Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Vesna Nestorović

Primena eliptičnih pseudo-diferencijalnih operatora na dokazivanje regularnosti rešenja diferencijalnih jednačina

Master rad

Mentor:

dr Ivana Vojnović

2020, Novi Sad

Predgovor

Proučavanje pseudo-diferencijalnih operatora počelo je sredinom 1960-ih radom Kona, Nirenberga, Hermandera i drugih. Teorija pseudo-diferencijalnih operatora igrala je važnu ulogu u proučavanju linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, dok je osamdesetih godina prošlog veka našla primenu i u nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Prvi put eksplicitno definisan u radu Kona i Nirenberga, 1965. godine, eliptični pseudo-diferencijalni operator, koristi se za rešavanje raznih diferencijalnih jednačina, od kojih od posebnog značaja su one koje se koriste da modeliraju probleme u prirodnim naukama, posebno u fizici. U teoriji PDJ [1], s obzirom da je samo nalaženje rešenja u većini slučajeva nemoguće ili jako komplikovano, glavni fokus je na egzistenciji rešenja i na osobinama koje ono ima ukoliko postoji. Na osnovu postojećih radova na temu eliptičnih PDJ, dolazimo do zaključka da je najveću pažnju zavređivalo pitanje regularnosti rešenja ovih jednačina. Činjenica je da je ova oblast bila u fokusu istaknutih matematičara, a čiji su radovi na ovu temu značajno doprineli razvoju drugih oblasti matematike, povezanih sa PDJ, kao što su teorija verovatnoće, diferencijalna geometrija, varijacioni račun, matematička fizika i primenjena matematika. U ovom radu pažnja je usmerena na regularnost rešenja eliptične parcijalne diferencijalne jednačine na L^2-Beselovim prostorima.

Rad je podeljen na četiri celine. U uvodnom poglavlju ovog rada dat je kratak pregled osnovnih pojmova, tvrđenja i oznaka vezanih za teoriju distribucija, L^p-prostora i drugih prostora funkcija.

Nakon uvodnog dela, u drugom poglavlju definišemo Furijeovu transformaciju L^1-funkcije i navodimo njena osnovna svojstva. Upoznajemo se sa brzo opadajućim funkcijama, inverznom Furijeovom transformacijom i Planšerelovom teoremom, temperiranim distribucijama, Furijeovom transformacijom temperiranih distribucija, kao i pojmom konvolucije funkcija, a posebno konvolucijom dve brzo opadajuće funkcije i konvolucijom temperiranih distribucija. Takođe, definišemo prostore Soboljeva i motivisani njima, daćemo i definiciju Beselovih prostora.

Potom, u trećem poglavlju uvodimo pojam simbola i njima pridruženih pseudo-diferencijalnih operatora. Radićemo sa standardnom klasom simbola koju je uveo Hermander. Glavni problem kojim ćemo se baviti u ovom poglavlju je kompozicija dva pseudo-diferencijalna operatora, za koju ćemo ustanoviti da je opet pseudo-diferencijalni operator i da odgovarajući simbol ima takozvani asimptotski razvoj. Za potrebe dobrog definisanja kompozicije dva pseudo-diferencijalna operatora upoznaćemo se sa oscilatornim integralima i prostorom amplituda.

Poslednje poglavlje, posvećeno je klasi pseudo-diferencijalnih operatora koja

[1] Uobičajeno je da se umesto „parcijalna diferencijalna jednačina" piše akronim PDJ.

se izdvaja u primenama na rešavanje diferencijalnih jednačina-eliptičnim operatorima. Posebno su zanimljivi jer imaju približne inverze koji su takođe pseudo-diferencijalni operatori i koji se u literaturi zovu parametriks. Takođe ćemo upoznati adjungovani operator pseudo-diferencijalnog operatora, pri čemu ćemo dati odgovore na tri pitanja: Da li on uopšte postoji? Ako postoji, da li je on pseudo-diferencijalni operator? Ako je pseudo-diferencijalni operator, da li možemo naći asimptotski razvoj za njegov simbol? Potvrdan odgovor na sva tri pitanja omogućiće nam da proširimo dejstvo pseudo-diferencijalnog operatora, do sada definisanog na prostoru $S(\mathbb{R}^n)$ na linearni operator definisan na prostoru temperiranih distribucija $S'(\mathbb{R}^n)$. Na kraju, dokazaćemo teoremu o eliptičnoj regularnosti, tačnije posmatraćemo eliptičnu pseudo-diferencijalnu jednačinu

$$p(x, D_x)u = f,$$

gde je $p(x, D_x)$ dati eliptični operator, i f data funkcija (koja pripada nekom prostoru funkcija). Nećemo ispitivati kako izgleda rešenje jednačine u eksplicitno, već da li možemo da kažemo nešto o regularnosti u poznajući regularnost f. Preciznije, dokazaćemo da rešenje u pripada klasi funkcija koja ima m više izvoda u poređenju sa f, gde je m red operatora $p(x, D_x)$.

***

Želim da izrazim posebnu zahvalnost mentoru ovog rada, dr Ivani Vojnović, što me je svojom podrškom i zainteresovanošću podstakla da pružim svoj maksimum. Hvala joj za razumevanje, strpljenje, jasne smernice u svim etapama, od istraživanja do finalnog izgleda ovog rada. Svojim znanjem i temeljnim sugestijama mi je pomogla da ovaj rad učinim daleko kvalitetnijim, a voljom koju je pokazala, motivisala me je na podrobnije bavljenje ovom oblašću. Hvala svim profesorima i saradnicima na pruženom znanju. Na tome sam im bezgranično zahvalna. Moje interesovanje za ovu nauku nije jenjavalo od momenta kada sam je odabrala za svoj profesionalni put. Hvala svim prijateljima i kolegama, što su ulepšavali studentske dane, stvarali lepe uspomene i ne znajući to, motivisali me bezbroj puta. Hvala svim članovima komisije što su doprineli da se realizuje odbrana ovog rada. Od srca se zahvaljujem svojoj porodici. Ocu Vojku, koji mi je ukazao na lepotu svih izazova ove nauke i podstakao me na bavljenje istom. Majci Snežani, na brižnosti i bezrezervnom davanju. Sestrama Zagorki, Svetlani, Anđeli i Valentini što moj život čine ispunjenim. Baki Mariji i deki Tadiji što me uvek imaju u mislima i u srcu. Sestričini Đurđiji i sestriću Vasiliju na radosti i poletnoj energiji. Hvala dragom Sretku što je bio uz mene i sa mnom prošao ovaj čaroban period studiranja.

Novi Sad, oktobar 2020. Vesna Nestorović

Sadržaj

1 Uvod

U ovom poglavlju navodimo osnovne definicije, oznake i napomene koje ćemo koristiti u radu vezane za teoriju distribucija, L^p-prostore i druge prostore funkcija.

1.1 Uvodni pojmovi, oznake i tvrđenja

Za multi-indeks $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ koristimo standardne oznake:

- red multi-indeksa je broj $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$,
- $\alpha! = \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!$,
- parcijalni izvod reda α, u oznaci ∂^α se definiše kao

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Takođe, uvodimo oznaku $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j} = -i\partial_{x_j}$, $1 \leq j \leq n$, gde je i imaginarna jedinica, pa je D^α koje se definiše kao $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ jednako

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha.$$

Za $x \in \mathbb{R}^n$, definišemo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Definicija 1.1.1. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za $1 \leq p < \infty$ definišemo*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | \int_\Omega |f(x)| \mathrm{d}\mathbf{x}\}$$

i uvodimo normu

$$\| f \|_{L^p} = (\int_\Omega |f(x)|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Za funkciju $f \in L^1(\Omega)$ kažemo da je Lebeg-integrabilna funkcija.

Definicija 1.1.2. *Za $p = \infty$ definišemo*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \middle| \begin{array}{l} f \textit{ je Lebeg merljiva i postoji konstanta } C \\ \textit{tako da je } |f(x)| \leq C \textit{ za skoro sve } x \in \Omega \end{array} \right\}$$

sa normom

$$\| p \|_\infty = inf\{C : |f(x)| \leq C \; za \; skoro \; sve \; x \in \Omega\}.$$

Definicija 1.1.3. *Nosač neprekidne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definisan je kao skup*

$$supp\, f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Navedimo sada prostore funkcija koje ćemo koristiti. Neka $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup.

- Sa $C(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih funkcija na Ω.
- Sa $C^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ označavamo prostor k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na Ω.
- Sa $C^\infty(\Omega)$ označavamo prostor glatkih funkcija na Ω.
- Sa $C_c(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih funkcija na Ω sa kompaktnim nosačem.
- Sa $C_c^\infty(\Omega)$ označavamo prostor glatkih funkcija na Ω sa kompaktnim nosačem.
- Sa $C_b^0(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih, ograničenih funkcija na Ω.
- Sa $C_b^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ označavamo prostor k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na Ω čiji svi izvodi i sama funkcija su ograničeni.
- Sa $C_b^\infty(\Omega)$ označavamo prostor glatkih, ograničenih funkcija na Ω.
- Sa $L_{loc}^1(\Omega)$ označavamo prostor funkcija koje su integrabilne na svakom kompaktnom podskupu od Ω. Važi $L^1(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$.

Definicija 1.1.4. *Linearni parcijalni diferencijalni operator sa promenljivim koeficijentima na $\mathbb{R}^n$ definišemo kao*

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

gde su koeficijenti $a_\alpha(x)$ funkcije definisane na $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.1.5. *Neka je $g(t, x)$ funkcija definisana na domenu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ takva da*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(t, x) \mathrm{dx}.$$

Neka je $k \in \{1, ..., n\}$ i pretpostavimo da su g i $\frac{\partial g}{\partial t_k}$ neprekidne funkcije. Štaviše, pretpostavimo da je $\frac{\partial g}{\partial t_k}$ ograničena integrabilnom funkcijom po x. Tada

$$\frac{\partial f}{\partial t_k}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial t_k}(t, x) \mathrm{dx}.$$

Dokaz. Videti [3], strana 26, Lema 2.21. $\square$

Teorema 1.1.6. *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{C}$ preslikavanje tako da*
1. za svako $x \in \mathbb{R}^n$ funkcija $t \mapsto f(x,t)$ je diferencijabilna na I,
2. za svako $t \in I$ funkcija $x \mapsto f(x,t)$ je integrabilna na $\mathbb{R}^n$,
3. postoji neko $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ takvo da $|\partial_t f(x,t)| \leq F(x)$ za skoro sve $x \in \mathbb{R}^n$.
Tada je

$$I \ni t \mapsto g(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\mathrm{dx} \in \mathbb{C}$$

diferencijabilna funkcija na I i za sve $t \in I$

$$g'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t f(x,t)\mathrm{dx}.$$

Dokaz. Videti [11], strana 98, Teorema 1. $\square$

Teorema 1.1.7. *(Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji)*
Neka je $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ niz funkcija takvih da

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \text{ skoro svuda i}$$

$$|f_k(x)| \leq g(x) \text{ skoro svuda,}$$

gde $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{dx}.$$

Dokaz. Videti [11], 58. strana, Teorema 3. $\square$

Teorema 1.1.8. *(Lajbnicova formula) Izvod proizvoda dve funkcije $f, g \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ je dat Lajbnicovom formulom*

$$\partial_x^\alpha (fg)(x) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \Big(\partial_x^\gamma f(x)\Big)\Big(\partial_x^{\alpha-\gamma} g(x)\Big)$$

koja važi za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Teorema 1.1.9. *(Fa di Brunova formula) Izvod reda $\alpha \in \mathbb{N}_0$ kompozicije dve funkcije više promenljivih dat je Fa di Brunovom formulom*

$$\partial_\xi^\alpha [(f \circ g)(\xi)] = \sum_{1 \leq l \leq \alpha} \sum_{\substack{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_l=\alpha \\ |\gamma_1|\geq 1,\ldots,|\gamma_l|\geq 1}} f^{(l)}(g(\xi)) \, (\partial_\xi^{\gamma_1} g(\xi)) \cdot \ldots \cdot (\partial_\xi^{\gamma_l} g(\xi)). \tag{1.1}$$

Teorema 1.1.10. *Neka* $1 \leq p < \infty$. *Tada* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *je gust u* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *tj. za svako* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *postoji niz* $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, *takav da* $\lim\limits_{k\to\infty} \parallel f - f_k \parallel_p = 0$.

Dokaz. Videti [11], 92. strana, Teorema 3. □

Teorema 1.1.11. *(Fundamentalna lema varijacionog računa) Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *otvoren skup i neka* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tako da*

$$\textstyle\int_\Omega f(x)\phi(x)\mathrm{dx} = 0 \text{ za sve } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Tada $f(x) = 0$ *za skoro sve* $x \in \Omega$.

Dokaz. Videti [1], strana 204, Teorema A.7. □

U radu, takođe ćemo koristiti oznaku: $A \subsetneq B$, gde su A i B dva proizvoljna skupa, ukoliko važi $A \subset B$ i postoji $x \in B$ takav da $x \notin A$.

Teorema 1.1.12. *(Fubinijeva teorema) Neka su* $X \subset \mathbb{R}^m$ *i* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *Lebeg merljivi skupovi.*

1. *Neka* $f \in L^1(X \times Y)$. *Tada funkcije*

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{dy}, \qquad y \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{dx}$$

definišu interabilne funkcije na X *i* Y *redom i važe jednakosti*

$$\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\mathrm{dy}\Big)\mathrm{dx} = \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d(x,y)} = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\mathrm{dx}\Big)\mathrm{dy}.$$

2. *Ako je* f *Lebeg merljiva na* $X \times Y$, *onda su funkcije*

$$x \mapsto \int_Y |f(x,y)|\mathrm{dy}, \qquad y \mapsto \int_X |f(x,y)|\mathrm{dx}$$

Lebeg merljive na X *i* Y *redom i važe jednakosti*

$$\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|\mathrm{dy}\Big)\mathrm{dx} = \int_{X\times Y} |f(x,y)|\mathrm{d(x,y)} = \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)|\mathrm{dx}\Big)\mathrm{dy}.$$

Dokaz. Videti [12], 67. strana, Teorema 2.37. □

2 Furijeova transformacija, temperirane distribucije i prostori Soboljeva

U ovom poglavlju obradićemo Furijeovu transformaciju L^1-funkcije. Napravićemo pregled njenih najvažnijih osobina i definisati njoj inverznu transformaciju. Predstavićemo teorijske osnove prostora brzo opadajućih funkcija, kao i prostora temperiranih distribucija. Kao što ćemo videti u odeljcima koji slede, prostor temperiranih distribucija predstavlja prirodan okvir za delovanje Furijeove transformacije. Navešćemo Planšerelovu teoremu i upoznaćemo se sa Furijeovim množiocima na prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Potom se upoznajemo sa novom operacijom, konvolucijom. Prvo ćemo definisati konvoluciju funkcija, zatim konvoluciju brzo opadajućih funkcija, i na kraju, konvoluciju temperiranih distribucija. Ovo poglavlje zatvorićemo izlaganjem osnovne teorije prostora Soboljeva i Besela.

2.1 Furijeova transformacija

Definicija 2.1.1. *Za $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definišemo Furijeovu transformaciju funkcije f, u oznaci $\hat{f}$, sa*

$$\hat{f}(\xi) := \mathcal{F}[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{dx}, \tag{2.1}$$

gde je $x \cdot \xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i$.

Kako je $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, važi $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-ix\cdot\xi}|\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mathrm{dx} < \infty$, odakle sledi da je (2.1) dobro definisana.

Osnovne osobine Furijeove transformacije date su u sledećoj teoremi, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 2.1.2. *1. Preslikavanje $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_b^0(\mathbb{R}^n)$ je linearno i važi*

$$\| \mathcal{F}[f] \|_{C_b^0(\mathbb{R}^n)} \leq \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

2. Ako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ neprekidno diferencijabilna funkcija tako da $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, onda

$$\mathcal{F}[\partial_{x_j} f] = i\xi_j \mathcal{F}[f](\xi). \tag{2.2}$$

3. Ako $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, onda je $\hat{f}$ neprekidno diferencijabilna u odnosu na ξ_j i

$$\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[-ix_j f(x)]. \tag{2.3}$$

4. Neka $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Označimo sa $(\tau_y f)(x) := f(x+y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ translaciju od f za y. Tada je

$$\mathcal{F}[\tau_y f](\xi) = e^{iy\cdot\xi}\hat{f}(\xi),$$

za sve $\xi \in \mathbb{R}^n$.
5. Neka $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Označimo sa $(\rho_\lambda f)(x) := f(\lambda x)$, $\lambda > 0$ dilataciju od f za λ. Tada je

$$\mathcal{F}[\rho_\lambda f](\xi) = \lambda^{-n}\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda}) = \lambda^{-n}(\rho_{\lambda^{-1}}\hat{f})(\xi).$$

Dokaz. Kratko uputstvo videti u [1], strana 10, Teorema 2.1. □

Napomena 2.1.3. *Uvodimo oznaku $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}, 1 \leq j \leq n$, gde je $i^2 = -1$. Tada se osobina (2.2) može zapisati kao*

$$\mathcal{F}[D_{x_j}](f) = \xi_j \mathcal{F}[f].$$

ili važi opštije

$$\mathcal{F}[D^\alpha f(x)] = \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \tag{2.4}$$

gde $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Takođe, osobina (2.3) se može zapisati kao

$$iD_{\xi_j}\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[-ix_j f(x)],$$

odnosno opštije

$$\mathcal{F}[(-x)^\beta f(x)] = D^\beta \hat{f}(\xi)$$

gde $\beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Napomena 2.1.4. *Ako je $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ neprekidno diferencijabilna funkcija i $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ za sve $j = 1, ..., n$, onda su $\hat{f}$ i $\xi_j \hat{f}$ ograničene funkcije zbog Teoreme (2.1.2), tačnije zbog 1. i 2. dela teoreme, pa sledi*

$$(1 + |\xi|)|\hat{f}(\xi)| \leq C$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1 + |\xi|}$$

što znači da $\hat{f}(\xi)$ opada brže od $C(1 + |\xi|)^{-1}$ kada $|\xi| \to \infty$. Induktivno, pod pretpostavkom da važi $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ i $\partial_x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ za sve $|\alpha| \leq k$ dobijamo

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^k}$$

što znači da diferencijabilnost funkcije f implicira da $\hat{f}$ opada brže od polinoma kad $|\xi| \to \infty$.

