UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

TEMUNOVIĆ IVANA

RAZUMEVANJE KONCEPTA NULE U OSNOVNOJ ŠKOLI

-master rad-

Mentor: dr Lužanin Zorana

2020. Novi Sad

SADRŽAJ

Uvod

Nula je broj koji je možda najduži vremenski period ulazio i nalazio svoje mesto u matematici. Od samih početaka i definisanja vrednosti i oznake, privukla je pažnju brojnih matematičara, kao što su Leonardo Fibonacci, Brahmagupta, Mahavira, Bhaskara i drugi. Otkada je uvedena i prihvaćena kao broj postavljaju se mnoga pitanja o njoj.

Nula je pojam koji je veoma apstraktan i intuitivno neshvatljiv u ranim uzrastima, jer je teško zamisliti odsustvo nečega, pa je zbog toga veoma važno pronaći adekvatan način i metod za uvođenje ovog pojma u osnovnom obrazovanju. Nula ima dvojaku ulogu, predstavlja rezervno mesto odnosno koristi se za označavanje odstustva jedinica, desetica, stotina,... u zapisu broja. Zatim nulu korisitmo i kao broj koji označava količinu ili meru nečega. Reč je o sveprisutnom pojmu, bilo kao broj, bilo kao cifra. Reč nula potiče od indijske reči *Sunja* što znači *bilo je prazno*. Simbol koji se koristi za pisanje cifre i broja 0 potiče od praznog kruga, kao oznake za odsustvo nečega, što upravo nula i predstavlja.

U uvodu rada biće prikazan istorijski aspekt uvođenja nule u matematiku. Nula ima dugu i zanimljivu prošlost, u radu je predstavljen razvoj koncepta nule u Mesopotamiji, Indiji, kod islamskih i arapskih naraoda kao i kod civlizacija Maja i na kraju, ali ne manje značajan, razvoj koncepta nule u Evropi. Kako se matematika razvijala, nula je postala kamen temeljac računanja. Danas, nula predstavlja osnovu modernog računarskog binarnog sistema nula i jedinica. Takođe će biti prikazan i teorijski značaj ovog pojma u matematičkoj teoriji. Nula ima veliki značaj prilikom računanja graničnih vrednosti, kojima ispitujemo šta se događa u okolini nule, odnosno sa veličinama koje teže nuli. U ovom delu je predstavljena jedna od najlepših matematičkih formula, koja povezuje 5 važnih matematičkih veličina π , i , e , 1 i 0, poznata kao Eulerova relacija koja glasi: $e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$.

U drugom delu obrađen je koncept nule u nastavi matematike u osnovnoj školi. Učenici se već u prvom razredu osnovne škole susreću sa ovim pojmom, iako su verovatno mnogo ranije čuli za ovaj pojam u svom neposrednom okruženju, kao što će ga i nakon školovanja vrlo često susretati u različitim sferama života. U ovom delu rada poseban značaj je dat analizi nastavnih sredstava koja se bazira na analizi udžbenika koji se koriste tokom izvođenja nastave. Poseban akcenat je stavljen na tvrdnju „sa nulom nema smisla deliti“ koja predstavlja jednu od prvih nepremostivih prepeka koju učenici sreću u drugom razredu osnovne škole, a sa kojom se susreću do kraja svog matematičkog obrazovanja. Ovde je razmotreno i kratko istraživanje o rezultatima dobijenim pri pokušaju deljenja sa nulom na kalkulatorima na različitim IT uređajima.

Kako je nula apstraktan pojam, a kako je nastava matematike u osnovnoj školi pre svega induktivna, razumevanje ovog pojma ne prestaje da bude u žiži istraživanja iz oblasti metodike matematike. Na početku trećeg dela biće prikazano nekoliko publikovanih istraživanja na ovu temu. Istraživanjima su ispitivana znanja o nuli učenika ali i nastavnika, jer su ipak nastavnici ti koji imaju moć prenošenja znanja na učenike. Nakon toga, dat je instrument (test) za učenike sedmog i osmog razreda osnovne škole koji se odnosi na razumevanje koncepta nule. Pilot istraživanje o poznavanju broja nule sprovedeno je na učenicima sedmog i osmog razreda osnovne škole u Subotici.

Poslednji deo rada predstavlja predlog inovativnih nastavnih metoda koji bi mogli pomoći u boljem savladavanju, odnosno boljem usvajanju koncepta nule predviđenih sadržajima predmeta matematika u osnovnim školama.

I KONCEPT NULE

”Gledamo li nulu, vidimo ništa;
ali pogledamo li kroz nju, videćemo svet”.
Kaplan[1]

Šta je nula?

Interesantno je da je prva asocijacija na nulu, praznina, ništa, a ipak se smatra jednom od najvećih dostignuća čovečanstva.
Nula ima dvojako značenje:

1. Nula kao rezervno mesto predstavlja jednostavan znak za označavanje praznog mesta za cele brojeve u brojevnim sistemima. U dekadnom sistemu u zavisnosti od položaja u zapisu, ciframa se razlikuje numeričke vrednosti, cifra može imati vrednost jedinice, desetice, stotine, i tako dalje. Na primer, u broju 3205, nula se koristi da označi odsustvo desetica u ovom broju, ako bismo izostavili nulu dobili bismo broj 325, koji ima znatno manju vrednost u odnosu na broj 3205. Bez znaka za prazan prostor, bilo koji zapis broja bio bi dvosmislen.
2. Druga upotreba nule je kao sam broj, u obliku koji koristimo danas. Nula kao broj označava količinu ili meru nečega. Broj koji se može koristiti u računanju i ima svoja matematička svojstva. Ne pripada skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, ali postoji proširenje tog skupa $\mathbb{N}_0$, i upravo to proširenje predstavlja broj 0, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Broj nula je daleko od intuitivnog koncepta. U ranim istorijskim vremenima brojevi su smatrani mnogo konkretnijim, od apstraktnih koncepata kakvi su danas.

