Univerzitet u Novom Sadu

Prirodno – matematički fakultet

Departman za matematiku i informatiku

Jelena Matijević

Konveksno programiranje i primene

– Master rad –

Mentor : Prof. dr Sanja Rapajić

Novi Sad , 2020.

Sadržaj

1 Uvod

Razvoj operacionih istraživanja, grane matematike koja za cilj ima donošnje odluka i koja pomoću kvantitativnih metoda i algoritama nastoji da obezbedi najbolje moguće rešenje, počinje za vreme i posle Drugog svetskog rata. Glavni cilj operacionih istraživanja predstavljao je optimizaciju organizacije ratnih operacija i način upotrebe ratnih sredstava, pa otuda potiče i sam naziv ove oblasti.

Operaciona istraživanja imaju za zadatak proučavanje složenih sistema. Istraživanja na ovim sistemima predstavljaju težak i skup zadatak, naročito u fazi projektovanja i uvođenja u rad.

Prvi korak u rešavanju bilo kod realnog problema je formiranje matematičkog modela koji opisuje taj problem. Matematički model je predstavljanje stvarnosti pomoću precizno definisanih matematičkih izraza, koji služi za izvođenje potrebnih analiza na osnovu kojih se može doći do rešenja posmatranog problema. Da bi se za neko rešenje moglo tvrditi da je optimalno (najbolje moguće) treba definisati meru kojom bi se odredio njegov kvalitet i koja bi omogućila njegovo poređenje sa drugim mogućnostima koja predstavljaju rešenje datog matematičkog problema.

Modeliranje takvih problemskih situacija zahteva poznavanje raznih matematičkih disciplina: matematička analiza, stohastika, verovatnoća, linearna algebra, matematičko programiranje i dr. Za svaku situaciju postoji opšti cilj aktivnosti kao i zahtevi koji moraju biti ispunjeni. U svim situacijama postoji nekoliko mogućih opcija, a prilikom odabira prave opcije i cilj i ograničenja treba da su zadovoljeni. Takve opcije nazivamo optimizacionim promenljivim. Promenljive koje ne utiču na cilj nisu važne.

Funkcija koja opisuje efikasnost izvršenja zadatka naziva se funkcija cilja. Da bi optimizacija bila što uspešnija potrebno je naći rešenje koje daje ektremnu vrednost funkcije cilja. Koeficijenti u funkciji cilja i ograničenjima nazivaju se parametrima. Skup ograničenja čine međusobne relacije i zahtevi. Pod skupom ograničenja podrazumevaju se: ograničenja tipa nejednakosti, ograničenja tipa jednakosti i opseg optimizacionih promenljivih tj. algebarske jednačine i nejednačine. Svako rešenje koje zadovoljava postojeća ograničenja naziva se dopustivim rešenjem. Jedan optimizacioni zadatak može imati više dopustivih rešenja koja formiraju skup dopustivih rešenja.

Optimalno rešenje zadatka je ono dopustivo rešenje u kome funkcija cilja dostiže minimum ili maksimum.

Vrednost funkcije cilja koja odgovara optimalnom rešenju naziva se optimalna vrednost ili optimum.

Metode za određivanje optimalnog rešenja zadatog problema su kompleksne i predstavljaju težak posao. Često je, pre odabira metode pogodno ispitati osobine funkcije cilja i datih ograničenja. Specijalno, neke metode su efikasnije zbog određene forme opšteg problema.

Optimizacioni problemi se mogu podeliti na sledeće kategorije:

- Problemi bez ograničenja
  Za ovaj tip problema dopustiv skup je ceo prostor, tj. rešenje se traži na celom prostoru. Funkcija cilja je u opštem slučaju nelinearna.
- Problemi sa ograničenjima
- Problemi linearnog programiranja
  Funkcija cilja i sva ograničenja su linearne funkcije.
- Problemi nelinearnog programiranja

Ovaj rad se bavi problemima konveksnog programiranja koji predstavljaju specijalan slučaj nelinearnog programiranja, kao i primenom ovih problema.

1.1 Lista oznaka

U nastavku su uvedene oznake koje će se koristiti u radu.

$\mathbb{R}$	Skup realnih brojeva.
$\mathbb{R}^n$	Euklidski prostor dimenzije n.
$\mathbb{R}^{nxm}$	Skup realnih matrica formata $n\ x\ m$.
$I \in \mathbb{R}^{nxn}$	Jedinična matrica formata $n\ x\ n$.
$x = [x_1, x_2, \dots x_n]^T$	Vektor dimenzije n.
$\|x\|_2$	Euklidska norma vektora x.
$L(x, \delta)$	Otvorena lopta sa centrom u x poluprečnika δ.
$\det(A)$	Determinanta matrice A.
A^{-1}	Inverzna matrica matrice A.
A^T	Transponovana matrica matrice A.
S_{++}^n	Skup simetričnih,pozitivno - definitnih matrica formata nxn.
S^n	Skup simetričnih matrica formata $n\ x\ n$.
S_+^n	Skup simetričnih,pozitivno-semidefinitnih matrica formata nxn.
$A \succ B$	Striktna nejednakost između simetričnih matrica A i B.
$A \succcurlyeq B$	Nejednakost između simetričnih matrica A i B.
K°	Unutrašnjost skupa K.
$\overline{K}$	Adherencija (zatvaranje) skupa K.
∂K	Rub skupa K.
$convK$	Konveksna obvojnica skupa K.
I_K	Karakteristična funkcija skupa K.
$C^p(\mathbb{R}^n)$	Skup p $-$puta neprekidno – diferencijabilnih funkcija na $\mathbb{R}^n$.

∇J	Gradijent funkcije J, $J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
$\nabla^2 J$	Hesijan funkcije J, $J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
$G'(x)$	Jakobijan funkcije $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
$\blacksquare$	Kraj dokaza.

2 Nelinearno programiranje

Prvi veći doprinos u razvoju teorije nelinearnog programiranja bio je rad Kuna i Takera iz 1951. godine kojim su postavljeni temelji nelinearnog programiranja. Iz tog razloga se u literaturi često navodi da su upravo Kun i Taker osnivači nelinearnog programiranja. O njihovim radovima i značaju biće reči u nastavku rada.

Problem nelinearnog programiranja podrazumeva pronalaženje ekstremne (minimalne ili maksimalne) vrednosti funkcije cilja nad zadatim skupom ograničenja, pri čemu su funkcija cilja i/ili funkcije koje opisuju ograničenja nelinearne.

Formalni zapis problema nelinearnog programiranja u opštem slučaju je dat sa

$$\min_{u \in U} \left(\max_{u \in U}\right) J(u) \qquad (2.1)$$
$$U \subseteq \mathbb{R}^n ,$$

gde je $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcija cilja,* $\mathbb{R}^n$ predstavlja Euklidski prostor dimenzije n,

$u \in \mathbb{R}^n$, $u = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T$, a U je dopustivi skup ili skup dopustivih rešenja problema (2.1).

Ukoliko je $U = \mathbb{R}^n$ reč je o problemu optimizacije bez ograničenja, ako je $U \subset \mathbb{R}^n$ reč je o problemu optimizacije sa ograničenjima.

Definicija 2.2: Svaki vektor $u \in U$ predstavlja dopustivo rešenje problema (2.1).

Definicija 2.3: Vektor $u_* \in U$ je optimalno rešenje problema $J(u) \to \min, u \in U$ ako je

$$J(u_*) \le J(u), \text{ za sve } u \in U.$$

Definicija 2.4: Vektor $u_* \in U$ je optimalno rešenje problema $J(u) \to max$, $u \in U$ ako je

$$J(u) \le J(u_*), \text{ za sve } u \in U.$$

Optimalna vrednost funkcije cilja označavaće se sa $J_* := J(u_*)$.

Lokalni i globalni ekstremi

Problem traženja maksimuma funkcije može se transformisati u problem minimizacije funkcije na sledeći način

$$\min_{u\in U} J(u) = max_{u\in U}(-J(u)).$$

Posmatramo problem $\min_{u\in U} J(u),\ U \subseteq \mathbb{R}^n$. (2.2)

Definicija 2.5: Neka je dat problem (2.2) *, tačka* $u_* \in U$ *je globalni minimum funkcije* J *odnosno globalni minimum problema* (2.2) *ako je*

$$J(u_*) \le J(u),\ \text{za sve } u \in U.$$

Definicija 2.6: *Neka je dat problem* (2.2)*, tačka* $u_* \in U$ *je strogi globalni minimum funkcije* J *odnosno strogi globalni minimum problema* (2.2) *ako je*

$$J(u_*) < J(u),\ \text{za sve } u \in U, u \neq u_*.$$

Definicija 2.7: Tačka $u_* \in U$ *je lokalni minimum funkcije J na skupu U ili lokalni minimum problema* (2.2) *ako postoji* $\delta > 0$ *tako da je*

$$J(u_*) \le J(u),\ \text{za sve } u \in U \text{ za koje je } \|u - u_*\| < \delta,$$

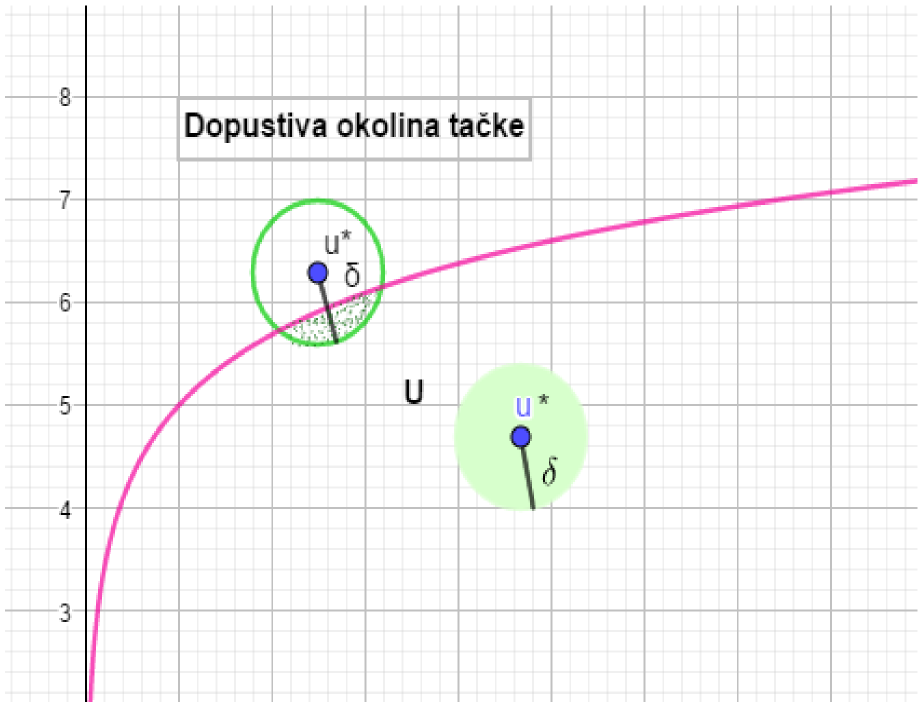
gde $\|u - u_*\| := \sqrt{(u_1 - u_{1*})^2 + (u_2 - u_{2*})^2 + \cdots + (u_n - u_{n*})^2}$

predstavlja rastojanje tačaka u i u_*.

Skup svih tačaka $u \in U$ za koje je $\|u - u_*\| < \delta$ je presek dopustivog skupa i sferne okoline tačke u_* poluprečnika δ.

Slučaj $n = 2$ se svodi na krug poluprečnika δ sa centrom u tački u_* ili jedan njegov deo u zavisnosti od položaja tačke u_*.

Slika ilustruje geometrijsku interpretaciju u slučaju $n = 2$.



Definicija 2.8: Tačka $u_* \in U$ *je strogi lokalni minimum funkcije* J *na skupu* U *ili strogi lokalni minimum problema* (2.2) *ako postoji* $\delta > 0$ *tako da je*

$$J(u_*) < J(u), \text{ za sve } u \in U \text{ za koje je } \|u - u_*\| < \delta, \; u \neq u_* \; .$$

Definicija 2.9: Neka je dat problem max $J(u), u \in U$. *Tačka* $u_* \in U$ *je globalni maksimum funkcije* J *nad skupom* U *ako je*

$$J(u_*) \geq J(u), \text{ za sve } u \in U.$$

Definicija 2.10: *Neka je dat problem max* $J(u), u \in U$. *Tačka* $u_* \in U$ *je strogi globalni maksimum funkcije* J *nad skupom* U *ako je*

$$J(u_*) > J(u), \text{ za sve } u \in U, u \neq u_*.$$

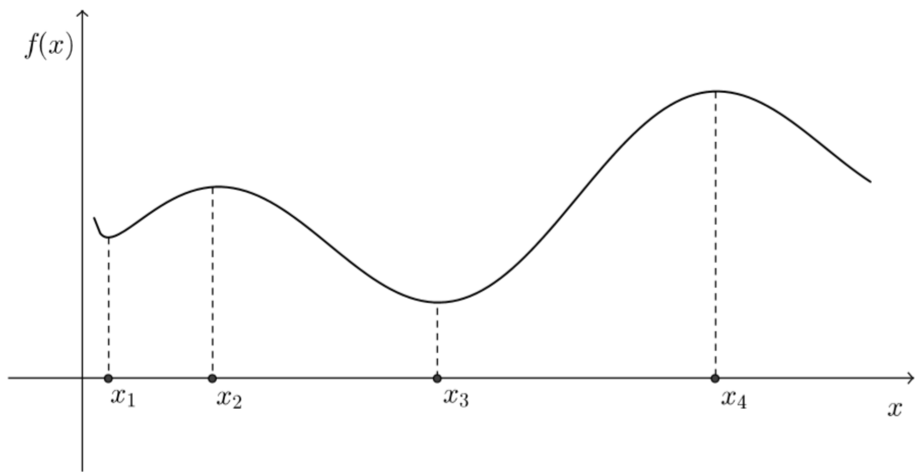
Definicija 2.11: Tačka $u_* \in U$ *je lokalni maksimum funkcije* J *na skupu* U *ako postoji* $\delta > 0$ *tako da je*

$$J(u_*) \geq J(u), \text{ za sve } u \in U \text{ za koje je } \|u - u_*\| < \delta.$$

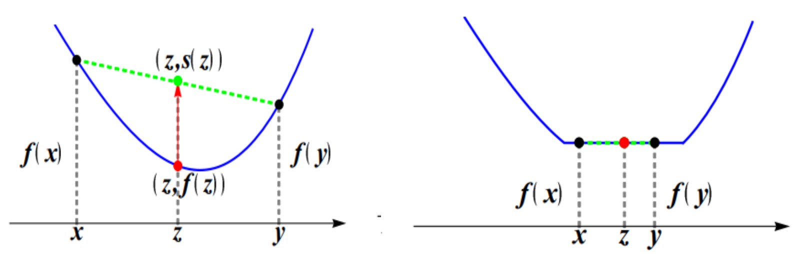
Definicija 2.12: Tačka $u_* \in U$ *je strogi lokalni maksimum funkcije* J *na skupu* U *ako postoji* $\delta > 0$ *tako da je*

$$J(u_*) > J(u), \text{ za sve } u \in U \text{ za koje je } \|u - u_*\| < \delta, \ u \neq u_* .$$

Jednodimenzionalni primeri koji ilustruju prethodno definisane pojmove su dati na Slici 1.1.



Slika 1.1: Primeri tačaka globalnih i (strogih) lokalnih minimuma i maksimuma



Globalni (lokalni) minimumi i maksimumi nazivaju se globalni (lokalni) ekstremi.

2.1 Problem nelinearnog programiranja bez ograničenja

Neka je dat problem optimizacije bez ograničenja $\min_{u \in U} J(u),\ U = \mathbb{R}^n$, tj. $\min_{u \in \mathbb{R}^n} J(u)$.

Do optimalnog rešenja problema u najjednostavnijim slučajevima moguće je doći upoređivanjem vrednosti funkcije cilja u svim dopustivim rešenjima. U mnogim slučajevima strogi lokalni minimumi mogu se pronaći ispitivanjem prvog i drugog izvoda funkcije cilja i upravo ta činjenica predstavlja polazište u konstrukciji postupaka za njihovo pretraživanje. Pri traženju optimalnog rešenja datog problema može se dogoditi da minimalnu vrednost funkcija cilja dostiže u različitim tačkama što implicira da dati problem ima više rešenja.

U ovom poglavlju biće predstavljeni najvažniji rezultati vezani za karakterizaciju lokalnog minimuma funkcija više promenljivih.

Potrebni uslovi optimalnosti opisuju uslove koje optimalno rešenje mora da zadovolji, dok druga dopustiva rešenja mogu, ali i ne moraju da ih zadovolje.

Pre formulacije teoreme koja daje potreban uslov za lokalni minimum biće navedene definicije neophodne za formulaciju iste.

Definicija 2.1.1 : Neka je $u = [u_1, u_2, \ldots\ldots u_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ i\ J(u) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *tada je*

$$\nabla J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J(u)}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial J(u)}{\partial u_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial J(u)}{\partial u_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ \ gradijent\ funkcije\ J.$$

Teorema 2.1.1: Neka je funkcija $J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna u tački* u_*. *Ako je* u_* *lokalni minimum funkcije* J onda je $\nabla J(u_*) = 0$.

Stacionarne tačke su tačke koje zadovoljavaju uslov $\nabla J(u) = 0$. Na osnovu prethodnog rezultata može se izvesti zaključak da se svi kandidati za lokalni minimum nalaze među stacionarnim tačkama.

Napomena: Analogno se izvodi zaključak da se među stacionarnim tačkama traže i tačke maksimuma.

Vektorska jednačina $\nabla J(u) = 0$ ekvivalentna je sa n skalarnih jednačina:

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u_1} = 0,\ \frac{\partial J(u)}{\partial u_2} = 0\,, \dots,\frac{\partial J(u)}{\partial u_n} = 0\ .$$

Pronalaženje stacionarnih tačaka svodi se na rešavanje sistema od n jednačina sa n nepoznatih.

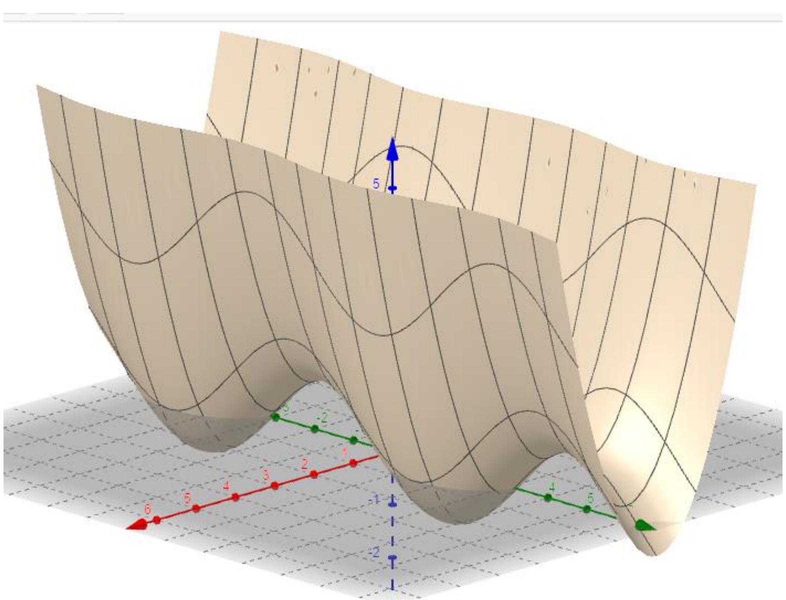
Primer 2.1.1: Naći sve stacionarne tačke funkcije $J(x,y) = x^2 - siny$.

Iz sistema

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 2x = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = -cosy = 0$$

dobijaju se stacionarne tačke $\mathrm{T}_k = \left(0\,,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$.



Primer 2.1.2: Naći sve stacionarne tačke funkcije

$J(u) = \frac{1}{3}u_1^3 + \frac{1}{2}u_1^2 + 2u_1u_2 + \frac{1}{2}u_2^2 - u_2 + 9.$

Rešava se sistem:

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u_1} = u_1^2 + u_1 + 2u_2 = 0$$

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u_2} = 2u_1 + u_2 - 1 = 0.$$

Pišući drugu jednačinu u obliku $u_2 = 1 - 2u_1$ i uvrštavanjem u prvu jednačinu dobija se kvadratna jednačina : $u_1^2 - 3u_1 + 2 = 0$.

Rešenja kvadratne jednačine su : $u_1 = 1$ i $u_1 = 2$.