2.2 Brzo opadajuće funkcije

U okviru ovog odeljka upoznaćemo se sa prostorom funkcija koji je invarijantan u odnosu na Furijeovu transformaciju.

Najpre, posmatrajmo funkciju $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tada $\partial_x^\alpha f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Takođe, na isti način kao u Napomeni (2.1.4), dobijamo da važi $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-k}$, za svako $k \in \mathbb{N}_0$. Dalje, možemo da primetimo da je

$$(1+|x|)^k f(x) \in C_c{}^\infty \subset L^1(\mathbb{R}^n).$$

Odatle, koristeći Teoremu (2.1.2), 1. i 3. deo, sledi da $\hat{f} \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$, što implicira $\hat{f} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Međutim, može se pokazati $\hat{f} \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ jer $\hat{f}$ nema kompaktan nosač (osim u slučaju kad je $f = 0$). Ako $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, onda $\hat{f}$ pripada prostoru funkcija koji definišemo u nastavku.

Definicija 2.2.1. *Prostor brzo opadajućih funkcija $S(\mathbb{R}^n)$ je prostor svih glatkih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tako da za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i sve $N \in \mathbb{N}_0$ postoji konstanta $C_{\alpha,N}$ tako da je*

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N} \tag{2.5}$$

uniformno po $x \in \mathbb{R}^n$. Za $f \in S(\mathbb{R}^n)$ i $m \in \mathbb{N}_0$ definišemo niz semi-normi

$$|f|_{m,S} := \underset{|\alpha|+|\beta|\leq m}{sup} \; \underset{x\in\mathbb{R}^n}{sup} \; |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)|.$$

Funkcije iz gornje definicije su takve da, kada $|x| \to \infty$ one same zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima opadaju ka nuli brže od $(1+|x|)^{-N}$, te ih otuda zovemo brzo opadajućim funkcijama. Ove funkcije takođe nazivamo i *Švarcovim funkcijama*. Iz definicije lako se vidi da, ako je f iz $S(\mathbb{R}^n)$, onda su i svi njeni parcijalni izvodi u $S(\mathbb{R}^n)$.

Napomena 2.2.2. *Jedna od ekvivalentnih familija semi-normi na $S(\mathbb{R}^n)$ je data sa*

$$|f|'_{m,S} := \underset{k+|\alpha|\leq m}{sup} \; \underset{x\in\mathbb{R}^n}{sup} \; (1+|x|)^k |\partial^\alpha f(x)|, \; za \; f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Na ovaj način definisane semi-norme su bolje povezane sa samom definicijom brzo opadajućih funkcija. Ipak, ispostavlja se da, ukoliko posmatramo Furijeovu transformaciju na prostoru brzo opadajućih funkcija, nekada je prirodnije koristiti definiciju $|\cdot|_{m,S}$ semi-normi.

U nastavku pokazujemo tri jednostavne leme koje će nam biti od koristi u daljem radu sa Švarcovim funkcijama.

Lema 2.2.3. *Važi* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq S(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Neka $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Budući da $|x|^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, gde $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, važi $|x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, za $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. S obzirom da neprekidna funkcija na kompaktnom skupu dostiže maksimum, $|x^\alpha \partial_x^\beta f(x)|$ je ograničena, tj.

$$|x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta},$$

što znači da $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Inkluzija je striktna jer $f(x) = e^{-|x|^2} \in S(\mathbb{R}^n) \setminus C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f nema kompaktan nosač, $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$), a da $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ upravo ćemo dokazati.
Lako se vidi da za svako $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ važi $\partial_x^\beta f(x) = P_\beta(x) f(x)$, gde $P_\beta(x)$ predstavlja polinom. Množenjem ove jednakosti sa x^α, dobijamo izraz

$$|x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| = \frac{|x^\alpha P_\beta(x)|}{e^{|x|^2}} \tag{2.6}$$

čija desna strana teži nuli kad $|x| \to \infty$. To znači da za svako $\epsilon > 0$ možemo naći konstantu $N > 0$ tako da kad $|x| > N$ važi

$$\frac{|x^\alpha P_\beta(x)|}{e^{|x|^2}} < \epsilon.$$

Ako posmatramo slučaj $|x| \leq N$, izraz (2.6) predstavlja neprekidnu funkciju na kompaktnom domenu, pa je ograničena tj. postoji konstanta $M > 0$ koja je gornje ograničenje izraza (2.6). Birajući $C_{\alpha,\beta} = max\{\epsilon, M\}$ dobijamo

$$|x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta},$$

odakle zaključujemo da $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$. Dakle, $f(x) = e^{-|x|^2} \in S(\mathbb{R}^n) \setminus C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Lema 2.2.4. *Neka* $1 \leq p \leq \infty$. *Tada* $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Neka $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Znamo da je f glatka i da za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i sve $N \in \mathbb{N}_0$ važi

$$(1 + |x|)^N |\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha,N}$$

Posebno, za $N = 0$ i $\alpha = (0, ..., 0)$ važi $|f(x)| \leq C_{0,0}$, pa $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Posmatrajmo sad slučaj $1 \leq p < \infty$. Tada za neko $N \in \mathbb{N}$ imamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p (1 + |x|^N)^p}{(1 + |x|^N)^p} \mathrm{dx}.$$

Primetimo da brojilac podintegralne funkcije možemo da ograničimo na sledeći način

$$|f(x)|^p(1+|x|^N)^p = (|f(x)| + |f(x)||x|^N)^p \leq (|f(x)| + |f(x)|(1+|x|^N))^p$$
$$\leq (C_{0,0} + C_{0,N})^p < \infty.$$

Označimo $C := (C_{0,0} + C_{0,N})^p$. Tada

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{dx} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^N)^p} \mathrm{dx}.$$

Integral sa desne strane poslednje jednakosti konvergira za $N > \frac{n}{p}$. Birajući $N > \frac{n}{p}$, dobijamo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Proizvod dve Švarcove funkcije je Švarcova funkcija, tj. ako $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ onda $fg \in S(\mathbb{R}^n)$. Štaviše, $x^\alpha f \in S(\mathbb{R}^n)$, za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Ovo sledi iz još opštijeg tvrđenja:

Lema 2.2.5. *Sa $C^\infty_{poly}(\mathbb{R}^n)$ označimo skup svih glatkih funkcija ograničenih polinomom tj. skup glatkih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ takvih da za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ postoji $m_\alpha \in \mathbb{N}_0$ i $C_\alpha > 0$ tako da*

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{m_\alpha}, \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$

Tada, za svako $f \in C^\infty_{poly}$ i $g \in S(\mathbb{R}^n)$ važi $fg \in S(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Pretpostavimo da $f \in C^\infty_{poly}$ i $g \in S(\mathbb{R}^n)$. Iz Lajbnicove formule koristeći pretpostavke teoreme sledi da je

$$|x^\beta \partial_x^\alpha (fg)(x)| = \left|x^\beta\right| \left| \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left(\partial_x^\gamma f(x)\right)\left(\partial_x^{\alpha-\gamma} g(x)\right)\right|$$

$$\leq |x|^{|\beta|} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} C_\gamma (1+|x|)^{m_\gamma} C_{\alpha,N} (1+|x|)^{-N}$$

$$\leq C|x|^{|\beta|} \frac{1}{(1+|x|)^N} (1+|x|)^M \leq C \frac{(1+|x|)^{M+|\beta|}}{(1+|x|)^N},$$

gde je $M = max\{m_\gamma : \gamma \leq \alpha\}$. Kako dobijeni izraz važi za sve $N \in \mathbb{N}_0$, za dato $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ uvek postoji N tako da je $M + |\beta| \leq N$. Stoga, dobijeni izraz je konačan. □

Napomena 2.2.6. *Nije teško uočiti da izraz* $(1+|x|)$ *koji se javlja u (2.5) možemo da zamenimo sa* $\langle x\rangle := (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$ *budući da važi sledeća nejednakost*

$$\langle x\rangle \leq (1+|x|) \leq \sqrt{2}\,\langle x\rangle\,. \tag{2.7}$$

Furijeovu transformaciju je pogodno koristiti na prostoru $S(\mathbb{R}^n)$ zbog sledeće njene osobine:

Lema 2.2.7. *Furijeova transformacija* $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ *je linearno preslikavanje. Za svako* $m \in \mathbb{N}_0$ *postoji* $C_m > 0$ *tako da je*

$$|\hat{f}|_{m,S} \leq C_m |f|_{m+n+1,S},$$

za sve $f \in S(\mathbb{R}^n)$*, odnosno* $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ *je ograničeno preslikavanje.*

Dokaz. Linearnost sledi iz definicije Furijeove transformacije. Za $f \in S(\mathbb{R}^n)$ važi

$$|\hat{f}|_{0,S} = \parallel \hat{f} \parallel_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \leq \parallel f \parallel_{L^1} \leq C|f|'_{n+1,S}, \tag{2.8}$$

pri čemu važenje poslednje nejednakosti obrazlažemo u nastavku.
Važi

$$\parallel f \parallel_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)(1+|x|)^{n+1}|}{(1+|x|)^{n+1}}\mathrm{dx} \tag{2.9}$$

Brojilac podintegralne funkcije možemo da ograničimo

$$|f(x)(1+|x|)^{n+1}| \leq C'|f(x)||(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}} \leq C'|f|'_{n+1,S}, \tag{2.10}$$

gde obe nejednakost slede iz Napomene (2.2.6). Iz (2.9) i (2.10) dobijamo da važi (2.8). Dalje, kombinujući 2. i 3. deo Teoreme (2.1.2) dobijamo

$$\xi^\alpha D^\beta_\xi \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[D^\alpha_x(x^\beta f(x))]$$

odakle koristeći (2.8) zaključujemo

$$\parallel \xi^\alpha D^\beta_\xi \hat{f}(\xi) \parallel_\infty = |\mathcal{F}[D^\alpha_x(x^\beta f(x))]|_{0,S} \leq C|D^\alpha_x(x^\beta f(x))|'_{n+1,S}. \tag{2.11}$$

Primenom Lajbnicovog pravila

$$D^\alpha_x(x^\beta f(x)) = \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (D^\gamma_x x^\beta)(D^{\alpha-\gamma}_x f(x)),$$

iz (2.11) dobijamo

$$\parallel \xi^\alpha D^\beta_\xi \hat{f}(\xi) \parallel_\infty \leq C_{\alpha,\beta}|f|'_{|\alpha|+|\beta|+n+1,S}.$$

Kada u poslednjoj jednakosti uzmemo supremum po $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ za $|\alpha| + |\beta| \leq m$, gde $m \in \mathbb{N}_0^n$ dobijamo

$$|\hat{f}|_{m,S} \leq C_m |f|'_{m+n+1,S}.$$

Dakle, $\mathcal{F}(f) \in S(\mathbb{R}^n)$, za sve $f \in S(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ je ograničeno preslikavanje. $\square$

Zaključujemo, prostor brzo opadajućih funkcija je invarijantan u odnosu na Furijeovu transformaciju.

2.3 Inverzna Furijeova transformacija i Planšerelova teorema

Furijeova transformacija $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ je invertibilna i njen inverz definišemo u nastavku.

Definicija 2.3.1. *Za $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definišemo inverznu Furijeovu transformaciju funkcije g, u oznaci $\check{g}$, sa*

$$\check{g}(x) := \mathcal{F}^{-1}(g)(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2.12}$$

gde je $x \cdot \xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i$.

Kako $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, navedena definicija je dobra. Primetimo da važi

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}[g](-x). \tag{2.13}$$

Da je sa (2.12) zaista dat inverz Furijeove transformacije, odnosno da kada na Furijeovu transformaciju primenimo inverznu Furijeovu transformaciju dobijemo originalnu funkciju tvrdi sledeća lema.

Lema 2.3.1. *(o inverznoj Furijeovoj transformaciji) Neka $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Tada je*

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Furijeova transformacija $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ je linearni izomorfizam tj. linearno, bijektivno, neprekidno preslikavanje sa neprekidnim inverzom.

Dokaz. Videti [1], strana 16, Lema 2.9. □

Teorema 2.3.2. *(Planšerelova teorema) Za sve $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ važi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{2.14}$$

Važi

$$\| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \| \hat{f} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

i $\mathcal{F}$ se može proširiti do linearnog izomorfizma $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Videti [1], strana 17, Teorema 2.11. □

Napomena 2.3.3. *Uvodimo sledeću oznaku*

$$đ\xi := \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^n}$$

pa inverznu Furijeovu transformaciju funkcije možemo zapisati i u sledećem obliku

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} g(\xi) đ\xi, \tag{2.15}$$

a Planšereleovu teoremu zapisaćemo u obliku

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} đ\xi.$$

Lema 2.3.4. *(Furijeovi množioci na $L^2(\mathbb{R}^n)$) Neka je $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ merljiva funkcija. Tada*

$$m(D_x)f := \mathcal{F}^{-1}[m(\xi)\hat{f}(\xi)] \text{ za sve } f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

je dobro definisan ograničen operator $m(D_x) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Štaviše, $\| m(D_x) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \| m \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Dokaz. Pretpostavimo da $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tada

$$(\int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi)^{\frac{1}{2}} = (\int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi)^{\frac{1}{2}} \leq \| m \|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi < \infty,$$

pa $m(\xi)\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pa i $\mathcal{F}^{-1}[m(\xi)\hat{f}(\xi)] \in L^2(\mathbb{R}^n)$ za svako $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Štaviše,

$$\| m(D_x)f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \| m(\xi)\hat{f}(\xi) \|_2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \| m \|_\infty \| f \|_2 .$$

zbog Planšerelove teoreme. Dakle, $m(D_x) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ je ograničen linearni operator i

$$\| m(D_x) \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \| m \|_\infty .$$

Sada ćemo dokazati obrat teoreme. Pretpostavimo da je gore definisan operator $m(D_x) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ dobro definisan, linearan i ograničen.
Tada za $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ važi

$$m(D_x)f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{F}(m(D_x)f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$\Leftrightarrow$

$$m(\xi)\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Dakle, ograničenost operatora $m(D_x)f : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ je ekvivalenta sa ograničenošću operatora $m(\cdot)\hat{f}(\cdot) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Označimo ovaj operator sa M, to jest

$$(M\hat{f})(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi),$$

$M : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Stoga, dovoljno je dokazati da je operator M ograničen ako i samo ako $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pretpostavili smo da je $m(D_x) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ograničen linearan operator, što implicira

$$\mathcal{F}m(D_x)\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

je takođe linearan, ograničen operator kao kompozicija linearnih, ograničenih operatora gde je

$$\mathcal{F}m(D_x)\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)] = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}[m(\xi)\widehat{\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)}]]) = m(\xi)g(\xi)$$

za sve $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Štaviše, onda je i $(Mg)(\cdot) = m(\cdot)g(\cdot) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ograničen operator, pa je i

$$\| Mg \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \| M \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \| g \|_{L^2} .$$

Odatle sledi $(M\hat{f})(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ograničen (jer je to isti operator na L^2 kao $(Mg)(x) = m(x)g(x)$ jer je $\hat{f} : L^2 \to L^2$ izomorfizam). Stoga

$$\| M\hat{f} \|_{L^2} \leq C \| M \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \| \hat{f} \|_{L^2}$$

Dakle, za $g \in L^2$ važi

$$\| Mg \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| m(\xi)g(\xi) \|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2 |g(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leq \| M \|^2_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \| g \|^2_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} . \tag{2.16}$$

Važi

$$\begin{aligned} \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)h(\xi)\mathrm{d}\xi : h \in L^1(\mathbb{R}^n), \| h \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1 \Big\} \\ &= sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)||h(\xi)|\mathrm{d}\xi : h \in L^1(\mathbb{R}^n), \| h \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1 \Big\} \end{aligned}$$

za svako $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ što implicira

$$\| m \|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \| |m|^2 \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{h \in L^1, \|h\|_{L^1} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2 |h(\xi)| \mathrm{d}\xi. \tag{2.17}$$

Kako $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sledi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(\xi)|\mathrm{d}\xi < \infty$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\ (h(\xi))^{\frac{1}{2}}|^2 \mathrm{d}\xi < \infty$$
$$\Leftrightarrow$$
$$|h|^{\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Dakle, kombinujući (2.16) i (2.17) dobijamo

$$\| m \|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \| |m|^2 \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{h\in L^1, \|h\|_{L^1}\leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2 |h(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$$

$$\leq \| M \|^2_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \| g \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \| M \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} < \infty,$$

pa sledi $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sada,

$$\| m(D_x)f \|_{L^2} = \| \mathcal{F}^{-1}(M\hat{f}) \|_{L^2} = \| M\hat{f} \|_{L^2} \leq \| M \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \| \hat{f} \|_{L^2},$$

pa je

$$\| m(D_x) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq \| M \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} .$$

Sa druge strane,

$$\| Mf \|_{L^2} = \| M\mathcal{F}(\check{f}) \|_{L^2} = \| \mathcal{F}(m(D_x)\check{f}) \|_{L^2} = \| m(D_x)\check{f} \|_{L^2}$$

$$\leq \| m(D_x) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \| \check{f} \|_{L^2},$$

pa konačno sledi

$$\| M \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq \| m(D_x) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)},$$

odnosno

$$\| M \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = \| m(D_x) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)},$$

pa je i

$$\| m \|_{L^\infty} \leq \| m(D_x) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)},$$

što je i trebalo dokazati. □

2.4 Temperirane distribucije i Furijeova transformacija

Videli smo u prethodnom odeljku, da se Furijeova transformacija može neprekidno proširiti sa prostora Švarcovih funkcija na prostor $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ono što ovde želimo da uradimo jeste da proširimo Furijeovu transformaciju sa prostora funkcija na neki prostor distribucija, a da pritom definicija Furijeove transformacije bude konzistentna sa dosadašnjom, odnosno sa definicijom Furijeove transformacije na $L^1(\mathbb{R}^n)$. Traženi prostor distribucija postoji, on je dual prostora Švarcovih funkcija i elementi koji mu pripadaju zovu se *temperirane distribucije.*

Definicija 2.4.1. *Prostor temperiranih distribucija je prostor linearnih i neprekidnih preslikavanja* $f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *i označavamo ga sa* $S'(\mathbb{R}^n) := (S(\mathbb{R}^n))'$. *Niz* $f_k \in S'(\mathbb{R}^n)$ *konvergira ka* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *ako i samo ako*

$$\lim_{k\to\infty} \langle f_k, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle \text{ za sve } \phi \in S(\mathbb{R}^n),$$

gde je $\langle f, \phi\rangle := f(\phi)$.