„Bile su potrebne hiljade godina dok je shvaćeno da par fazana i dva dana imaju zajedničku karakteristiku – broj 2“ Bertrand Rasel[2]

Reč nula

Zanimljivo je samo poreklo naziva cifre nula. Indijska reč za nulu *Sunja* što u prevodu znači „bilo je prazno“, na arapski je prevedena kao *as-sifr* ili *sifr*. U svojoj knjizi „Liber Abbaci“ Fibonači[3] naziva nulu *zephirum*. U Italiji se koristila reč *zeuro* za nulu, dok se u Engleskoj koristi reč *zero*. Od ovih reči se razvila i reč cifra i šifra koju mi danas koristimo. Za reč nulu korišteni su i nazivi*: rota, circulus, galgal, omicron, theca, null* i *figura nihili*. Smatra se da simbol za cifru nulu – 0 potiče od praznog kruga, kao oznaka za odstustvo nečega. [1] Zapis nule kakvu danas poznajemo – 0 prvo se pojavila u indijskom natpisu na zidu hrama u Gvalior-u (centralna Indija) i datira iz 876. godine, prikazan na slici 1.

---

[1] Robert Kaplan je rođen 1933. godine, američki autor popularnog naučnog bestselera „Priča o nuli“ koji je preveden na nekoliko jezika. Zajedno sa svojom suprugom Ellen je osnovao 1994. Godine „Matematički krug“, vannastavni program za matematičku didaktiku i „uživanje u čistoj matematici“.
[2] Bertrand Rasel (1872 - 1970) britanski matematičar i filozof.
[3] Leonardo Fibonacci (rođen oko 1170, a umro oko 1250) italijanski matematičar.

Slika 1. Natpis u Gvalior-u

izvor: https://www.smithsonianmag.com/smart-news/you-can-visit-the-worlds-oldest-zero-at-a-temple-in-india-2120286/

„Nula je moćna jer je bliznakinja beskonačnosti. Beskonačnost i nula jednake su i suprotne, kao yin i yang. Jednako su paradoksalne i uznemirujuće. Najveća pitanja nauke i religije pitanja su o ništavilu i večnosti, praznini i beskraju, nuli i beskonačnosti. Sukobi oko nule žestoko su potresali temelje filozofije, nauke, matematike i religije. U pozadini svake revolucije skrivale su se nula i beskonačnost. Nula se nalazila u srcu sukoba Istoka i Zapada, bila je okosnica bitke između religije i nauke. Nula je postala jezikom prirode i najvažnije matematičko oruđe. „ „Nula – Biografija opasne ideje“ - Charles Seife[4]

Istorija nule

„U istoriji civilizacije otkriće nule će se uvek isticati
kao jedno od najvećih postignuća čovečanstva.“
Tobias Dantzig [5]

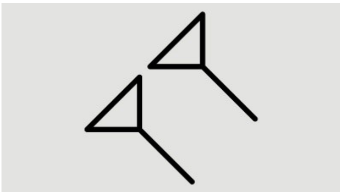
Sam razvoj matematičkog koncepta nule bio je netipičan. U nekim društvima, poput Indije i civilizacije Maja razvoj ovog matematičkog koncepta brzo je napredovao, dok je u Grčkoj, prihvatanje nule trajalo više od 1000 godina. Za ove razlike u vremenu prvenstveno su zaslužne razlike u religijskim i filozofskim verovanjima samih društava. U indijskoj hinduističkoj religiji, bilo je mnogo bogova koji su predstavljali različite dualizme u životu, jedan od njih je praznina i beskonačnost. Dakle, kada je nula kao rezervisano mesto stigla u Indiju, proširenje koncepta na količinu bilo je prirodno jer je srodna ideja (praznina) već postojala u religiji. U Grčkoj, međutim, pojam nula kao broja bio je u suprotnosti s matematičkim dokazom da Bog postoji. [2] Pored toga, grčki filozofi nisu prihvatali da se može koristiti simbol za predstavljanje praznine. Indijski matematičari prenosili su svoja znanja o nuli na islamske i arapske kulture, dok Evropa vekovima nije prihvatala ništa što dolazi sa istoka pa ni nulu. Evropljani su nulu smatrali brojkom pogodnom za varanje i krađu, ali i kao brojku koja predstavlja početak negativnim brojevima koji su označavali gubitke [3] .

[4] Charles Seife je američki autor i novinar, profesor sa Univerziteta u Njujorku.
Njegova prva i najpoznatija objavljena knjiga je Nula - Biografija opasne ideje.

[5] Tobias Dantzig (1884 - 1956) američki matematičar.

Mesopotamija

Vavilonci su koristili brojevni sistem bez oznake za prazno mesto više od 1000 godina. Nisu imali problema sa dvosmislenošću zapisa nekog broja. Zapisivali su na pločama od nepečene gline, koriteći klinasto pismo. Takvi zapisi datiraju još iz 1700. godine pre nove ere. Njihova oznaka brojeva je drugačija od oznaka koje mi danas koristimo jer su koristili brojevni sistem sa osnovom 60, ali i kad bismo preveli u brojevni sistem sa osnovom 10 koji danas koristimo, ne bismo razlikovali brojeve 2106 i 216, zbog nedostatka oznake za odsustvo desetice. Oko 400. godine pre nove ere Vavilonci su počeli da upotrebljavaju simbol za nulu, koristili su dva nagnuta klina da označe mesto gde treba da stoji nula (prikazani na slici 2). Ta oznaka nije bile jedinstvena. U drevnom vavilonskom gradu Kishu (današnji Irak) pronađena je ploča na kojoj su korištene tri kuke za označavanje praznog mesta u zapisu broja. Pronađene su i ploče koje koriste jednu kuku za prazno mesto. Zajednička karakteristika svih zapisa na pločama je ta da se oznaka za prazno mesto nikad nije našla na kraju zapisa broja. [4]