Funkcija J ima dve stacionarne tačke $u_a = [1, -1]^T$ i $u_b = [2, -3\ ]^T$ koje predstavljaju kandidate za tačke lokalnog ekstrema.

Uslov koji garantuje da je posmatrano rešenje optimalno naziva se dovoljan uslov optimalnosti.

Definicija 2.1.2: Za simetričnu matricu $Q = [q_{ij}]_{nxn}$ kažemo da je pozitivno definitna ako važi uslov

$$x^{\mathrm{T}}Qx > 0\ , \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0.$$

Definicija 2.1.3: Za simetričnu matricu $Q = [q_{ij}]_{nxn}$ kažemo da je pozitivno semidefinitna ako važi uslov

$$x^{\mathrm{T}}Qx \geq 0, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ispitivanje pozitivne definitnosti (semidefinitnosti) u opštem slučaju nije jednostavan zadatak. Naredne leme prikazaće načine za lakšu proveru.

Lema2.1.1. [6] (Silvesterov kriterijum): *Simetrična matrica* $Q = [q_{ij}]_{nxn}$ *je pozitivno definitna ako i samo ako su svi glavni minori matrice* Q *pozitivni.*

Lema 2.1.2. [6] *Simetrična matrica* $Q = [q_{ij}]_{nxn}$ *je pozitivno semidefinitna ako i samo ako su svi minori simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu nenegativni.*

Definicija 2.1.4:Neka je $u = [u_1, u_2, \dots\dots u_n]^T \in \mathbb{R}^n, J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *i* $J(u) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *tada je matrica drugih izvoda*

$$\nabla^2 J(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J(u)}{\partial^2 u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_1 \partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u_n \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial^2 u_n} \end{bmatrix}$$

simetrična matrica pod nazivom Hesijan.

Teorema 2.1.2 [6] *Neka je* $J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dva puta neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke* u_*. *Ako je* $\nabla J(u_*) = 0$ *i ako je matrica* $\nabla^2 J(u_*)$ *pozitivno definitna, tada je* u_* *strogi lokalni minimum funkcije* J.

Teorema 2.1.3. [6]*: Neka je* $\nabla J(u_*) = 0$ *i neka su* $D_1, D_2, \dots., D_n$ *glavni minori matrice* $\nabla^2 J(u_*)$

- *Ako je* $D_k > 0$, $k = 1,2, \dots, n$ *tada je* u_* *strogi lokalni minimum.*
- *Ako je* $(-1)^k D_k > 0$, $k = 1,2, \dots, n$ *tada je* u_* *strogi lokalni maksimum.*

Napomena: Ukoliko ne postoji pravilnost znaka glavnih minora u obzir treba uzeti potrebne uslove optimalnosti drugog reda koji su formulisani u narednoj teoremi.

Teorema 2.1.4. [6]*: Neka je funkcija* $J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dva puta neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke* u_*. *Ako je* u_* *lokalni minimum funkcije J tada je* $\nabla J(u_*) = 0$ *i matrica* $\nabla^2 J(u_*)$ *je pozitivno semidefinitna.*

Razmatraju se stacionarne tačke dobijene u Primeru 2.1.2.

$u_a = [1, -1]^T$ i $u_b = [2, -3]^T$.

Matrica drugih izvoda je $\nabla^2 J(u) = \begin{bmatrix} 2u_1 + 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$\nabla^2 J(u_a) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D_1 = 3 > 0$, $D_2 = -4 < 0$. Sledi da tačka u_a nije ni lokalni minimum ni lokalni maksimum funkcije J iz primera.

$\nabla^2 J(u_b) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D_1 = 5 > 0$, $D_2 = 1 > 0$.

Sledi da je tačka u_b strogi lokalni minimum funkcije J.

Primer 2.1.3: Odrediti ekstreme funkcije

$J(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Rešenje : Iz uslova za stacionarne tačke dobija se sistem

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y = 0.$$

Oduzimajući ove dve jednačine dobija se $x = y$, pa zamenom u drugoj dobijamo

$$4x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x(x^2 - 1) = 0.$$

Stacionarne tačke su : $T_1(0,0), T_2(1,1)$ i $T_3\,(-1,-1)$.

$\nabla^2 J(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{bmatrix}$.

$\nabla^2 J(T_1) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow D_1(T_1) = -2 < 0$, $D_2(T_1) = 0$.

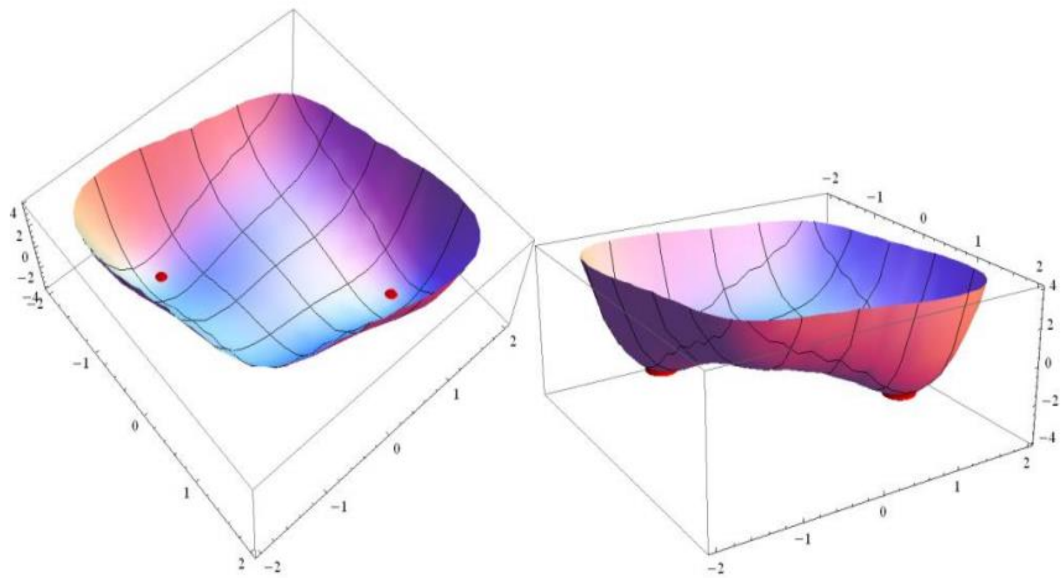
Na ovaj način ne može se utvrditi priroda tačke T_1.

$\nabla^2 J(T_2) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow D_1(T_2) = 10 > 0, D_2(T_1) = 96 > 0$, pa se zaključuje da

u tački $T_2(1,1)$ postoji lokalni minimum $J_* = J(1,1) = -72$.

$\nabla^2 J(T_3) = \nabla^2 J(T_2)$ pa funkcija u tački T_3 ima lokalni minimum.

$J_* = J(-1,-1) = -72.$



Da je neko rešenje optimalno može se tvrditi samo ukoliko ono ispunjava uslov optimalnosti koji je istovremeno i potreban i dovoljan i obratno, samo optimalna rešenja zadovoljavaju potrebne i dovoljne uslove optimalnosti.

2.2 Problem nelinearnog programiranja sa ograničenjima

Problem nelinearnog programiranja sa ograničenjima je problem oblika

$$\min_{u \in U} \left(\max_{u \in U}\right) J(u)$$

$$U \subset \mathbb{R}^n.$$

Skup U je skup ograničenja tj. dopustiv skup.

Ograničenja problema nelinearnog programiranja formiraju dopustiv skup rešenja. Pomenuta ograničenja, imaju ulogu prilikom izbora strategije za rešavanje datog problema. Pre nego što se odabere postupak kojim će se dati problem rešavati neophodno je proveriti model problema. Ukoliko su ograničenja neprecizno definisana to može dovesti do smanjenja dopustivog skupa ili čak do nerešivosti problema.

Tokom godina razvijene su mnogobrojne metode optimizacije pomoću kojih je moguće rešavati razne zadatke nelinearnog programiranja. Sve te metode specijalizovane su za različite tipove zadataka koji se razlikuju po dimenzijama funkcije cilja i skupu ograničenja. Metode su specijalizovane za različite tipove zadataka u zavisnosti od osobina koje matematički model posmatranog problema poseduje. Neki algoritmi u određenim zadacima nisu uvek primenljivi, efikasnost zavisi od mnogo faktora, stoga na umu treba imati i broj potrebnih računskih operacija koje treba obaviti prilikom rešavanja nekog problema.

Postoje dva različita pristupa prilikom rešavanja problema sa ograničenjima. Prvi predstavlja određivanje optimalne vrednosti uz zadovoljavanje ograničenja, a drugi je transformacija problema na način da se zadovoljavanje ograničenja „ubaci" u funkciju cilja i da se tako transformisani problem rešava kao zadatak bez ograničenja.

Metod eliminacije promenljivih

Neka je dat problem nelinearnog programiranja u kome su ograničenja tipa jednakosti:

$$\min_{u \in U} J(\mathrm{u}) \tag{2.3}$$
$$U = \{u \in \mathbb{R}^n |\ g_k(u) = 0, k = 1,2, \ldots m\},$$

gde su, $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $g_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, k = 1,2, \ldots m$ definisane i neprekidno diferencijabilne na čitavom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Osnova metode eliminacije promenljivih leži u tome da se dati problem transformiše u problem optimizacje bez ograničenja. Ideja je da se promenljive izraze iz sistema jednačina, tako da se eliminiše onoliko promenljivih koliko ima uslova.

Na taj način dopustiv skup dobija oblik

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n |\ u_{n+1-i} = h_i(u_1, \ldots, u_{n-m}), i = 1,2,,,.m\},$$

i navedeni problem postaje problem nelinearnog programiranja bez ograničenja

$$\min_{u \in U} J(\mathrm{u}) = \min_{u \in \mathbb{R}^{n-m}} J(u_1, \ldots, u_{n-m}, h_m(u_1, \ldots, u_{n-m}), \ldots.., h_1(u_1, \ldots, u_{n-m})).$$

Ako je $[u_1^*, \ldots, u_{n-m}^*]^T$ rešenje problema bez ograničenja onda je rešenje problema sa ograničenjima tačka $u^* = [u_1^*, \ldots, u_{n-m}^*, h_m^*(u_1^*, \ldots, u_{n-m}^*), \ldots., h_1^*(u_1^*, \ldots, u_{n-m}^*)]^T$.

Primer 2.2.1 : Odrediti dimenzije pravougaonika maksimalne površine čiji je obim $2m$.

Ako promenljive u_1, u_2 označavaju dužine stranica pravougaonika, onda se problem može formulisati u sledećoj formi

$$max\, J(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$$
$$u_1 + u_2 = 1$$
$$u_1, u_2 > 0.$$

Zadatak će se rešiti metodom eliminacije promenljivih.

Iz prvog uslova ograničenja može se izraziti $u_2 = 1 - u_1$ i uvrštavanjem u funkciju cilja dobija se problem minimizacije bez ograničenja

$$max\, J_1(u_1) = u_1 \cdot (1 - u_1),\ u_1, u_2 > 0.$$

Stacionarna tačka je $u_1 = 0.5$, a kako je $J_1''(u_1) = -2 < 0$.

Maksimalna vrednost $J_{1max} = 0.25$ se dostiže za $u_1 = 0.5$ tj. $J_{max} = 0.25$ za

$u_1 = 0.5$ i $u_2 = 0.5$.

Navedena metoda ima ograničen značaj pošto je analitički moguće rešiti sistem ukoliko su funkcije $h_i(u_1, \dots, u_{n-m}), i = 1,2, \dots, m$ linearne.

Kada su funkcije ograničenja nelinearne, u velikom broju slučajeva, eliminacija se ne može efikasno izvršiti.

Teorema o implicitno zadatoj funkciji daje uslove pod kojima je eliminacija promenljivih teorijski opravdana i oni se svode na to da Jakobijan mora biti punog ranga na $\mathbb{R}^n$.

Metod Lagranžovih množilaca

Ova metoda predstavlja drugi pristup rešavanju problema (2.3) koristeći potrebne i dovoljne uslove optimalnosti za Lagranžovu funkciju.

Definicija 2.2.1: Funkcija Lagranža L *pridružena problemu* (2.3) *definiše se na sledeći način*

$$L(u, \lambda) = J(u) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(u),$$

gde su $\lambda_k, k = 1,2, \dots, m$ *Lagranžovi množitelji.*

Na funkciju $L(u, \lambda)$ će biti primenjeni potrebni i dovoljni uslovi optimalnosti preko parcijalnih izvoda prvog i drugog reda.

Teorema 2.2.1 [6] (Potrebni uslovi za lokalni minimum)

Neka su funkcije $J(u), g_k(u), k = 1,2, \dots, m$ neprekidno diferencijabilne u okolini u^*. Ako je u^* lokalni minimum problema (2.3) i ako je $rang(G'(u^*)) = m$, onda postoje $\lambda_k^*, k = 1,2, \dots, m$ tako da je $\nabla L(u^*, \lambda^*) = 0$, pri čemu je $G'(u^*)$ Jakobijan pridružen ograničenjima problema (2.3).

Stacionarne tačke Lagranžove funkcije se određuju rešavanjem sistema jednačina $\nabla L(u^*, \lambda^*) = 0$, a lokalni minimum problema (2.3) se nalazi među stacionarnim tačkama.

Dovoljni uslovi za strogi lokalni minimum formulišu se pod dodatnim pretpostavkama da su funkcija cilja i funkcije ograničenja dva puta neprekidno diferencijabilne.

Tada je matrica $\nabla^2{}_{uu}L(u,\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(u,\lambda)}{\partial u_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(u,\lambda)}{\partial u_1 \partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(u,\lambda)}{\partial u_n \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(u,\lambda)}{\partial u_n^2} \end{bmatrix}_{n\times n}$ simetrična.

Svakoj stacionarnoj tački (u^*,λ^*) Lagranžove funkcije pridružuje se matrica $\nabla^2{}_{uu}L(u^*,\lambda^*)$ i tangentni prostor $T(u^*) = \{u \in \mathbb{R}^n | G'(u^*)u = 0\}$, gde je je $G'(u^*)$ Jakobijan pridružen ograničenjima problema (2.3).

Na osnovu definicije matrice $G'(u^*)$, $T(u^*)$ predstavlja skup rešenja homogenog sistema od m linearnih jednačina sa n nepoznatih.

Matrica $\nabla^2{}_{uu}L(u^*,\lambda^*)$ je pozitivno – definitna na $T(u^*)$ ako važi

$u^T\nabla^2{}_{uu}L(u^*,\lambda^*)u > 0$ za sve $u \in T(u^*), u \neq 0$.

Teorema 2.2.2 [6] (Dovoljni uslovi za strogi lokalni minimum) Neka su funkcije $J(u), g_k, k = 1,2, \dots m$ dva puta neprekidno diferencijabilne u nekoj okolini u^*. Ako je $\nabla L(u^*,\lambda^*) = 0$ i ako je matrica $\nabla^2{}_{uu}L(u^*,\lambda^*)$ pozitivno definitna na $T(u^*)$, tada je u^* strogi lokalni minimum problema (2.3).

Uslov $u^T\nabla^2{}_{uu}L(u^*,\lambda^*)u > 0$ za sve $u \in T(u^*), u \neq 0$ se može proveriti na osnovu Silvesterovog kriterijuma.

Obeležimo sa $H(u^*,\lambda^*)$ matricu dimenzije $(m+n) \times (m+n)$ koja se sastoji od 4 bloka.

$$H(u^*,\lambda^*) = \begin{bmatrix} 0 & G'(u^*) \\ G'(u^*)^T & \nabla^2{}_{uu}L(u^*,\lambda^*) \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}$$

gde je 0 matrica dimenzije $m \times m$ čiji su svi elementi 0,

$$G'(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(u)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_{1(u)}}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(u)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(u)}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad \nabla^2{}_{uu} L(u,\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(u,\lambda)}{\partial u_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(u,\lambda)}{\partial u_1 \partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(u,\lambda)}{\partial u_n \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(u,\lambda)}{\partial u_n^2} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Neka je (u^*, λ^*) stacionarna tačka funkcije Lagranža, $rang(G'(u^*)) = m$ i neka su $D_1, \dots\dots, D_{m+n}$ glavni minori matrice $H(u^*, \lambda^*)$.

- Ako su $(-1)^m D_{2m+j} > 0, j = 1, \dots n - m$ tada je u^* tačka strogog lokalnog minimuma problema (2.3).
- Ako su $(-1)^{m+j} D_{2m+j} > 0, j = 1,2, \dots n - m$ tada je u^* strogi lokalni maksimuma problema (2.3).

Primer 2.2.1: Direkcija za puteve želi da sagradi pravougaono odmaralište površine 5000m^2 za motocikliste, pored autoputa, koje će biti ograđeno tako da strana prema autoputu ostane neograđena. Koje dimenzije treba da ima odmaralište da dužina ograde bude najmanja?

Rešenje: Neka je x – dužina, a y – širina odmarališta.

Tada zadati problem dobija sledeći matematički oblik

$$\min\ J(x, y) = x + 2y$$

$$xy = 5000.$$

Lagranžova funkcija za dati problem je $L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(xy - 5000)$.

Stacionarne tačke se određuju iz uslova

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 + \lambda x = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda} = xy - 5000 = 0.$$

Rešavanjem sistema dobija se $\lambda = \pm \frac{1}{50}$.

Međutim, za $\lambda = \frac{1}{50}$ dobija se $x = -100, y = -50$, a kako zbog prirode problema x, y ne mogu biti negativne ovo rešenje se odbacuje.

Druga mogućnost za $\lambda = -\frac{1}{50}$ je $x = 100, y = 50$, što je dopustivo rešenje.

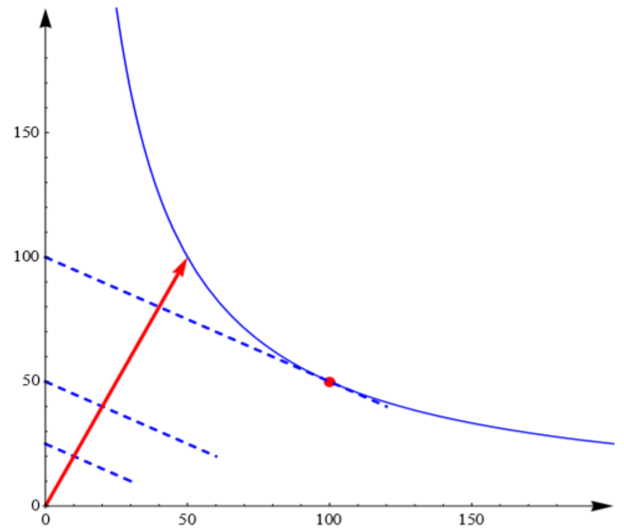
U ovom primeru $n = 2, m = 1$.

Matrica drugih parcijalnih izvoda $H(u^*, \lambda^*)$ ima sledeći oblik

$$H(u^*, \lambda^*) = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 100 \\ 50 & 0 & -\frac{1}{50} \\ 100 & -\frac{1}{50} & 0 \end{bmatrix}$$

Glavni minori matrice su $D_1 = 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 50 \\ 50 & 0 \end{vmatrix} = -2500, D_3 = -200.$

Na osnovu prethodne teoreme može se zaključiti da je $[x^*, y^*]^T = [100{,}50]^T$ tačka minimuma, tj. rešenje polaznog problema.



3 Konveksno programiranje

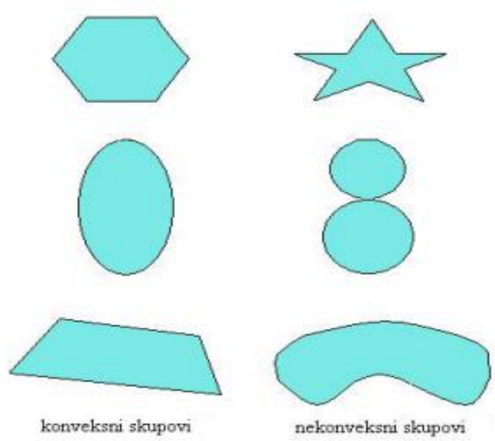
Problem konveksnog programiranja podrazumeva nalaženje minimuma konveksne funkcije pod ograničenjima koja obrazuju konveksan skup. Ovaj problem predstavlja veoma dobro obrađenu oblast nelinearnog programiranja. Problem konveksnog programiranja ima mnogo osobina koje nisu ispunjene u nekonveksnom slučaju.

Pre formalne definicije problema konveksnog programiranja u radu će biti predstavljene definicije i osobine konveksnih skupova i konveksnih funkcija neophodne za razumevanje problema optimizacije konveksne funkcije na konveksnom skupu.