Napomena 2.4.2. *1.U literaturi se temperirane distribucije zovu i distribucije sporog rasta.*
2. Linearno preslikavanje $f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *je neprekidno ako i samo ako postoji neko* $m \in \mathbb{N}_0$ *i konstanta* $C > 0$ *tako da*

$$|\langle f, \phi\rangle| \le C|\phi|_{m,S} \text{ za sve } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Definicija 2.4.3. *Neka* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$. *Tada je* F *regularna temperirana distribucija ako postoji neka* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *takva da* $\langle x\rangle^{-N} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *za neko* $N \in \mathbb{N}_0$ *i* $F = F_f$, *gde je*

$$\langle F_f, \phi\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\mathrm{dx},$$

za sve $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Da je regularna temperirana distribucija dobro definisana obrazloženje sledi u nastavku. Neka je $F \in S'(\mathbb{R}^n)$. Trivijalno važi da je F linearna. Važi

$$|\langle F_f, \phi\rangle| = |\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\mathrm{dx}| = |\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\langle x\rangle^N}\langle x\rangle^N\phi(x)\mathrm{dx}|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{f(x)}{\langle x\rangle^N}||\langle x\rangle^N\phi(x)|\mathrm{dx} \le C|\phi|'_{N,S} \,\|\frac{f(x)}{\langle x\rangle^N}\|_{L^1} = C_1|\phi|'_{N,S}$$

za sve $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, zbog Napomene (2.2.6). Dakle, F je i neprekidna na osnovu 2. dela Napomene (2.4.2), pa je Definicija (2.4.3) dobra.

Takođe, na osnovu Definicije (2.4.3) dolazimo do zaključka da svaka funkcija f koja je lokalno integrabilna, i za nju važi $\langle x \rangle^{-N} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, za neko $N \in \mathbb{N}_0$, određuje regularnu temperiranu distribuciju F_f datu sa

$$\langle F_f, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\mathrm{dx},$$

za sve $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$. Prirodno se postavlja pitanje, da li različite funkcije mogu da definišu istu regularnu temperiranu distribuciju. Odnosno, da li $F_{f_1} = F_{f_2}$ implicira $f_1 = f_2$? Odgovor je potvrdan, tj. ako $\langle F_{f_1}, \phi \rangle = \langle F_{f_2}, \phi \rangle$ za sve $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, tada

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)\phi(x)\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x)\phi(x)\mathrm{dx}$$

odakle nalazimo da važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_1(x) - f_2(x))\phi(x)\mathrm{dx} = 0.$$

Kako poslednja jednakost važi za sve $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, zbog Teoreme (1.1.11) (koristeći činjenicu da je $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gust u $S(\mathbb{R}^n)$) zaključujemo $f_1(x) = f_2(x)$. Stoga, funkcija $f(x)$ definiše jedinstvenu regularnu temperiranu distribuciju, pa je prirodno identifikovati funkciju $f(x)$ sa regularnom temperiranom distribucijom koju definiše tj. sa F_f. Ponekad se, ukoliko ne postoji opasnost od zabune, piše f umesto odgovarajuće distribucije F_f. Recimo, pišemo

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\mathrm{dx},$$

umesto $\langle F_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\mathrm{dx}$.

Primer 1. (Delta funkcija) Čuvena delta distribucija δ_0 definisana je kao

$$\langle \delta_0, \phi \rangle := \phi(0), \text{ za sve } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Generalno,

$$\langle \delta_x, \phi \rangle := \phi(x), \text{ za sve } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Može se pokazati da δ_x definiše temperiranu distribuciju za svako $x \in \mathbb{R}^n$.

Primer 2. (Hevisajdova funkcija) Neka je f Hevisajdova funkcija tj.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Tada f definiše regularnu temperiranu distribuciju tj. $f \in S'(\mathbb{R})$ jer $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ i npr. za $n = 2$ važi

$$\langle x \rangle^{-2} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

zbog

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1+|x|^2)^{\frac{2}{2}}} \mathrm{dx} = \int_0^\infty \frac{1}{1+|x|^2} \mathrm{dx} < \infty.$$

U nastavku definišemo Furijeovu transformaciju temperirane distribucije.

Definicija 2.4.4. *Neka $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Furijeova transformacija $\mathcal{F}[f]$ je definisana na sledeći način*

$$\langle \mathcal{F}[f], \phi \rangle := \langle f, \mathcal{F}[\phi] \rangle \text{ za sve } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Pre svega, primetimo da definicija ima smisla jer za $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ je i $\mathcal{F}[\phi] \in S(\mathbb{R}^n)$, pa je izraz sa desne strane prethodne jednakosti smislen.

Naš sledeći zadatak je, kao što smo na samom početku pomenuli, da pokažemo da je Definicija (2.4.4) konzistentna sa definicijom Furijeove transformacije na $L^1(\mathbb{R}^n)$, te to i činimo u nastavku.

Neka je $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $F_f \in S'(\mathbb{R}^n)$ regularna temperirana distribucija koju f definiše. Tada

$$\langle \mathcal{F}[F_f], \phi \rangle = \langle F_f, \mathcal{F}[\phi] \rangle$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\hat{\phi}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)\mathrm{dx}\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(\xi)\mathrm{d}\xi\phi(x)\mathrm{dx}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\phi(x)\mathrm{dx} = \left\langle F_{\hat{f}}, \phi \right\rangle,$$

gde je promena redosleda integrala moguća zbog Fubinijeve teoreme. Dakle, dobili smo

$$\mathcal{F}[F_f] = F_{\hat{f}},$$

odnosno rečima

Klasična Furijeova transformacija funkcije definiše distribuciju $F_{\hat{f}}$ i ta distribucija je Furijeova transformacija distribucije koju ta funkcija definiše.

Na ovaj način dolazimo do definicije Furijeove transformacije na prostoru temperiranih distribucija, odnosno koristeći definiciju Furijeove transformacije na $L^1(\mathbb{R}^n)$ prostoru funkcija, te su u tom smislu te dve definicije konzistentne.

Po istom principu dolazimo do definicije inverzne Furijeove transformacije definisane na prostoru $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definicija 2.4.5. *Neka $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Inverzna Furijeova transformacija $\mathcal{F}^{-1}[f]$ je definisana na sledeći način*

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \phi \rangle := \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\phi] \rangle \text{ za sve } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Sledeća propozicija tvrdi da je Furijeova transformacija temperirane distribucije temperirana distribucija. Štaviše, na ovaj način dobijamo da se Furijeova transformacija neprekidno proširuje do linearnog izomorfizma (linearnog, bijektivnog, neprekidnog preslikavanja sa neprekidnim inverznim preslikavanjem) na $S'(\mathbb{R}^n)$.

Propozicija 2.4.6. *Furijeova transformacija $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ je neprekidno linearno preslikavanje. Štaviše, $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ je linearni izomorfizam sa inverznim preslikavanjem $\mathcal{F}^{-1}$ datim kao u Definiciji (2.4.5).*

Dokaz. Neka $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Kao što smo već ustanovili, zbog Teoreme (2.2.7) sledi da je, $\mathcal{F}[f]$ dobro definisana.

Na osnovu iste te teoreme, $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ i s obzirom da važi

$$\langle \mathcal{F}[f], \phi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\phi] \rangle = \langle f \circ \mathcal{F}, \phi \rangle = (f \circ \mathcal{F})(\phi),$$

dobijamo $\mathcal{F}[f] = f \circ \mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$.

Za $f_1, f_2 \in S'(\mathbb{R}^n)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dobijamo

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\alpha f_1 + \beta f_2], \phi \rangle &= \langle \alpha f_1 + \beta f_2, \mathcal{F}[\phi] \rangle = \\ &= \alpha \langle f_1, \mathcal{F}[\phi] \rangle + \beta \langle f_2, \mathcal{F}[\phi] \rangle = \\ &= \alpha \langle \mathcal{F}[f_1], \phi \rangle + \beta \langle \mathcal{F}[f_2], \phi \rangle = \\ &= \langle \alpha \mathcal{F}[f_1] + \beta \mathcal{F}[f_2], \phi \rangle \end{aligned}$$

sledi da je $\mathcal{F}[f]$ linearni operator na S'. Pokažimo sad da je on i neprekidan operator, što pokazujemo preko nizovne neprekidnosti.

Pretpostavimo da niz funkcija f_k iz $S'(\mathbb{R}^n)$ konvergira ka $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, kad $k \to \infty$. Na osnovu Definicije (2.4.1) sledi

$$\langle \mathcal{F}[f_k], \phi \rangle = \langle f_k, \mathcal{F}[\phi] \rangle \xrightarrow{k \to \infty} \langle f, \mathcal{F}[\phi] \rangle = \langle \mathcal{F}[f], \phi \rangle$$

za sve $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$. Dakle, zaista $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$.

Ostaje da se pokaže da sve ove osobine koje važe za $\mathcal{F}[f]$ na prostoru $S'(\mathbb{R}^n)$, važe i za njenu inverznu transformaciju. Kako $\mathcal{F}^{-1}[f]$ ima iste osobine kao $\mathcal{F}[f]$ (tačnije, $\mathcal{F}^{-1}[f]$ je dobro definisan, linearan, neprekidan operator na $S'(\mathbb{R}^n)$) i važi

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]], \phi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[\phi] \right\rangle = \left\langle f, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]], \right\rangle = \langle f, \phi \rangle$$

za sve $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, što pokazuje da je $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ bijekcija, pa uzimajući u obzir sve ove zaključke, ovaj dokaz je završen. □

2.5 Konvolucija

Najpre, definišemo konvoluciju dve funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, za $1 \leq p \leq \infty$ na sledeći način:

Definicija 2.5.1. *Konvolucija dve funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$ je data sa*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{dy} \tag{2.18}$$

za skoro sve $x \in \mathbb{R}^n$.

Da je definicija konvolucije dve funkcije zaista dobra, odnosno da integral u (2.18) konvergira, pogledati [2], strana 9, Teorema 3.1.

U sledećoj teoremi pokazaćemo da je konvolucija dve Lebeg-integrabilne funkcije ponovo Lebeg-integrabilna funkcija, i ustanovićemo čemu je jednaka Furijeova transformacija konvolucije dve ovakve funkcije.

Teorema 2.5.2. *Neka $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tada $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.*

Dokaz. Važi sledeće

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d(x,y)} = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\mathrm{dxdy} =$$
$$= \| f \|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\mathrm{dy} = \| f \|_1 \| g \|_1 < \infty$$

zbog Fubinijeve teoreme, pa zaista $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Takođe važi

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(f*g)(x)\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{dy}\Big)\mathrm{dx} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{dx}\Big)\mathrm{dy} = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-i(z+y)\cdot\xi}\mathrm{dz}\Big)\mathrm{dy} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-iy\cdot\xi}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-iz\cdot\xi}\mathrm{dz}\Big)\mathrm{dy} = \hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi),$$

pri čemu smo koristili Fubinijevu teoremu i smenu $z = x - y$. □

Na prostoru $S(\mathbb{R}^n)$ konvolucija dve brzo opadajuće funkcije se definiše kao u (2.18). U korolaru koji sledi dokazaćemo da je konvolucija komutativna operacija i ustanovićemo čemu je jednak izvod konvolucije dve brzo opadajuće funkcije.

Korolar 2.5.3. *Neka $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Tada $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$, gde je konvolucija definisana kao u (2.18). Štaviše, $f * g = g * f$ za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i*

$$\partial_x^\alpha (f*g)(x) = (\partial_x^\alpha f) * g(x) = f * (\partial_x^\alpha g)(x)$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Kako je $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ zbog Leme (2.2.4), možemo primeniti prethodnu teoremu

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \text{ za sve } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

gde je $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$ zbog Leme (2.2.5) jer je $S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty_{poly}$. Štaviše, zbog Teoreme (2.3.1) dobijamo

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}] \in S(\mathbb{R}^n).$$

odakle sledi

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}] = \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}\hat{f}] = g * f.$$

Dokažimo sad drugi deo teoreme, odnosno da važi

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f * g)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) * g(x) = f * \left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)(x), \tag{2.19}$$

gde $k \in \{1, ..., n\}$, pa će induktivno slediti opšti slučaj. Kako su zadovoljene pretpostavke Leme (1.1.5), važi

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f * g)(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{dy}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_k}(f(x-y)g(y))\mathrm{dy} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x-y)g(y)\mathrm{dy} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} * g\right)(x),$$

pa važi

$$\partial^\alpha_x (f * g)(x) = (\partial^\alpha_x f) * g(x).$$

Menjajući redosled f i g dobijamo da za svako $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ važi

$$\partial^\alpha_x (f * g)(x) = f * (\partial^\alpha_x g)(x),$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$. □

Na kraju, želimo da definišemo konvoluciju brzo opadajuće funkcije i temperirane distribucije, $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $g \in S'(\mathbb{R}^n)$. Pre svega, uočimo da za sve $f, g, \phi \in S(\mathbb{R}^n)$ važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\phi(x)\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} (g * f)(x)\phi(x)\mathrm{dx}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\phi(x)\mathrm{dydx}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\phi(x)\mathrm{dxdy}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\widetilde{g} * \phi)(y)\mathrm{dy}$$

zbog Fubinijeve teoreme, gde $\widetilde{g} = g(-x)$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Isti zaključak važi i za $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ za koje važi $\langle x \rangle^{-N} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ za neko $N \in \mathbb{N}_0$. Iz tog razloga sledeća definicija ima smisla:

Definicija 2.5.4. *Neka $f \in S'(\mathbb{R}^n), g \in S(\mathbb{R}^n)$. Tada konvolucija funkcija f i g je definisana sa*

$$\langle f * g, \phi \rangle = \left\langle f, \widetilde{g} * \phi \right\rangle, \text{ za } \phi \in S(\mathbb{R}^n)$$

gde je $\widetilde{g} = g(-x)$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$.

Napomena 2.5.5. *Ako je f regularna temperirana distribucija, račun iznad pokazuje da je definicija konvolucije $f * g$ tj. Definicija (2.5.4) konzistentna sa definicijom (2.18) tj. sa*

$$(f * g)(x) := \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{dy} \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$

2.6 Prostori Soboljeva i Besela

Koncept slabog izvoda je neophodan za definisanje prostora Soboljeva. Stoga, u nastavku upoznajemo se sa pojmom slabog izvoda temperirane distribucije.

Definicija 2.6.1. *Neka $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Za distribuciju $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ kažemo da ima slabi izvod g reda α, ako je*

$$\langle g, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial_x^\alpha \phi \rangle, \text{ za sve } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Za g koristimo oznaku $\partial_x^\alpha f$.
Štaviše, ako $h \in C_{poly}^\infty(\mathbb{R}^n)$, tada proizvod $fh \in S'(\mathbb{R}^n)$ definišemo kao

$$\langle fh, \phi \rangle := \langle f, h\phi \rangle \text{ za sve } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Navedena definicija ima smisla jer za $h \in C_{poly}^\infty$ i $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ na osnovu Leme (2.2.5) važi $h\phi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Napomena 2.6.2. *1. Koristimo istu oznaku za slabe i klasične izvode, ali iz konteksta bi trebalo da bude jasno o kojoj se interpretaciji radi.*
2. Primetimo da, ako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ k-puta neprekidno diferencijabilna funkcija i $\langle x \rangle^{-N} \partial_x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ za sve $|\alpha| \leq k$, onda f možemo da posmatramo kao temperiranu distribuciju. Štaviše, svi slabi izvodi funkcije f reda $\leq k$ se poklapaju sa klasičnim izvodima tj.

$$\langle \partial_x^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_x^\alpha \phi(x) \mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) \phi(x) \mathrm{dx},$$

jer se uzastopnom primenom parcijalne integracije, odnosno

$$\int_{\mathbb{R}} f \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathrm{dx_j} = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j} \phi \mathrm{dx_j}$$

dobija poslednja jednakost.
Dakle, pojam slabog izvoda uopštava pojam klasičnog izvoda funkcije, pri tome postoje funkcije koje imaju slabi izvod, ali nemaju izvod u klasičnom smislu.
3. Postoje funkcije koje nisu čak ni neprekidne, ali imaju izvod u slabom smislu. Najbolji primer je Hevisajdova funkcija, za koju smo pokazali da definiše distribuciju tj. $f(x) \in S'(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

koja nije ni neprekidna u nuli, ali ima slabi izvod. Njen slabi izvod f' je

$$\langle f', \phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) \mathrm{dx} = -\int_0^\infty \phi'(x) \mathrm{dx} = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$$

za sve $\phi \in S(\mathbb{R})$. Stoga, dobili smo da je slabi izvod temperirane distribucije distribucija, i to u ovom slucaju $f' = \delta_0$ je delta distribucija.

Definicija 2.6.3. *Neka* $1 \leq p \leq \infty$ *i* $m \in \mathbb{N}_0$. L^p- *prostor Soboljeva reda* m *definišemo kao prostor svih funkcija* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *čiji slabi izvodi* $\partial_x^\alpha f$ *postoje i* $\partial_x^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *za sve* $|\alpha| \leq m$, *odnosno*

$$W_p^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \partial_x^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ za sve } |\alpha| \leq m\}.$$

Na prostoru $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ *definišemo normu*

$$\| f \|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq m} \| \partial_x^\alpha f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p)^{\frac{1}{p}}, & ako\, 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \| \partial_x^\alpha f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, & ako\, p = \infty. \end{cases}$$

U prethodnoj definiciji, izvod $\partial_x^\alpha f$ je definisan kao izvod u $S'(\mathbb{R}^n)$. Pritom, $\partial_x^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ako je $\partial_x^\alpha f$ regularna distribucija u $L^p(\mathbb{R}^n)$, odnosno pretpostavljamo da postoji $g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tako da važi

$$\langle \partial_x^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(x) \partial_x^\alpha \phi(x) \mathrm{dx} \text{ za sve } \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Uobičajeno, identifikujemo $\partial_x^\alpha f$ i g_α.