Slika 2. Dva nagnuta klina - oznaka za prazno mesto u Mesopotamiji

Izvor: https://atorwithme.blogspot.com/2019/04/ta-cudnovata-nula.html

Indija

U Indiji se razvio brojevni sistem koji danas koristimo, po uzoru na vavilonske numeričke sisteme. U 4. veku pre nove ere Aleksandar Veliki[6] je prilikom osvajanja Istoka preneo vavilonsku nulu u Indiju, ona je dobila brojnu vrednost i mesto na osi. Oko 500. godine Aryabhata[7] je osmislio brojevni sistem ali bez nule, na mestu nule bi koristio reč *„kha“* koja će se kasnije koristit kao naziv za nulu. U tri važne knjige indijski matematičari Brahmagupta[8], Mahavira[9] i Bhaskara[10] razrađivali su probleme računanja sa nulom i negativnim brojevima – sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje. Brahmagupta je u 7. veku u svojoj knjizi postavio pravila koja se odnose na aritmetiku nule i negativnih brojeva. Njegova pravila su glasila:

„Kada se nula doda broju ili oduzme od broja, broj ostaje nepromenjen“

„Broj pomnožen sa nulom postaje nula “

„Zbir nule i negativnog broja je negativan broj“

„Zbir pozitivnog broja i nule je pozitivan“

---

[6] Aleksandar Veliki poznat kao i Aleksandar III Makedonski (356. p.n.e. – 323. p.n.e.) kralj natičke grčke kraljevine Makedonije.
[7] Aryabhata (476 – 550) prvi indijski matematičar i astronom.
[8] Brahmagupta (598 – 668) indijski matematičar i astronom.
[9] Mahavira (oko 800. - oko 870.) indijski matematičar.
[10] Bhaskara (1114. - 1185.) indijski matematičar i astronom.

Pravila za oduzimanje:

„Negativan broj oduzet od nule postaje pozitivan“

„Pozitivan broj oduzet od nule postaje negativan“

„Ako od negativnog broja oduzmemo nulu, dobijemo negativan broj, ako od pozitivnog broja oduzmemo nulu, dobijemo pozitivan broj“

„Ako od nule oduzmemo nulu, dobijemo nulu.”

Brahmagupta ima pravilo i za množenje, koje kaže da je svaki broj pomnožen s nulom nula. Ali je oprezan kod pravila za deljenje:

„Pozitivan ili negativan broj pri deljenju nulom daje razlomak s nulom u imeniocu. Nula podeljena negativnim ili pozitivnim brojem je ili nula ili se prikazuje kao razlomak s nulom u brojiocu i konačnom veličinom kao imeniocem. ”

„Nula podeljena nulom je nula. ”

Uvidevši da je poslednje citirano Brahmaguptino pravilo netačno, Mahavira, u pokušaju da ispravi greške, 830. godine objavljuje delo Ganita Sara Samgraha, kao vid ažuriranja knjige Brahmagutpe. On tvrdi da broj ostaje nepromenjen pri deljenju sa nulom, što takođe nije tačno. Bhaskara piše 500 godina nakon Brahmagupte.

„Ova knjiga je oznaka za beskonačnu veličinu. U veličini, koja je nastala iz veličine koja ima nulu kao delitelja, nema promene, iako joj se mnoge mogu dodati ili oduzeti; kao što se beskrajan i nepromenljiv Bog ne menja kada se svetovi stvaraju i uništavaju, iako time mnogobrojna bića nastaju i nestaju.”

Bhaskara je pokušao da reši probelm $\frac{n}{0} = \infty$. Ovaj zapis nije tačan jer bi to značilo da je $\infty \cdot 0 = n$ za svaki broj n. Indijski matematičari nisu priznavali da se ne može deliti nulom. Bhaskara je tačno unapredio postojeća pravila računanja dodajući sledeća pravila:

$0^2 = 0$ i $\sqrt{0} = 0$.

Matematičar Aleks Bellos[11] tvrdi da nula nije slučajno otkrivena baš u Indiji. Sama ideja o nuli odavno je ukorenjna u njihovu kulturu. Nirvana – simbol stanja apsolutnog mira, ništavnosti predstavlja pogodno tlo za uvođenje odgovarajućeg pojma za ništa. Pronalasci indijskih matematičara preneseni su i na islamske i arapske matematičare dalje na zapad.

Islamski i arapski narod

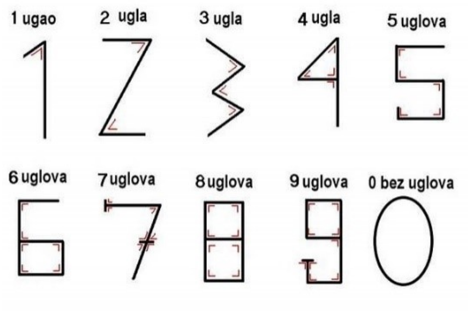
Persijski astronom Abu abu-Mas'har[13] je prvi napisao sistem brojeva koji danas koristimo, tako što je modifikovao postojeći indijski brojevni sistem i proširio ga dalje ka zapadnom arapskom svetu. Pre ovoga, zapisivanje brojeva se radilo na tri načina: brojanje na prste, brojevi označeni arapskim slovima i indijski dekadni sistem. Abu abu-Mas'har je, na osnovu prevoda hinduističkih dela koje je preveo Al-Khwarizmial[14], prvi put video hinduistički način označavanja brojeva (koji je prikazan na slici 3.). Cifre su nastale prema broju uglova

[11] Aleks Bellos (1969.) je britanski pisac koji je diplomirao matematiku i filozofiju na Oxfordu. Objavio je knjigu „U čast Euklida“.

[13] Abu abu-Mas'har (787. – 886.) islamski naučnik.

[14] Al - Khwarizmial (oko 780. - oko 840), islamski matematičar.