3.1 Konveksni skupovi

Definicija 3.1.1 : Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ *. Skup* $A \subset X$ *je konveksan ako za svake dve tačke* $x, y \in A$ *i sve* $\alpha \in [0,1]$ *važi* $\alpha x + (1-\alpha) y \in A$.

Geometrijski posmatrano skup A je konveksan ako za svake dve tačke skupa A važi da duž određena tim tačkama takođe pripada skupu A.



Definicija 3.1.2: Neka su $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ *tačke vektorskog prostora X.*

Tačka $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ *predstavlja konveksnu kombinaciju tačaka* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, *ako je* $\alpha_k \geq 0$ *za sve* $k = 1,2, \ldots . m$ *i* $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.

Primeri : $\emptyset, \mathbb{R}^n, \{a\}$ su konveksni skupovi.

Teoreme u nastavku govore o osobinama konveksnih skupova.

Teorema 3.1.1. [9]*: Neka su* $U_i \;\; i \in I$ *konveksni skupovi tada je* $\bigcap_{i\in I} U_i$ *konveksan skup.*

Dokaz: Neka $u, v \in \bigcap_{i\in I} U_i$.

Tada $u, v \in U_i$ *za sve* $i \in I$.

Skupovi $U_i \;\; i \in I$ *su konveksni pa po definiciji važi*

$$\alpha u + (1-\alpha)v \in U_i \;\; , za \; sve \; i \in I \; i \; \alpha \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \; \alpha u + (1-\alpha)v \in \bigcap_{i\in I} U_i \;\; \blacksquare .$$

Teorema 3.1.2. [9] *: Neka su* U_1 *i* U_2 *konveksni skupovi. Tada:*

a) $U_1 + U_2$ *je konveksan skup.*
b) $U_1 - U_2$ *je konveksan skup.*
c) λU_1, $\lambda \in \mathbb{R}$ *je konveksan skup.*
d) $U_1 \times U_2$ *je konveksan skup.*

Dokaz:

a) $U_1 + U_2 \overset{\text{def}}{=} \{u |\, u = a + b, a \in U_1, b \in U_2\}$
Neka $u, v \in U_1 + U_2, \alpha \in [0,1]$. Treba pokazati

$$\alpha u + (1-\alpha)v \in U_1 + U_2.$$

$u \in U_1 + U_2 \Rightarrow u = u_1 + u_2$, $u_1 \in U_1$ *i* $u_2 \in U_2$.

$v \in U_1 + U_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2$, $v_1 \in U_1$ *i* $v_2 \in U_2$.

$\alpha u + (1-\alpha)v = \alpha(u_1 + u_2) + (1-\alpha)(v_1 + v_2) = \alpha u_1 + (1-\alpha)v_1 + \alpha u_2 + (1-\alpha)v_2$.

$\bar{u} = \alpha u_1 + (1-\alpha)v_1 \in U_1$.

$\bar{v} = \alpha u_2 + (1-\alpha)v_2 \in U_2$.

Konačno dobijamo $\alpha u + (1-\alpha)v = \bar{u} + \bar{v} \in U_1 + U_2$.

b) Analogno se dokazuje.
c) $\lambda U_1 \overset{\text{def}}{=} \{x | x = \lambda u \, , u \in U_1\}$

Neka $\alpha \in [0,1]$.

$x \in \lambda U_1 \Rightarrow x = \lambda u, u \in U_1.$

$y \in \lambda U_1 \Rightarrow y = \lambda v, v \in U_1.$

Posmatra se $\alpha x + (1-\alpha)y = \alpha\lambda u + (1-\alpha)\lambda v = \lambda\,(\alpha x + (1-\alpha)y) \in \lambda U_1.$

d) $U_1 \times U_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(u_1, v_1) | u_1 \in U_1, v_1 \in U_2\}.$

Neka je $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U_1 \times U_2.$

$\alpha(u_1, v_1) + (1-\alpha)(u_2, v_2) = (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2, \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) \in U_1 \times U_2$ ■.

Teorema 3.1.3. [9]*: Zatvaranje konveksnog skupa je konveksan skup.*

Dokaz: Primetimo da, ako je $A = \emptyset$, tada je i $\bar{A} = \emptyset$, pa je $\bar{A}$ konveksan skup. Ako je $A = \{x\}$ onda je $\overline{A} = \overline{\{x\}} = \{x\}$ konveksan skup.

Pretpostavimo da konveksan skup A ima bar dva elementa.

Neka $a, b \in \overline{A}$.

Tačke a, b su tačke nagomilavanja skupa A, znači, postoje nizovi elemenata skupa A $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, koji konvergiraju ka tačkama a i b respektivno.

Za dato $\alpha \in [0,1]$ i svako $k \in \mathbb{N}$ važi $\alpha a_k + (1-\alpha)b_k \in A$.

Za niz elemenata $c_k = \alpha a_k + (1-\alpha)b_k, k \in \mathbb{N}$ važi

$\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \alpha \lim\limits_{k\to\infty} a_k + (1-\alpha) \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \alpha a + (1-\alpha)b$

$\Rightarrow \alpha a + (1-\alpha)b$ je tačka nagomilavanja skupa A ,

odnosno $\alpha a + (1-\alpha)b \in \overline{A}$. ■

Teorema 3.1.4. [5]*: Unutrašnjost konveksnog skupa je konveksan skup.*

Dokaz:

Neka je C konveksan skup i C° unutrašnjost skupa C.

Ako je $C^\circ = \emptyset$ tvrđenje je trivijalno.

Pretpostavimo da je $C^\circ \neq \emptyset$ i neka $z, y \in C^\circ$, tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da su lopte $L_\varepsilon(y) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - y\| < \varepsilon\}$ i $L_\varepsilon(z) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - z\| < \varepsilon\}$

podskupovi skupa C.

Neka je $\alpha \in [0,1]$. Treba pokazati da je $L_\varepsilon(\alpha y + (1-\alpha)z) \subseteq C$.

Ako $x \in L_\varepsilon(\alpha y + (1-\alpha)z)$ onda je $x = \alpha y + (1-\alpha)z + \eta e$,

gde je $\eta \in [0, \varepsilon]$ i $\|e\| = 1$.

S obzirom na to da $y + \eta e \in L_\varepsilon(y) \subseteq C$ i $z + \eta e \in L_\varepsilon(z) \subseteq C$ zbog konveksnosti skupa C važiće $\alpha(y + \eta e) + (1-\alpha)(z + \eta e) \in C$,

dakle, $L_\varepsilon(\alpha y + (1-\alpha)z) \subseteq C$ tj.

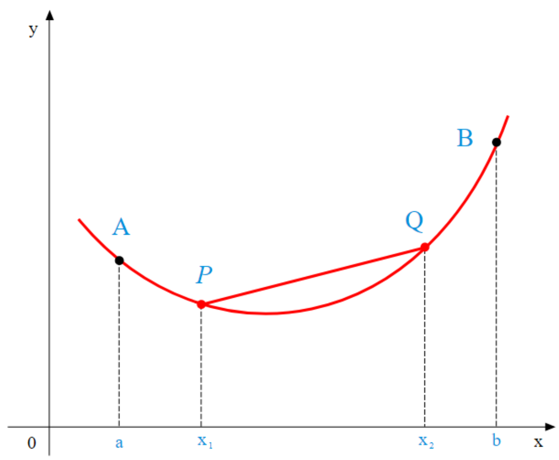
$\alpha y + (1-\alpha)z \in C^\circ$. ■

3.2 Konveksne funkcije

Definicija 3.2.1: Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ *konveksan skup. Funkcija* $J(u)$ *je konveksna na skupu* U *ako važi*

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v), \qquad 0 \leq \alpha \leq 1, \qquad \forall u, v \in U.$$

Za konveksnu funkciju jedne promenljive, važi da grafik funkcije uvek leži ispod linije koja spaja bilo koje dve tačke na grafiku, kao što se može videti na sledećoj slici. Konkavnu funkciju možemo definisati ako promenimo smer nejednakosti u prethodnom izrazu.



Definicija 3.2.2: Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ *konveksan skup. Funkcija* $J(u)$ *je strogo konveksna na skupu* U *ako važi*

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v),$$
$$za\ svako\ u, v \in U, u \neq v\ i\ \ 0 < \alpha < 1.$$

Kod stroge konveksnosti se, dakle, traži stoga nejednakost, pri čemu su morali biti isključeni slučajevi $v = u\ i\ \alpha = 0\ i\ \alpha = 1$ jer u tim slučajevima važi jednakost.

Napomena: Za funkciju J kažemo da je konkavna (strogo konkavna) ako je $-J$ konveksna (strogo konveksna) funkcija.

Ispitivanje konveksnosti funkcije po definiciji je teško, zato što zahteva razmatranje beskonačno mnogo tačaka. Međutim, ako je funkcija jedanput ili dvaput neprekidno diferencijabilna konveksnost se može okarakterisati na još jedan način.

Definicija 3.2.3: Funkcija $J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je neprekidno diferencijabilna na skupu $U \subset \mathbb{R}^n$ ako je diferencijabilna na U i važi

$$\lim_{h\to 0} \|(\nabla J(u+h) - \nabla J(u)\| = 0, \ \forall u, u+h \in U, \ h > 0.$$

Klasa ovih funkcija nad U označavaće se sa $C^1(U)$.

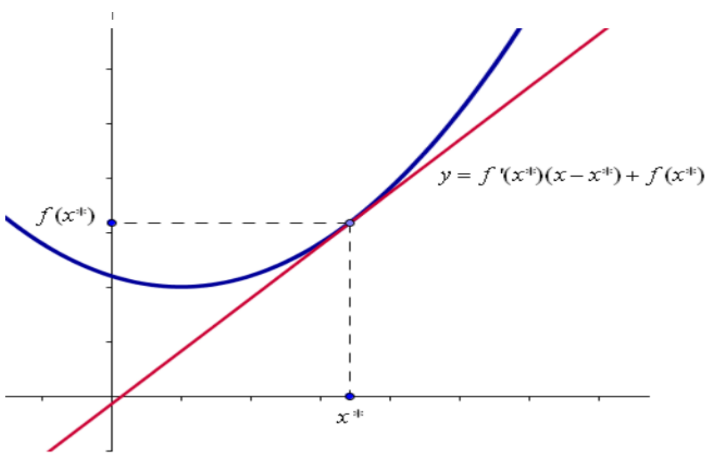
*Teorema 3.2.1. [9] (*Potreban i dovoljan uslov za konveksnost diferencijabilne funkcije)

Neka je funkcija $J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na konveksnom skupu U. Tada je J konveksna na U ako i samo ako važi

$$\nabla J(u)^T (v-u) \leq J(v) - J(u), za\ svako\ u, v \in U.$$

Na slici je data geometrijska interpretacija ovog rezultata u slučaju funkcije jedne promenljive.

Primetimo da je tada $\nabla J(u)^T(v-u) = J'(u)(v-u)$.



Grafik konveksne funkcije se nalazi iznad grafika tangente.

Definicija 3.2.4: Neka je $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definisana u nekoj okolini tačke u $\in \mathbb{R}^n$. Funkcija J je dva puta diferencijabilna u tački u, ako zajedno sa gradijentom $\nabla J(u), postoji\ simetrična\ matrica\ \nabla^2 J(u)$ reda n x n takva da se priraštaj funkcije J u tački u može predstaviti na sledeći način

$$J(u+h)-J(u) = \langle \nabla J(u), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 J(u), h\rangle + \sigma(h) \text{ , gde je } \lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h)}{\|h\|^2} = 0, h > 0.$$

Definicija 3.2.5: Funkcija $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je dva puta neprekidno diferencijabilna na skupu $U \subset \mathbb{R}^n$ ako je dva puta diferencijabilna na U i pri tome je

$$\lim_{h\to 0}\|\nabla^2 J(u+h) - \nabla^2 J(u)\| = 0, \qquad \forall u, u+h \in U, h > 0.$$

Klasa ovih funkcija označavaće se sa $C^2(U)$.

Teorema 3.2.2 [6] *(*Dovoljan uslov za konveksnost dvaput diferencijabilne funkcije)

a) *Neka je funkcija $J(u) \in C^2(U)$. Ako je matrica $\nabla^2 J(u)$ pozitivno semidefinitna za svako $u \in U$ tada je J konveksna na U .*
b) *Neka je funkcija $J(u) \in C^2(U)$. Ako je matrica $\nabla^2 J(u)$ pozitivno definitna za svako u $\in U$ tada je J strogo konveksna na U .*

Pozitivnu semidefinitnost je moguće neposredno proveriti ispitivanjem znaka svih minora simetričnih u odnosu na glavnu dijagonalu. Za linearnu funkciju, matrica Hesijana se sastoji samo od nula, pa je linearna funkcija u isto vreme i konveksna i konkavna.

Za složenije funkcije, Hesijan može biti nepregledna matrica i može biti teško odrediti znak za sve moguće vrednosti promenljivih.

U složenijim situacijama često se koriste sledeći rezultati koji su ovde navedeni bez dokaza:

1. Ako je J (u) konveksna funkcija, onda je αJ (u) takođe konveksna funkcija za bilo koje $\alpha > 0$.

2. Suma konveksnih funkcija je konveksna funkcija. Matematički ako su $f_i(x)$,

$i = 1,2, \dots, k$, sve konveksne funkcije $\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$ je konveksna funkcija.

3. Ako je $J(u)$ konveksna funkcija, a $g(y)$ je monotono rastuća konveksna funkcija, onda je $g(J(u))$ takođe konveksna funkcija.

Neke funkcije nisu konveksne na svom celom domenu; međutim, one mogu biti konveksne na određenom skupu.

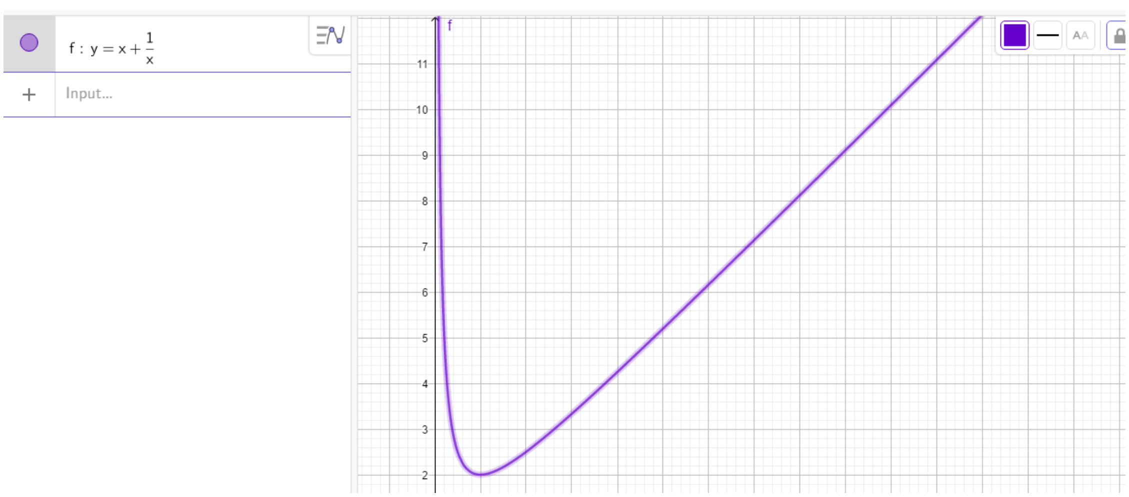
Primer 3.2.1: Ispitati konveksnost sledeće funkcije jedne promenljive

$$J(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

Hesijan je drugi izvod funkcije $\nabla^2 J = \frac{2}{x^3} > 0 \;\; za \;\; x > 0.$

Zaključujemo da je funkcija konveksna na datom domenu.

Sledeći grafik to potvrđuje:



Primer 3.2.2: Ispitati konveksnost funkcije

$J\ (\ x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{2}{x_3}^2$

Za svako $x \in \mathbb{R}^3$ dobijamo $\nabla^2 J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Svi minori simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu su:

- 3 minora reda 1 : $q_{11} = 2 > 0, q_{22} = 1 > 0\ , q_{33} = 2 > 0$
- 3 minora reda 2 :

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{13} \\ q_{21} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{22} & q_{23} \\ q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- 1 minor reda 3 : $\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Dakle, matrica $\nabla^2 J$ je pozitivno semidefinitna pa sledi

$J\ (\ x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{2}{x_3}^2$ je konveksna funkcija.

Primer 3.2.2: Ispitati konveksnost funkcije $J(x, y) = e^{x^2+y^2} + e^{x+2y}$.

Hesijan je $\nabla^2 J = \begin{bmatrix} (4x^2 + 2)e^{x^2+y^2} + e^{x+2y} & 4xye^{x^2+y^2} + 2e^{x+2y} \\ 4xye^{x^2+y^2} + 2e^{x+2y} & (4y^2 + 2)e^{x^2+y^2} + 4e^{x+2y} \end{bmatrix}$

Određivanje znaka glavnih minora date matrice predstavlja težak zadatak, stoga će se konveksnost funkcije proveriti na drugačiji način.

Najpre, primetimo da je funkcija J predstavljena kao zbir dve eksponencijalne funkcije, stoga ćemo ispitati konveksnost funkcija $e^{x^2+y^2}$ i e^{x+2y}. Tada će i funkcija J biti konveksna kao zbir dve konveksne funkcije.

Korišćenjem pravila za kompoziciju funkcija, trebalo bi pokazati da su funkcije

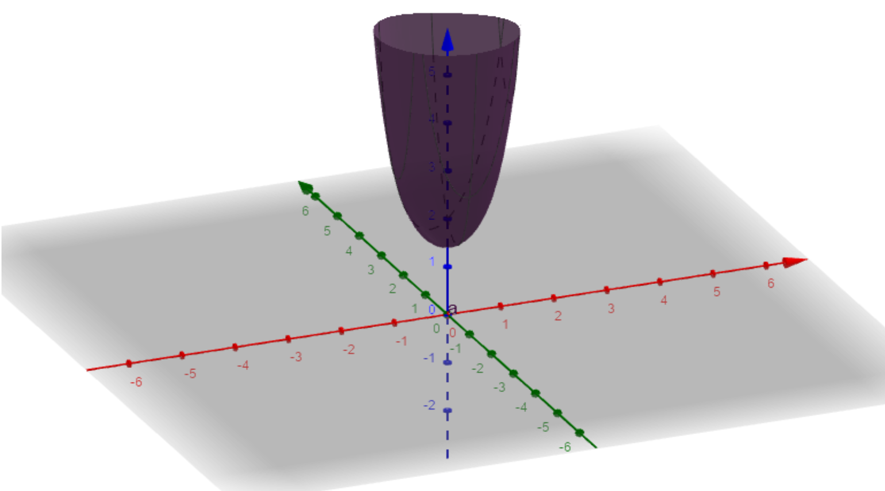
$$f_1(x,y) = x^2 + y^2,$$
$$f_2(x,y) = x + 2y$$

konveksne.

$\nabla^2 f_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ f_1 je konveksna funkcija $\Rightarrow e^{x^2+y^2}$ je konveksna funkcija.

$\nabla^2 f_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ f_2 je konveksna funkcija $\Rightarrow e^{x+2y}$ je konveksna funkcija.

Ovim smo pokazali da su obe funkcije $e^{x^2+y^2}$ i e^{x+2y} konveksne , pa zaključujemo da je i funkcija $J(x,y) = e^{x^2+y^2} + e^{x+2y}$ konveksna funkcija.



3.3 Osobine konveksnih funkcija

Teorema 3.3.1. [9]*: Neka je* U *konveksan skup i* $J(u) \in C^1(U)$.

$J(u)$ *je konveksna ako i samo ako* $J(u) \geq J(v) + \langle \nabla J(u), u - v \rangle, \forall u, v \in U$.

Dokaz:

$(\Rightarrow)$ $J(u)$ *je* konveksna $\overset{def}{\Longrightarrow}$ $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$,

$$0 \leq \alpha \leq 1 \; i \; \forall u, v \in U.$$

$J(v + \alpha(u - v)) \leq J(v) + \alpha(J(u) - J(v)$

$h := \alpha(u - v)$

$\xRightarrow{Teorema\ srednje\ vrednosti}$ $\langle \nabla J(v + \theta(\alpha(u - v)), \alpha(u - v) \rangle \leq \alpha(J(u) - J(v))$,

$gde\ je$ $0 < \theta < 1$. Nakon deljenja prethodne nejednakosti sa α sledi:

$J(u) \geq \langle \nabla J(v + \theta\alpha(u - v), u - v \rangle + J(v)$, $\|\alpha(u - v)\| \xrightarrow{\alpha \to 0} 0$

$\Rightarrow J(u) \geq \langle \nabla J(v), u - v \rangle + J(v)$.