Napomena 2.6.4. *Važi* $L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ *za sve* $1 \leq p \leq \infty$. *Pritom, funkcije iz* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *posmatramo kao regularne distribucije u* $S'(\mathbb{R}^n)$.

Osobina Furijeove transformacije (2.4) važi i na prostoru $W_2^m(\mathbb{R}^n)$, odnosno važi teorema koja sledi.

Teorema 2.6.5. *Neka* $f \in W_2^m(\mathbb{R}^n), m \in \mathbb{N}_0$. *Tada za svako* $|\alpha| \leq m$ *važi*

$$\mathcal{F}[\partial_x^\alpha f](\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \text{ za skoro sve } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz. Neka $f \in W_2^m(\mathbb{R}^n)$. Tada $g_\alpha := \partial_x^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ za sve $|\alpha| \leq m$ i zato $\hat{g}_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)$ zbog Planšerelove teoreme. Štaviše,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_\alpha(\xi) \overline{\phi(\xi)} \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) \overline{\check{\phi}(x)} \mathrm{dx} &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\partial_x^\alpha \check{\phi}(x)} \mathrm{dx} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{(i\xi)^\alpha \phi(\xi)} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \overline{\phi(\xi)} \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

za sve $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ zbog Planšerelove teoreme, definicije slabog izvoda u $L^p(\mathbb{R}^n)$ i Teoreme (2.1.2). S obzirom da je $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ proizvoljno, dobijamo

$$\mathcal{F}[\partial_x^\alpha f](\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

za skoro sve $\xi \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

Kao posledicu dobijamo da za bilo koje $f \in W_2^m(\mathbb{R}^n)$ važi

$$\| f \|^2_{W_2^m(\mathbb{R}^n)} = \big(\sum_{|\alpha|\le m} \| \partial_x^\alpha f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \big)^{\frac{1}{2}2} = \sum_{|\alpha|\le m} \| \partial_x^\alpha f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{(2\pi)^n} \| \mathcal{F}[\partial_x^\alpha f] \|^2_{L^2} = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{(2\pi)^n} \| (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \|^2_{L^2}$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{(2\pi)^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \Big)^{\frac{1}{2}2} = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$$

zbog Planšerelove teoreme, i kako važi da je

$$\langle \xi \rangle^m = (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} = 1 + |\xi|^2 + |\xi|^4 + ... + |\xi|^m = \sum_{|\alpha|\le m} |\xi^\alpha|^2$$

dobijamo da za $f \in W_2^m(\mathbb{R}^n)$ važi

$$\| f \|^2_{W_2^m(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^m |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Ovo je ujedno i motivacija za uvođenje Beselovih prostora.

Definicija 2.6.6. *Neka $s \in \mathbb{R}$. Tada L^2-Beselov prostor, u oznaci $H_2^s(\mathbb{R}^n)$, definišemo sa*

$$H_2^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in S'(\mathbb{R}^n) : \langle D_x \rangle^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

a norma na prostoru $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ je data sa

$$\| u \|_{H_2^s} := \| u \|_{s,2} := \| \langle D_x \rangle^s u \|_2,$$

gde je $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ i

$$\langle D_x \rangle^s f = \mathcal{F}^{-1}[\langle \xi \rangle^s \hat{f}] \text{ za sve } f \in S'(\mathbb{R}^n).$$

Često pišemo $H^s(\mathbb{R}^n)$ umesto $H_2^s(\mathbb{R}^n)$. U odeljku 3.1 pokazaćemo da za svako $s \in \mathbb{R}$ funkcija $\langle \xi \rangle^s$ je glatka funkcija i važi

$$|\partial_\xi^\alpha \langle \xi \rangle^s | \le C(1 + |\xi|)^{s-|\alpha|}, \text{ za sve } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i neku konstantu $C > 0$. Odatle sledi $\langle\xi\rangle^s \in C^\infty_{poly}(\mathbb{R}^n)$ i važi $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ za sve $f \in S(\mathbb{R}^n)$, pa zaključujemo $\langle\xi\rangle^s \hat{f}(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$ zbog Leme (2.2.5). Takođe važi, $\langle\xi\rangle \hat{f}(\xi) \in S'(\mathbb{R}^n)$ za sve $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ (pogledati Definiciju (2.6.1)). Dakle, sledi da $\langle D_x\rangle^s : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ zbog Propozicije (2.4.6).

Napomena 2.6.7. *1. Prostori $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ su Hilbertovi, pri čemu je unutrašnji proizvod dat sa*

$$(u,v)_{H_2^s} := (\langle D_x\rangle^s u, \langle D_x\rangle^s v)_{L^2}, \text{ za sve } u,v \in H_2^s(\mathbb{R}^n).$$

Takođe su i $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ Hilbertovi prostori sa unutrašnjim proizvodom

$$(f,g)_{W_2^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha f(x) \overline{\partial_x^\alpha g(x)} \mathrm{dx}$$

2. Može se pokazati da je preslikavanje

$$\langle D_x\rangle^s : H_2^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \tag{2.20}$$

linearni izomorfizam, za $s \in \mathbb{R}$.

3. Za $s_1 \ge s_2$ je $H_2^{s_1} \subset H_2^{s_2}$. Obrazloženje sledi u nastavku.
Kako je $\langle\xi\rangle^{s_2-s_1} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, na osnovu Leme (2.3.4) važi $\langle D_x\rangle^{s_2-s_1} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ je ograničen operator. Dobijamo

$$\| u \|_{s_2,2} = \| \langle D_x\rangle^{s_2} u \|_2 = \| \langle D_x\rangle^{s_2-s_1} \langle D_x\rangle^{s_1} u \|_2 \le C \| \langle D_x\rangle^{s_1} u \|_2 = C \| u \|_{s_1,2} .$$

Parametar $s \in \mathbb{R}$ u definiciji prostora $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ određuje regularnost funkcije $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$, odnosno, govori koliko izvoda funkcije $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$ pripada prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Preciznije, za $s \in \mathbb{N}_0$ važi:

Teorema 2.6.8. *Neka $m \in \mathbb{N}_0$. Tada $W_2^m(\mathbb{R}^n) = H_2^m(\mathbb{R}^n)$ i ova dva prostora imaju ekvivalentne norme.*

Dokaz. Videti [1], strana 29, Lema 2.41. □

Opštije, definišemo:

Definicija 2.6.9. *Neka $s \in \mathbb{R}$ i neka $1 < p < \infty$. Tada je L^p-Beselov prostor reda s, u oznaci $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, definisan sa*

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : \langle D_x\rangle^s f \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

a norma na prostoru $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ je data sa

$$\| f \|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} := \| \langle D_x\rangle^s f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Može se pokazati da sa ovom normom prostor $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ je Banahov.

3 Pseudo-diferencijalni operatori na $\mathbb{R}^n$

Videli smo, u prethodnom poglavlju, dva važna rezultata iz teorije Furijeove transformacije, formulu inverzne Furijeove transformacije Lebeg integrabilne funkcije i Planšerelevu teoremu. Sa idejom da definišemo osnovnu klasu simbola sa kojom ćemo u ovom poglavlju raditi, ovi rezultati poslužiće nam kao motivacija za upoznavanje osnovnog primera pseudo-diferencijalnog operatora. Najveću pažnju u ovom poglavlju posvećujemo problemu kompozicije dva pseudo-diferencijalna operatora. Pritom, definisaćemo posebnu vrstu integrala-oscilatorne integrale koji će imati glavnu ulogu u uspešnom rešavanju pomenutog problema.

3.1 Klasa simbola i osnovne osobine

Koristeći osnovnu osobinu Furijeove transformacije, tačnije (2.4), za $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ važi

$$\mathcal{F}[D^\alpha \phi] = \xi^\alpha \mathcal{F}[\phi(\xi)],$$

pa po formuli inverzne Furijeove transformacije dobijamo

$$D^\alpha \phi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\xi^\alpha \mathcal{F}[\phi(\xi)]] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi) đ\xi.$$

Za linearni parcijalni diferencijalni operator sa promenljivim koeficijentima na $\mathbb{R}^n$, odnosno $a(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$, gde su koeficijenti $a_\alpha(x)$ funkcije definisane na $\mathbb{R}^n$, iz prethodne formule dobijamo

$$a(x, D)\phi(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \phi(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi) đ\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(x, \xi) \hat{\phi}(\xi) đ\xi,$$

gde je simbol operatora $a(x, D)$ polinom po ξ tj. sa $a(x, \xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ smo ga označili. Cilj je proširiti prethodnu formulu na veću klasu simbola, koja sadrži još funkcija pored polinoma. Operatori koji odgovaraju ovim funkcijama ne moraju biti diferencijalni operatori i zovu se pseudo-diferencijalni operatori. Ideja je da se račun operatora zameni računom odgovarajućih simbola. Simboli koje ćemo mi koristiti u ovom radu pripadaju standardnoj klasi simbola koju je uveo Hermander i definišemo ih u nastavku (za detalje pogledati knjigu autora Hermandera, [14]).

Definicija 3.1.1. *Neka $m \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Sa $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ označavamo vektorski prostor svih glatkih funkcija $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ takvih da za proizvoljne multi-indekse $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ i $\beta \in \mathbb{N}^n_0$ postoji konstanta $C_{\alpha,\beta}$ tako da je*

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}, \tag{3.1}$$

pri čemu $C_{\alpha,\beta}$ ne zavisi od $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Funkcija p se zove pseudo-diferencijalni simbol (ili kraće simbol), a m se zove red funkcije p. Štaviše, definišemo

$$S^{\infty}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) := \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \tag{3.2}$$

$$S^{-\infty}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \tag{3.3}$$

Umesto $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ pisaćemo $S^m_{1,0}$.

Primetimo, da je $S^l_{1,0} \leq S^m_{1,0}$, za $l \leq m$, pa definicije (3.2) i (3.3) imaju smisla.

Ako je $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ simbol, tada

$$p(x, D_x)f(x) := OP(p)f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{f}(\xi) đ\xi \ \ \textit{za sve } x \in \mathbb{R}^n \tag{3.4}$$

definiše pridruženi pseudo-diferencijalni operator, gde je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ pogodno izabrana funkcija. Ako $f \in S(\mathbb{R}^n)$, tada $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$, pa Lema (2.2.5) implicira $p(x,\xi)\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ kao funkcija od ξ, za svako fiksirano $x \in \mathbb{R}^n$. Stoga, na osnovu Leme (2.2.4) integral u (3.4) postoji i samim tim $p(x, D_x)f$ je dobro definisan. Takođe, kasnije ćemo pokazati da je $p(x, D_x) : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ neprekidno preslikavanje.

Primer. Navešćemo nekoliko primera funkcija koje su simboli.

1. *Linearni diferencijalni operator.* Neka je $p(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha_x$ linearni parcijalni diferencijalni operator na $\mathbb{R}^n$. Ako su svi koeficijenti $a_\alpha(x) \in C^\infty$ i imaju ograničene sve izvode, tada polinom

$$p(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

je u $S^m_{1,0}$ i pritom, $p(x, D_x)f$ je pseudo-diferencijalni operator za svaku funkciju $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Pokazaćemo ovu jednostavnu tvrdnju. Za proizvoljne multi-indekse $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^n_0$ važi

$$|\partial^\gamma_\xi \partial^\delta_x p(x,\xi)| = |\partial^\gamma_\xi \partial^\delta_x \,(\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha)| \leq \sum_{|\alpha|\leq m} C_{\alpha,\delta}|\partial^\gamma_\xi \xi^\alpha|$$

gde je

$$C_{\alpha,\delta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\delta_x\, a_\alpha(x)|$$

i $C_{\alpha,\delta}$ postoji jer svi koeficijenti $a_\alpha(x)$ imaju ograničene sve izvode.
Lako se može pokazati

$$\partial_\xi^\gamma \xi^\alpha = \begin{cases} \gamma!\binom{\alpha}{\gamma}\xi^{\alpha-\gamma}, & \gamma \le \alpha \\ 0, & inače \end{cases}$$

za sve $\xi \in \mathbb{R}^n$. Stoga, dobijamo

$$|\partial_\xi^\gamma \partial_x^\delta p(x,\xi)| \le \sum_{|\alpha|\le m} C_{\alpha,\delta}\gamma!\binom{\alpha}{\gamma}|\xi^{\alpha-\gamma}| \le \sum_{|\alpha|\le m} C_{\alpha,\delta}\gamma!\binom{\alpha}{\gamma}|\xi|^{|\alpha|-|\gamma|}$$

$$\le \sum_{|\alpha|\le m} C_{\alpha,\delta}\gamma!\binom{\alpha}{\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|} \le C'_{\delta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}$$

za sve $x,\xi \in \mathbb{R}^n$, gde je

$$C'_{\delta,\gamma} = \sum_{|\alpha|\le m} C_{\alpha,\delta}\gamma!\binom{\alpha}{\gamma}.$$

Da je za simbol $p(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, pridruženi pseudo-diferencijalni operator $p(x,D_x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D_x^\alpha$, sledi iz razmatranja na samom početku ovog odeljka.
Dakle, svaki linearni diferencijalni operator sa glatkim, ograničenim koeficijentima i ograničenim izvodima koeficijenata je pseudo-diferencijalni operator.

Posebno, *Laplasijan* $\triangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ je pseudo-diferencijalni operator pridružen simbolu $-|\xi|^2$ jer

$$-|\xi|^2 = -(\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2) = -\xi_1^2-\xi_2^2-...-\xi_n^2 = \sum_{j=1}^n -\xi_j^2$$

što implicira $p(x,\xi) = p(\xi) := -|\xi|^2 \in S^2_{1,0}$, pa je pridruženi pseudo-diferencijalni operator

$$\begin{aligned} p(x,D_x)f &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(-|\xi|^2)\hat{f}(\xi)đ\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(-\xi_1^2-\xi_2^2-...-\xi_n^2)\hat{f}(\xi)đ\xi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\xi_1^2\hat{f}(\xi)đ\xi - \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\xi_2^2\hat{f}(\xi)đ\xi - ... - \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\xi_n^2\hat{f}(\xi)đ\xi \\ &= -\mathcal{F}^{-1}[\xi_1^2\hat{f}(\xi)] - \mathcal{F}^{-1}[\xi_2^2\hat{f}(\xi)] - ... - \mathcal{F}^{-1}[\xi_n^2\hat{f}(\xi)]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sada, na osnovu (2.4) sledi da je

$$D_j^\alpha f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\xi_j^\alpha \hat{f}(\xi)] \text{ za sve } j \in \{1,...,n\},$$

pa je izraz (3.5) jednak

$$= -D_1^2 f(x) - D_2^2 f(x) - ... - D_n^2 f(x) = -(D_1^2 f(x) + D_2^2 f(x) + ... + D_n^2 f(x))$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} D_j^2 f(x) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j)^2 f(x) = \triangle f.$$

što smo i trebali dokazati.

2. *Japanska zagrada* $\langle \xi \rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$ je pseudo-diferencijalni simbol reda 1, pridruženi pseudo-diferencijalni operator je

$$\langle D_x \rangle f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sqrt{1+|\xi|^2} \hat{f}(\xi) đ\xi,$$

i možemo ga označiti kao *kvadratni koren od* $1-\triangle$, tj. $\langle D_x \rangle = \sqrt{1-\triangle}$. Generalno, važi $\langle \xi \rangle^m \in S^m_{1,0}$ za svako $m \in \mathbb{R}$ i $\langle D_x \rangle^m = (1-\triangle)^{\frac{m}{2}}$.
Obrazloženje je sledeće. Označimo $p(x,\xi) := \langle \xi \rangle^m$. Neka je $f(y) = (1+y)^{\frac{m}{2}}$ i $g(\xi) = |\xi|^2$. Tada

$$p(x,\xi) = f(g(\xi)).$$

Pokazaćemo da $\langle \xi \rangle^m \in S^m_{1,0}$ korišćenjem Fa di Brunove formule (1.1.9). Važi

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| = |\partial_\xi^\alpha p(\xi)| = |\partial_\xi^\alpha [(f\circ g)(\xi)]|$$

$$= |\sum_{1\le l\le \alpha} \sum_{\substack{\gamma_1+\gamma_2+...+\gamma_l=\alpha \\ |\gamma_1|\ge 1,...,|\gamma_l|\ge 1}} f^{(l)}(g(\xi))\, (\partial_\xi^{\gamma_1} g(\xi)) \cdot ... \cdot (\partial_\xi^{\gamma_l} g(\xi))|$$

$$\le \sum_{1\le l\le \alpha} \sum_{\substack{\gamma_1+\gamma_2+...+\gamma_l=\alpha \\ |\gamma_1|\ge 1,...,|\gamma_l|\ge 1}} C_l (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}-l}\, |(\partial_\xi^{\gamma_1} g(\xi)) \cdot ... \cdot (\partial_\xi^{\gamma_l} g(\xi))|$$

$$\le C(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}-l}(1+|\xi|)^{2-|\gamma_1|}...(1+|\xi|)^{2-|\gamma_l|}$$

$$\le C \langle \xi \rangle^{-2l+m} (1+|\xi|)^{2l-|\alpha|} \le C(1+|\xi|)^{-2l+m}(1+|\xi|)^{2l-|\alpha|}$$

$$\le C \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|},$$

pri čemu smo koristili $|f^{(l)}(y)| \le C_l(1+y)^{\frac{m}{2}-l}$ i Napomenu (2.2.6). Stoga, dobili smo $\langle \xi \rangle^m \in S^m_{1,0}$.

Na $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ definišemo niz semi-normi koje su povezane sa nejednakošću (3.1) na prirodan način:

$$|p|_k^{(m)} := \max_{|\alpha|,|\beta|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\xi\in\mathbb{R}^n} |D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-m+|\alpha|}$$

za $k \in \mathbb{N}$. Ovde
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n} |D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-m+|\alpha|}$$
je najmanja konstanta $C_{\alpha,\beta}$ takva da (3.1) važi za sve $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$ i fiksirane $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.

