ključne reči: Numerička optimizacija, teorija portfolija, Value at Risk, Drawdown, Drawup, CVaR, alogritam

UDK

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu

CU

Važna napomena:

VN

Izvod: Tema ovog rada je konstrukcija portfolija koji su rešenje problema optimizacije portfolija 24 strategije za trgovanje gde su mere rizika izvedene iz pokazatelja performansi Drawdown i Drawup. Karakteristike ovih portfolija su zatim upoređene sa optimalnim portfolijom koji je rešenje Markowitz-ovog modela minimiziranja varijanse strategija trgovanja i portfolija koji je rešenje problema minimizacije Value-at-risk (VaR) mere na istom skupu strategija trgovanja.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veca: 7.5.2020.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Danijela Rajter-Ćirič, redovni profesor

Mentor: dr Nataša Krejić, redovni profesor

Član: dr Dora Seleši, redovni profesor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Milan Tokić
AU
Mentor: PhD Nataša Krejić
MN
Title: Optimal portfolio of trading strategies with different risk measures
XI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: s/e
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2020.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 4 chapters, 49 pages, 11 references, 28 figures
PD
Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied mathematics

SD

Key words: Numerical optimization, portfolio theory, Value at Risk, Drawdown, Drawup, CVaR, algorithm

UC

Holding data: Department of Mathematics and Informatics's Library, Faculty of Sciences, Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: The object of this publication is to construct the portfolio containing trading strategies, that is the solution to the optimization problem. The risk measures used are derived from the indicators Drawdown and Drawup. Properties and performance of these optimal portfolios are compared to the optimal portfolios that are solution to the Markowitz model and Value-at-Risk model.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 07.05.2020.

ASB

Defended:

DE

Thesis committee:

DB

Chair: PhD Danijela Rajter-Ćirić, full professor

Mentor: PhD Nataša Krejić, full professor

Member: PhD Dora Seleši, full professor