$(\Leftarrow)$ Neka važi $J(u) \geq \langle \nabla J(v), u - v \rangle + J(v)$, $\forall u, v \in U$.

Treba pokazati da je $J(u)$ konveksna.

Za $u, v \in U$ definišemo tačku

$u_\alpha := \alpha u + (1-\alpha)v \in U$. ($U$ je konveksan skup).

$J(u) \geq \langle \nabla J(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + J(u_\alpha)$ $/ \cdot \alpha$

$J(v) \geq \langle \nabla J(u_\alpha), v - u_\alpha \rangle + J(u_\alpha)$ $/ \cdot (1-\alpha)$

$\Rightarrow \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) \geq \langle \nabla J(u_\alpha), \alpha(u - u_\alpha) + (1-\alpha)(v - u_\alpha) \rangle + J(u_\alpha)$

$$\langle \nabla J(u_\alpha), \alpha(u - u_\alpha) + (1-\alpha)(v - u_\alpha) \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ $\alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) \geq J(u_\alpha) = J(\alpha u + (1-\alpha)v)$

$\Rightarrow$ $J(u)$ je konveksna funkcija. ∎

Teorema 3.3.2. [9]*: Neka je U konveksan skup i* $J(u) \in C^1(U)$.

$J(u)$ *je konveksna ako i samo ako* $\langle \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v \rangle \geq 0$, $\forall u, v \in U$.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Iz konveksnosti funkcije $J(u)$ sledi

$J(u) \geq J(v) + \langle \nabla J(v), u - v \rangle$

$J(v) \geq J(u) + \langle \nabla J(u), v - u \rangle$.

Sabiranjem ove dve nejednakosti dobija se

$0 \geq \langle \nabla J(u), v - u \rangle + \langle \nabla J(v), u - v \rangle = \langle \nabla J(v) - \nabla J(u), u - v \rangle$ tj.

$\langle \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v \rangle \geq 0$

($\Leftarrow$) Neka je $J(u) \in C^1(U)$ i $\langle \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v \rangle \geq 0$, $\forall u, v \in U$.

Koristiće se sledeća formula konačnog priraštaja

$J(u + h) - J(u) = \int_0^1 \langle \nabla J(u + th), h \rangle \, dt$

Za proizvoljne $u, v \in U$ i $\alpha \in (0,1)$ važi

$$\alpha J(u) + (1 - \alpha) J(v) - J(\alpha u + (1 - \alpha) v)$$

$$= \alpha [J(u) - J(\alpha u + (1 - \alpha) v)] + (1 - \alpha)[J(v) - J(\alpha u + (1 - \alpha) v)]$$

$$= \alpha \int_0^1 \langle \nabla J(\alpha u + (1 - \alpha) v + t(1 - \alpha)(u - v), (u - v)(1 - \alpha) \rangle \, dt +$$

$$(1 - \alpha) \int_0^1 \langle \nabla J(\alpha u + (1 - \alpha) v + t(v - \alpha u - (1 - \alpha) v), v - \alpha u - (1 - \alpha) v \rangle \, dt$$

$$= \alpha (1 - \alpha) \int_0^1 \langle \nabla J(\alpha u + (1 - \alpha) v + t(1 - \alpha)(u - v) - \nabla J(\alpha u + (1 - \alpha) v +$$
$$t\alpha (v - u)), u - v \rangle \, dt = \alpha (1 - \alpha) \int_0^1 \langle \nabla J(u_1) - \nabla J(u_2), u_1 - u_2 \rangle \frac{1}{t} \, dt \geq 0,$$

po uslovu teoreme gde je $u_1 = \alpha u + (1 - \alpha) v + t(1 - \alpha)(u - v)$, a

$u_2 = \alpha u + (1 - \alpha) v + t\alpha (v - u)$.

Dakle, J je konveksna funkcija. ■

Teorema 3.3.3. [9] *Neka je U konveksan skup takav da $int\ U \neq \emptyset$ i $J(u) \in C^2(U)$.*

$J(u)$ je konveksna na U ako i samo ako važi $\langle \nabla^2 J(u) \cdot \xi, \xi \rangle \geq 0$, $\forall u \in U$ i $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz:

($\Rightarrow$)

Za proizvoljno $u \in U^\circ$ i $\xi \in \mathbb{R}^n$ postoji $\varepsilon > 0$, takvo da $u + \varepsilon\xi \in U$. Iz prethodne teoreme sledi $\langle \nabla J(u + \varepsilon\xi) - \nabla J(u), \varepsilon\xi \rangle \geq 0$, pa se iz formule konačnog priraštaja dobija

$$\langle \nabla J(u + \varepsilon\xi) - \nabla J(u, \varepsilon\xi \rangle = \langle \nabla^2 J(u + \theta\varepsilon\xi) \cdot \xi, \xi \rangle \varepsilon^2 \geq 0, \quad \text{za neko } \theta \in (0,1).$$

Tada $\langle \nabla^2 J(u + \theta\varepsilon\xi) \cdot \xi, \xi \rangle \geq 0$, pa se kada $\varepsilon \to 0$, dobija traženo tvrđenje.

Neka je sada $u \in \partial U$. Tada postoji niz unutrašnjih tačaka $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ skupa U koji konvergira ka u, pa iz neprekidnosti drugog reda izvoda sledi

$$0 \leq \lim_{m \to \infty} \langle \nabla^2 J(u_m)\xi, \xi \rangle = \langle \nabla^2 J(u)\xi, \xi \rangle .$$

($\Leftarrow$)

Neka su u i v proizvoljne tačke skupa U. Tada postoji $\theta \in (0,1)$ tako da važi

$$\langle \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v \rangle = \langle \nabla^2 J(u + \theta(u - v)) \cdot (u - v), u - v \rangle .$$

Ako $\xi := u - v$ iz uslova teoreme sledi $\langle \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v \rangle \geq 0$, pa je J

konveksna na osnovu prethodne teoreme. ■

Teorema 3.3.4. [9]*: Neka je U neprezan i konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, $J(u) \in C^1(U)$ i neka je*

$U_* := \left\{ u_* \in U \,\middle|\, J(u_*) = J_* = \min_{u \in U} J(u) \right\}$ *skup tačaka minimima funkcije $J(u), u \in U$.*

1. Za sve $u_* \in U_*$ i sve $u \in U$ važi $\langle \nabla J(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$.
2. Ako $u_* \in U_* \cap U^\circ$ onda je $\nabla J(u_*) = 0$.
3. Ako je J konveksna funkcija onda iz $\langle \nabla J(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$ za sve $u \in U$ i neko $u_* \in U$ sledi da je $u_* \in U_*$.

Dokaz:

1. Ako $u_* \in U_*$ po definiciji skupa U_* je $J(u_*) \leq J(u)$ za sve $u \in U$.
   $u_* + \alpha(u - u_*) \in U$. (Skup U je konveksan).
   $J(u_*) \leq J\big(u_* + \alpha(u - u_*)\big)$
   $J\big(u_* + \alpha(u - u_*)\big) - J(u_*) \geq 0$
   $J\big(u_* + \alpha(u - u_*)\big) - J(u_*) = \langle \nabla J(u_*), \alpha(u - u_*)\rangle + \sigma\big(u_*, \alpha(u - u_*)\big) \geq 0.$

Nakon deljenja poslednje nejednakosti sa α dobija se

$\langle \nabla J(u_*), u - u_*\rangle + \frac{\sigma(u_*, \alpha(u - u_*))}{\alpha} \geq 0$, a kada $\alpha \to 0$ drugi sabirak teži ka 0, pa sledi $\langle \nabla J(u_*), \alpha(u - u_*)\rangle \geq 0$.

2. Ako je u_* unutrašnja tačka skupa U, onda postoji $\varepsilon_0 > 0$ tako da
   $u := u_* + h \in U$ za sve $h \in \mathbb{R}^n$ za koje je $\|h\| < \varepsilon_0$. Iz dela 1. sledi
   $\langle \nabla J(u_*), u_* + h - u_*\rangle \geq 0$, odnosno $\langle \nabla J(u_*), h\rangle \geq 0$.
   Takođe $\langle \nabla J(u_*), -h\rangle \geq 0$, odakle sledi da je $\nabla J(u_*) = 0$.

3. J je konveksna funkcija stoga važi
   $J(u) \geq J(v) + \langle \nabla J(v), u - v\rangle$ za sve $u, v \in U$.
   Specijalno , $J(u) \geq J(u_*) + \langle \nabla J(u_*), u - u_*\rangle \geq J(u_*)$, za sve $u \in U$, jer je $\langle \nabla J(u_*), u - u_*\rangle \geq 0$.
   Dakle, u_* je tačka minimuma. ■

Napomena: Za $u_* \in U_* \cap \partial U$ ne mora da važi $\nabla J(u_*) = 0$.

Kontraprimer je funkcija $J(u) = u^2$ nad skupom $U = [1,2]$. Ovde $U_* = \{1\}$.

$J'(u) = 2u > 0$, za sve $u \in U$. Posebno, $J'(u_*) = J'(1) = 2$.

Teorema 3.3.5. [9]*: Neka je U konveksan skup i $J(u)$ konveksna funkcija na U. Tada važi:*

a) Svaka tačka lokalnog minimuma je istovremeno i tačka globalnog minimuma.

b) Skup U_* je konveksan skup.

c) Ako je $J(u)$ strogo konveksna funkcija, skup U_* je jednočlan.

Dokaz:

a) Neka je u_* tačka lokalnog minimuma. To znači da postoji okolina te tačke $L_\delta(u_*) = \{u \in \mathbb{R}^n | \|u - u_*\| < \delta\}$, tako da za sve $u \in L_\delta(u_*) \cap U$ važi $J(u) \geq J(u_*)$.

Za proizvoljno $u \in U$ postoji $\alpha \in (0,1)$ tako da tačka $v := \alpha u + (1-\alpha)u_* \in L_\delta(u_*)$.

1° $u \in L_\delta(u_*)$, tada $v \in L_\delta(u_*)$ zbog konveksnosti skupa.

2° $u \in U \setminus L_\delta(u_*)$ tada se za $\alpha := \frac{\delta}{2\|u-u_*\|}$ dobija

$$\|v - u_*\| = \|\alpha u + (1-\alpha)u_* - u_*\| = \left\| \frac{\delta}{2\|u-u_*\|} \mathrm{u} + u_* - \frac{\delta}{2\|u-u_*\|} u_* - u_* \right\| =$$

$$= \frac{\delta}{2\|u-u_*\|} \|u - u_*\| < \delta.$$

Dakle, $v \in L_\delta(u_*)$. $J(u_*) \leq J(v)$, a iz konveksnosti funkcije J sledi

$$J(u_*) \leq J(v) = J(\alpha u + (1-\alpha)u_*) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha)J(u_*)$$

$$0 \leq \alpha\big(J(u) - J(u_*)\big).$$

Nakon deljenja prethodne nejednakosti sa α dobija se $J(u_*) \leq J(u), \forall u \in U$.

Dakle, tačka u_* je tačka globalnog minimuma.

b) Neka je U_* neprazan skup i $u, v \in U_*$. Treba pokazati da tada za $\alpha \in [0,1]$ važi

$\alpha u + (1-\alpha)v \in U_*$. Skup U_* je skup tačaka minimuma pa je

$J(u) = J(v) = J_* = \min\limits_{x \in U} J(\mathrm{x})$.

Pošto je $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v) = J_*$,

zaključuje se da je $J(\alpha u + (1-\alpha)v) = J_*$,

čime je dokazano da je U_* konveksan skup .

c) Neka je $J(u)$ strogo konveksna funkcija, a skup $U_* \neq \emptyset$.
Pretpostavimo suprotno, $u, v \in U_*$ i $u \neq v$.
Skup U_* je konveksan pa za $\alpha \in (0,1)$ tačka $\alpha u + (1-\alpha)v \in U_*$.
$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \ \alpha\, J(u) + (1-\alpha)\, J(v) = \ J_*$ je kontradikcija. ■

Posmatra se funkcija $J(u) = \frac{1}{u}$, $u \in U = [1, \infty)$.

Ona je konveksna, neprekidna i diferencijabilna nad zatvorenim i konveksnim skupom U, ali ipak ne dostiže svoj infimum ni u jednoj tački skupa U.

Ovakve funkcije su dale motivaciju za uvođenje potklase konveksnih funkcija kod kojih navedena situacija nije moguća. To su *jako konveksne* funkcije.

Definicija 3.3.1. Funkcija J je jako konveksna na konveksnom skupu U, ako postoji konstanta $\gamma > 0$ tako da važi

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \ \alpha\, J(u) + (1-\alpha)\, J(v) - \alpha(1-\alpha)\gamma\|u-v\|^2 ,$$

$$\textit{za sve} \ \ u, v \in U \ i \ \ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

3.4 Problem konveksnog programiranja

Neka je dat skup $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $J(u)$ konveksna funkcija na U_0. Neka su dalje $g_k(u), k = 1,2, \dots . m$ konveksne funkcije na U_0, *a* $g_k(u)$,$k = m + 1, \dots s$ linearne funkcije, $g_k(u) = \langle a_k, u \rangle - b_k$, $a_k, u \in \mathbb{R}^n$, $b_k \in \mathbb{R}$.

Zadatak konveksnog programiranja glasi: Odrediti minimum funkcije J nad skupom U, pri čemu je $U = U_0 \cap U_1 \cap U_2 \dots . . \cap U_m \cap U_{m+1} \dots . . \cap U_s$, gde je U_0 zadat konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, a

$$U_k = \{u \in \mathbb{R}^n | g_k(u) \leq 0\}, k = 1,2, \dots , m.$$

$$U_k = \{u \in \mathbb{R}^n | g_k(u) = 0\}, k = m + 1, \dots , s.$$

Dakle, problem konveksnog programiranja je oblika

$$J(u) \to min$$

$$u \in U,$$

$$U = \{u \in U_0 | g_k(u) \leq 0, k = 1,2, \dots , m; g_k(u) = \langle a_k, u \rangle - b_k = 0, k = m + 1, \dots , s\},$$

gde je U_0 konveksan skup, a funkcije $J(u), g_k(u), k = 1,2, \dots , s$ su konveksne.

Očigledno je da je skup U konveksan, jer je presek konveksnih skupova.

Neka je $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{R}^s | \lambda_k \geq 0, k = 1,2, \dots , m\}$.

Definicija 3.4.2: Funkcija Lagranža $L : U_0 \times \Lambda \to \mathbb{R}$ *pridružena problemu konveksnog programiranja definiše se na sledeći način*

$$L(u, \lambda) = J(u) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k g_k(u).$$

Definicija 3.4.3: Tačka $(u_*,\ \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ je *sedlasta tačka* funkcije Lagranža $L(u,\lambda)$ ako za sve $u \in U_0$ i sve $\lambda \in \Lambda$ važi nejednakost

$$L(u_*,\lambda) \leq L(u_*,\ \lambda^*) \leq L(u,\ \lambda^*).$$

Lema 3.4.1. [9]*: Ako je* $(u_*,\ \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ *sedlasta tačka funkcije* $L(u,\lambda)$ *onda je* $u_* \in U$.

Dokaz:

Treba pokazati da je tačka u_* dopustiva tj. da pripada dopustivom skupu U.

Definicija sedlaste tačke daje nejednakost $L(u_*,\lambda) \leq L(u_*,\ \lambda^*)$ odakle sledi da je $\sum_{k=1}^{s}(\lambda_k^* - \lambda_k)g_k(u_*) \geq 0$.

Za proizvoljno fiksirano $j_0 \in \{1,2,\ldots,m\}$, odabere se $\lambda_{j_0} := \lambda_{j_0}^* + 1$, a za preostale indekse

$k \neq j_0$ bira se $\lambda_k := \lambda_k^*$.

Trivijalno,vektor λ izabran na ovaj način pripada skupu Λ.

Dobija se da je $\sum_{k=1}^{s}(\lambda_k^* - \lambda_k)g_k(u_*) = \left(\lambda_{j_0}^* - \lambda_{j_0}^* - 1\right)g_{j_0}(u_*) \geq 0$

$$-g_{j_0}(u_*) \geq 0$$

$$g_{j_0}(u_*) \leq 0\ ,$$

pa zaključujemo $u_* \in U_{j_0}$.

Analogno se može pokazati da je u_* dopustiva pri svakom ograničenju $U_j, j \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Neka je dalje, $u_* \in U_j, j \in \{m+1,\ldots,s\}$ i j_0 proizvoljan fiksiran indeks iz skupa $\{m+1,\ldots,s\}$.

Odabere se

$$\lambda_{j_0} := \lambda_{j_0}^* + g_{j_0}(u_*),$$

i $\lambda_k := \lambda_k^*$, $k \neq j_0$.

Vektor λ sa ovako odabranim koordinatama pripada skupu Λ. Osim toga važi

$$\sum_{k=1}^{s}(\lambda_k^* - \lambda_k)g_k(u_*) = \left(\lambda_{j_0}^* - \lambda_{j_0}^* - g_{j_0}(u_*)\right)g_{j_0}(u_*) \geq 0$$

$$-g_{j_0}(u_*)^2 \geq 0,$$

što implicira $g_{j_0}(u_*) = 0$, tj. $u_* \in U_{j0}$.

Analogno se dokazuje $u_* \in U_j, j \in \{m+1, \dots, s\}$.

Iz definicije sedlaste tačke sledi $u_* \in U_0$, pa na osnovu svega prethodnog sledi

$u_* \in U_0 \cap U_1 \cap U_2 \dots \dots \cap U_m \cap U_{m+1} \dots \dots \cap U_s \stackrel{\text{def}}{=} U$. ■

Lema 3.4.2. [9] *: Ako je* $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ *sedlasta tačka funkcije Lagranža* $L(u, \lambda)$ *tada je* $\lambda_k^* g_k(u_*) = 0$ *za sve* $k = 1,2, \dots, m+1, \dots s$.

Dokaz:

Na osnovu Leme 3.4.1. sledi $g_j(u_*) = 0$, za $j \in \{m+1, \dots, s\}$, pa se može zaključiti da je $\lambda_j^* g_j(u_*) = 0$, za sve $j \in \{m+1, \dots, s\}$.

Preostaje da se pokaže da je $\lambda_j^* g_j(u_*) = 0$ za svako $j \in \{1,2, \dots \dots, m\}$.

Neka je $j_0 \in \{1,2, \dots \dots, m\}$ proizvoljan fiksiran indeks.

Posmatramo dva slučaja:

$1°$ $\lambda_{j_0}^* = 0$

Trivijalno važi jednakost $\lambda_{j_0}^* g_{j_0}(u_*) = 0$.

$2°\ \lambda^*_{j_0} \neq 0$

Polazeći od nejednakosti $\sum_{k=1}^{s}(\lambda_k^* - \lambda_k) g_k(u_*) \geq 0$ za sve $\lambda \in \Lambda$ i birajući

$\lambda_k = \lambda_k^*$ za $k \neq j_0$ i $\lambda_{j_0} = 0$ dobija se

$\lambda^*_{j_0} g_{j_0}(u_*) \geq 0$, pa sledi da je

$$g_{j_0}(u_*) \geq 0 \text{ jer je } \lambda^*_{j_0} > 0 \ .$$

Iz dobijenog rezultata i činjenice da je na osnovu Leme 3.4.1 $g_{j_0}(u_*) \leq 0$,

za sve $j_0 \in \{1,2, \dots, m\}$, sledi zaključak $g_{j_0}(u_*) = 0$, pa je i $\lambda^*_{j_0} g_{j_0}(u_*) = 0$.

Pošto je $j_0 \in \{1,2, \dots, m\}$ proizvoljno odabran indeks sledi traženo tvrđenje. ■

Lema 3.4.3. [9] *Ako je* $\lambda_k^* g_k(u_*) = 0$ *za sve* $k = 1,2, \dots, s$ *pri čemu* $u_* \in U$, *onda je*

$$L(u_*, \lambda) \leq L(u_*,\ \lambda^*), za\ sve\ \lambda \in \Lambda.$$

Dokaz :

Iz uslova $u_* \in U$ sledi $g_k(u_*) \leq 0$ za sve $k = 1,2, \dots, m,$ i $g_k(u_*) = 0$ za sve $k = m + 1, \dots, s$. Odatle je $(\lambda_k^* - \lambda_k) g_k(u_*) = 0$ za sve $k = m + 1, \dots, s$ kao i za one indekse $k \in \{1,2, \dots, m\}$ za koje je $g_k(u_*) = 0$.