Propozicija 3.1.2. *Neka su $p_1 \in S_{1,0}^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ i $p_2 \in S_{1,0}^{m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ dva simbola i definišimo $p(x,\xi) := p_1(x,\xi)p_2(x,\xi)$ za sve $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Tada $p \in S_{1,0}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Štaviše, za bilo koje $k \in \mathbb{N}_0$ postoji konstanta C_k koja zavisi samo od k i n tako da*
$$|p|_k^{(m_1+m_2)} \leq C_k |p_1|_k^{(m_1)} |p_2|_k^{(m_2)}.$$

Dokaz. Rezultat se lako može pokazati korišćenjem Lajbnicove formule. □

U nastavku navodimo glavni rezultat ovog odeljka.

Teorema 3.1.3. *Neka je $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$ pseudo-diferencijalni simbol. Tada je*
$$p(x, D_x) : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$
ograničeno preslikavanje. Preciznije, za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $C_k > 0$ tako da
$$|p(x,D_x)f|_{k,S} \leq C_k |p|_k^{(m)} |f|_{m+2(n+1)+k,S}$$
za sve $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Kako $f \in S(\mathbb{R}^n)$, sledi $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$. Tada
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |p(x,D_x)f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{f}(\xi) \langle\xi\rangle^{-n-1} \langle\xi\rangle^{-m} \langle\xi\rangle^{n+m+1} \mathrm{d}\xi \right|$$
$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{ix\cdot\xi}| |\langle\xi\rangle^{-n-1}| |\langle\xi\rangle^{-m} p(x,\xi)| |\langle\xi\rangle^{n+m+1} \hat{f}(\xi)| \mathrm{d}\xi$$
$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-n-1} \mathrm{d}\xi |p|_0^{(m)} \parallel \langle\xi\rangle^{n+m+1} \hat{f}(\xi) \parallel_\infty$$
$$\leq |p|_0^{(m)} C_m |\hat{f}|_{m+n+1,S} \leq C|p|_0^{(m)} |f|_{m+2n+2,S} \tag{3.6}$$

Sa ciljem da procenimo izvode, računamo
$$\partial_{x_j}(p(x,D_x)f(x)) = \partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)đ\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} i\xi_j p(x,\xi)\hat{f}(\xi)đ\xi + \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \partial_{x_j} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)đ\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi) \widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) đ\xi + \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \partial_{x_j} p(x,\xi) \hat{f}(\xi) đ\xi =$$

$$= p(x, D_x)(\partial_{x_j} f)(x) + (\partial_{x_j} p)(x, D_x) f(x) \tag{3.7}$$

gde smo primenili Teoremu (1.1.6) da bi zamenili redosled integraljenja i diferenciranja. Iz (3.7) primenom (3.6) dobijamo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_{x_j} p(x, D_x) f(x)| \leq C(|p|_0^{(m)} |\partial_{x_j} f|_{m+2n+2,S} + |\partial_{x_j} p|_0^{(m)} |f|_{m+2n+2,S})$$

$$\leq C' |p|_1^{(m)} |f|_{m+2n+3,S}. \tag{3.8}$$

Slično,

$$i x_j p(x, D_x) f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{\xi_j} e^{ix\cdot\xi}) p(x,\xi) \hat{f}(\xi) đ\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi) \partial_j \hat{f}(\xi) đ\xi + \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} (\partial_{\xi_j} p)(x,\xi)) \hat{f}(\xi) đ\xi =$$

$$= p(x, D_x)(i x_j f(x)) + (\partial_{\xi_j} p)(x, D_x) f$$

i stoga

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x_j p(x, D_x) f(x)| \leq C(|p|_0^{(m)} |x_j f|_{m+2n+2,S} + |\partial_{\xi_j} p|_0^{(m-1)} |f|_{m+2n+2,S})$$

$$\leq C |p|_1^{(m)} |f|_{m+2n+3,S} \tag{3.9}$$

zbog (3.6) i zapažanja da je $\partial_{\xi_j} p(x,\xi)$ reda $m-1$ i $|\partial_{\xi_j} p|_0^{(m-1)} \leq |p|_1^{(m)}$ zbog definicije semi-normi. Koristeći (3.8) i (3.9), matematičkom indukcijom se lako može pokazati

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta p(x, D_x) f(x)| \leq C_{\alpha,\beta} |p|_{|\alpha|+|\beta|}^{(m)} |f|_{m+2(n+1)+|\alpha|+|\beta|,S}$$

uniformno u $x \in \mathbb{R}^n$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Dakle, važi

$$|p(x, D_x) f|_{k,S} \leq C_k |p|_k^{(m)} |f|_{m+2(n+1)+k,S}$$

za sve $f \in S(\mathbb{R}^n)$. □

Na kraju, pokazujemo jednostavnu, ali važnu nejednakost:

Teorema 3.1.4. *(Pitrijeva nejednakost) Neka* $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}, \xi \in \mathbb{R}^n$. *Tada za sve* $s \in \mathbb{R}$ *važi*

$$\langle\xi\rangle^s \leq 2^{|s|} \langle\xi - \eta\rangle^{|s|} \langle\eta\rangle^s, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

Dokaz. Imamo

$$\langle\xi\rangle^2 = (1+|\xi|^2) \leq (1+|\xi|)^2 \leq (1+|\xi|)^2 + (1-|\xi|)^2 = 2(1+|\xi|^2),$$

pa je

$$\langle\xi\rangle \leq (1+|\xi|) \leq \sqrt{2}\,\langle\xi\rangle \ \ za\ sve\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

Moguća su dva slučaja. Ako je $s > 0$,

$$1+|\xi| = 1+|\xi-\eta+\eta| \leq 1+|\xi-\eta|+|\eta| \leq 1+|\xi-\eta|+|\eta|+|\xi-\eta||\eta| =$$

$$= (1+|\xi-\eta|)(1+|\eta|) \tag{3.12}$$

pa kombinujući (3.11) i (3.12) dobijamo

$$\langle\xi\rangle^s \leq (1+|\xi|)^s \leq (1+|\xi-\eta|)^s(1+|\eta|)^s \leq (\sqrt{2})^s\,\langle\xi-\eta\rangle^s\,(\sqrt{2})^s\,\langle\eta\rangle^s$$
$$= 2^s\,\langle\xi-\eta\rangle^s\,\langle\eta\rangle^s$$

za sve $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Sad pretpostavimo da je $s < 0$.
Tada, ako u prethodnoj nejednakosti zamenimo uloge ξ i η, i s zamenimo sa $-s$, dobijamo

$$\langle\eta\rangle^{-s} \leq 2^{-s}\,\langle\eta-\xi\rangle^{-s}\,\langle\xi\rangle^{-s},$$

odakle sledi

$$\langle\xi\rangle^{s} \leq 2^{-s}\,\langle\eta-\xi\rangle^{-s}\,\langle\eta\rangle^{s}.$$

Konačno, razmatranjem ova dva slučaja sledi da važi

$$\langle\xi\rangle^{s} \leq 2^{|s|}\,\langle\xi-\eta\rangle^{|s|}\,\langle\eta\rangle^{s},$$

za sve $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. □

3.2 Kompozicija dva pseudo-diferencijalna operatora-Motivacija

Zbog Teoreme (3.1.3), kompozicija dva pseudo-diferencijalna operatora $p_1(x, D_x)$ i $p_2(x, D_x)$ je dobro definisan ograničen operator

$$p_1(x, D_x)p_2(x, D_x) : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n).$$

Prirodno se postavlja pitanje da li je taj operator opet pseudo-diferencijalni operator tj. da li postoji simbol $p \in S^{\infty}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tako da

$$p(x, D_x) = p_1(x, D_x)p_2(x, D_x).$$

U ovom slučaju, zanima nas kako je simbol $p(x, \xi)$ povezan sa simbolima $p_1(x, \xi)$ i $p_2(x, \xi)$. Ispostaviće se, da je ponašanje pseudo-diferencijalnog operatora unutar kompozicije od suštinskog značaja za nalaženje inverza ili makar približnog inverza pseudo-diferencijalnog operatora, koji se naziva *parametriks.*
S namerom da napravimo motivaciju za sledeći odeljak, računaćemo kompoziciju $p_1(x, D_x)$ i $p_2(x, D_x)$, pritom zanemarujući sve eventualne tehničke probleme sa kojim se u tom procesu možemo sresti. Pre svega,

$$p_1(x, D_x)g(x) = \int e^{ix\cdot\eta} p_1(x, \eta)\hat{g}(\eta)\text{đ}\eta = \int\int e^{i(x-y)\cdot\eta} p_1(x, \eta)g(y)\text{dyđ}\eta$$

i analogno

$$p_2(x, D_x)f(x)|_{x=y} = \int\int e^{i(y-z)\cdot\xi} p_2(y, \xi)f(z)\text{dzđ}\xi$$

Dakle, ako uzmemo $g(y) = p_2(x, D_x)f(x)|_{x=y}$ dobijamo

$$p_1(x, D_x)p_2(x, D_x)f(x) =$$
$$= \int\int e^{i(x-y)\cdot\eta} p_1(x, \eta)\Big(\int\int e^{i(y-z)\cdot\xi} p_2(y, \xi)f(z)\text{dzđ}\xi\Big)\text{dyđ}\eta =$$
$$= \int\int\int\int e^{i(x-z)\cdot\xi} e^{-i(x-y)\cdot(\xi-\eta)} p_1(x, \eta)p_2(y, \xi)f(z)\text{dyđ}\eta\text{dzđ}\xi.$$

Uvodimo smenu $x' = y - x$ i $\xi' = \eta - \xi$ i dobijamo

$$p_1(x, D_x)p_2(x, D_x)f(x) =$$
$$= \int\int e^{i(x-z)\cdot\xi}\Big(\int\int e^{-ix'\cdot\xi'} p_1(x, \xi + \xi')p_2(x + x', \xi)\text{dx}'\text{đ}\xi'\Big)f(z)\text{dzđ}\xi$$

Kompoziciji dva pseudo-diferencijalna operatora $p_1(x, D_x)p_2(x, D_x)$ odgovara simbol koji ćemo označiti sa $p_1\#p_2$, pa iz prethodne formule dobijamo

$$(p_1\#p_2)(x, \xi) := \int\int e^{-ix'\cdot\xi'} p_1(x, \xi + \xi')p_2(x + x', \xi)\text{dx}'\text{đ}\xi'. \tag{3.13}$$

Glavni problem je što integral u prethodnoj formuli u opštem slučaju ne konvergira. Kako bi rešili ovaj problem, definišemo tzv. **oscilatorne integrale**

$$Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi'} p_1(x, \xi + \xi') p_2(x + x', \xi) \mathrm{dx}' đ\xi'$$

$$:= \lim_{\epsilon\to\infty} \int\int \chi(\epsilon x', \epsilon\xi') e^{-ix'\cdot\xi'} p_1(x, \xi + \xi') p_2(x + x', \xi) \mathrm{dx}' đ\xi',$$

gde je $\chi \in S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ i $\chi(0, 0) = 1$. U sledećem odeljku dokazaćemo da su oscilatorni integrali dobro definisani za pogodno izabrane podintegralne funkcije. Štaviše, pokazaćemo nekoliko rezultata, koji će opravdati račun kojim smo se iznad bavili.

3.3 Oscilatorni integrali

Motivisani pričom o kompoziciji pseudo-diferencijalnih operatora o kojoj je bilo reči u prethodnoj sekciji, definisali smo oscilatorni integral. Ostalo je da se utvrdi pod kojim uslovima integral iz definicije konvergira. Napomenimo da ovom problemu pristupamo ne zadržavajući se na opštoj teoriji, navodimo samo osnovna svojstva oscilatornih integrala koja su neophodna za rešavanje pomenutog problema. Ona će biti ključna i za definisanje operacija nad simbolima. Takođe, dozvolićemo u definiciji pseudo-diferencijalnog operatora širi skup simbola, te u nastavku definišemo prostor kojem pripadaju, *prostor amplituda.*

Definicija 3.3.1. *Prostor amplituda $\mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m, \tau \in \mathbb{R}$ je skup glatkih funkcija $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tako da*

$$|\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \eta)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\eta|)^m (1 + |y|)^\tau$$

uniformno u $y, \eta \in \mathbb{R}^n$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Na ovom prostoru definišemo

$$|a|_{\mathcal{A}_\tau^m, k} := \underset{|\alpha|+|\beta| \leq k}{max} \ \underset{y,\eta \in \mathbb{R}^n}{sup} (1 + |\eta|)^{-m} (1 + |y|)^{-\tau} |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \eta)|, \ k \in \mathbb{N},$$

pridruženi niz monotono rastućih semi-normi.

Za $a \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ važi

$$|\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \eta)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\eta|)^{m-|\alpha|} \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\eta|)^m (1 + |y|)^0$$

što implicira $a \in \mathcal{A}_0^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Stoga, prostor amplituda je zaista proširenje dosadašnjeg prostora simbola, tj. $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_0^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Kako bi uspešno rešili problem kompozicije dva pseudo-diferencijalna operatora, u sledećoj teoremi je dato pod kojim uslovima je *oscilatorni integral*, koji se javlja u pomenutom problemu, dobro definisan.

Teorema 3.3.2. *Neka je $a \in \mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m, \tau \in \mathbb{R}$ i neka je $\chi \in S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\chi(0, 0) = 1$. Tada oscilatorni integral definisan sa*

$$Os - \int\int e^{-iy\cdot\eta} a(y, \eta) \mathrm{d}y \text{đ}\eta := \lim_{\epsilon \to 0} \int\int \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} a(y, \eta) \mathrm{d}y \text{đ}\eta$$

postoji i jednak je

$$Os - \int\int e^{-iy\cdot\eta} a(y, \eta) \mathrm{d}y \text{đ}\eta = \int\int \frac{\langle D_\eta \rangle^{2l'} e^{-iy\cdot\eta}}{\langle y \rangle^{2l'}} \left[\frac{\langle D_y \rangle^{2l}}{\langle \eta \rangle^{2l}} a(y, \eta) \right] \mathrm{d}y \text{đ}\eta \tag{3.14}$$

gde su $l, l' \in \mathbb{N}_0$ izabrani tako da $2l > n+m$ i $2l' > n+\tau$ i podintegralna funkcija je u $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Štaviše, definicija oscilatornog integrala ne zavisi od izbora funkcije χ i

$$|Os - \int\int e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta| \leq C_{m,\tau} |a|_{\mathcal{A}^m_\tau, 2(l+l')}, \tag{3.15}$$

gde je $C_{m,\tau} > 0$ ne zavisi od a.

Dokaz. Navešćemo samo glavne ideje dokaza. Za više pogledati [1], Teorema 3.9 na strani 46.
Definišimo

$$I_\epsilon := \int\int \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta$$

gde je $\chi \in S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ takvo da $\chi(0,0) = 1$.

Koristeći $D^\alpha_y e^{-iy\cdot\eta} = (-\eta)^\alpha e^{-iy\cdot\eta}$ i $D^\beta_\eta e^{-iy\cdot\eta} = (-y)^\beta e^{-iy\cdot\eta}$ za $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_0$ dobijamo

$$\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} e^{-iy\cdot\eta} = e^{-iy\cdot\eta} \quad i \quad \langle y\rangle^{-2l'} \langle D_\eta\rangle^{2l'} e^{-iy\cdot\eta} = e^{-iy\cdot\eta} \tag{3.16}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \int\int \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta \\ &= \int\int \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) \frac{\langle D_y\rangle^{2l} e^{-iy\cdot\eta}}{\langle\eta\rangle^{2l}} a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta \\ &= \int\int \frac{\langle D_\eta\rangle^{2l'} e^{-iy\cdot\eta}}{\langle y\rangle^{2l'}} \left[\frac{\langle D_y\rangle^{2l}}{\langle\eta\rangle^{2l}} (\chi(\epsilon y, \epsilon\eta) a(y,\eta)) \right] \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta. \end{aligned}$$

Koristeći Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji tj. Teoremu (1.1.7), pokazuje se da granična vrednost $\lim\limits_{\epsilon\to\infty} I_\epsilon$ postoji i da je

$$\lim_{\epsilon\to\infty} I_\epsilon = \int\int \frac{\langle D_\eta\rangle^{2l'} e^{-iy\cdot\eta}}{\langle y\rangle^{2l'}} \left[\frac{\langle D_y\rangle^{2l}}{\langle\eta\rangle^{2l}} a(y,\eta) \right] \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta.$$

Samim tim, oscilatorni integral je dobro definisan, važi (3.14) i oscilatorni integral ne zavisi od izbora funkcije χ. Pokazuje se da (3.15) sledi iz (3.14). □

Kao posledicu ove Teoreme navodimo sledeći korolar.