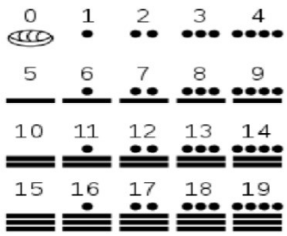
koje formiraju njihovi zapisi. Tako na primer cifra 1 u svom zapisu ima samo jedan ugao i predstavlja broj jedan, dok cifra 0 ima nula uglova u svom zapisu i predstavlja broj nula. [5]



Slika 3. Hinduističko označavanje brojeva
Izvor: https://www.picuki.com/media/2189431581150765133

Civilizacije Maja

U pitanju je civilizacija sa dugom istorijom, koja je svoj procvat zabeležila između 250. i 900. godine. Razvili su izvanrednu kulturu, konstruisali velike hramove i gradove, kao i svoje najznačajnije spomenike – piramide. Koristili su jedinstveni sistema brojeva u kojem su jedinice označavali tačkama, a crte su se koristile za pet jedinica, prikazano na slici 4. Trudili su se da svoj brojevni sistem prilagode merenju vremena i datuma. Prednost ovakvih zapisa brojeva ogleda se u tome što su ljudi i bez posebnog obrazovanja mogli da ga koriste kako u trgovini i razmeni dobara i usluga, tako i za sopstevene zapise. Do 665. godine koristili su brojevni sistema sa osnovom 20.



Slika 4. zapis brojeva civilizacije Maja

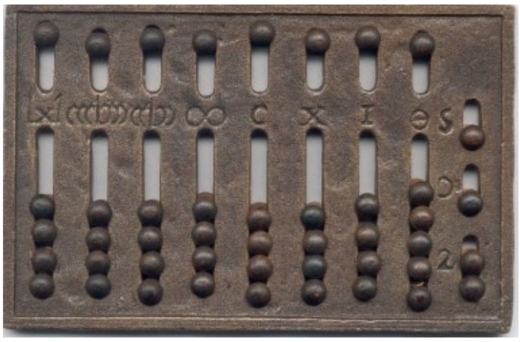
Izvor: https://www.matematika.edu.rs/matematicke-zanimljivosti-kako-je-civilizacija-maja-racunala-pomocu-crte-tacke-puza/

Evropa

Italijanski matematičar iz Pize Leonardo Pisano – Fibonacci[15] koji se obrazovao u Severnoj Africi, često je kao trgovac putovao u Egipat, Siriju, Grčku, Siciliju, gde je mnogo toga video, proučavao i doneo sa sobom. 1202. godine objavio je knjigu „Knjiga o Abakusu" („Liber Abaci"), u kojoj se nije radilo o abakusu, nego o arapskim brojevima i kako je verovao sa najboljim računskom sistemu s kojim se upoznao. Abakus (prikazana je na slici 5.) je sprava za računanje koju su koristili Rimljani, Kinezi, Egipćani i Grci. Značajno je da Fibonači nije

[15] Leonardo Fibonacci (rođen oko 1170, a umro oko 1250) Italijanski matematičar.

pisao o nuli na isti način kao i o ostalim brojevima, naime o nuli je pisao kao o „znaku“, dok druge simbole naziva brojevima.



Slika 5. Rimski abakus

Izvor : https://atorwithme.blogspot.com/2019/04/ta-cudnovata-nula.html

Arapski sistem brojeva, uključujući i nulu, zaživeo je najpre u Italiji, a zatim se do 16. veka raširio po celoj Evropi. Evropljani su od 12. veka proučavali arapske tekstove, prevodili ih i preuzimali arapski (tj. indijski) brojevni sistem koji je bio mnogo praktičniji za zapisivanje i računanje od tadašnjih rimskih brojeva koji su se koristili u Evropi. Osim toga, arapske brojke imale su nulu, koja je bila potrebna u matematici, pa su u Evropi arapske brojke istisnule rimske. [6] U 17. veku Rene Dekart[16] ostvario je značajni doprinos, osmislivši koordinatni sistem koji se i danas koristi, nije uzeo u obzir negativne brojeve, ali je uveo nulu. Uvođenjem koordinatnog sistema zasnovao je analitičku geometriju. Isak Njutn[17] se bavio problemom deljenja nulom, kome je u najvećoj meri posvećen ovaj rad. Problem deljenja nulom Njutn je rešio pomoću diferencijalnog računa. Osnovno svojstvo diferencijlanog računa je primena graničnih vrednosti za količnik dve veličine koje teže nuli odnosno $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Diferencijalni račun je počeo više da se koristi tek krajem 18. veka, dok su matematičari sve više istraživali nulu uz pomoć redova, konvergentnih funkcija, da bi uz pomoć graničnih vrednosti prišli najbliže.

Četiri prikaza razvoja koncepta nule

Proces razvoja koncepta nule prolazi kroz četiri faze: prva faza, čulna „ništa“, druga faza kategorična „nešto“, zatim kvantitativno „prazni skupovi“ i na kraju broj „nula“. Koncept nule pokazuje i kako se mozak, prvobitno razvijao, distinkcija od empirijskih svojstava da bi se postigla krajnja apstraktnost razmišljanja. Za mozak koji se razvio da obrađuje senzorne signale (nešto), zamišljanje praznih skupova (ništa) kao smislena kategorija zahteva apstrakciju visokog nivoa. Iako su apstraktni i zahtevni, prirodni brojevi odgovaraju stvarnim „stvarima“ koje se mogu nabrojati. Stoga prvo učimo da računamo mali broj predmeta i kasnije koristimo ovaj postupak brojanja kako bi shvatili beskonačne prirodne brojeve. Nula se, međutim, ne uklapa u ovu rutinu. Dok se postupak brojanja zasniva na pretpostavkama da postoji nešto što

[16] Rene Dekart (1596 – 1650) francuski matematičar, fizičar i filozof .
[17] Isak Njutn (1643. – 1727) engleski matematičar, fizičar i astronom.

se može prebrojati, skup bez elemenata ne može se proceniti preko brojanja. Razumevanje da je nula skup (čak i ako je prazan) i numerički koncept zahteva apstraktno razmišljanje odvojeno od empirijskog iskustva. Kamen spoticanja je u tome što „ništa“ ne mora postati „nešto“. Odsustvo elemenata mora postati mentalna kategorija odnosno matematički predmet. [7]

Nula u matematici

Nula je pristuna u algebri, teoriji skupova, analizi kao i u mnogim drugim granama matematike. U algebri nula predstavlja neutralni element pri računskim operacijama sabiranja i oduzimanja. U teoriji skupova nula predstavlja kardinalnost praznog skupa.