Neka je $k_0 \in \{1,2,3, \dots, m\}$ proizvoljan fiksiran indeks takav da $g_{k_0}(u_*) < 0$.

Iz uslova $\lambda^*_{k_0} g_k(u_*) = 0$ sledi $\lambda^*_{k_0} = 0$. Sa druge strane, $\lambda_{k_0} \geq 0$ za sve $\lambda \in \Lambda$, pa je

$(\lambda^*_{k_0} - \lambda_{k_0}) g_{k_0}(u_*) \geq 0$.

Prema tome, $\sum_{k=1}^{s}(\lambda_k^* - \lambda_k) g_k(u_*) \geq 0$

$$J(u_*) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k^* g_k(u_*) - J(u_*) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k g_k(u_*) \geq 0$$

$$L(u_*,\ \lambda^*) - L(u_*, \lambda) \geq 0$$

$$L(u_*, \lambda) \leq L(u_*,\ \lambda^*), \text{što je i trebalo dokazati.} \ ■$$

Teorema 3.4.1. [9]*: Potreban i dovoljan uslov da* $(u_*,\ \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ *bude sedlasta tačka funkcije Lagranža* $L(u,\lambda)$ *za posmatrani problem je dat sa :*

i) $L(u_*,\ \lambda^*) \leq L(u,\ \lambda^*)$ *za sve* $u \in U_0$.

ii) $\lambda_k^* g_k(u_*) = 0$ *za sve* $k = 1,2,\dots,s$ *pri čemu* $u_* \in U$.

Dokaz:

($\Rightarrow$)

Neka je $(u_*,\ \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ sedlasta tačka. Tada *i*) važi iz definicije sedlaste tačke, dok *ii)* sledi na osnovu Leme 3.4.1. i Leme 3.4.2.

($\Leftarrow$)

Pretpostavka je da važe uslovi *i*) i *ii).* Jasno, *i*) je desna strana nejednakosti u definiciji sedlaste tačke,pa preostaje da se pokaže leva strana nejednakosti, odnosno

$L(u_*,\lambda) \leq L(u_*,\ \lambda^*)$.

Data nejednakost je posledica uslova *ii)* i Leme 3.4.3. ■.

Sledeća teorema daje vezu između sedlaste tačke Lagranžove funkcije i rešenja poblema konveksnog programiranja.

Neka je U_* skup rešenja problema konveksnog programiranja.

Teorema 3.4.2. [9] *: Neka je* $(u_*,\ \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ *sedlasta tačka Lagranžove funkcije. Tada je* $u_* \in U_*$ *i* $J_* = L(u_*,\ \lambda^*) = J(u_*)$.

Dokaz:

Iz Leme 3.4.1 sledi da $u_* \in U$, a iz Leme 3.4.2 se dobija da je $L(u_*,\ \lambda^*) = J(u_*)$.

Preostaje da se pokaže da $u_* \in U_*$ pa je tada i $J_* = J(u_*)$.

Iz nejednakosti

$L(u_*,\ \lambda^*) \leq L(u,\ \lambda^*),\ \ \forall u \in U_0$, pa i za sve $u \in U$ sledi

$$J(u_*) = L(u_*,\ \lambda^*) \leq L(u,\ \lambda^*) = J(u) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k^* g_k(u).$$

Kako je $\lambda_k^* g_k(u) \leq 0$ za sve $k = 1, \dots, m$ i $\lambda_k^* g_k(u) = 0$ za sve $k = m + 1, \ldots, s$ dobija se $J(u_*) \leq\ J(u)$ za sve $u \in U$.

Dakle, $u_* \in U_*$. ■

Formulacija prethodne teoreme predstavlja dovoljan uslov za rešenje problema konveksnog programiranja. Ona, međutim, ne daje informacije o egzistenciji sedlaste tačke. Iz definicije sedlaste tačke se vidi da se ona traži među stacionarnim tačkama Lagranžove funkcije. Da bi se obezbedila egzistencija stacionarnih tačaka, moraju se nametnuti dodatni uslovi za funkciju cilja i dopustiv skup.

U nastavku je dat primer koji pokazuje da pretpostavka o konveksnosti funkcije J nije dovoljna.

Neka je $J(u) = -u$, $U_0 = [0, \infty)$ i $g(u) = u^2$, $U = \{u \in U_0 | g(u) \leq 0\}$.

Jasno, $J_* = J(0) = 0$.

Međutim, Lagranžova funkcija

$L(u, \lambda) = J(u) + \lambda g(u) = -u + \lambda u^2, u \in U_0$, $\lambda \geq 0$ nema sedlastu tačku.

3.5 Kun– Takerovi uslovi

Osnovne rezultate u kojima su opisani uslovi koji obezbeđuju egzistenciju sedlaste tačke, dokazali su Harold Kun i Albert Taker 1951. godine.

Kasnije je otkriveno da je, Vilijam Karuš u svojoj master tezi 1939. godine dokazao potrebne uslove. Stoga se u literaturi ovi uslovi mogu pronaći i pod nazivom Karuš-Kun-Takerovi uslovi. Ova teorema daje potrebne uslove za lokalni minimum problema nelinearnog programiranja.

Ukoliko se radi o problemu konveksnog programiranja ti uslovi su i dovoljni.

Kun - Takerova teorema važi pod određenim uslovima regularnosti.

Pre iskaza teoreme biće navedeni ključni pojmovi vezani za regularnost i konveksnost.

Posmatramo problem konveksnog programiranja oblika

$$J(u) \to min \tag{3.4}$$

$$u \in U = \{u \in U_0 | g_k(u) \leq 0, k = 1,2, \dots, m.\},$$

gde su funkcije $J(u)$, $g_k(u)$, $k = 1,2, \dots, m$ konveksne i U_0 je konveksan skup.

Definicija 3.5.1 : Neka je zadat problem konveksnog programiranja (3.4). Ograničenje $g(u) \leq 0$ je regularno sa skupu $U \subset \mathbb{R}^n$, ako postoji tačka $\bar{u} \in U$, tako da važi

$g(\bar{u}) < 0$. Skup $U = \bigcap_{k=1}^{m} U_k$ je regularan ako su sva ograničenja u njemu regularna.

Lema 3.5.1. [9] *: Neka je U_0 konveksan skup i neka su $g_k(u)$ konveksne funkcije na $U_0, k = 1,2,, \dots m$. Neka je U regularan skup. Tada postoji tačka $\bar{u} \in U_0$, takva da je $g_k(\bar{u}) < 0$ za sve $k = 1,2, \dots, m$. Tačka $\bar{u}$ se naziva Slaterova tačka.*

Dokaz :

Skup U je konveksan skup. Neka su tačke $u_k \in U$ izabrane tako da je $g_k(u_k) < 0$,

$k = 1,2, .., m$.

Definiše se tačka $\bar{u}$ na sledeći način

$\bar{u} := \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 1$ i $\alpha_k > 0, k = 1,2, \dots, m$.

$\bar{u} \in U \subset U_0$. Za proizvoljno $j = 1,2, \dots, m$ važi $g_j(u_k) \leq 0$ za sve u_k, $k = 1,2, \dots, m$.

Iz konveksnosti funkcije $g_j(u)$ sledi

$$g_j(\bar{u}) = g_j(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m) \leq$$
$$\leq \alpha_1 g_j(u_1) + \alpha_2 g_j(u_2) + \cdots + \alpha_m g_j(u_m) < 0, \text{jer je } g_j(u_j) < 0. \blacksquare$$

Uslov postojanja tačke $\bar{u} \in U_0$ za koju je $g_k(\bar{u}) < 0$ *za sve* $k = 1,2, \dots, m$ naziva se Slaterov uslov (uslov Slejtera).

Pomenuti uslov obezbeđuje regularnost, nenegativnost Lagranžovih množitelja i implicira da su Kun- Takerovi uslovi potrebni i dovoljni.

Teorema 3.5.1. [9] *(Teorema o separaciji): Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunktni konveksni skupovi neprazne unutrašnjosti. Tada postoji hiperravan koja razdvaja skupove A, B kao i skupove $\bar{A}$, $\bar{B}$. Ako pri tome $y \in \bar{A} \cap \bar{B}$ onda je $\gamma = \langle c, y \rangle$.*

Naredna teorema daje dovoljan uslov za postojanje sedlaste tačke.

Teorema 3.5.2.. [9] *(Teorema Kun-Takera): Neka je dat problem (3.4) gde je U_0 konveksan skup i neka su $J(u)$ i $g_k(u)$ konveksne na U_0, $k = 1,2, \dots m$. Neka je Uregularan skup (Slaterov uslov je zadovoljen) i skup rešenja neprazan $U_* \neq \emptyset$. Tada postoje Lagranžovi množitelji $\lambda^* = [\lambda_1^*, \dots \dots, \lambda_m^*]^T$, $\lambda_k^* \geq 0, k = 1,2, \dots, m$ takvi da za svaku tačku $u_* \in U_*$ važi da je (u_*, λ^*) sedlasta tačka funkcije Lagranža pridružena problem (3.4).*

Dokaz:

Iz uslova $U_* \neq \emptyset$ sledi da postoji $u_* \in U_*$ takva da je $J_* = \min\limits_{u \in U} J(u) = J(u_*)$.

Dokaz se zasniva na ideji da se u nekoliko koraka konstruiše vektor λ^*, tako da za proizvoljno $u_* \in U_*$ važi da je (u_*, λ^*) sedlasta tačka Lagranžove funkcije.

Posmatraju se skupovi $P, Q \subset \mathbb{R}^{m+1}$ gde je

$P := \{p \in \mathbb{R}^{m+1} | p_0 < J(u_*), p_k < 0, k = 1,2, \dots, m.\}$,

$$Q := \bigcup_{u \in U_0} Q(u),$$

$$Q(u) := \{q \in \mathbb{R}^{m+1} | q_0 \geq J(u), q_k \geq g_k(u), k = 1,2, \dots, m.\}.$$

Prvi korak: Potrebno je dokazati sledeće: $P \cap Q = \emptyset$ *i* $P^\circ, Q^\circ \neq \emptyset$.

Ako $q \in Q$ onda sledi $q_0 \geq J(u)$ i $q_k \geq g_k(u)$ za $u \in U_0$.

Ako $u \in U$ sledi $q_0 \geq J(u) \geq J(u_*)$ tj. $q_0 \geq J_*$ što implicira $q \notin P$.

Ako $u \in U_0 \setminus U$ sledi da postoji $i \in \{1,2, \dots, k\}$ tako da $g_i(u) > 0$, pa je $q_i \geq g_i(u) > 0$ što implicira da $q \notin P$.

Dakle pošto $q \in Q \Rightarrow q \notin P$ sledi $P \cap Q = \emptyset$.

Jasno je da važi $P^\circ, Q^\circ \neq \emptyset$.

Drugi korak: Potrebno je dokazati konveksnost skupova P i Q.

Neka su $q', q" \in Q$.

Po definiciji skupa Q postoje tačke $u', u"$ takve da

$q' \in Q(u'), q" \in Q(u")$, pa $q_0' \geq J(u')$ i $q_0'' \geq J(u'')$, $q_k' \geq g_k(u')$ i $q_k'' \geq g_k(u'')$.

Neka je $0 \leq \lambda \leq 1$ i $q = \lambda q' + (1-\lambda)\, q"$. Treba pokazati da $q \in Q$.

S obzirom da su funkcije $J(u), g_k(u)$ konveksne sledi

$J(\lambda u' + (1-\lambda)u") \leq \lambda J(u') + (1-\lambda)J(u") \leq \lambda q_0' + (1-\lambda)q_0" = q_0$

$g_k(\lambda u' + (1-\lambda)u") \leq \lambda g_k(u') + (1-\lambda)g_k(u") \leq \lambda q_k' + (1-\lambda)q_k'' = q_k,$

pa $q \in Q(\lambda u' + (1-\lambda)u") \subset Q$.

Dakle, skup Q je konveksan.

Slično se pokazuje da je skup P konveksan.

Treći korak: Na osnovu Teoreme 3.5.1. sledi da postoji hiperravan koja razdvaja skupove P, Q, preciznije, postoje $c \in \mathbb{R}^{m+1}, c \neq 0$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je ispunjena sledeća nejednakost $sup_{p\in P}\langle c, p\rangle \leq \gamma \leq inf_{q\in Q}\langle c, q\rangle$.

Neka je $c = [\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*]^T$.

Četvrti korak: Zatvaranje skupa *P* je dato sa

$\bar{P} = \{p \in \mathbb{R}^{m+1} | p_0 \leq J(u_*), p_k \leq 0, k = 1,2, \dots, m.\}$.

Vektor $[J_*, 0,0, \dots \dots, 0]^T \in \bar{P} \cap Q \subset \bar{P} \cap \bar{Q}$.

Osim toga na osnovu Teoreme 3.5.1 je $\gamma = \langle c, [J_*, 0,0, \dots \dots, 0]\rangle = \lambda_0^* J_*$.

Tada je

$$sup_{p\in P}\langle c, p\rangle \leq \lambda_0^* J_* \leq inf_{q\in Q}\langle c, q\rangle \text{ tj.}$$

$\lambda_0^* p_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k^* p_k \leq \lambda_0^* J_* \leq \lambda_0^* q_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k^* q_k$, za sve $p \in \bar{P}, q \in Q$.

Peti korak: Pokazuje se da je $\lambda_k^* \geq 0, k = 0,1,2, \dots, m \ i \ \lambda_0^* > 0$.

Birajući $p = [J_* - 1,0,0, \dots \dots, 0]^T \in \bar{P}$ dobija se

$\lambda_0^*(J_* - 1) \leq \lambda_0^* J_*$ odakle se može zaključiti da je $\lambda_0^* \geq 0$.

Dalje $p = [J_*, -1,0,0, \dots, 0]^T \in \bar{P}$, pa je $\lambda_0^* J_* - \lambda_1^* \leq \lambda_0^* J_*$ što implicira $\lambda_1^* \geq 0$.

Slično se dokazuje da je $\lambda_k^* \geq 0, k = 2,3, \dots m$.

Ostaje da se pokaže da je $\lambda_0^* \neq 0$.

Pretpostavi se suprotno tj. $\lambda_0^* = 0$.

Iz uslova regularnosti zna se da postoji $\bar{u} \in U$ takva da je $g_k(\bar{u}) < 0$ za sve

$k = 1,2 \dots m$.

Tačka $[J(\bar{u}), g_1(\bar{u}), g_2(\bar{u}), \dots \dots, g_m(\bar{u})]^T \in Q$ pa je

$$\lambda_0^* J_* \leq \ \lambda_0^* J(\bar{u}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \, g_k(\, \bar{u})$$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \, g_k(\, \bar{u}).$$

Sa druge strane, kako je bar jedan od brojeva $\lambda_k^* \neq 0, k = 1,2, \dots, m$ jer je $c \neq 0$, dobija se

$$0 \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \, g_k(\, \bar{u}) < 0$$

što je kontradikcija, pa je dakle $\lambda_0^* > 0$.

Šesti korak: Dokazuje se da je tačka $(u_*, \ \lambda^*)$ je sedlasta tačka funkcije Lagranža, pri čemu je $\lambda^* = [\,\lambda_1^*, \ \lambda_2^*, \dots, \ \lambda_m^*]^T$, a $u_* \in U_*$.

Neka je $j \in \{1,2, \dots, m\}$ proizvoljno izabran indeks.

Pošto je $\left[J_*, 0,0, \dots g_j(\, u_*) . . ,0\right]^T \in \bar{P} \cap Q$ sledi

$$\lambda_0^* J_* + \ \lambda_j^* g_j(u_*) \leq \lambda_0^* J_* \leq \lambda_0^* J_* + \ \lambda_j^* g_j(u_*),$$

pa se može zaključiti da je $\lambda_j^* g_j(u_*) = 0$ za sve $j \in \{1,2, . . , m\}$.

Neka je data tačka $u \in U_0$ i $q = [J(u), g_1(u), \dots . , g_m(u)]^T$.

Jasno, $q \in Q$, pa važi

$$J_* \leq J(u) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \, g_k(\, u).$$

Dalje je

$$J_* = J_* + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \, g_k(\, u_*),$$

pa je

$$J_* + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \, g_k(\, u_*) \leq J(u) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \, g_k(\, u),$$

što implicira

$$L(u_*,\ \lambda^*) \leq L(u,\ \lambda^*), \text{ za proizvoljno } u \in U_0.$$

Na osnovu Teoreme 3.4.2. sledi da je $(u_*,\ \lambda^*)$ sedlasta tačka Lagranžove funkcije. ■

3.6 Uslovi optimalnosti – diferencijabilan slučaj

U ovom poglavlju će biti pokazano kako se uslovi optimalnosti i uslovi za sedlastu tačku mogu izraziti u slučaju kada su funkcija cilja i funkcije koje predstavljaju ograničenja diferencijabilne.

Teorema 3.6.1. [5]*: Neka je data Lagranžova funkcija*

$L(u,\lambda) = J(u) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k g_k(u)$ *pridružena problemu (3.4).Ako su funkcije* $J(u)$ *i* $g_k(u), k = 1,2,..,m$ *konveksne i diferencijabilne, onda je* (u_*, λ^*) *sedlasta tačka funkcije* L *ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

1. $\frac{\partial L^*}{\partial u_i} = 0, \;\; i = 1,2,\dots,n.$
2. $\frac{\partial L^*}{\partial \lambda_k} \leq 0 \,, k = 1,2,\dots.,m.$
3. $\lambda_k^* \frac{\partial L^*}{\partial \lambda_k} = 0, \;\; k = 1,2,\dots.,m.$
4. $\lambda_k^* \geq 0, \;\; k = 1,2,\dots.,m,$

gde je $\frac{\partial L^*}{\partial u_i} := \frac{\partial L}{\partial u_i}(u_*, \lambda^*), i = 1,2,\dots,n$ *i* $\frac{\partial L^*}{\partial \lambda_k} := \frac{\partial L}{\partial \lambda_k}(u_*, \lambda^*), \;\; k = 1,2,\dots,m.$

Dokaz:

$(\Rightarrow)$ Pretpostavimo da je (u_*, λ^*) sedlasta tačka.

Po definiciji sedlaste tačne važi sledeća nejednakost

$$L(u_*,\lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*), \text{za sve } u \in U_0 \text{ i sve } \lambda \in \Lambda.$$

$L(u, \lambda^*)$ dostiže minimum u tački u_* pa je $\frac{\partial L^*}{\partial u_i} = 0, \;\; i = 1,2,\dots,n$, što implicira uslov 1. Ispunjenost uslova 2,3,4 je očigledna na osnovu Teoreme 3.4.1.

($\Leftarrow$) Neka važe uslovi 1-4.

Funkcije $J(u)$ i $g_k(u), k = 1,2,,,.m$ su konveksne stoga je i $L(u, \lambda^*)$ konveksna po u pa važi

$$L(u, \lambda^*) \geq L(u_*, \lambda^*) + \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_k^*) \frac{\partial L^*}{\partial u_k}.$$

Zbog uslova 1. važiće

$$\mathrm{L}(u, \lambda^*) \geq \mathrm{L}(u_*, \lambda^*).$$

Uslovi 2 i 3 daju

$$g_k(u_*) \leq 0 \; i \; \lambda_k^* g_k(u_*) = 0, k = 1,2, \dots, m,$$

te za $\lambda_k \geq 0, k = 1,2, \dots, m$ sledi

$$J_* + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, g_k(u_*) \leq J_* + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \, g_k(u).$$

Dakle,tačka (u_*, λ^*) je sedlasta tačka funkcije $L(u, \lambda)$. ■

Primer 3.6.1: Rešiti problem $\qquad J(x, y) = e^{x+y} \to min$

$$[x, y]^T \in U = \{[x, y]^T \in \mathbb{R}^2 | \; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Tačka $[0,0]^T$ je Slaterova tačka: $g_1(0,0) = -1 < 0$ dakle , skup U je regularan.

Funkcija Lagranža pridružena datom problemu je

$$L(x, y, \lambda) = e^{x+y} + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Primenjujemo uslove prethodne teoreme i dobijamo sledeće:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e^{x+y} + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = e^{x+y} + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Posmatrajući prve dve jednačine dobija se jednačina : $2\lambda(x - y) = 0$.

Kako je $e^{x+y} \neq 0$ onda je i $\lambda \neq 0$, pa se može zaključiti da je $x = y$ i $\lambda > 0$.

Na osnovu do sada dobijenih rezultata jednačina $\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$ će biti zadovoljena ako i samo ako je

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ tj.