Korolar 3.3.3. *Neka je $a_j \in \mathcal{A}^m_\tau(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ ograničen niz takav da*

$$\lim_{j\to\infty} \partial^\alpha_y \partial^\beta_\eta a_j(y,\eta) = \partial^\alpha_y \partial^\beta_\eta a(y,\eta) \ \textit{za sve} \ y,\eta \in \mathbb{R}^n$$

i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_0$ i neko $a \in \mathcal{A}^m_\tau(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Tada

$$\lim_{j\to\infty} Os - \int\int e^{iy\cdot\eta} a_j(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta = Os - \int\int e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta.$$

Dokaz. Videti [1], strana 48, Korolar 3.10. $\square$

Primer. Neka $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tada $a(y,\eta) = e^{ix\cdot\eta}u(y) \in \mathcal{A}_0^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ jer je

$$|e^{ix\cdot\eta}u(y)| = |u(y)| \le C$$

i oscilatorni integral

$$Os - \int\int e^{i(x-y)\cdot\eta}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{đ}\eta$$

je na osnovu Teoreme (3.3.2) dobro definisan i možemo da ga izračunamo eksplicitno: ako izaberemo $\chi(y,\eta) = \psi(y)\psi(\eta)$, gde $\psi(0) = 1$ dobijamo

$$\begin{aligned}
Os - \int\int e^{i(x-y)\cdot\eta}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{đ}\eta &= \lim_{\epsilon\to\infty}\int\int \chi(\epsilon y,\epsilon\eta)e^{i(x-y)\cdot\eta}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{đ}\eta \\
&= \lim_{\epsilon\to\infty}\int\int \psi(\epsilon y)\psi(\epsilon\eta)e^{i(x-y)\cdot\eta}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{đ}\eta \\
&= \lim_{\epsilon\to\infty}\int \psi(\epsilon y)u(y)\Big(\int e^{i(x-y)\cdot\eta}\psi(\epsilon\eta)\mathrm{đ}\eta\Big)\mathrm{d}y \\
&= \lim_{\epsilon\to\infty}\int \psi(\epsilon y)u(y)\;\epsilon^{-n}\mathcal{F}^{-1}[\psi](\frac{x-y}{\epsilon})\mathrm{d}y \\
&= \lim_{\epsilon\to\infty}\int \psi(\epsilon(x-\epsilon y'))u(x-\epsilon y')\;\mathcal{F}^{-1}[\psi](y')\mathrm{d}y' \\
&= \int u(x)\mathcal{F}^{-1}[\psi](y')\mathrm{d}y' = u(x)\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\psi]](0) \\
&= u(x)\psi(0) = u(x),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

zbog Teoreme (2.1.2), 5. deo, smene $y = x - \epsilon y'$ i jednakosti

$$\lim_{\epsilon\to\infty}\psi(\epsilon(x-\epsilon y'))u(x-\epsilon y') = \psi(0)u(x) = u(x).$$

Takođe smo koristili $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[u]] = u$, za sve $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.3.4. *Neka* $a \in \mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m, \tau \in \mathbb{R}$, *i neka* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. *Tada*

$$Os - \int\int e^{-iy\cdot\eta}y^\alpha a(y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{đ}\eta = Os - \int\int e^{-iy\cdot\eta}D_\eta^\alpha a(y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{đ}\eta,$$

$$Os - \int\int e^{-iy\cdot\eta}\eta^\alpha a(y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{đ}\eta = Os - \int\int e^{-iy\cdot\eta}D_y^\alpha a(y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{đ}\eta.$$

Dokaz. Pre svega, primetimo da $D^\alpha_\eta a(y,\eta), D^\alpha_y(y,\eta) \in \mathcal{A}^m_\tau(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), y^\alpha a(y,\eta) \in \mathcal{A}^m_{\tau+|\alpha|}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ i $\eta^\alpha a(y,\eta) \in \mathcal{A}^{m+|\alpha|}_\tau(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Zato su oscilatorni integrali iz formulacije teoreme dobro definisani. Dokazaćemo samo prvi identitet, drugi se dokazuje na isti način. Štaviše, dovoljno je razmatrati slučaj $|\alpha| = 1$, pa opšti slučaj sledi matematičkom indukcijom. Ako je $|\alpha| = 1$, tada $y^\alpha = y_j$, za $1 \leq j \leq n$. Biramo χ iz definicije oscilatornog integrala kao $\chi(y,\eta) = e^{\frac{-|(y,\eta)|^2}{2}}$. Tada

$$\int\int \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} y_j a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta = -\int\int \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) D_{\eta_j} e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta$$

$$= \int\int e^{-iy\cdot\eta} D_{\eta_j}(\chi(\epsilon y, \epsilon\eta) a(y,\eta)) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta$$

Koristeci $D_{\eta_j}\chi(\epsilon y, \epsilon\eta) = i\epsilon^2 \eta_j \chi(\epsilon y, \epsilon\eta)$, dobijamo

$$D_{\eta_j}(\chi(\epsilon y, \epsilon\eta) a(y,\eta)) = \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) D_{\eta_j} a(y,\eta) + i\epsilon^2 \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) \eta_j \chi(\epsilon y, \epsilon\eta).$$

Prema tome

$$\int\int \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} y_j a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta$$

$$= \int\int \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} D_{\eta_j} a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta + i\epsilon^2 \int\int \chi(\epsilon y, \epsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} \eta_j a(y,\eta) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta.$$

Puštajući limes $\epsilon \to 0$ dobija se prva jednakost. □

Oscilatorni integrali zadržavaju dobra svojstva apsolutno konvergentnih integrala. Tačnije, moguće je zameniti redosled diferenciranja i integraljenja, kao i promeniti redosled integracije. Navedena svojstva su sadržana u sledećoj teoremi.

Teorema 3.3.5. *(Fubinijeva teorema za oscilatorne integrale) Neka* $a \in \mathcal{A}^m_\tau(\mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k}), m, \tau \in \mathbb{R},\ n, k \in \mathbb{N}$. *Tada*

$$b(y,\eta) := Os - \int\int e^{-iy'\cdot\eta'} a(y,y',\eta,\eta') \mathrm{d}y' \mathrm{đ}\eta' \in \mathcal{A}^m_\tau(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

gde integralimo u odnosu na $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ *i važi*

$$\partial^\alpha_y \partial^\beta_\eta b(y,\eta) := Os - \int\int e^{-iy'\cdot\eta'} \partial^\alpha_y \partial^\beta_\eta a(y,y',\eta,\eta') \mathrm{d}y' \mathrm{đ}\eta'. \tag{3.18}$$

Štaviše, važi

$$Os - \int\int\int\int e^{-iy\cdot\eta - iy'\cdot\eta'} a(y,y',\eta,\eta') \mathrm{d}y \mathrm{d}y' \mathrm{đ}\eta \mathrm{đ}\eta'$$

$$= Os - \int\int e^{-iy\cdot\eta}\Big(Os - \int\int e^{-iy'\eta'} a(y,y',\eta,\eta') \mathrm{d}y' \mathrm{đ}\eta'\Big) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta.$$

Dokaz. Videti [1], strana 50, Teorema 3.13. □

3.4 Kompozicija pseudo-diferencijalnih operatora

Pre svega, ako $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, tada se može dokazati

$$p(x,D_x)u = \int \Big(\int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)u(y)\mathrm{dy}\Big)đ\xi$$

$$= Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi} p(x,\xi)u(x+x')\mathrm{dx}'đ\xi$$

za sve $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Koristeći navedenu reprezentaciju i Teoremu (3.3.5), dobijamo

$$p_1(x,D_x)p_2(x,D_x)u$$

$$= Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi} p_1(x,\xi)\Big(Os - \int\int e^{-ix''\cdot\xi'} p_2(x+x',\xi')u(x+x'+x'')\mathrm{dx}''đ\xi'\Big)\mathrm{dx}'đ\xi$$

$$= Os - \int\int\int\int e^{-ix'\cdot\xi-ix''\cdot\xi'} p_1(x,\xi)p_2(x+x',\xi')u(x+x'+x'')\mathrm{dx}''đ\xi'\mathrm{dx}'đ\xi$$

$$= Os - \int\int\int\int e^{-ix'\cdot\eta-iy\cdot\xi'} p_1(x,\xi'+\eta)p_2(x+x',\xi')u(x+y)\mathrm{dx}'đ\xi'\mathrm{dy}đ\eta$$

$$= Os - \int\int e^{-iy\cdot\xi'}\Big(Os - \int\int e^{-ix'\cdot\eta} p_1(x,\xi'+\eta)p_2(x+x',\xi')\mathrm{dx}'đ\eta\Big)u(x+y)\mathrm{dy}đ\xi'$$

$$= Os - \int\int e^{-iy\cdot\xi'} p_1\#p_2(x,\xi')u(x+y)\mathrm{dy}đ\xi,$$

gde smo uveli smenu $\eta = \xi - \xi'$ i $y = x' + x''$, a $p_1\#p_2$ definisano je kao u (3.13).

Glavni alat teorije pseudo-diferencijalnih operatora, pored oscilatornih integrala, je asimptotski račun koji je detaljno opisan u nastavku.

Pretpostavimo da $p_j \in S^{m_j}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, pri čemu je niz m_j takav da zadovoljava $m_1 \geq .... \geq m_j \to -\infty$, *kad* $j \to \infty$. Kako su redovi simbola u opadajućem poretku, sledi da ti simboli "postaju veoma mali, za $|\xi|$ veliko". Red

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

ne mora da konvergira. Ipak, reći ćemo da red *konvergira asimptotski* (ili da je *asimptotski sumabilan*) ako postoji $p \in S^{m_1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ takav da

$$p(x,\xi) - \sum_{j=1}^{N-1} p_j(x,\xi) \in S^{m-N}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

za svako $N \in \mathbb{N}$. Pišemo

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=1}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

i još kažemo da *simbol p ima asimptotski razvoj* koji je dat sa $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(x,\xi)$. Ovu terminologiju ćemo najčešće koristiti u radu.

Lema 3.4.1. *(O asimptotskoj sumabilnosti) Neka $p_j \in S_{1,0}^{m_j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, pri čemu je niz m_j takav da zadovoljava $m_1 \geq .... \geq m_j \to -\infty$, kad $j \to \infty$. Tada postoji simbol $p \in S_{1,0}^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ takav da*

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=1}^{\infty} p_j(x,\xi),$$

odnosno

$$p(x,\xi) - \sum_{j=1}^{N-1} p_j(x,\xi) \in S_{1,0}^{m-N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

za sve $N \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Videti [1], Lema 3.27. na strani 60. □

Teorema 3.4.2. *Neka su $p_j \in S_{1,0}^{m_j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), j = 1,2$, dva pseudo-diferencijalna simbola. Tada postoji neko $p_1\#p_2 \in S_{1,0}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tako da*

$$p_1(x,D_x)p_2(x,D_x) = (p_1\#p_2)(x,D_x).$$

Štaviše, $p_1\#p_2$ ima sledeći asimptotski razvoj

$$p_1\#p_2(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p_1(x,\xi) D_x^\alpha p_2(x,\xi), \tag{3.19}$$

odnosno važi

$$p_1\#p_2(x,\xi) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p_1(x,\xi) D_x^\alpha p_2(x,\xi) \in S_{1,0}^{m_1+m_2-N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \tag{3.20}$$

za sve $N \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Videti [1], Teorema 3.16, strana 55. □

Dakle, kompozicija dva pseudo-diferencijalna operatora je opet pseudo - diferencijalni operator. Takođe, simbol koji odgovara tom pseudo-diferencijalnom operatoru ima asimptotski razvoj, što implicira (na osnovu (3.20), za slučaj $N = 1$)

$$p_1\#p_2(x,\xi) = p_1(x,\xi)p_2(x,\xi) + r(x,\xi), \tag{3.21}$$

gde $r(x,\xi) \in S^{m_1+m_2-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Ovo zapažanje ce biti od velikog značaja za konstrukciju *parametriksa* eliptičnog pseudo-diferencijalnog operatora.

Štaviše, primetimo da, ako je $p_2(x,\xi) = p_2(\xi)$ tj. simbol ne zavisi od x, dobijamo da je $p_1(x,D_x)p_2(D_x) = OP(p_1(x,\xi)p_2(\xi))$, a obrazloženje ove tvrdnje je sledeće:

$$p_2(x,D_x)u = p_2(D_x)u = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p(\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi = \mathcal{F}^{-1}[p_2(\xi)\mathcal{F}[u](\xi)](x)$$

odnosno

$$\mathcal{F}[p_2(D_x)u] = p_2(\xi)\mathcal{F}[u](\xi)$$

što dalje implicira

$$p_1(x,D_x)(p_2(x,D_x)u) = p_1(x,D_x)(p_2(D_x)u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p_1(x,\xi)\mathcal{F}[p_2(D_x)u]đ\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p_1(x,\xi)p_2(\xi)\mathcal{F}[u](\xi)đ\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p_1(x,\xi)p_2(\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi$$

odnosno, dobili smo da u ovom slučaju kompozicija dva pseudo-diferencijalna operatora je pseudo-diferencijalni operator pridružen proizvodu njihovih simbola.

Štaviše, može se pokazati korišćenjem Lajbnicove formule da ukoliko je $p_1(x,D_x)$ diferencijalni operator reda $m \in \mathbb{N}_0$ sa koeficijentima u $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, tada

$$p_1(x,D_x)p_2(x,D_x) = (p_1\#p_2)(x,D_x),$$

gde

$$(p_1\#p_2)(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p_1(x,\xi)D_x^\alpha p_2(x,\xi).$$

Dakle, asimptotski razvoj od $p_1\#p_2$ se sastoji od konačno mnogo sabiraka .

U pseudo-diferencijalnom računu značajnu ulogu imaju *komutatori*. Komutator dva pseudo-diferencijalna operatora A i B, u oznaci $[A,B]$, se definiše na sledeći način

$$[A,B] := AB - BA,$$

pri čemu AB i BA označavaju kompoziciju pseudo-diferencijalnih operatora. Navodimo sledeći korolar.

Korolar 3.4.3. *(Komutator pseudo-diferencijalnih operatora)*
Neka su $p_j \in S^{m_j}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $j = 1,2$, dva pseudo-diferencijalna simbola. Tada postoji $r \in S^{m_1+m_2-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tako da

$$[p_1(x,D_x), p_2(x,D_x)] = r(x,D_x).$$

Dokaz. *Sledi direktno iz (3.21).* □

Dakle, komutator dve pseudo-diferencijalna operatora je opet pseudo - diferencijalni operator i simbol koji mu odgovara je jedan red niži od reda simbola koji odgovara njihovoj kompoziciji. Nadalje se nećemo baviti komutatorima kako ne bismo pomerali fokus sa teme rada.

4 Eliptični pseudo-diferencijalni operatori i eliptična regularnost

4.1 Eliptični pseudo-diferencijalni operatori i parametriks

Među svim pseudo-diferencijalnim operatorima postoji klasa operatora koja se često pojavljuje u primenama i posebno su jednostavni za rad. Zovu se eliptični operatori. Interesantni su, jer imaju približne inverze, koji se nazivaju *parametriksi* i koji su takođe pseudo-diferencijalni operatori. Naš osnovni zadatak je da ove koncepte učinimo preciznim.

Definicija 4.1.1. *Za simbol* $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m \in \mathbb{R}$ *kažemo da je eliptičan ako postoje* $C, R > 0$ *tako da je*

$$|p(x,\xi)| \geq C|\xi|^m, \text{ za sve } |\xi| \geq R, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Naravno, pseudo-diferencijalni operator je *eliptičan* ako je njegov simbol eliptičan.

Primer. Znamo da je $p(\xi) = |\xi|^2$ simbol operatora $-\triangle$. Po definiciji, p je, očito, i eliptičan simbol reda 2. Takođe smo pokazali da je $q(\xi) = \langle\xi\rangle^m, m \in \mathbb{R}$ simbol operatora $(1-\triangle)^{\frac{m}{2}}$. On je i eliptičan simbol reda m.

Navodimo lemu koja će biti od pomoći u razmatranju problema koji će ubrzo, tačnije odmah nakon nje, biti i formulisan.

Lema 4.1.2. *Neka je* $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m \in \mathbb{R}$ *eliptičan simbol i* $R > 0$ *takvo da važi (4.1). Tada*

$$q(x,\xi) := \psi(\xi)p(x,\xi)^{-1} \in S^{-m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

gde je $\psi \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$ *takvo da* $\psi(\xi) = 1$ *za* $|\xi| \geq R+1$ *i* $\psi(\xi) = 0$ *za* $|\xi| \leq R$.

Dokaz. Kako je $q(x,\xi) = \psi(\xi) = 0$ za $|\xi| \leq R$, q je glatka u (x,ξ) i trivijalno važi $q \in S^{-m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ na tom intervalu. Dakle, dovoljno je razmatrati slučaj $|\xi| \geq R$, što u nastavku i činimo.

Diferenciranjem dobijamo

$$\partial_{\xi_j} p(x,\xi)^{-1} = -p(x,\xi)^{-2}\partial_{\xi_j} p(x,\xi)$$

i

$$\partial_{x_j} p(x,\xi)^{-1} = -p(x,\xi)^{-2}\partial_{x_j} p(x,\xi).$$

Koristeći (4.1) i da $p \in S^m_{1,0}$ dobijamo da važi

$$|\partial_{\xi_j} p(x,\xi)^{-1}| = |-p(x,\xi)^{-2}\partial_{\xi_j} p(x,\xi)| \leq C|\xi|^{-2m}\langle\xi\rangle^{m-1} \leq C\langle\xi\rangle^{-m-1}$$

i

$$|\partial_{x_j} p(x,\xi)^{-1}| = |-p(x,\xi)^{-2}\partial_{x_j} p(x,\xi)| \leq C|\xi|^{-2m}\langle\xi\rangle^{m} \leq C\langle\xi\rangle^{-m}.$$

za sve $|\xi| \geq R$. Na isti način može se pokazati matematičkom indukcijom da

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x,\xi)^{-1}| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-m-|\alpha|}, \tag{4.2}$$

za sve $|\xi| \geq R$.
Sada posmatrajmo funkciju q. Funkcija $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ na $|\xi| \leq R+1$ je glatka, pa je i ograničena na tom intervalu, pa važi

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x q(x,\xi)| \leq C'_{\alpha,\beta} \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-m-|\alpha|}$$

za sve $|\xi| \leq R+1$, pa i za $R \leq |\xi| \leq R+1$ (gde poslednja nejednakost važi zbog ograničenosti simbola $\langle\xi\rangle^{m+|\alpha|}$ na posmatranom intervalu). Kako je q i glatka važi $q \in S^{-m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ na intervalu $R \leq |\xi| \leq R+1$. S obzirom da je $q(x,\xi) = p(x,\xi)^{-1}$ za sve $|\xi| \geq R+1$, iz (4.2) sledi da za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_0$ postoji neko $C_{\alpha,\beta}$ tako da

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x q(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-m-|\alpha|}$$

za sve $|\xi| \geq R+1$. Zaključujemo da $q \in S^{-m}_{1,0}$. □

U nastavku posmatramo problem postojanja inverza simbola u odnosu na operaciju #. Preciznije, tražimo rešenje, ili bar aproksimaciju rešenja, jednačine

$$p\#q = 1 \text{ (ili } q\#p = 1),$$

za dato $p \in S^m_{1,0}$. Budući da $q \in S^l_{1,0}$ implicira $p\#q \in S^{m+l}_{1,0}$ i $1 \in S^0_{1,0}$ (na osnovu Teoreme (3.4.2)), prirodno je potražiti inverz q u $S^{-m}_{1,0}$. Rešenja posmatranog problema sadržana su u tvrđenjima koja slede.