Broj nula je povezan sa „beskonačno malim” veličinama kao i sa veličinom beskonačnosti (∞). Neodređeni oblici su algebarski izrazi koji se vezuju uz kontekst granične vrednosti, tj. limesa. Razlikujemo sedam neodređenih oblika: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Eulerova formula (relacija) povezuje 5 važnih matematičkih konstanti: 0, 1, e, π i i, gde e predstavlja Eulerov broj ili neperovu konstantu, koja približno iznosi $e \approx 2{,}713$, π je poznato kao Arhimedova konstanta i približno iznosi π ≈ 3,14159, dok konstanta i priprada skupu kompleksnih brojeva i predstavlja imaginarnu jedinicu. Mnogi matematičari ovu relaciju smatraju jednom od najlepših matematičkih formula, a ona glasi:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Naime, Euler[19] je u trigonometriju uveo savremeno označavanje sinusa i kosinusa kao sin i cos, te je trigonometrijske funkcije prvi u istoriji posmatrao kao funkcije, a ne kao geometrijske veličine. Otkrio je vezu između eksponencijalne i trigonometrijskih funkcija. Upravo je to Eulerova formula:

$$e^{\theta i} = cos\,(\theta) + i \cdot sin\,(\theta)$$

pri čemu je sinus ravnog ugla jednak 0, a kosinus ravnog ugla jednak -1, za $\theta = 180^o = \pi$, pa formula nakon zamene $\theta = \pi$ dobija oblik $e^{i\pi} + 1 = 0$.

[19] Leonhard Euler (1707 - 1783) švajcarski matematičar i fizičar

II ANALIZA NASTAVNIH SADRŽAJA

Razumevanje koncepta nule u najranijim uzrastima

Deca vrlo rano imaju sposobnost da prebroje više predmeta na jednom skupu. Naime, deca se često animiraju prikazivanjem ili nestankom predmeta, gde deca u ranom uzrastu izvršavaju osnovne operacije sabiranja i oduzimanja. Iako nisu u mogućnosti da zamisle nulu kao količinu nečega, vrlo dobro barataju sa malim brojevima. Predškolci od 3,5 do 6,5 godina su u stanju da savladaju numerička svojstva malog prirodnog broja pre nego što se uvrsti nula, koju različita deca mogu savladati u različitom uzrastu. Kod dece u ovom periodu nula postaje oznaka za odsustvo. Nula još uvek nije integrisana u njihovo kvantitativno znanje o drugim malim prirodnim brojevima. Razumevanje nule kao količine kasnije u životu deluje kao most do istinskog koncepta nule kao broja i rano algebarsko razumevanje. Do 7. godine života, deca obično razumeju tri opšta pravila: $0 < n, n + 0 = n$ i $n - 0 = n$.

Nula ostaje jedinstven broj čak i kod odraslih. Psihofizički eksperimenti ukazuju na to da se predstavljanje nule zasniva na principima koji se razlikuju od onih koji se koriste za ceo broj. Na primer, vreme očitavanja brojeva od 1 do 99 kod odraslih ljudi raste logaritamski u odnosu na veličinu broja, dok čitanje nule zahteva više vremena nego što se očekuje na osnovu logaritamske funkcije, po kojoj bi za očitavanje broja nule bilo potrebno najmanje vremena jer je nula broj koji označava najmanju vrednost u odnosu na brojeve od 1 do 99. [7]

Koncept nule u nastavi matematike

Za nulu većina učenika zna i pre osnovne škole. Nula je pristuna od samog početka osnovnog obrazovanja odnosno, već u prvom razredu uvodi se pojam nule. Zatim je konstantno primenjujemo prilikom zapisa višecifrenih brojeva. Sadržaji matematike u osnovnoj školi su grupisani u pet oblasti, prema obrazovnim standardima za kraj osnovnog obrazovanja. Oblasti su: brojevi i operacije sa njima, algebra i funkcije, geometrija, merenje i obrada podataka. U svakoj od ovih oblasti učenici se susreću sa konceptom nule na različite načine. U nastavku navešćemo sadržaje kroz koje se učenici susreću sa pojmom broja nule, u svakoj od navedenih oblasti, u nastavi matematike.