$x^2 + y^2 = 1$,

$x = y$,

$2x^2 = 1$,

$x = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} = y$.

Za $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = y$ dobija se kontradikcija.

Može se zaključiti da je $x_* = -\frac{\sqrt{2}}{2} = y_*$.

$\lambda_* = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$.

$J_* = J(x_*, y_*) = e^{-\sqrt{2}}$.

Dakle, tačka $[x^*, y^*, \lambda^*]^T = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\right]^T$ je sedlasta tačka Lagranžove funkcije, a

rešenje problema je $[x^*, y^*]^T = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$.

Vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju je $J_* = e^{-\sqrt{2}}$.

Teorema 3.6.2. [5] *Neka je dat problem*

$$J(\mathrm{u}) \to \min$$
$$u \in U = \{u \in \mathbb{R}^n | u \geq 0, g_k(u) \leq 0, k = 1,2,,,.m\ \}$$
$$U_0 = \{u \in \mathbb{R}^n | u \geq 0\},$$

$gde\ je\ U$ regularan skup, $J(\mathrm{u}), g_k(u) \in C^1(U_0)$ su konveksne funkcije.

Tačka (u_*, λ^*) *je sedlasta tačka funkcije Lagranža ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi :*

1. $\frac{\partial L^*}{\partial u_i} \geq 0, \ \ i = 1,2, \dots, n.$

2. $u_i^* \frac{\partial L^*}{\partial u_i} = 0, \ \ i = 1,2, \dots, n.$

3. $u_i^* \geq 0\ , i = 1,2, \dots, n.$

4. $\frac{\partial L^*}{\partial \lambda_k} \leq 0\ , k = 1,2, \dots., m.$

5. $\lambda_k^* \frac{\partial L^*}{\partial \lambda_k} = 0, \ k = 1,2, \dots., m$

6. $\lambda_k^* \geq 0, \ k = 1,2, \dots., m$

Primer 3.6.2: Rešiti problem $J(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2x \rightarrow min$

$[x, y]^T \in U = \{[x, y]^T \in \mathbb{R}^2 | [x, y]^T \geq 0, x^2 + y + 2x \leq 3, y + 4x - 8 \leq 0\}$.

$U_0 = \{[x, y]^T \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$.

Funkcija Lagranža pridružena datom problemu je

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 4x^2 + y^2 + 2x + \lambda_1(y + 4x - 8) + \lambda_2(x^2 + y + 2x - 3)$$

Iz Kun- Takerovih uslova optimalnosti se dobija sistem

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8x + 2 + 4\lambda_1 + 2x\lambda_2 + 2\lambda_2 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0,$$

$$2x(4x + x\lambda_2 + \lambda_2 + 2\lambda_1 + 1) = 0,$$

$$y(2y + \lambda_1 + \lambda_2) = 0,$$

$$x, y \geq 0,$$

$$y + 4x - 8 \leq 0,$$

$$x^2 + y + 2x - 3 \leq 0,$$

$$\lambda_1(y + 4x - 8) = 0,$$

$$\lambda_2(x^2 + y + 2x - 3) = 0,$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 .$$

Vrednosti $x^* = 0$, $y^* = 0$, λ_1^* i $\lambda_2^* = 0$ zadovoljavaju navedene uslove.

Na osnovu Teoreme 3.6.2 sledi da je tačka $[x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*]^T = [0,0,0,0]^T$ sedlasta tačka funkcije Lagranža.

Minimum zadate funkcije se dostiže u tački $[x^*, y^*]^T = [0,0]^T$ i $J_* = 0$.

Primer 3.6.3: Rešiti problem $J(u_1, u_2) = 4u_1^2 + u_2^2 - u_1 - 2u_2 \ \rightarrow min$

$$[u_1, u_2]^T \in U = \{[u_1, u_2]^T \in \mathbb{R}^2 | 2u_1 + u_2 \leq 1, u_1^2 \leq 1 \}.$$

Rešenje : Slaterov uslov je zadovoljen za $[u_1, u_2]^T = [0{,}0]^T$ jer je

$g_1(0{,}0) = 2 \cdot 0 + 0 < 1 \ i \ \ g_2(0{,}0) = \ 0^2 - 1 < 0.$

Lagranžova funkcija pridružena datom problemu je

$$L(u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2) = 4u_1^2 + u_2^2 - u_1 - 2u_2 + \lambda_1(2u_1 + u_2 - 1) + \lambda_2(u_1^2 - 1).$$

Primenom Teoreme 3.6.1. dobija se sistem jednačina

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 8u_1 - 1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 u_1 = 0, \quad (3.6.3.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = 2u_2 - 2 + \lambda_1 = 0, \qquad\qquad (3.6.3.2)$$

$$\lambda_1(2u_1 + u_2 - 1) = 0,$$

$$\lambda_2(u_1^2 - 1) = 0,$$

$$2u_1 + u_2 - 1 \leq 0,$$

$$u_1^2 - 1 \leq 0,$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

Razmatraće se 4 slučaja.

$1^\circ \ \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$

Tada rešavanjem jednačina $(3.6.3.1) \ i \ (3.6.3.2)$ dobijamo da je $u_1 = \frac{1}{8}$ i $u_2 = 1$, što nije dopustivo rešenje.

$2^\circ \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$

Tada mora biti $2u_1 + u_2 - 1 = 0$ i $(u_1^2 - 1) = 0.$

Rešenja ovog sistema su $[u_1, u_2]^T = [1, -1]^T$ i $[u_1, u_2]^T = [-1,3]^T$.

Uvrštavanjem $[u_1, u_2]^T = [1, -1]^T$ u jednačinu $(3.6.3.1)$ dobija se

$7 + \ 2\lambda_1 + 2\ \lambda_2 = 0$, što daje kontradikciju zbog uslova $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Uvrštavanjem tačke $[u_1, u_2]^T = [-1,3]^T$ u jednačinu $(3.6.3.2)$ dobija se

$4 + \ \lambda_1 = 0$, što je nemoguće jer je $\lambda_1 > 0$.

3° $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$.

Tada je $u_1^2 - 1 = 0$ tj. $u_1 = \pm 1$. Na osnovu $(3.6.3.2)$ dobija se da je $u_2 = 1$.

U ovom slučaju kandidati za optimalno rešenje su $[u_1, u_2]^T = [1,1]^T$ i

$[u_1, u_2]^T = [-1,1]^T$.

Vrednost $[u_1, u_2]^T = [1,1]^T$ ne zadovoljava prvo ograničenje zadatog problema, stoga ne može biti rešenje.

Uvrštavanje tačke $[u_1, u_2]^T = [-1,1]^T$ i $\lambda_1 = 0$ u jednačinu $(3.6.3.1)$ dovodi do jednačine $-9 - \ 2\lambda_2 = 0$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je λ_2 pozitivna vrednost.

4° $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$.

Zbog uslova dobija se $2u_1 + u_2 = 1$, što u kombinaciji sa $(3.6.3.1)$ i $(3.6.3.2)$ dovodi do sistema sledećih jednačina :

$$18u_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0,$$

$$2u_2 - 2 + \lambda_1 = 0,$$

$$2u_1 + u_2 = 1.$$

Rešavanjem sistema dolazimo do tačke $[u_1, u_2,\ \lambda_1]^T = \left[\frac{1}{16}, \frac{7}{8}, \frac{1}{4}\right]^T$ koja predstavlja jedinstveno rešenje ovog sistema.

Dakle, optimalno rešenje datog problema je $[{u_1}^*, {u_2}^*]^T = \left[\frac{1}{16}, \frac{7}{8}\right]^T$, dok je optimalna vrednost funkcije cilja $J_* = -\frac{33}{32}$.

Primer 3.6.4. Rešiti problem $\quad J(u_1, u_2) = (u_1 - 4)^2 + (u_2 - 4)^2 \ \to min$

$$[u_1, u_2]^T \in U = \{[u_1, u_2]^T \in \mathbb{R}^2 | u_1 + u_2 \leq 4,\ u_1 + 3u_2 \leq 9\ \}.$$

Tačka $[0,0]^T$ je Slaterova ($g_1(0,0) = -4 \leq 0\ i\ \ g_1(0,0) = -9 \leq 0$) pa zaključujemo da je skup U regularan.

Funkcija Lagranža pridružena datom problemu glasi

$$L(u_1, u_{2,} \lambda_1, \lambda_2) = (u_1 - 4)^2 + (u_2 - 4)^2 + \lambda_1(u_1 + u_2 - 4) + \lambda_2(\ u_1 + 3u_2 - 9\ ).$$

Primenom Teoreme 3.6.1 dobija se sledeći sistem

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 2(u_1 - 4) + \ \ \lambda_1 + \ \ \lambda_2 = 0 \quad (3.6.4.1)\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = 2(u_2 - 4) + \ \ \lambda_1 + \ 3\ \lambda_2 = 0 \quad (3.6.4.2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = u_1 + u_2 - 4 \leq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = u_1 + 3u_2 - 9 \leq 0,$$

$$\lambda_1(u_1 + u_2 - 4) = 0,$$

$$\lambda_2(u_1 + 3u_2 - 9) = 0,$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0.$$

$1° \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$

Tada rešavanjem jednačina $(3.6.4.1)\ \ i\ (3.6.4.2)$ dobijamo da je $u_1 = u_2 = 4$, što nije dopustivo rešenje, jer ne zadovoljava prvo ograničenje $u_1 + u_2 \leq 4$.

2° $\lambda_1, \lambda_2 > 0.$

Tada

$$u_1 + u_2 - 4 = 0$$

i

$$u_1 + 3u_2 - 9 = 0.$$

Tačka $[u_1, u_2]^T = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]^T$ predstavlja rešenje datog sistema. Zamenom dobijene vrednosti u jednačine $(3.6.4.1)$ i $(3.6.4.2)$ dobija se sistem sledećih jednačina

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 5\,,$$

$$-\lambda_1 - 3\lambda_2 = -3,$$

pa zaključujemo da je $\lambda_2 = -1$, što je u kontradikciji sa uslovom da su $\lambda_1 i\, \lambda_2$ pozitivne vrednosti.

3° $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0.$

Kako je $\lambda_2 > 0$ mora biti $u_1 + 3u_2 - 9 = 0.$ Zamenom $\lambda_1 = 0$ u jednačinu $(3.6.4.1)$ dobija se $2(u_1 - 4) + \lambda_2 = 0.$

Zamenom $\lambda_1 = 0$ u jednačinu $(3.6.4.2)$ dobija se $2(u_2 - 4) + 3\lambda_2 = 0.$

Rešavajući sistem:

$u_1 + 3u_2 - 9 = 0,$

$2(u_1 - 4) + \lambda_2 = 0,$

$2(u_2 - 4) + 3\lambda_2 = 0,$

dobija se da je $\lambda_2 = \frac{7}{5}, u_1 = \frac{33}{10}, u_1 = \frac{19}{10}.$

Odavde možemo zaključiti da je optimalno rešenje problema $[{u_1}^*, {u_2}^*]^T = \left[\frac{33}{10}, \frac{19}{10}\right]^T$, a minimalna vrednost funkcije cilja iznosi $J_* = \frac{49}{10}.$

Primer 3.6.5 Rešiti problem $J(u_1, u_2, u_3) = e^{u_1 - u_3} + e^{-u_2} \to min$

$$U = \{[u_1, u_2, u_3]^T \in \mathbb{R}^3 | (u_1 - u_2)^2 - u_3 \leq 0, u_3 - 4 \leq 0\}.$$

Funkcija cilja i funkcije koje predstavljaju ograničenja su konveksne, dakle, Primer 3.6.5 je problem konveksnog programiranja.

Tačka $[1,1,1]^T$ je Slaterova tačka, pa zaključujemo da je skup U regularan.

Lagranžova funkcija pridružena datom problemu glasi

$$L(u_1, u_2, u_3, \lambda_1, \lambda_2) = e^{u_1 - u_3} + e^{-u_2} + \lambda_1((u_1 - u_2)^2 - u_3) + \lambda_2(u_3 - 4).$$

Na osnovu Teoreme 3.6.1 tačka $[u_1^*, u_2^*, u_3^*]^T$ je rešenje datog problema ako i samo ako tačka $[u_1^*, u_2^*, u_3^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*]^T$ zadovoljava sledeći sistem:

$$e^{u_1 - u_3} + 2\lambda_1(u_1 - u_2) = 0 \qquad (3.6.5.1)$$

$$-e^{-u_2} - 2\lambda_1(u_1 - u_2) = 0 \qquad (3.6.5.2)$$

$$-e^{u_1 - u_3} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (3.6.5.3)$$

$$\lambda_1((u_1 - u_2)^2 - u_3) = 0 \qquad (3.6.5.4)$$

$$\lambda_2(u_3 - 4) = 0 \qquad (3.6.5.5)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \qquad (3.6.5.6).$$

Rešenje sistema je $[u_1^*, u_2^*, u_3^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*]^T = \left[1,3,4,\frac{e^{-3}}{4},\frac{5e^{-3}}{4}\right]^T$.

Zaključujemo da je optimalno rešenje zadatog problema $[u_1^*, u_2^*, u_3^*]^T = [1,3,4]^T$, dok minimalna vrednost funkcije cilja iznosi $J_* = 2e^{-3}$.

U slučajevima kada funkcija cilja i/ili funkcije ograničenja nisu konveksne, navedene teoreme se ne mogu primeniti prilikom ispitivanja optimalnosti zbog nekoliko razloga:

- Uslovi ovih teorema ne mogu biti dovoljni, jer funkcija cilja može na dopustivom skupu imati više (čak i beskonačno mnogo) lokalnih ekstrema.

- Prilikom dokazivanja teorema koriste se: konveksnost funkcije cilja, konveksnost funkcija ograničenja, Slaterov uslov.

4 Primena konveksnog programiranja u ekonomiji

Konveksno programiranje je oblast numeričke optimizacije koja je široko rasprostranjena u mnogim sferama. Izučavanje ove oblasti, dovelo je do otkrića da se sa rešavanjem problema konveksnog programiranja srećemo u oblastima automatskih upravljačnih sistema, obradi signala, dizajniranju elektronskih kola, analizi i modeliranju podataka, ekonomiji i dr.

Maksimizacija prodaje

U klasičnoj mikro-analizi poslovanja preduzeća, maksimiziranje profita predstavlja težište. Ukupni prihod P se uzima kao jedan od važnijih parametara koji opisuje konkurentnost preduzeća u okviru određene industrijske grane, dok se povećanje prihoda od prodaje uzima za kriterijum ocene uspeha u upravljanju preduzećem. Na taj način prihod, kao parametar, direktno utiče i na zarade radnika pa i samog menadžmenta, s obzirom na postignute rezultate poslovanja.

Dakle, maksimizacija prodaje je svakako alternativni cilj organizacije preduzeća.

U cilju izbegavanja nezadovoljstva vlasnika akcija, menadžment preduzeća se brine da nivo ukupne dobiti ne padne ispod zadatog minimuma.

Preciznije, $\min D(u) = \xi_0$.

U tom slučaju problem upravljanja preduzećem sastoji se u traženju maksimuma funkcije ukupnog prihoda $P(u)$ uz ograničavajući uslov

$$D(u) = P(u) - T(u) \geq \xi_0,$$

gde $D(u)$ predstavlja ukupnu dobit, $P(u)$ predstavlja ukupni prihod, $T(u)$ predstavlja ukupne troškove preduzeća, a u je obim proizvodnje ili tražnja.

Dati problem optimizacije može se opisati na sledeći način

$$\begin{aligned} &max\ \ P(u) \\ &T(u) - P(u) \leq -\xi_0, \ \ (\xi_0 > 0), \\ &u \geq 0. \end{aligned}$$

Pitanje primene Kun – Takerovih uslova na ovaj model zavisi prvenstveno od osobina posmatranih funkcija. Sve dok je funkcija prihoda diferencijabilna i konkavna, a funkcija troškova diferencijabilna i konveksna, važiće da je funkcija ograničenja $T(u) - P(u)$ takođe diferencijabilna i konveksna.

Pod ovim uslovima Kun Takerova teorema o potrebnim uslovima se može primeniti na formulisani problem.

Funkcija Lagranža pridružena datom problemu nelinearnog (konveksnog) programiranja je

$$L(u,\lambda) = P(u) + \lambda(P(u) - T(u) - \xi_0),$$

pri čemu je $\lambda \geq 0$.

Posmatraju se sledeći Kun – Takerovi uslovi optimalnosti

$$\frac{\partial L}{\partial u} = P'(u) - \lambda T'(u) - \lambda P'(u) \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\xi_0 + P(u) - T(u) \geq 0$$

$$u \geq 0.$$

U slučaju da je $P(0) = 0\ i\ \ T(0) > 0$, preciznije da je proizvodnja jednaka nuli

$u = 0$ bi važilo $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\xi_0 - T(u) < 0$ što narušava uslov.

Iz tog razloga posmatra se uslov $u > 0$ koji je u skladu sa činjenicom da nivo proizvodnje koji je jednak nuli leži izvan skupa mogućih rešenja $[u_1, u_2]$.

Uslov $u > 0$ povlači da je $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$ što implicira da prva nejednačina mora biti zadovoljena kao jednačina. Rešenje te jednačine daje pravilo za određivanje proizvodnje koja maksimizira prodaju uz ograničenje

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial u}\ .$$

Ukoliko je $\lambda = 0$ dobija se $P'(u) = 0$.

Ovako ekstremna situacija nije moguća uz date pretpostavke jer vrednost tražnje u_i , za koju bi prethodni uslovi bili ispunjeni leži van skupa mogućih rešenja tj.

$u_i \notin [u_1, u_2]$.

Dakle, mora biti $\lambda > 0$, tada $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, odakle se zaključuje da ograničenje na profit mora biti zadovoljeno kao jednakost, uz napore za ostvarenjem minimalne dobiti ξ_0.

Slučaj kada proizvodnja maksimizira prodaju odnosno kada su granični prihodi manji od graničnih troškova je dat sa

$P'(u) < T'(u)$ jer je $\frac{\lambda}{1+\lambda} < 1$.

Situacija u kojoj su granični prihodi manji od graničnih troškova u opštem slučaju daje viši nivo proizvodnje nego pravilo maksimizacije dobiti koje diktira da su granični prihodi i granični troškovi jednaki.

Matematički zapis tog uslova glasi

$P'(u) = T'(u)$.

Rezultati izloženi u nastavku su predstavljeni u [7].

U narednoj tabeli prikazani su rezultati istraživanja koje je spovedeno u kompaniji Deleze, tačnije u Maxi diskontu u Zaječaru.

Podaci su prikupljeni anketom koja je za cilj imala praćenje prodaje praška za veš marke Ariel u periodu od 30 dana, pri čemu je tražnja u u tabeli izražena u $kg \cdot 10^2$ a funkcije $P(u)\ i\ T(u)$ u 10^2 dinara.

U	**P(u)**	**T(u)**
1	89.00	5.5
3	261	207
5.50	464.75	205.75
6.80	565.76	386,72
8.40	685.40	445.69
11.00	869	623
12.50	967.75	743.75
14.70	1106.90	945.27
16.20	1196.56	1099.32
18.50	1322.75	1361.75
20.00	1400	1550

Funkcija ukupnih prihoda za empirijske podatke glasi

$$P(u) = -1.0005u^2 + 89.988u,$$

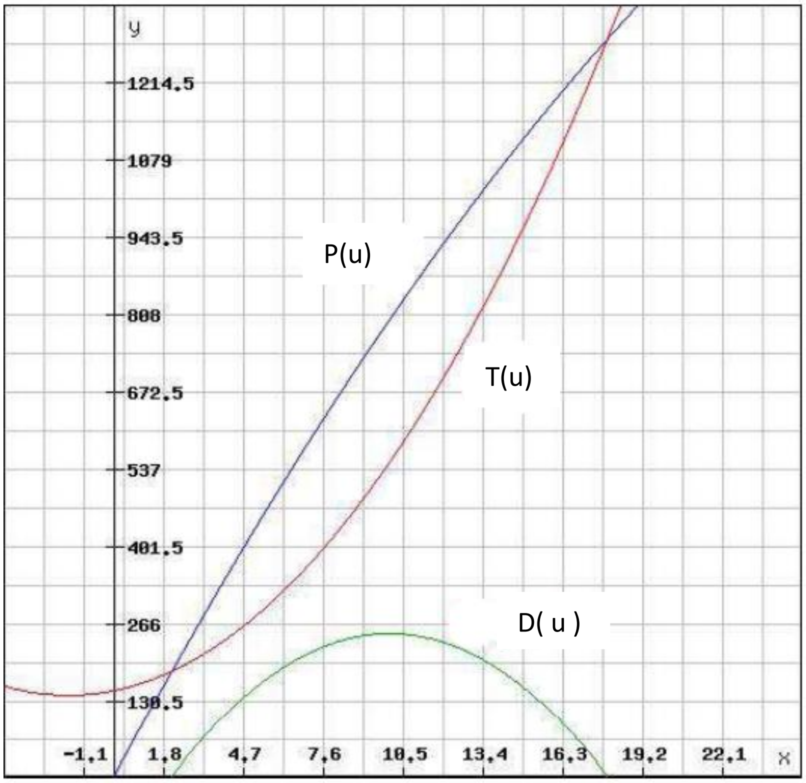
funkcija ukupnih troškova

$$T(u) = 3u^2 + 10u + 150,$$

a funkcija ukupne dobiti

$$D(u) = P(u) - T(u) = -4.0005u^2 + 79.988u - 150.$$

Grafici aproksimativnih funkcija ukupnih prihoda, dobiti i troškova dati su na sledećoj slici.