Korolar 4.1.3. *Neka je $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ eliptični simbol. Tada postoji $q \in S^{-m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tako da važi*

$$p(x,D_x)q(x,D_x) = I + r(x,D_x), \qquad q(x,D_x)p(x,D_x) = I + r'(x,D_x)$$

gde su $r, r' \in S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ i I identički operator (odnosno operator koji odgovara simbolu $1 \in S^0_{1,0}$).

Dokaz. Neka je q definisano kao u Lemi (4.1.2). Stoga, na osnovu iste te leme, $q \in S^{-m}_{1,0}$. Tada, iz Teoreme (3.4.2) znamo da je kompozicija pseudo-diferencijalnih operatora

$$p(x, D_x)q(x, D_x) = (p\#q)(x, D_x),$$

a iz (3.21) imamo

$$p\#q(x, \xi) = p(x, \xi)q(x, \xi) + \widetilde{r}(x, \xi),$$

što implicira

$$p(x, D_x)q(x, D_x) = [pq + \widetilde{r}](x, D_x)$$

$$= pq(x, D_x) + \widetilde{r}(x, D_x), \tag{4.3}$$

gde $\widetilde{r} \in S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, pri čemu, da ne bude zabune, naglašavamo da je sa $pq(x, D_x)$ označen pseudo-diferencijalni operator koji odgovara simbolu proizvoda operatora p i q. Štaviše, simbol proizvoda

$$p(x, \xi)q(x, \xi) = \psi(\xi) = 1 \text{ za sve } |\xi| \geq R + 1.$$

Stoga, $p(x, \xi)q(x, \xi) - 1 \in S^{-\infty}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ i iz (4.3) sledi

$$p(x, D_x)q(x, D_x) = I + r(x, D_x)$$

gde je $r(x, \xi) = p(x, \xi)q(x, \xi) - 1 + \widetilde{r}(x, \xi) \in S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Identitet

$$q(x, D_x)p(x, D_x) = I + r'(x, D_x),$$

gde $r' \in S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ se dokazuje na isti način. □

Važi i opštije tvrđenje:

Teorema 4.1.4. *Neka $p \in S^{m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m \in \mathbb{R}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*
1. p je eliptičan.
2. Postoji neko $q \in S^{-m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tako da

$$p(x, D_x)q(x, D_x) = I + r(x, D_x),$$

gde je $r \in S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.
3. Za svako $N \in \mathbb{N}$ postoje $q_N, q_N' \in S^{-m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tako da važi

$$p(x, D_x)q_N(x, D_x) = I + r_N(x, D_x),$$

$$q_N'(x, D_x)p(x, D_x) = I + r_N'(x, D_x),$$

gde $r_N, r_N' \in S^{-N}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Videti [1], Teorema 3.24, na strani 58. □

Pre navođenja glavnog rezultata ovog odeljka, dajemo preciznu definiciju približnog inverza pseudo-diferencijalnog operatora, koji je u literaturi poznatiji pod imenom *parametriks.*

Definicija 4.1.5. *Neka je* $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. *Kažemo da pseudo-diferencijalni operator* $p(x, D_x)$ *ima parametriks* $q(x, D_x)$, *pri čemu je* $q \in S^{-m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, *ako su*

$$p(x, D_x)q(x, D_x) - I$$

$$q(x, D_x)p(x, D_x) - I$$

operatori reda $-\infty$, *odnosno operatori pridruženi simbolima koji pripadaju* $S^{-\infty}_{1,0}$.

Sledeća teorema predstavlja karakterizaciju eliptičnih operatora.

Teorema 4.1.6. *(Potreban i dovoljan uslov da je simbol eliptičan)*
Neka $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m \in \mathbb{R}$. *Tada je simbol* p *eliptičan ako i samo ako postoji* $q_\infty \in S^{-m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *tako da*

$$p(x, D_x)q_\infty(x, D_x) = I + r_\infty(x, D_x),$$

gde $r_\infty \in S^{-\infty}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Pozivamo se na Lemu 3.4.1. Ipak, dokaz ovog tvrđenja ovde izostavljamo, a može se naći u [1], Propozicija 3.26, strana 60. □

Napomena 4.1.7. *Drugim rečima, Teorema (4.1.6) govori o osnovnom svojstvu eliptičnog pseudo-diferencijalnog operatora* $p(x, D_x)$, *a to je da postoji njegov približan inverz. Pritom, takav inverz "odstupa od pravog inverza" operatora* $p(x, D_x)$ *za neki operator* $r_\infty(x, D_x)$, *gde* $r_\infty \in S^{-\infty}_{1,0}$. *Stoga, kažemo da se oni razlikuju " do na razliku sadržanu u* $S^{-\infty}_{1,0}$ *". Iz ovog razloga,* $q_\infty(x, D_x)$ *je aproksimacija inverza pseudo-diferencijalnog operatora* $p(x, D_x)$. *S obzirom da teorema predstavlja potreban i dovoljan uslov da je neki simbol eliptičan, sledi da jedino eliptični pseudo-diferencijalni operatori imaju parametrikse.*

Zbog navedenog svojstva, eliptični pseudo-diferencijalni operatori će igrati glavnu ulogu u dokazu *Teoreme o eliptičnoj regularnosti*, o kojoj će biti reči u odeljku 4.4.

4.2 Ograničenost na $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ i jedinstvenost simbola

Kao što smo videli u odeljku 3.4, pseudo-diferencijalni operator

$$p(x,D_x)u(x) = Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi}p(x,\xi)u(x+x')\mathrm{d}x'đ\xi \tag{4.4}$$

je dobro definisan za sve $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Oscilatorni integral je dobro definisan i za sve $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Stoga, možemo proširiti definiciju $p(x,D_x)$ na $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.2.1. *Neka $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Tada $p(x,D_x)$ definisan kao u (4.4), pri čemu $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, je ograničen linearan operator*

$$p(x,D_x) : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_b^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Dokaz. Posmatrajmo $a_x(x',\xi) = p(x,\xi)u(x+x')$ za sve $x,x',\xi \in \mathbb{R}^n$. S obzirom da za sve $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ važi

$$\begin{aligned}|\partial_{x'}^\alpha\partial_\xi^\beta p(x,\xi)u(x+x')| &= |\partial_{x'}^\alpha[u(x+x')]\partial_\xi^\beta[p(x,\xi)]| \\ &\leq \| u \|_{C_b^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)} C_\alpha |p|_{|\beta|}^{(m)} \langle\xi\rangle^m,\end{aligned}$$

na osnovu definicije prostora amplituda imamo $a_x(x',\xi) \in \mathcal{A}_0^m$ i važi $|a_x|_{\mathcal{A}_0^m,k} \leq C|p|_k^{(m)} \| u \|_{C_b^k}$ uniformno u $x \in \mathbb{R}^n$.

Koristeći prethodna zapažanja dobijamo

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|p(x,D_x)u(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi}p(x,\xi)u(x+x')\mathrm{d}x'đ\xi| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi}a_x(x',\xi)\mathrm{d}x'đ\xi| \\ &\leq C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|a_x|_{\mathcal{A}_0^m,2(l+l')} \leq C'|p|_{2(l+l')}^{(m)} \| u \|_{C_b^{2(l+l')}}\end{aligned} \tag{4.5}$$

zbog Teoreme (3.3.2), gde $2l > m+n, 2l' > n$. Sada procenjujemo $\partial_x^\alpha p(x,D_x)u$ i iz tog razloga posmatramo $a(x,x',\xi,\xi') := p(x,\xi)u(x+x') \in \mathcal{A}_0^m(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n})$ i dobijamo

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}p(x,D_x)u &= \partial_{x_j}\left[Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi}p(x,\xi)u(x+x')\mathrm{d}x'đ\xi\right] \\ &= Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi}\partial_{x_j}[p(x,\xi)u(x+x')]\mathrm{d}x'đ\xi \\ &= Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi}(\partial_{x_j}p)(x,\xi)u(x+x')\mathrm{d}x'đ\xi\end{aligned}$$

$$+\ Os-\int\int e^{-ix'\cdot\xi}p(x,\xi)(\partial_{x_j}u)(x+x')\mathrm{d}x'đ\xi$$
$$=(\partial_{x_j}p)(x,D_x)+p(x,D_x)(\partial_{x_j}u)$$

zbog (3.18). Primenjujući ovu formulu sukcesivno i koristeći (4.5), direktno sledi da

$$\| p(x,D_x)u \|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} \leq C|p|^{(m)}_{2(l+l')+k} \| u \|_{C_b^{2(l+l')+k}(\mathbb{R}^n)},$$

što je i trebalo dokazati. □

Može se pokazati sledeće:

Teorema 4.2.2. *(Jedinstvenost simbola)*
Neka $p,q\in S^\infty_{1,0}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. *Tada jednakost* $p(x,D_x)u=q(x,D_x)u$, *za sve* $u\in S(\mathbb{R}^n)$ *implicira* $p(x,\xi)=q(x,\xi)$.

Dokaz. Videti [1], Teorema 3.25, strana 59. □

4.3 Adjungovani operator pseudo-diferencijalnog operatora i (x, y)-forma operatora

Pre svega, ustanovićemo notaciju koju ćemo koristiti u ovom odeljku. Sa

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx}, \quad \text{pri čemu } f, g \in S(\mathbb{R}^n),$$

je definisan uobičajen *unutrašnji proizvod* na $L^2(\mathbb{R}^n)$, ali restrikovan na Švarcove funkcije. Upoznajemo se sad sa pojmom *adjungovanog operatora.*

Definicija 4.3.1. *Neka $A, A^* : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$. Tada se A^* zove adjungovani operator operatora A ako*

$$(Au, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, A^*v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \text{ za sve } u, v \in S(\mathbb{R}^n),$$

Adjungovani operator ima važnu ulogu u nekoliko različitih oblasti matematike. Mi ćemo fokus usmeriti na nalaženje adjungovanog operatora pseudo-diferencijalnog operatora. Dokazaćemo da je on takođe pseudo-diferencijalni operator. Upravo ovo zapažanje omogućiće nam da proširimo definiciju operatora $p(x, D_x)$ do sada definisanog na $S(\mathbb{R}^n)$ na prostor $S'(\mathbb{R}^n)$.

Najpre se posvetimo izračunavanju adjungovanog operatora od $p(x, D_x)$:

$$(p(x, D_x)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int\int e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi\,\overline{v(x)}\mathrm{dx}$$

$$= \int\int e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\overline{v(x)}\mathrm{dx}\,\hat{u}(\xi)đ\xi$$

$$= \int \hat{u}(\xi)\overline{\int e^{-ix\cdot\xi}\overline{p(x,\xi)}v(x)\mathrm{dx}}đ\xi$$

pri čemu smo koristili Fubinijevu teoremu. Primetimo da $v, \hat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$, pa sledi $e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\overline{v(x)} \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ po promenljivoj (x, ξ).

Lema 4.3.2. *Neka $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m \in \mathbb{R}$ i $v \in S(\mathbb{R}^n)$. Tada*

$$\omega(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}p(x,\xi)v(x)\mathrm{dx} \in S(\mathbb{R}^n).$$

□

Kako je $(\mathcal{F}[u], v)_{L^2} = (2\pi)^n(u, \mathcal{F}^{-1}[v])_{L^2}$, dobijamo

$$(p(x, D_x)^*v)(x) = \int\int e^{i(x-y)\cdot\xi}\overline{p(y,\xi)}v(y)\mathrm{dy}đ\xi. \tag{4.6}$$

Navedeni operator je pseudo-diferencijalni operator koji se naziva *pseudo - diferencijalni operator u y-formi* i on je specijalan slučaj sledećeg operatora

$$p(x, D_x, x)u := \int \int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x, y, \xi)u(y)\mathrm{d}y\text{đ}\xi, \tag{4.7}$$

definisanog za sve $u \in S(\mathbb{R}^n)$, gde $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$, tj.

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \partial^\gamma_y p(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}$$

za sve $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n_0$. Ovi operatori se zovu *pseudo-diferencijalni operatori u (x,y)-formi*, a uobičajeni operator $p(x, D_x)$ sa kojim smo do sada radili se zove *pseudo-diferencijalni operator u x-formi.*

Kao što je i ranije važilo

$$p(x, D_x, x)u = Os - \int \int e^{-ix'\cdot\xi} p(x, x + x', \xi)u(x + x')\mathrm{d}x'\text{đ}\xi, \tag{4.8}$$

za sve $u \in S(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.3.3. *Neka $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n), m \in \mathbb{R}$. Tada važi $p(x, D_x, x)u = p_L(x, D_x)u$ za sve $u \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$, gde je*

$$p_L(x, \xi) = Os - \int \int e^{-iy\cdot\eta} p(x, x + y, \xi + \eta)\mathrm{d}y\text{đ}\eta \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Štaviše,

$$p_L(x, \xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n_0} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi D^\alpha_y p(x, y, \xi)|_{y=x}$$

odnosno za sve $N \in \mathbb{N}_0$ važi

$$p_L(x, \xi) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi D^\alpha_y p(x, y, \xi)|_{y=x} \in S^{m-N-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Dokaz. Na osnovu (3.17), dobijamo

$$u(x + x') = Os - \int \int e^{i(x+x'-y)\cdot\eta} u(y)\mathrm{d}y\text{đ}\eta,$$

a (4.8) implicira

$$\begin{aligned} p(x, D_x, x)u &= Os - \int \int e^{-ix'\cdot\xi} p(x, x + x', \xi)u(x + x')\mathrm{d}x'\text{đ}\xi \\ &= Os - \int \int e^{-ix'\cdot\xi} p(x, x + x', \xi) \left(Os - \int \int e^{i(x+x'-y)\cdot\eta} u(y)\mathrm{d}y\text{đ}\eta\right) \mathrm{d}x'\text{đ}\xi \end{aligned}$$

$$= Os - \int\int\int\int e^{-ix'\cdot\xi} p(x, x+x', \xi)\, e^{i(x+x'-y)\cdot\eta} u(y) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta\, \mathrm{d}x' \mathrm{đ}\xi$$

$$= Os - \int\int e^{i(x-y)\cdot\eta} \left(Os - \int\int e^{-ix'\cdot(\xi-\eta)} p(x, x+x', \xi) \mathrm{d}x' \mathrm{đ}\xi \right) u(y) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta$$

$$= Os - \int\int e^{i(x-y)\cdot\eta} p_L(x, \xi) u(y) \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta,$$

pri čemu smo koristili Teoremu (3.3.5) Za ostatak dokaza pogledati [1], strana 67, Teorema 3.32. □

Lema koja sledi je posledica prethodne teoreme i navodimo je bez dokaza.

Lema 4.3.4. *Neka $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n), m \in \mathbb{R}$. Tada $p(x, D_x, x) : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ je ograničen, linearan operator. Štaviše, ukoliko se definicija pseudo-diferencijalnog operatora u (x, y)-formi tj. (4.7) zameni sa*

$$p(x, D_x, x)u := Os - \int\int e^{-ix'\cdot\xi} p(x, x+x', \xi) u(x+x') \mathrm{d}x' \mathrm{đ}\xi$$

za $u \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$, tada $p(x, D_x, x) : C^\infty_b(\mathbb{R}^n) \to C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$ je ograničen operator.

Dokaz. Videti [1], strana 67, Lema 3.33. □

Korolar 4.3.5. *Ako $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, tada adjungovani operator operatora $p(x, D_x)$ je $p^*(x, D_x)$ gde je*

$$p^*(x, \xi) = Os - \int\int e^{-iy\cdot\xi} \overline{p(x+y, \xi+\eta)} \mathrm{d}y \mathrm{đ}\eta \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Štaviše,

$$p^*(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x, \xi)}$$

odnosno za svako $N \in \mathbb{N}_0$ važi

$$p^*(x, \xi) - \sum_{|\alpha| \le N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x, \xi)} \in S^{m-N-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Dokaz. Korolar je direktna posledica (4.6) i Teoreme (4.3.3). □

Napomena 4.3.6. *Na osnovu prethodnog korolara sledi*

$$p(x, D_x)^* = p^*(x, D_x),$$

odnosno da je adjungovani operator pseudo-diferencijalnog operatora $p(x, D_x)$ koji je dat sa (4.6), jednak pseudo-diferencijalnom operatoru koji je pridružen simbolu $p^*(x, \xi)$ (ovaj simbol je definisan u prethodnom korolaru). Shodno tome, i primenom Teoreme (3.1.3) zaključujemo da

$$p(x, D_x)^* : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n), \ \text{ za } p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \ m \in \mathbb{R}$$

je ograničen operator. Dakle, adjungovani operator pseudo-diferencijalnog operatora je pseudo-diferencijalni operator.

Navedena zapažanja o adjungovanom operatoru $p(x, D_x)^*$ nam omogućavaju da proširimo operator $p(x, D_x) : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ na operator $p(x, D_x) : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ što smo i napomenuli na početku ovog odeljka da nam je cilj i to radimo na sledeći način:

Definicija 4.3.7. *(Pseudo-diferencijalni operatori na $S'(\mathbb{R}^n)$) Neka $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Tada za $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ definišemo $p(x, D_x)u$ na sledeći način*

$$\langle p(x, D_x)u, \overline{v} \rangle := \left\langle u, \overline{p^*(x, D_x)v} \right\rangle,$$

za sve $v \in S(\mathbb{R}^n)$. Jasno, $p(x, D_x) : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$.