Brojevi i operacije sa njima

Ova oblast obuhvata znanja o različitim vrstama brojeva, njihovo zapisivanje na različite načine, upoređivanje, poznavanje osnovnih aritmetičkih operacija i izračunavanje vrednosti brojevnih izraza. Već u prvom razredu prilikom izučavanja brojeva, posebno mesto zauzima lekcija *Broj nula*. Zatim prilikom učenja višecifrenih brojeva, učenike treba navoditi da zaključe da se dodavanjem nule sa desne strane broja, broj povećava deset puta, dok dodavanjem nule ispred broja vrednost broja ostaje nepromenjena. Rezultat oduzimanja u slučaju kad su umanjenik i umanjilac isti brojevi, je upravo nula, gde vidimo upotrebu nule prilikom operacije oduzimanja. Učenici se susreću sa razlikom između „deljenja nule” i „deljenja nulom”. Ovde nastaju zabune i nerazumevanja, koja su posledica preranog uvođenja nule kao delioca, koje je programom nastave predviđeno već u drugom razredu osnovne škole. Zatim prilikom obrade razlomaka, u 4. razredu, nulu ne spominjemo , jer za imenioce i brojice koristimo isključivo prirodne brojeva. U višim razredima prilikom obrade skupa celih brojeva, broj nula je predstavljen kao granica između pozitivnih i negativnih brojeva. Nula pripada skupu celih brojeva, crtanjem brojevne prave učenici lako mogu da usvoje da nula nije ni pozitivan ni negativan broj već da upravo broj nula predstavlja jasnu i konkretnu granicu između pozitivnih i negativnih brojeva. Kada se obrađuju lekcije kvadriranje i stepenovanje brojeva, nejasnoće se mogu javiti prilikom računanja 0^2, ukoliko učenici nisu savladali množenje nulom odnosno da je $0 \cdot 0 = 0$. Što se tiče stepenovanja brojeva, na nulu treba obratiti pažnju u sledećim slučajevima. Prvi slučaj kada je stepen 0, a osnova bilo koji prirodan broj a, tada važi jednakost: $a^0=1$. Drugi slučaj je kada je baza 0, a stepen bilo koji prirodan broj a, što zapisujemo sa 0^a i ovaj izraz daje rezultat nula, jer koliko god puta množili nulu sa nulom prozivod će uvek biti nula.

Algebra i funkcije

Kod rešavanja linearnih jednačina i nejednačina, prilikom traženja vrednosti nepoznate promenljive, konkretno prilikom deljenja jednačine ili nejednačine nepoznatom promenljivom u obzir se mora uzeti slučaj kada nepoznata promenljiva ima vrednost nule, na šta se često zaboravlja. Na primer, u slučaju jednačine $3 \cdot x^2 = x$, jedno od rešenja je $x = 0$, dok je drugo rešenje $x = \frac{1}{3}$. Prisustvo nule kod jednačina vidimo i u slučaju kad je proizvod nepoznate promenljive i nekog broja jednak nuli, recimo $7 \cdot x = 0$, ovde je jedino rešenje $x = 0$. Kod nejednačina ponekad treba izostaviti nulu iz skupa rešenja. Na primer nejednačina $\frac{3}{x^2} > 0$ je zadovoljena za svaki broj različit od nule. U 8. razredu obrađujemo nastavnu jedinicu *Nula funkcije*, u kojoj zaparvo ta nula funkcije označava tačku u kojoj grafik funkcije seče y-osu.

Geometrija

Prilikom izučavanja geometrije prisustvo nule vidimo kod definisanja pojma ugla od 0°, koji je deifnisan kao ugao koji se dobija preklapanjem krakova i unutrašnja oblast ugla je prazan skup. Zatim, u formulaciji definicije konveksnog ugla koja glasi: Konveksni uglovi su uglovi od 0° do 180 °. Pojavu nule u ovoj oblasti vidmo i kod merenja površina i dužina stranica nekog geometrijskog tela, treba navesti učenike da zaključe da dužina stranice mora biti pozitivan broj, odnosno da ne može dužina neke stranice imati vrednost nula jer u tom slučaju ta stranica ne postoji, slično važi i za površinu nekog geometrijskog tela, osim kada je u pitanju površina duži koju definišemo kao $P = 0$. Zapreminu dvodimenzionalnih geometrijskih tela takođe definišemo kao $V = 0$.

Merenje

S obzirom da se u ovoj oblasti izučava merenje nekih podataka i primenjuju se različite merne jedinice kao što su tone, kilogrami, grami, zatim milimetri, centimentri, decimetri, metri, kilometri i druge merne jedinice za vreme, novac ,... Prisustvo nule vidimo kod prevođenja manje merne jednice u veću, recimo za obeležavanje odsustva celog dela kao na primer za zapis 0, 250 kg umesto zapisa 250 g. U slučaju prebrojavanja novčanica različitih apoena kao mernih jedinica novca, odsustvo neke novčanice obeležavamo sa nulom. U ovu oblast ubrajamo i zaokruglivanje brojeva na određen broj decimala, pa ovde vidimo da nule iza decimalnog zareza ne mogu izostaviti ukoliko se ne nalaze u ulozi poslednje decimale, recimo broj 1,20083 zaokrugljen na tri decimale bi bio 1,201, dok u broju 7,2000 nule iza decimale 2 možemo izostaviti. Broj 0,0001 zaokrugljen na 1, 2 ili 3 decimale bi bio broj 0. Kod merenja vremena broj nula će biti ispisano na satu kada se kazaljke spoje, odnosno predstavlja početak novog dana. Dok kod merenje temperature broj nula 0°F na Kelvinovoj skali predstavlja tačku mržnjenja i u Celzijusovoj skali iznosi -273°C. U teoriji ne postoji ništa hladnije od ove nula pa se još i naziva apsolutna nula.

Obrada podataka

U ovoj oblasti prisustvo nule vidimo u samom koordindatnom sistemu, koji se često koristi za očitavanje odgovarajućih podataka, recimo za očitavanje koordinata koje zauzimaju određene tačke. Ukoliko se neka tačka nalazi na x-osi znamo da je njena druga koordinata 0, isto tako ukoliko se neka tačka nalazi na y-osi znamo da je njena prva koordinata jednaka 0. U stubičastim grafikonima za prikaz veličina, nula zauzima mesto na samom dnu i predstavlja donju granicu za količinu nečega, jer se količina ne može izražavati negativnim brojevima.