Problem optimizacije koji je u ovom slučaju postavljen glasi

$$max \ P(u)$$

$$T(u) - P(u) \leq -\xi_0, \ \ (\xi_0 > 0),$$

$$u \geq 0.$$

Imajući u vidu da ukupna dobit $D(u)$ ne može biti manja od $\xi_0 = 50 \cdot 10^2$ dodatno ograničenje je $\xi_0 \geq 50$.

Polazimo od sledećih Kun - Takerovih uslova optimalnosti

$$\frac{\partial L}{\partial u} = P'(u) - \lambda T'(u) - \lambda P'(u) \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\xi_0 + P(u) - T(u) \geq 0.$$

Diferenciranjem funkcija, zamenom u nejednakosti i sređivanjem izraza dobija se

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -2.001u + 89.988 - \lambda(8.001u - 79.998) \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -4.005u^2 + 79.988u - 200 \geq 0.$$

Za $u = 0$ u izrazu dobijamo $-200 \geq 0$ što predstavlja kontradikciju.

Uslov $u > 0$ generiše sledeću relaciju $u > 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial u} = 0$, odakle se dobija jednačina $-2.001u + 89.988 - \lambda(8.001u - 79.998) = 0.$

Iz uslova $\lambda = 0$ sledi $-2.001u + 89.988 = 0$.

Iz date jednačine se dobija $u = 44.9715.$

Uvrštavanjem dobijene vrednosti u dobija se sledeći rezultat $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -4693.57 < 0$ što je u kontradikciji sa uslovom.

Dakle, ako se pretpostavi da je $\lambda > 0$ dobija se sledeća jednačina $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, što je ekvivalentno sa $-4.005u^2 + 79.988u - 200 = 0.$

Rešenja kvadratne jednačine su $u_1 = 2.9296$ i $u_2 = 17.0649.$

Ostaje da se proveri da li dobijena rešenja zadovoljavaju postavljena ograničenja. U tu svrhu zamenom u_1 u jednačinu dobija se da je $\lambda = -1.488$ što je u kontradikciji sa postavljenim uslovom $\lambda > 0$. Analogno, zamenom u_2 u jednačinu dobija se da je $\lambda > 0$ što je u saglasnosti sa postavljenim uslovom optimizacije tražnje.

Sa druge strane, diferenciranjem funkcije $D(u)$ i izjednačavanjem njenog prvog izvoda sa nulom dobija se sledeća jednačina

$$-8.0001u + 79.988 = 0.$$

Rešavanjem jednačine po u nalazimo da je $u = 9.9984$.

Dobijeno rešenje predstavlja tražnju ili obim prodaje za koju se maksimizira ukupna dobit $D(u)$ u odnosu na posmatrani proizvod.

Poredeći vrednosti 9.9984 i 17.0649 uočava se da je $u_2 > u$ što implicira da je

$u_2 = 17.0649$ vrednost kojom se maksimizira ukupan prihod $P(u)$, pod uslovom da je minimalna vrednost dobiti $minD(u) = \xi_0 = 50 \cdot 10^2$.

Iz navedenog primera može se zaključiti da je osnovna ideja pri numeričkom rešavanju problema nelinearnog programiranja sa dve promenljive da se prvo proveri vrednost nula vektora (za svaku promenljivu odlučivanja uzme se vrednost nula) čime se znatno pojednostavljuju ograničenja. S obzirom na činjenicu da u tom slučaju dolazi do iščezavanja nekih članova, posmatrani matematički model postaje pojednostavljen. Ukoliko se u tom slučaju mogu pronaći odgovarajuće nenegativne vrednosti Lagranžovih množitelja, takve da sva ograničenja budu zadovoljena, tada će nula biti rešenje posmatranog problema.

Međutim, postoji mogućnost da neka ograničenja budu narušena. U takvim situacijama bira se da jedna ili više promenljivih budu pozitivne. Za svaku pozitivnu vrednost promenljive, može se, oslabljivanjem uslova, ograničenje tipa nejednakosti prevesti u ograničenje tipa jednakosti. Rešavanjem tako dobijenih jednačina dolazi se do rešenja ili do kontradikcije. U slučaju da tako dobijeno rešenje dovede do kontradikcije traži se nova ideja i postupak se ponavlja.

Što je matematički model složeniji, utoliko se više komplikuje rešavanje optimizacionog zadatka. U slučaju kada su funkcija cilja i ograničenja opisani funkcijama koje sadrže više promenljivih nužno je koristiti računare prilikom rešavanja problema.

Problem optimizacije u teoriji potrošača

Teorija ponašanja potrošača zasniva se na problemu optimalne alokacije ograničenog, raspoloživog dohotka, na kupovinu robe i usluga, pri čemu potrošač nastoji da obezbedi maksimalno zadovoljenje svojih potreba.

Funkcija cilja koja se optimizuje predstavlja korisnost potrošača. Promenljive po kojima se vrši optimizacija predstavljaju količine potrošnih dobara, koje čine potrošačku korpu, dok je ograničenje budžetsko i za konstantne cene proizvoda (usluga), koje ne zavise od količine, ima oblik linearne nejednakosti.

Pretpostavlja se da potrošač kupuje n proizvoda. Neka su $q_i, i = 1,2, \dots, n$ količine tih proizvoda, a $p_i, i = 1,2, \dots, n$ odgovarajuće cene po jedinici proizvoda.Stepen zadovoljenja potreba potrošača je funkcija količina tih proizvoda $J(q_1, \dots q_n)$. Ograničenje budžeta je dato sa: $\sum_{i=1}^{n} p_i q_i \leq y_0$, gde je sa y_0 označen deo dohotka potrošača koji se koristi za kupovinu navedenih proizvoda.

Analiza datog problema, u zavisnosti od pomenutih parametara, daje sledeći problem optimizacije

$$\max_{q \in U} J(q_1, \dots q_n)$$

$$U = \{q \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \leq y_0 , q_i \geq 0, i = 1,2, \dots, n.\}.$$

Za analitičko rešenje problema nelinearnog programiranja u ekonomiji koristi se Lagranžova funkcija pridružena datom problemu u formulaciji teoreme Kun –Takera.

Primer 4.1 : Pavle ima 162 $ koje troši na x i y. Dobro x košta 6$ po komadu, a dobro y 9$ po komadu. Njegova funkcija korisnosti je $J(x, y) = 4x^2 + 5y^2$. Koju će od sledećih korpi dobara on izabrati?

a) Pavle će izabrati samo x
b) Pavle će izabrati samo y
c) Pavle će izabrati ponešto od svakog dobra
d) Nije moguće odrediti.

Rešenje: Matematičkim jezikom iskazan, ovaj problem optimizacije izbora potrošača može se zapisati kao problem maksimizacije funkcije cilja korisnosti sa budžetskim ograničenjem na sledeći način

$$max \quad 4x^2 + 5y^2$$

$$6x + 9y \leq 162$$

$$x, y \geq 0.$$

Lagranžova funkcija pridružena posmatranom problemu glasi

$$L(x, y, \lambda) = -4x^2 - 5y^2 + \lambda(6x + 9y - 162).$$

Primena Kun – Takerovih uslova na funkciju Lagranža vodi sledećem sistemu jednačina i nejednačina:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -8x + 6\lambda \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -10y + 9\lambda \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 6x + 9y - 162 \geq 0$$

$$x(-8x + 6\lambda) = 0$$

$$y(-10y + 9\lambda) = 0$$

$$\lambda(6x + 9y162) = 0$$

$$x, y, \lambda \geq 0.$$

Kandidati za optimalno rešenje su:

$$x = 9.64\ , y = 11.57\ i\ \lambda = 12.86$$

$$x = 0, y = 18\ i\ \lambda = 20$$

$$x = 27, y = 0\ i\ \lambda = 36$$

$x = 0, y = 0 \; i \; \lambda = 0.$

Kada se izračuna vrednost funkcije korisnosti za svaku potrošačku korpu, koju predstavlja kandidat za optimalno rešenje dobija se sledeći rezultat:

$J(9.64, 11.57) = 1041,$

$J(0, 18) = 1620,$

$J(27, 0) = 2916,$

$J(0, 0) = 0.$

Poređenjem dobijenih vrednosti, može se zaključiti da je optimalno rešenje

$$[x_*, y_*]^T = [27, 0]^T.$$

Dakle, tačan odgovor je tvrđenje pod a).

Optimizacija portfolija

Pod investicijom se podrazumeva svako ulaganje u cilju ostvarivanja profita − kupovina akcija, nekretnina, ulaganje u profitabilan projekat i slično. Za datu količinu kapitala i skup raspoloživih investicija, optimalan izbor investicija podrazumeva formiranje portfolija koji sadrži određen broj investicija iz skupa svih raspoloživih investicija. Kako se u momentu odlučivanja ne zna sa sigurnošću šta će se dešavati sa novčanim tokom koji opisuje investiciju, već postoji samo očekivano ponašanje budućeg novčanog toka, stopa prinosa investicije je slučajna promenljiva koja ima očekivanu vrednost i u sebi nosi rizik koji se meri varijansom, odnosno standardnim odstupanjem. Postoje investicije kod kojih je novčani tok unapred poznat. U tom slučaju prinos je deterministička vrednost i standardna devijacija je nula (rizik ne postoji).

Svaka aktiva S_i , $i = 1,2, \dots , n$ ima prinos r_i, očekivani prinos $\overline{r_i}$ i standardnu devijaciju σ_i^2.

Ako se pretpostavi da postoje dva vremenska perioda $t = 0$ (kupovina S_0) i $t = 1$ (prodaja S_1) tada je stopa prinosa investicije jednaka

$$r_i = \frac{S_1 - S_0}{S_0}.$$

Ako postoji n aktiva sledi da je $\sum_{i=1}^{n} S_{0i} = S_0$, gde je S_{0i} iznos investiran u $i -$ tu aktivu,koji se može predstaviti kao udeo u ukupnoj početnoj investiciji, odnosno

$$S_{0i} = \omega_i S_0 , \qquad i = 1,2, \dots , n ,$$

gde su ω_i težinski koeficijenti (ponderi) za koje važi $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 -$ budžetska jednačina koja nam garantuje da sve investicije učestvuju u portfoliju.

Portfolio je linearna kombinacija aktiva

$$\pi = \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2 + \cdots + \omega_n S_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i S_i .$$

Prinos portfolia je

$$r_\pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i .$$

Očekivani prinos portfolija je

$$\overline{r_\pi} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \overline{r_i} .$$

Varijansa (standardno odstupanje) portfolija $\sigma_\pi^2 = \omega^T G \omega$, gde je G matrica kovarijansi a ω vektor težinskih koeficijenata.

$$G = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_n \sigma_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1 \sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \qquad \omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T.$$

Koristeći matrični zapis, očekivani prihod portfolija može se zapisati na sledeći način

$$\overline{r_\pi} = \omega^T \bar{r} ,$$

gde je $\bar{r} = [\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots, \overline{r_n}]^T$.

Konstruisanje portfolija podrazumeva određivanje težinskih koeficijenata

$\omega_i, i = 1,2, \dots, n$.

Ako je $\omega_i > 0$ trebalo bi investirati u aktivu S_i, ukoliko je $\omega_i = 0$ aktiva S_i ne pripada portfoliju, dok se za $\omega_i < 0$ dobija taukozvana kratka prodaja. Kratka prodaja podrazumeva prodaju aktive koju investitor ne poseduje i smatra se pozajmljenom. Profit se ostvaruje ukoliko cena pozajmljenih sredstava opada.

Diverzifikacija portfolija podrazumeva raspoređivanje ulaganja na veći broj aktiva sa ciljem minimizacije ukupnog rizika portfolija.

Kriterijum optimalnosti može biti ili maksimizacija očekivanog prinosa ili minimizacija rizika koju nosi portfolio – Markovicov (Markowitz) model, ili kombinacija ova dva kriterijuma.

Maksimizacija očekivanog prinosa, uz zadato gornje ograničenje standardne devijacije dovodi do sledećeg problema konveksnog programiranja

$$max\ \overline{r_\pi} = \omega^T \bar{r},$$

ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\sigma_\pi^2 \leq b,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1,$$

$$\omega_i \geq 0.$$

Minimizacija rizika koju nosi portfolio, sa zadatom donjom granicom za očekivani prinos predstavlja sledeći problem konveksne optimizacije

$$min\ \ \sigma_\pi^2 = \omega^T G \omega$$

uz sledeća ograničenja:

$$\overline{r_\pi} \geq b,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1,$$

$$\omega_i \geq 0.$$

Maksimalan očekivani prinos uz minimalan rizik dobija se kombinacijom prethodna dva modela što daje sledeći problem konveksne optimizacije

$$min\ \sigma_\pi^2 - \rho\overline{r_\pi}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1,$$

$$\omega_i \geq 0,$$

gde ρ predstavlja parametar koji određuje šta je investitoru i koliko bitno, a ρ^{-1} je koeficijent koji meri averziju prema riziku.

Kada ρ uzima manje vrednosti , ρ^{-1} se povećava , stoga je minimalan rizik važniji. Kako vrednost za ρ raste, odbojnost prema riziku se smanjuje, pa maksimizacija očekivanog prinosa dominira.

Primer 4.2 Investitor želi da uloži milion dolara kupujući akcije u tri kompanije : $A, B\ i\ C$. Kompanija A se bavi proizvodnjom mobilnih telefona, kompanija B se bavi proizvodnjom delova za mobilne telefone, dok kompanija C proizvodi sladoled. Godišnji prinos je slučajna promenljiva, a očekivani prinos za svaku kompaniju je dat u tabeli.

A	B	C
20%	12%	4%

Postoji jaka korelacija između prodaja kompanija $A\ i\ B$, dok prodaja za kompaniju C zavisi od vremena, leti je povećana potražnja za sladoledom što utiče na broj prodatih sladoleda, dok vremenski uslovi ne utiču na broj prodatih mobilnih telefona.

Matrica kovarijanse u ovom slučaju je

$$G = \begin{bmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Investitor želi da minimizira rizik, pod uslovom da očekivani prinos ne bude niži od 12%. Rešiti ovaj problem optimizacije.

Rešenje : Neka je ω_i, deo kapitala uložen u $i -$ tu aktivu, $i = 1{,}2{,}3$.

Očekivani prinos iznosi $0.20\omega_1 + 0.12\omega_2 + 0.04\omega_3$.

Na osnovu podataka u matrici kovarijanse, dobija se sledeća jednačina rizika

$$50{\omega_1}^2 + 80\omega_1\omega_2 + 40{\omega_2}^2 + 10{\omega_3}^2.$$

Investitor želi da minimizira rizik, uz ograničenje da očekivani prinos ne bude manji od 12%, što implicira sledeći problem optimizacije

$$min\ 50{\omega_1}^2 + 80\omega_1\omega_2 + 40{\omega_2}^2 + 10{\omega_3}^2$$

uz ograničenja :

$$0.20\omega_1 + 0.12\omega_2 + 0.04\omega_3 \geq 0.12,$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1, \qquad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \geq 0.$$

Optimalno rešenje je određeno korišćenjem programskog paketa MATLAB.

```
function w=portfolio(G,r)

cvx_begin
variable w(3);
minimize(w'*G*w);
subject to
r*w>=0.12;
w'*ones(3,1)==1;
w>=0;
cvx_end
cvx_optval
```

Izvršavanjem programa dobija se sledeći rezultat

```
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +15


cvx_optval =

   15.0000


ans =

    0.5000
    0.0000
    0.5000
```

Dakle, investitor koji želi da minimizira rizik treba da uloži 50% kapitala $(500000\$)$ u akcije kompanije A i 50% kapitala $(500000\$)$ u akcije kompanije C.

Primer 4.3 (Optimalni portfolio na tržištu Republike Srbije)

Posmatramo akcije sledećih kompanija: Naftna industrija Srbije a.d. Novi Sad (NIS), aerodrom Nikola Tesla a.d. Beograd (AERO), Alfa Plam a.d. Vranje (ALFA), Metalac a.d. Gornji Milanovac (MTLC), Beogradska autobuska stanica a.d. Beograd (BASB) i Aik banka a.d. Niš (AIKB).

Kovarijansna matrica za akcije izabranih kompanija						
	NIS	AERO	ALFA	MTLC	BASB	AIKB
NIS	0.00166	0.00109	-0.00015	-0.00011	0.0017	0.00072
AERO	0.00109	0.00468	0.00243	0.00046	0.00178	0.00113
ALFA	-0.00015	0.00246	0.00264	0.00027	0.00143	0.00027
MTLC	-0.00011	0.00046	0.00027	0.00054	-0.00001	0.00069
BASB	0.0017	0.00178	0.00143	-0.00001	0.00878	0.00164
AIKB	0.00072	0.00113	0.0027	0.00069	0.00164	0.00176

Optimizacija Markovicovog portfolija se zasniva na rešavanju sledećeg optimizacionog problema

$$min \ \sigma_\pi^2 = \omega^T G \omega$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \overline{r_{i\,.}} = \overline{r_{\pi\,.}}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1,$$

ako minimalna prihvatljiva granica prinosa koju portfolio treba da ostvari iznosi 5.04%.

Metoda Lagranžove funkcije pridružene zadatom problemu implicira

$$\begin{bmatrix} 0,00166 & 0,00109 & -0,00015 & -0,00011 & 0,00170 & 0,00072 \\ 0,00109 & 0,00468 & 0,00243 & 0,00046 & 0,00178 & 0,00133 \\ -0,00015 & 0,00243 & 0,00264 & 0,00027 & 0,00143 & 0,00027 \\ -0,00011 & 0,00046 & 0,00027 & 0,00054 & -0,00001 & 0,00069 \\ 0,00170 & 0,00178 & 0,00143 & -0,00001 & 0,00878 & 0,00164 \\ 0,00072 & 0,00113 & 0,00027 & 0,00069 & 0,00164 & 0,00176 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} -0,0214 \\ 0,0762 \\ 0,0504 \\ -0,0102 \\ -0,0424 \\ 0,0049 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0214 \\ 0,0762 \\ 0,0504 \\ -0,0102 \\ -0,0424 \\ 0,0049 \end{bmatrix} = \overline{r}_\pi$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Ovaj sistem linearnih jednačina sadrži veći broj promenljivih, stoga rešavanje ovog sistema ne predstavlja tako jednostavan zadatak.

Radi preciznosti rezultata u nastavku će biti dati kodovi za određivanje optimalnog Markovicovog portfolija pomoću CVX u programskom paketu MATLAB.

```
function w=Markowitz(G,r)

cvx_begin
variable w(6);
minimize(norm(chol(G)*w));
subject to
r'*w==0.0504;
w'*ones(6,1)==1;
w>=0;
cvx_end
cvx_optval
```

Korišćenjem MATLAB– a, na osnovu unetih parametara, za izabrane akcije, dobija se optimalan portfolio.

```
cvx_optval =

    0.0464


ans =

    0.0000
    0.3162
    0.5045
    0.0000
    0.0000
    0.1793
```

Rešenje: $[\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6]^T = [0{,}0.3162{,}0.5045{,}0{,}0.1793]^T$

Na osnovu dobijenih rezultata zaključuje se da je najbolje ulagati u akcije kompanija koje imaju pozitivne očekivane prinose. Rizik portfolija se procenjuje na 0.05%.

5 Geometrijsko programiranje

Geometrijsko programiranje, u opštem slučaju, ne predstavlja problem konveksne optimizacije. Međutim, transformacijom funkcije cilja i funkcija kojima su opisana ograničenja, problem geometrijskog programiranja se može transformisati u problem konveksnog programinjanja, pogodnom zamenom promenljivih.