Prokomentarišimo ukratko konzistentnost prethodne definicije sa definicijom $p(x, D_x)$ na prostoru $S(\mathbb{R}^n)$. Naime, za $u \in S(\mathbb{R}^n)$ dobijamo

$$\langle p(x, D_x)u, \overline{v} \rangle = \int p(x, D_x)u(x)\overline{v(x)}\mathrm{dx} = (p(x, D_x)u, v)_{L^2} =$$

$$= (u, p(x, D_x)^*v)_{L^2} = \int u(x)\overline{p(x, D_x)^*v(x)}\mathrm{dx} = \left\langle u, \overline{p(x, D_x)^*v} \right\rangle, \tag{4.9}$$

za sve $v \in S(\mathbb{R}^n)$, pri čemu smo koristili Teoremu (3.1.3) i Napomenu (4.3.6). Takođe na osnovu Napomene (4.3.6) sledi

$$p(x, D_x)^* = p^*(x, D_x)$$

što implicira da za $u \in S(\mathbb{R}^n)$ iz (4.9) dobijamo da važi

$$\langle p(x, D_x)u, \overline{v} \rangle = \left\langle u, \overline{p^*(x, D_x)v} \right\rangle,$$

za sve $v \in S(\mathbb{R}^n)$. Stoga, zaključujemo definicija $p(x, D_x)$ na prostoru $S'(\mathbb{R}^n)$ je konzistentna sa definicijom $p(x, D_x)$ isprva definisanom na prostoru $S(\mathbb{R}^n)$.

4.4 Eliptična regularnost

Ranije, tačnije u Teoremi (3.1.3), smo ustanovili da su pseudo-diferencijalni operatori ograničena preslikavanja Švarcovog prostora u samog sebe. Teorema koja sledi, tvrdi da se za pseudo-diferencijalne operatore reda nula ova osobina prenosi i na prostor $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.4.1. *(L^2-ograničenost pseudo-diferencijalnih operatora reda nula) Neka je $p \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Tada se $p(x, D_x)$, isprva definisan na $S(\mathbb{R}^n)$, može proširiti do ograničenog operatora $p(x, D_x) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Dokaz. Videti [5], strana 268, Teorema 2.4.2. □

Navedena teorema ima veliku važnost u primenama na PDJ i pseudo-diferencijalne jednačine. Može se pokazati da važi i opštije tvrđenje, a to je da pseudo-diferencijalni operatori reda nula su ograničeni i na prostorima $L^p(\mathbb{R}^n)$, za sve $1 < p < \infty$ (dokaz ovog tvrđenja može se naći u [13], strana 99, Teorema 3.1.6). Za potrebe ovog rada, koristimo samo rezultat dat prethodnom teoremom.

Podsetimo se, za $s \in \mathbb{R}$, L^2-Beselov prostor smo označavali sa $H^s_2(\mathbb{R}^n)$ i definisali kao prostor temperiranih distribucija u takvih da $\langle D_x \rangle^s u$ pripada $L^2(\mathbb{R}^n)$, formalno

$$H^s_2(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n) : \langle D_x \rangle^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

gde je $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ i

$$\langle D_x \rangle^s f = \mathcal{F}^{-1}[\langle \xi \rangle^s \hat{f}] \text{ za sve } f \in S'(\mathbb{R}^n),$$

a norma na prostoru $H^s_2(\mathbb{R}^n)$ bila je

$$\| u \|_{H^s_2} := \| u \|_{s,2} := \| \langle D_x \rangle^s u \|_2 .$$

Uz pomoć Teoreme (4.4.1), odnosno ograničenosti pseudo-diferencijalnog operatora reda nula na L^2 prostoru, lako se pokazuje sledeća teorema na osnovu koje sledi da su pseudo-diferencijalni operatori proizvoljnog reda ograničeni i na L^2-Beselovom prostoru.

Teorema 4.4.2. *(Pseudo-diferencijalni operatori na L^2-Beselovom prostoru) Neka $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Tada $p(x, D_x) : H^{s+m}_2(\mathbb{R}^n) \to H^s_2(\mathbb{R}^n)$. Štaviše, postoji neko $k \in \mathbb{N}_0$ tako da važi*

$$\| p(x, D_x) \|_{\mathcal{L}(H^{s+m}_2(\mathbb{R}^n), H^s_2(\mathbb{R}^n))} \leq C_{s,m} |p|^{(m)}_k, \text{ za sve } p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Dokaz. Videti [1], strana 71, Teorema 3.41. □

Korolar 4.4.3. *Neka $s \in \mathbb{R}$. Tada $S(\mathbb{R}^n)$ je gust u $H_2^s(\mathbb{R}^n)$.*

Dokaz. Zbog definicije $H_2^s(\mathbb{R}^n)$, tačnije na osnovu (2.20) sledi da je preslikavanje $\langle D_x \rangle^s : H_2^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ izomorfizam, za $s \in \mathbb{R}$. Štaviše, u odeljku 3.1 smo videli da je $\langle D_x \rangle^s$, gde $s \in \mathbb{R}$, pseudo-diferencijalni operator, pa Teorema (3.1.3) implicira $\langle D_x \rangle^s : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, za bilo koje $s \in \mathbb{R}$. Sada, na osnovu Leme (2.2.3) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ je gust u $L^2(\mathbb{R}^n)$(videti Teoremu (1.1.10)), pa sledi da je i $S(\mathbb{R}^n)$ gust u $L^2(\mathbb{R}^n)$. $\langle D_x \rangle^{-s}$ je takođe pseudo-diferencijalni operator pa $\langle D_x \rangle^{-s} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, za $s \in \mathbb{R}$. Dakle, $S(\mathbb{R}^n) = \langle D_x \rangle^{-s} S(\mathbb{R}^n)$ je gust u $L^2(\mathbb{R}^n)$, a kako je $\langle D_x \rangle^s : H_2^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ izomorfizam, sledi da je $S(\mathbb{R}^n)$ gust u $H_2^s(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Sva dosadašnja zapažanja o pseudo-diferencijalnim operatorima imaju veliku ulogu u teoriji parcijalnih diferencijanih jednačina. Glavno pitanje ove teorije je, bez prevelikog ulaženja u detalje, kako rešiti jednačinu

$$Lu = f$$

za dati parcijalni diferencijalni operator L i datu funkciju f. Drugim rečima, kako naći inverz od L, tj. L^{-1} tako da

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I,$$

gde je I identički operator. U ovom slučaju funkcija $u = L^{-1}f$ je rešenje početnog problema $Lu = f$. Međutim, u većini slučajeva je nemoguće ili jako teško naći eksplicitnu formulu za inverz L^{-1} (čak i ako on postoji). Shodno tome, u teoriji PDJ ne želimo da imamo preciznu, eksplicitnu formulu za L^{-1}, pa samim tim i za rešenje početne jednačine, odnosno $u = L^{-1}f$, već nas zanima da li možemo da kažemo nešto o osobinama rešenja u.

Precizirajmo sada problem kojim se bavimo u ovom odeljku. Posmatramo sledeću eliptičnu pseudo-diferencijalnu jednačinu

$$p(x, D_x)u = f,$$

gde je $p(x, D_x)$ dati eliptični operator, i f data funkcija koja pripada L^2-Beselovom prostoru, tačnije $f \in H_2^s(\mathbb{R}^n), s \in \mathbb{R}$. Još jednom napomenimo da nećemo rešavati ovu jednačinu, već nas zanima da li možemo da kažemo nešto o regularnosti rešenja u poznajući regularnost f. Ispostaviće se da, od suštinskog značaja za rešavanje ovog problema su baš eliptični operatori. Njihova najvažnija osobina, koja je ujedno predstavljala i njihovu karakterizaciju, a to je da imaju približne inverze, daje potvrdan odgovor na postavljeno pitanje. Rešenje problema sadržano je u *Teoremi o eliptičnoj regularnosti* koju navodimo u nastavku.

Teorema 4.4.4. *(Eliptična regularnost) Neka je* $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *eliptičan simbol i* $f \in H^s_2(\mathbb{R}^n), s, m \in \mathbb{R}$. *Tada ako je* $u \in H_2^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup\limits_{s \in \mathbb{R}} H^s_2$ *rešenje pseudo-diferencijalne jednačine*

$$p(x, D_x)u = f,$$

tada $u \in H_2^{s+m}(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Neka $u \in H_2^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Tada $u \in H_2^{s+m-N}(\mathbb{R}^n)$ za neko $N \in \mathbb{N}$. Koristeći eliptičnost simbola p može se pokazati (Videti [1], strana 72, Teorema 3.43) da postoji neko $q_N(x, \xi) \in S^{-m}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ takvo da

$$q_N(x, D_x)p(x, D_x) = I + r_N(x, D_x),$$

gde $r_N \in S^{-N}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Prema tome,

$$q_N(x, D_x)f = q_N(x, D_x)p(x, D_x)u = u + r_N(x, D_x)u.$$

Za $q_N(x, D_x)f$ na osnovu Teoreme (4.4.2) važi $q_N(x, D_x)f \in H_2^{s+m}(\mathbb{R}^n)$. Analogno, na osnovu iste teoreme važi $r_N(x, D_x)u \in H_2^{s+m}(\mathbb{R}^n)$, pa iz prethodne jednakosti sledi $u \in H_2^{s+m}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Zaključujemo, rešenje u pripada klasi funkcija koja ima m više izvoda u poređenju sa f, gde je m red operatora $p(x, D_x)$.

5 Zaključak

Pojam pseudo-diferencijalnog operatora vuče korene još iz davne 1927. godine kada je nemački matematičar Herman Vajl (nem. Hermann Weyl) predložio da se bilo kom simbolu $p(x, \xi)$ pridruži operator $p(x, D_x)$ na način na koji smo to uradili i ovde, odnosno varijantom formule koju smo koristili u radu. Dakle, formulom (3.4).

Međutim, direktno poreklo teorije leži u studiji koju su započeli Mihlin, Kalderon, Zigmund i drugi, sredinom prošlog veka. Naravno, neizostavno je pomenuti Hermandera koji je stvorio modernu teoriju pseudo-diferencijalnih operatora. Navodeći ogroman broj metoda i rezultata ove teorije, napori Kona, Nirenberga i Hermandera doprineli su jasnom definisanju koncepta *simbola*, kao i osnovnih svojstava njegovog pridruženog pseudo-diferencijalnog operatora. Iako se ova teorija kasnije uveliko proširila i našla primene u raznim oblastima matematike, mi smo se zadržali na klasičnoj teoriji pseudo-diferencijalnih operatora.

U radu smo naveli dva osnovna primera simbola i njima pridruženih operatora. Posebnu pažnju usmerili smo na prevazilaženje problema kompozicije dva pseudo-diferencijalna operatora. Na tom putu, upoznali smo posebnu vrstu integrala koji zadržavaju sve one lepe osobine apsolutno konvergentnih integrala, odnosno *oscilatorne integrale.*

Sa idejom da osiguramo dobru teorijsku podlogu, koja bi omogućila pronalaženje približnih inverza pseudo-diferencijalnih operatora, ograničili smo se na klasu tzv. *eliptičnih simbola.* Za operator pridružen eliptičnom simbolu, odnosno za eliptičan pseudo-diferencijalni operator, kontruisali smo njemu približan inverz. Štaviše, došli smo do zaključka da je jedina klasa pseudo-diferencijalnih operatora koja ima inverze upravo klasa eliptičnih operatora.

Koristeći pojam oscilatornog integrala definisali smo simbol kompozicije dva pseudo-diferencijalna operatora, a pokazali smo da se i simbol adjungovanog operatora pseudo-diferencijalnog operatora $p(x, D_x)$ može definisati preko istog. Takođe, ustanovili smo da oba ova simbola, odnosno $(p_1 \# p_2)(x, \xi)$ i $p^*(x, \xi)$ imaju asimptotske razvoje.

Na samom kraju, posmatrali smo eliptičnu pseudo-diferencijalnu jednačinu

$$p(x, D_x)u = f,$$

i ustanovili jasnu vezu između regularnosti rešenja date jednačine i regularnosti funkcije f. Navedeni problem smo pritom posmatrali na L^2-Beselovom prostoru.

Bibliografija

[1] Abels H, *Pseudo-differential and singular integral operators. An introduction with applications.,* De Gruyter, Berlin, 2012.

[2] Wong M.W, *An Introduction to Pseudo-Differential Operators*, World Scientific Publishing Company, Singapur, 2014.

[3] Eceizabarrena Pérez Daniel, *Distribution Theory and Fundamental Solutions of Differential Operators*, Final degree dissertation, 2015.

[4] Bouclet Jean-Marc, *An introduction to pseudo-differential operators*, https://www.math.univ-toulouse.fr/ bouclet/Notes-de-cours-exo-exam/M2/cours-2012.pdf .

[5] Ruzhansky Michael, Turunen Ville, *Pseudo-Differential Operators and Symmetries. Background analysis and advanced topics*, Birkhäuser, Bazel, 2010.

[6] Raymond Xavier Saint, *Elementary Introduction to the Theory of Pseudo-differential Operators*, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, CRC Press, Florida, 1991.

[7] Hörmann Günther, Steinbauer Roland, *Theory of distributions*, Fakultät für Mathematik, Universität Wien, 2009.

[8] Ruzhansky Michael, *Introduction to pseudo-differential operators*, https://wwwf.imperial.ac.uk/ ruzh/papers/Pseudos-notes-2014-TCC.pdf .

[9] Horváth John, *Topological vector spaces and distributions*, Addison Wesley publishing company, 1966.

[10] Taylor Michael, *Pseudodifferential operators*, Four Lectures at MSRI, http://mtaylor.web.unc.edu/files/2018/04/msripde.pdf .

[11] Forster Otto, *Analysis 3*, Vieweg Studium, Mathematisches Institut der LMU, München, 1999.

[12] Folland Gerald B, *Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[13] Sogge Christopher D, *Fourier integrals in classical analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[14] Hörmander L, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators*, Springer, Berlin, 2007.

[15] https://people.sissa.it/ amaspero/teaching/pseudodiff/papers/symbols.pdf

Biografija

Rođena sam 10.4.1997. u Novom Sadu. Osnovnu školu završila sam u Gajdobri, kao nosilac Vukove diplome. Gimnaziju "J.J. Zmaj"(smer: obdareni učenici u matematičkoj gimnaziji) u Novom Sadu, završila sam 2015. godine. Iste godine upisala sam osnovne studije matematike, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike (4+1). Nakon završene četvrte godine studija, preusmerila sam se na integrisane studije smera Master profesor matematike (5 godina). Trenutno sam na 5. godini pomenutih studija. Položila sam sve predviđene ispite, ostvarivši prosečnu ocenu 9.71 tokom studija i tako stekla pravo na odbranu master rada. Na Studentskoj internacionalnoj konferenciji StudMath-IT, na Univerzitetu "Aurel Vlaicu"u Aradu (Rumunija, maj 2017) sam prezentovala rad *Applications of derivatives* i osvojila specijalnu nagradu za teorijsko/praktičnu zaslugu (*Recognition award for theoretical/pratical merit*). Dobitnik sam nagrada Univerziteta u Novom Sadu za uspeh u toku studija u školskoj 2015/'16, 2016/'17, 2017/'18 i 2018/'19). Školske 2018/'19 sam ostvarila pravo na stipendiju fonda "Dositeja", po konkursu za najbolje studente završnih godina studija u Republici Srbiji.

Vesna Nestorović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: monografska dokumentacija
BF

Tip zapisa: tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Vesna Nestorović
AU

Mentor: dr Ivana Vojnović
MN

Naslov rada: Primena eliptičnih pseudo-diferencijalnih operatora na dokazivanje regularnosti rešenja diferencijalnih jednačina
NR

Jezik publikacije: srpski
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2020.
GO

Izdavač: autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada:5/56/15/0/0/0/0
(broj poglavlja/broj strana /lit. citata/tabela/slika/grafikona/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: pseudo-diferencijalni operatori, oscilatorni integrali, eliptični pseudo-diferencijalni operatori, parametriks, eliptična regularnost
PO

UDK:

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu bavimo se pseudo-diferencijalnim operatorima, posebna pažnja je usmerena na jedan tip pseudo-diferencijalnih operatora - eliptične i na njegove primene na dokazivanje regularnosti rešenja diferencijalnih jednačina.

U uvodnom poglavlju dajemo pregled osnovnih pojmova, tvrđenja, oznaka vezanih za teoriju distribucija, L^p-prostora i drugih prostora funkcija. U prvom poglavlju upoznajemo se sa Furijeovom transformacijom i njenim osnovnim osobinama

koje će nam biti od pomoći pri izučavanju teorije pseudo-diferencijalnih operatora. U trećem poglavlju predstavljamo pseudo-diferencijalne operatore. Glavni cilj ovog poglavlja je bio da se pokaže da je kompozicija dva pseudo-diferencijalna operatora opet pseudo-diferencijalni operator. Četvrto poglavlje je posvećeno posebnoj klasi pseudo-diferencijalnih operatora-eliptičnim. Upoznajemo se sa osnovnom osobinom ovih operatora, a to je da imaju *parametrikse*. Dokazan je važan rezultat teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina, teorema o eliptičnoj regularnosti.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 7. oktobar 2020.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Nenad Teofanov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Član: dr Ivana Vojnović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, mentor

Član: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: monograph type
DT

Type of record: printed text
TR

Contents code: Master thesis
CC

Author: Vesna Nestorović
AU

Mentor: Ivana Vojnović, Ph.D.
MN

Title: Application of elliptic pseudo-differential operators on proving regularity of solutions of differential equations
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2020.
PY

Publisher: author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description:5/56/15/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional analysis
SD

Subject / Key words: Pseudo-Differential Operators, Oscillatory Integrals, Elliptic Pseudo-differential Operators, Parametrix, Elliptic regularity
SKW

UC:

Holding data: Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this master thesis, we deal with pseudo-differential operators, and special attention is focused on elliptic pseudo-differential operators and their applications on proving regularity of solutions of differential equations.

In introductory chapter we give a review of concepts and theorems which are related to theory of distributions, L^p-spaces and other spaces of functions. In the first chapter, the Fourier transformation and its most important properties for the study of pseudo-differential operators, are introduced. In the third chapter

pseudo-differential operators are presented. The main goal was to show that the class of pseudo-differential operators are closed under compositions. The fourth chapter is dedicated to special class of pseudo-differential operators, elliptic pseudo-differential operators. The most important property of elliptic pseudo-differential operators, which is that they have *parametrices*, is presented. The elliptic regularity theorem, which is important result in the theory of partial differential equations, is proven.
AB

Accepted by the Scientific Board on: October 7, 2020
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Prof. Nenad Teofanov, PhD, full professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Ivana Vojnović, PhD, assistant professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Prof. Marko Nedeljkov, PhD, full professor, Faculty of Science, Novi Sad