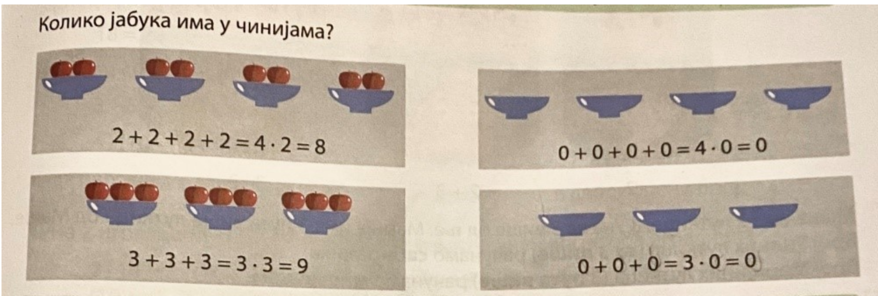
Analiza udžbenika

Udžbenici i zbirke zadataka predstavljaju osnovno nastavno sredstvo i zato je njihovo izdavanje regulisano posebnim zakonom, Zakonom o udžbenicima. Svaki udžbenik odobren za upotrebu mora da zadovolji standarde kvaliteta udžbenika. U Srbiji postoji više odobrenih udžbenika za isti predmet i isti razred. U nastavku ćemo se fokusirati na jedan mali deo sadržaja udžbenika, a koji se tiče deljenja nulom. Analizirali smo 6 različitih udžbenika, namenjenih različitim uzrastima. To su udžbenici „Maša i Raša“ koji su namenjeni uzrastu od prvog do četvrtog razreda, među kojima smo analizirali samo udžbenik za drugi razred osnovne škole, zatim udžbenici za više razrede osnovne škole, koje smo analizirali za svaki od razreda posebno. Svi udžbenici su od istog izdavača „Klett“, razlike osim u uzrastu za koji su namenjne su i u godinama izdavanja.

Udžbenici za II razred osnovne škole

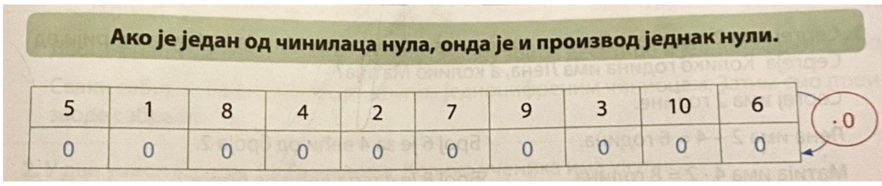
U ovom delu smo analizirali dva različita udžbenika za drugi razred osnovne škole, u pitanju su udžbenik „Maša i Raša“ [8] i „Udžbenik za drugi razred“ [9] od iste izdavačke kuće „Klett“, koji se razlikuju kako po godini izdavanja tako i po sadržajima. S obzirom da se u drugom razredu uvode operacije množenja i deljenja, ovome smo posvetili posebnu pažnju.

U drugom razredu u okviru lekcije *Jedan i nula kao činioci* iz [8] vidimo na slici 6. objašnjen proizvod brojeva slikovito preko sabiranja, koje je učenicima od ranije poznato. Vrlo je važno da učenicima u ovom periodu omogućimo ilustrativno objašnjenje kako bi oni intuitivno shvatili šta se dogodilo prilikom množenja. Primenom ovakve ilustracije ne možemo prikazati nula tanjira, dok nula jabuka na tanjiru mogu da zamisle na osnovnu slike praznog tanjira, pa ovakvim ilustrativnim primerom ne možemo objasniti komutativnost množenja sa nulom. Jer ako predstavimo samo jabuke bez tanjira, kao slikoviti prikaz nula tanjira koje množimo sa brojem jabuka, rezultat bi trebao da bude nule, što se ne poklapa sa brojem jabuka koje bi se videle na slici, iako nemamo tanjire na koje bi ih stavili.



Slika 6.Predstavljanje množenja preko sabiranja, (str. 57, [8])

Tabelarni prikaz množenja brojeva koji se nalazi na slici 7. nije najadekvatniji za zaključivanje da će proizvod bilo kog broja i nule, dati rezultat nulu. Generalno tabelarni prikaz računskih operacija, pogotovo u ovako ranom uzrastu, u drugom razredu, nije poželjan. U ovom periodu učenici zapisuju broj ispod broja prilikom sabiranja i oduzimanja, pa ih ovakav način zapisivanja može zbuniti.


Ако је један од чинилаца нула, онда је и производ једнак нули.

5	1	8	4	2	7	9	3	10	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

· 0

Slika 7. Definicija i tabelarni prikaz množenja sa nulom , (str. 57, [8])

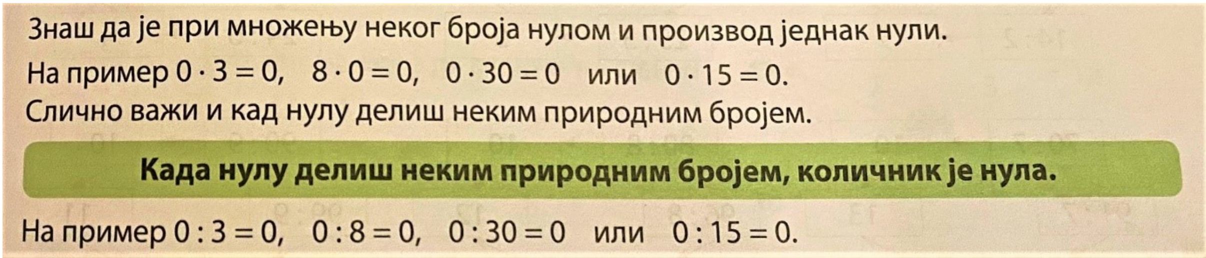
Učenici treba da nauče kako se pravilno zapisuje proizvod dva broja, stoga bi bilo pravilnije tablicu zameniti sledećim zapisom:

$$5 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$8 \cdot 0 = 0$$
$$4 \cdot 0 = 0$$
$$2 \cdot 0 = 0$$

$$7 \cdot 0 = 0$$
$$9 \cdot 0 = 0$$
$$3 \cdot 0 = 0$$
$$10 \cdot 0 = 0$$
$$6 \cdot 0 = 0$$

S tim što bi u pojedinim primerima trebalo zameniti mesta činiocima, kako bi učenici uočili komutativnost koja važi pri operaciji množenja. Jer bi sa ovakvim zapisom učenici mogli zaključiti da je proizvod dva broja jednak nuli samo ukoliko je drugi činilac jednak nuli, što nije ispravno zaključivanje.