Louner – Džon (Lowner – John) elipsoid

Neka je $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ograničen skup neprazne unutrašnjosti. U ovom poglavlju posmatran je problem nalaženja elipsoida maksimalne zapremine koji se nalazi unutar C, kao i problem određivanja elipsoida minimalne zapremine koji pokriva C.

Definicija 5.1 : Elipsoid minimalne zapremine koji sadrži skup C naziva se Louner – Džon elipsoid skupa C u oznaci $\mathcal{E}_{ij}$.

U nastavku rada biće korišćena sledeća parametrizacija elipsoida

$$\mathcal{E} = \{v \mid \|Av + b\|_2 \leq 1\}.$$

Bez umanjenja opštosti, može se pretpostaviti da je $A \in S^n_{++}$.

U tom slučaju zapremina $\mathcal{E}$ proporcionalna je $detA^{-1}$.

Tada se problem nalaženja elipsoida minimalne zapremine koji sadrži C matematički formuliše na sledeći način

$$\begin{aligned} &min \quad \log\det A^{-1} \\ &\text{pod uslovom da je } \|Av - b\|_2 \leq 1, \ \text{ za sve } v \in C. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Promenljive su $A \in S^n, A \succ 0$ i $b \in \mathbb{R}^n$. Funkcija cilja i funkcije ograničenja su konveksne, stoga problem (5.1) predstavlja problem konveksnog programiranja.

Posmatra se problem (5.1) u slučaju kada je skup C konačan,

$C = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Elipsoid pokriva C ako i samo ako sadrži konveksnu obvojnicu C.

Problem nalaženja elipsoida minimalne zapremine koji sadrži skup $conv\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ se može zapisati na sledeći način

$$min \quad \log\det A^{-1}$$

$$\text{pod uslovom da je } \|Ax_i - b\|_2 \leq 1, \quad i = 1,2, \dots, m.$$

Efikasnost Louner – Džonove elipsoidne aproksimacije

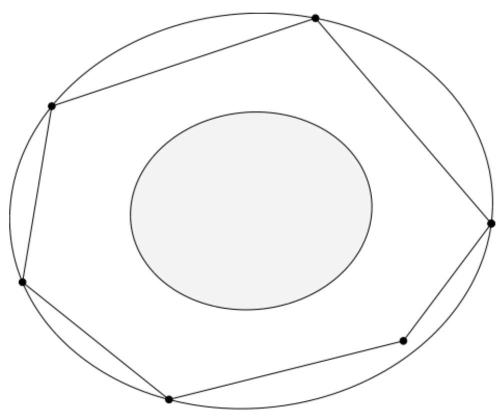
Neka je $\mathcal{E}_{ij}$ Louner– Džon elipsoid, konveksnog, zatvorenog skupa neprazne unutrašnjosti $C \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je x_0 njegov centar.

Tada

$$x_0 + \frac{1}{n}\left(\mathcal{E}_{ij} - x_0\right) \subseteq C \subseteq \mathcal{E}_{ij}.$$

Aproksimacija unutrašnjosti proizvoljnog konveksnog skupa elipsoidom Louner– Džon zavisi od vrednosti n.

Vrednost $\frac{1}{n}$ se ne može poboljšati bez dodatnih pretpostavki o skupu C. [1].



Na slici, velika elipsa opisana oko šestougla predstavlja elipsoid minimalne površine koji sadrži temena šestougla a ujedno i skup $conv\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$.

Manja elipsa, predstavlja Louner – Džonovu elipsu, smanjenu za faktor $n = 2$, oko centra.

Elipsoid se sigurno nalazi u unutrašnjosti skupa $conv\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$.

Elipsoid maksimalne zapremine sadržan u konveksnom skupu

Posmatra se problem nalaženja elipsoida maksimalne zapremine koji se nalazi unutar konveksnog skupa C.

Pretpostavlja se da je skup C ograničen i da je $intC \neq \emptyset$.

Za formulaciju ovog problema, koristiće se sledeća parametrizacija elipsoida

$$\mathcal{E} = \{Bu + d \mid \|u\|_2 \leq 1\}.$$

Kao i u slučaju elipsoida minimalne zapremine i ovde se može pretpostaviti da je

$B \in S^n_{++}$, pa je zapremina $\mathcal{E}$ proporcionalna det B.

Elipsoid maksimalne zapremine unutar skupa C, dobija se rešavanjem problema konveksne optimizacije, u kom su promenljive $B \in S^n$ i $d \in \mathbb{R}^n$ i ispunjen je uslov

$B \succ 0$.

Preciznije,

$$max \quad \log \det B$$

$$\text{pod uslovom da je } \; Ic(Bu + d) \leq 0, \text{za sve } \; \|u\|_2 \leq 1, \;\; i = 1,2, \ldots m.$$

6 Problem najmanjih kvadrata sa ograničenjima

Posmatra se sledeći problem optimizacije

$$\min\|Ax - b\|^2$$

sa ograničenjem $\quad \|x\|^2 \leq \alpha, \qquad (6.1)$

gde je $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ punog ranga, $b \in \mathbb{R}^m$ i $\alpha > 0$.

Dati problem optimizacije predstavlja problem konveksnog programiranja.

Slaterov uslov je zadovoljen za $x = 0$.

Da bi se ovaj problem rešio potrebno je formirati Lagranžovu funkciju

$$L(x, \lambda) = \|Ax - b\|^2 + \lambda(\|x\|^2 - \alpha).$$

Kun – Takerovi uslovi optimalnosti za dati problem glase

$$\nabla_x L = 2A^T(Ax - b) + 2\lambda x = 0, \quad (6.2)$$

$$\lambda(\|x\|^2 - \alpha) = 0, \quad (6.3)$$

$$\|x\|^2 - \alpha \leq 0, \quad (6.4)$$

$$\lambda \geq 0.$$

Za $\lambda = 0$ iz jednačine (6.2) dobijamo da je $x_* = (A^T A)^{-1} A^T b$ optimalno rešenje datog problema ako i samo ako je x_* dopustivo rešenje, tačnije ako zadovoljava uslov $\|x_*\|^2 \leq \alpha$.

Sa druge strane, ukoliko je $\|x_*\|^2 > \alpha$, tada je i $\lambda > 0$.

Kako jednačina (6.3) mora biti zadovoljena zaključuje se da je $\|x\|^2 = \alpha$, dok (6.2) implicira da je

$x_* = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T b.$

Lagranžov množitelj $\lambda > 0$ treba biti odabran tako da ograničenje bude zadovoljeno, preciznije, λ je rešenje jednačine $f(\lambda) = 0$, gde je

$f(\lambda) := \|(A^T A + \lambda I)^{-1} A^T b\|^2 - \alpha. \qquad (6.5)$

$f(0) = \|x_*\|^2 - \alpha > 0.$

Funkcija f je strogo opadajuća funkcija i $f(\lambda) \to -\alpha$ kad $\lambda \to \infty$.

Dakle, postoji jedinstveno λ tako da je $f(\lambda) = 0$,a efikasan način za određivanje λ predstavlja metod bisekcije, koji će u nastavku biti opisan.

Optimalno rešenje problema najmanjih kvadrata sa ograničenjem je

$$\boldsymbol{x}_* = \begin{cases} (A^T A)^{-1} A^T b & \|x_*\|^2 \leq \alpha, \\ (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T b & \|x_*\|^2 > \alpha \; . \end{cases}$$

Metoda bisekcije (polovljenja)

Pretpostavimo da se u intervalu $[a, b]$ nalazi rešenje funkcije $f(x) = 0$, gde je

$f(x)$ neprekidna funkcija.

Biramo $a_1 = a$, $b_1 = b$ i $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

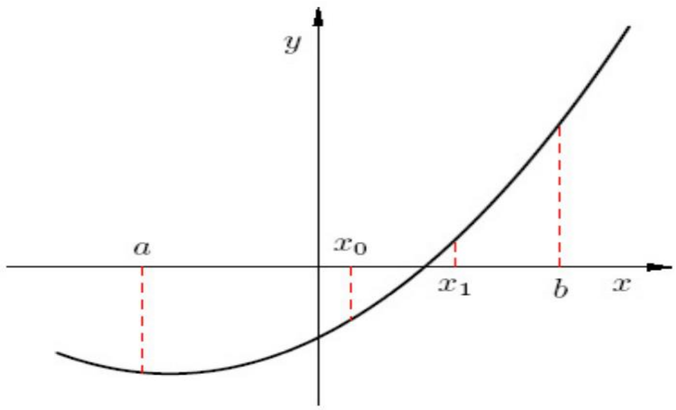
Ako je $f(c_1) = 0$ tada je c_1 traženo rešenje.

U suprotnom, pod pretpostavkom da je $f(a_1) \cdot f(c_1) < 0$, sledeća aproksimacija se traži u intervalu $[a_1, c_1]$ tako da je
$a_2 = a_{1,}$ $b_2 = c_1$, $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.

U slučaju da je $f(a_1) \cdot f(c_1) > 0$ sledeću aproksimacija tražimo u intervalu $[c_1, b_1]$ birajući $a_2 = c_{1,}$ $b_2 = b_1$, $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.

Postupak se ponavlja sve dok se ne postigne zadata preciznost ε ili dok se ne ispuni zadati broj koraka.

Grafički prikaz nalaženja nule funkcije metodom bisekcije.



U nastavku je napisan kod koji predstavlja implementaciju metode bisekcije u programskom paketu MATLAB.

```
function z=bisection(f,l,u,eps)
%INPUT
%f...... skalarna funkcija
%l...... pocetna donja granica
%u...... pocetna gornja granica
%eps.... zadata preciznost

%OUTPUT
%z...... resenje jednacine f(x)=0

if(f(l)*f(u)>0)
    disp('Error! f(l)*f(u)>0')
end

iter=0;
while(u-l>eps)
    z=(l+u)/2;
    iter=iter+1;
    if(f(l)*f(z)>0)
        l=z;
    else
    u=z;
    end
    fprintf('iter number= %3d current sol = %2.6f \n',iter,z);
end
```

Kod problema najmanjih kvadrata sa ograničenjem, skalarna funkcija f definisana u (6.4) zadovoljava uslov $f(0) > 0$, stoga preostaje da se pronađe tačka $\mu > 0$ takva da $f(\mu) < 0$.

Za određivanje takve tačke najjednostavniji pristup bi bio početi sa $\mu = 1$ i proveriti da li je $f(1) < 0$. Ukoliko nije ispunjen uslov, biramo μ, tako da $\mu \to 2\mu$, dok $f(\mu)$ ne postane negativno.

MATLAB kod za realizaciju ove ideje je dat u nastavku.

```
function x_cls=cls(A,b,alpha)
%INPUT
%A......... matrica formata mxn
%b......... vektor dimenzije m
%alpha..... pozitivan skalar

%OUTPUT
%x_cls..... optimalno resenje
%           min{||A*x-b||:||x||^2<=alpha}

[m,n]=size(A);
x_ls=A\b;
if(norm(x_ls)^2 <=alpha)
    x_cls=x_ls;
else
    f=@(lam) norm((A'*A+lam*eye(n))\(A'*b))^2 - alpha;
    u=1;
    while (f(u)>0)
        u=2*u;
    end
    lam=bisection(f,0,u,1e-7);
    x_cls=(A'*A+lam*eye(n))\(A'*b);
end
```

Primer 6.1. Rešiti problem (6.1) ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $i\ b = [2,3,4]^T\ i\ \alpha = 0.5.$

Pomoću gore navedenog MATLAB koda, za $\alpha = 0.5$ dobija se rešenje

>> cls(A,b,0.5)

ans =

0.5000

0.5000.

Za rešavanje Primera 6.1 može se koristiti CVX.

```
cvx_begin
variable x_cvx(2);
minimize(norm(A*x_cvx-b));
subject to
norm(x_cvx)<=sqrt(0.5);
cvx_end
```

Dobija se rešenje:

>> x_cvx

x_cvx =

0.5000

0.5000.

Korišćenjem oba koda, dobijamo isto rešenje $x_* = [0.5,0.5]^T$.

Primer 6.2   Za matricu

$$\begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i vektor} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

rešiti sledeći problem optimizacije

$$\min\|Ax - b\|^2$$

sa ograničenjem $\|x\|^2 \leq 0.3.$

Zadatak je rešen u programskom paketu MATLAB, pomoću CVX.

```
cvx_begin
variable x_cvx(4);
minimize(norm(A*x_cvx-b));
subject to
norm(x_cvx)<=sqrt(0.3);
cvx_end
```

Izvršavanjem programa dobija se sledeći rezultat:
ans =

```
   0.0803
   0.1947
   0.4712
  -0.1832
```

Dakle, rešenje optimizacionog problema je vektor

$x_* = [0.0803, 0.1947, 0.4712, -0.1832]^T$.

7 Zaključak

Konveksna optimizacija je oblast numeričke analize koja je izuzetno aktuelna. Nedavna otkrića podstakla su nova interesovanja za proučavanje ove oblasti.

Problemi konveksnog programiranja rasprostranjeniji su nego što se se ranije mislilo.

Od 1990. godine otkrivene su mnoge primene u oblasti automatskih upravljačnih sistema, obradi signala, dizajniranju elektronskih kola, analizi i modeliranju podataka, ekonomiji.

Postoje velike prednosti kada se problem koji se rešava, modelira pomoću konveksnih funkcija.

Prepoznavanje problema, koji se, transformacijama mogu svesti na probleme konveksne optimizacije često predstavlja izazov.

Pojedini teorijski rezultati se mogu primeniti isključivo na probleme definisane preko konveksnih funkcija, stoga, najosnovnija prednost ove klase problema predstavlja pouzdano i efikasno pronalaženje rešenja, uz pomoć algoritama konstruisanih za rešavanje ove klase problema. Većina algoritama dizajnirana je za traženje lokalnih minimuma. Najvažnije svojstvo konveksnog programiranja je to, što tačka lokalnog minimuma, istovremeno predstavlja i globalni minimum.

U opštem slučaju rešavanje problema nelinearnog programiranja je prilično kompleksno i ne postoji univerzalan algoritam koji je najbolji.

U slučaju rešavanja problema konveksnog programiranja, sa sigurnošću se, može koristiti bilo koje optimalno rešenje koje se dobije, znajući, da ne postoji drugo rešenje, koje daje bolju vrednost funkcije cilja.

Literatura

[1] Boyd S., Vandenberge L: *Convex optimization,* Cambridge University Press, Cambridge , 2006.

[2] Dimitri P. Bertsekas, Angelia Nedić, Asuman E Ozdaglar: *Convex Analysis and Optimization,* Massachusterstts Institute od Tehnology*, 2003.*

[3] Olvi L. Mangasarian: *Nonlinear Programming*. Univerisy of Wisconsin, Madison, Wisconsin ,1994.

[4] R. Tyrrell Rockafellar: *Convex Analysis* ,Princeton, New Jersay, 1972.

[5] V.Vujčić, M.Ašić i N. Miličić: *Matematičko programiranje*, Matematički insistut, Beograd, 1980.

[6] S.Krčevinac, M.Čanglović, V.Kovačević – Vujčić, M.Martić, M.Vujošević: *Operaciona istraživanja* II, Fakultet ogranizacionih nauka, Beograd, 2006.

[7] N.Petković, M.Božinović: *Maximazing sales under conditions of nonlenarity*, Facta univerzitatis, No.4., Niš , 2015.

[8] M. Božinović: *Operaciona istraživanja*, Ekonomski fakultet Kosovska Mitrovica, 2012.

[9] N.Teofanov, M. Zigić: *Osnovi optimizacije*, Prirodno – matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2018.

[10] Marija Ivanović : *Nelinearno programiranje – vežbe*, Matematički fakultet, Beograd, 2013.

[11] Lars – Ake Lindahl: *Convexity and Optimization*, Department of Mathematics, Uppasala University, 2016.

[12] Amir Beck: INTRODUCTION TO NONLINEAR OPTIMIZATION : *Theory, Algorithms, and Applications with* MATLAB, Techion – Israel Institute of Technology, Kfar Saba, Israel, 2014.

Biografija

Matijević Jelena je rođena 29. maja 1995. godine u Novom Sadu.

Osnovnu školu “Dušan Jerković” u Rumi, završila je 2010. godine kao nosilac Vukove diplome. Nakon završetka osnovne škole upisuje Gimnaziju “Stevan Puzić” u Rumi, opšti smer, koju završava 2014. godine sa prosečnom ocenom 5.00.

Iste godine započinje osnovne akademske studije matematike na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer teorijska matematika. Diplomirala je 2018. godine i stekla zvanje diplomirani matematičar. Obrazovanje je nastavila upisavši smer Master profesor matematike na istom fakultetu.

Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu ovog master rada.

Od septembra 2019. do decembra 2019. godine radila je u Osnovnoj školi “Marija Trandafil “ kao nastavnik matematike.

Od januara 2020. zaposlena je u Gimnaziji “Stevan Puzić” u Rumi, kao profesor matematike.

Novi Sad, 2020. Matijević Jelena

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*

TD
Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

TZ
Vrsta rada: *Master rad*

VR
Autor: *Jelena Matijević*

AU
Mentor: *Prof.dr Sanja Rapajić*

MN
Naslov rada: *Konveksno programiranje i primene*

NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*

JP
Jezik izvoda: *srpski i engleski*

JI
Zemlja publikovanja: *Srbija*

ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP
Godina: *2020*.

GO
Izdavač: *Autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu,Trg Dositeja Obradovića 4*
MA

Fizički opis rada*: 7 poglavlja/ 97 strana/ 12 referenci/ 14 slika/ 2 tabele*

FO

Naučna oblast: *Matematika*

NO

Naučna disciplina: *Optimizacija*

ND

Predmetna odrednica/ključne reči: *konveksni skupovi, konveksne funkcije, konveksna optimizacija*.

PO UDK:

Čuva se: *Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu*

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: *Tema ovog master rada su problemi konveksnog programiranja. Rad se sastoji od 7 poglavlja. U uvodnom delu predstavljen je predmet proučavanja operacionioh istraživanja i navedene su oznake koje će se koristiti u radu. Drugi deo je posvećen problemu nelinearne optimizacija sa i bez ograničenja. Treći deo je posvećen konveksnom programiranju. Date su definicije i dokazane su osobine konveksnih skupova i konveksnih funkcija.Predstavljene su osnove teorije konveksnog programiranja i dati su primeri. Četvrto poglavlje se bavi primenom konveksnog programiranja u ekonomiji kroz primere u teoriji potrošača, maksimizaciji prodaje i optimizaciji portfolija. U petom poglavlju je opisan konveksan slučaj geometrijskog programiranja. Šesto poglavlje opisuje probleme najmanjih kvadrata sa ograničenjima, a u poslednjem poglavlju je dat zaključak.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *9.9.2020.*

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: *dr Nenad Teofanov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

Član: *dr Sanja Rapajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor*

Član: *dr Milica Žigić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *Monograph type*

DT
Type of record: *Printed text*

TR
Contents Code: *Master's thesis*

CC
Author: *Jelena Matijević*

AU
Mentor: *Prof.Dr. Sanja Rapajić.*

MN
Title: *Convex programming and applications*

TI
Language of text: *Serbian (latin)*

LT
Language of abstract: *Serbian and English*

LA
Country of publication*: Republic of Serbia*

CP
Locality of publication: *Vojvodina*

LP
Publication year: *2020.*

PY
Publisher: *Author's reprint*

PU

Publication place: *Novi Sad*, *Department of Matematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

PP

Physical description*: 7 chapters/ 97 pages/ 12 references/ 14 pictures/ 2 tables*

PD

Scientific field: *Mathematics*

SF

Scientific discipline: *Optimization*

SD

Subject/ Key words*: convex sets, convex functions, convex optimization.*

S/KW UC:

Holding data: *The Library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

HD

Note:

N

Abstract: *The subject of this master thesis is convex programming and its applications.The first section provides a brief history of operational reasearch. The second section of the thesis introduces nonlinear optimization problems. Convex set, convex functions and convex programming problems are proposed in the 3th section. Forth section provides applications of convex programming problems in economics. Fifth section provides geometrical programming problems in convex case. Sixth section of the thesis introduces constrained least squere problems, as special case of convex optimizations. Examples given in these sections are solved by MATLAB. The conclusion is given in the last section.*

AB

Accepted by the Scientific Board on: *9.9.2020.*

ASB

Defended on:

DE

Defend board:

DB

President: *Nenad Teofanov, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Supervisor: *Sanja Rapajić, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*

Member*: Milica Žigić, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*