U okviru istog udžbenika [8] na 75. strani, u okviru lekcije *Redosled obavljanja računskih operacija* na slici 8. nalaze se primeri množenja nulom i pravilo za deljenje nule.

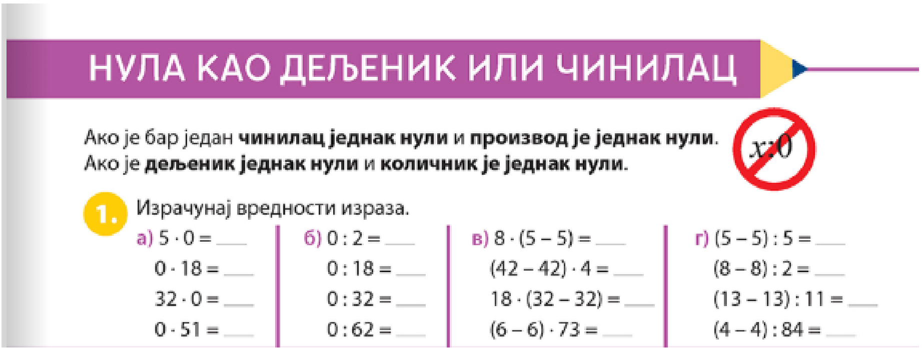

Знаш да је при множењу неког броја нулом и производ једнак нули.
На пример $0 \cdot 3 = 0$, $8 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 30 = 0$ или $0 \cdot 15 = 0$.
Слично важи и кад нулу делиш неким природним бројем.

Када нулу делиш неким природним бројем, количник је нула.

На пример $0 : 3 = 0$, $0 : 8 = 0$, $0 : 30 = 0$ или $0 : 15 = 0$.

Slika 8. Primeri proizvoda nule i broja različitog od nule i pravilo za deljenje nule, (str. 75, [8])

Takođe u udžbeniku za drugi razred [9] u okviru lekcije *Jedan i nula kao činioci* na 49. strani je dato pravilo za deljenje nulom u okviru kojeg je jasno napomenuto da se nulom ne deli (slika 9). Iako oznaka za zabranu deljenja nulom nije velika i upadljiva, stavljeno je do znanja đacima da se nula ne sme naći u ulozi delioca. U okviru zadatka koji je pred učenicima vidimo nulu kao činilac u prozivodu, pri čemu važi komutativnost množenja, i nulu isključivo kao deljenik.


НУЛА КАО ДЕЉЕНИК ИЛИ ЧИНИЛАЦ

Ако је бар један **чинилац једнак нули** и **производ је једнак нули**.
Ако је **дељеник једнак нули** и **количник је једнак нули**.

$x{:}0$

1. Израчунај вредности израза.

а)	б)	в)	г)
$5 \cdot 0 =$ ___	$0 : 2 =$ ___	$8 \cdot (5 - 5) =$ ___	$(5 - 5) : 5 =$ ___
$0 \cdot 18 =$ ___	$0 : 18 =$ ___	$(42 - 42) \cdot 4 =$ ___	$(8 - 8) : 2 =$ ___
$32 \cdot 0 =$ ___	$0 : 32 =$ ___	$18 \cdot (32 - 32) =$ ___	$(13 - 13) : 11 =$ ___
$0 \cdot 51 =$ ___	$0 : 62 =$ ___	$(6 - 6) \cdot 73 =$ ___	$(4 - 4) : 84 =$ ___

Slika 9. Pravila za nulu kao činioca proizvoda i kao deljenika, (str. 49, [9])

Udžbenik za V razred osnovne škole

U petom razredu se obrađuju nastavne teme: *skupovi*, *prirodni brojevi i deljivost brojeva*, *razlomci*, *osnovni geomterijski pojmovi*, *ugao* i *osna simetrija*. Posebnu pažnju posvećujemo deljenju nulom, pa će se analiza udžbenika za peti razred bazirati na temi *prirodni brojevi i deljivost brojeva*, sa kratkim osvrtom na *razlomke*.

U petom razredu u okviru lekcije *Prirodni brojevi i računske operacije sa njima,* na samom početku udžbenika [10] na strani 11. prikazana je slikovita napomena (slika 10).

Slika 10. Ilustrativna napomena o „zabrani“ deljenja nulom, (str.11, [10])

Na 122. strani ovog udžbenika [10] u okviru lekcije *Razlomci* data nam je definicija i objašnjenje zašto je skup prirodnih brojeva s nulom podskup skupa razlomaka (slika 11). Iako se deljenje brojeva vrlo rano uvodi po nastavnom programu, već u drugom razredu osnovne škole, razlomci kao posebna lekcija se obrađuju tek pri samom kraju trećeg razred i to se obrađuju samo razlomci $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ i $\frac{1}{9}$.

За сваки природан број n важи $\frac{n}{1} = n$ и $\frac{0}{n} = 0$. Зато је скуп N_0 подскуп скупа разломака.

Slika 11. Definisanje nula razlomaka (str. 122, [10])

Na 172. strani ovog udžbenika [10] u okviru lekcije *Osnovna svojstva množenja i deljenja* dato nam je podsećanje na pravila koja važe prilikom množenja nulom i deljenja nule (slika 12). Veoma lepo su data sva bitna svojstva koja važe prilikom množenja i deljenja. Prateći ovaj udžbenik [10] primećujem da autori insistiraju na ponavljanju i delim mišljenje sa njima, da je utvrđivanje pravilnosti važno za matematičko obrazovanje.

Бројеви 0 и 1 имају посебно место при множењу и дељењу у скупу N_0. Исто важи и за разломке.

За сваки разломак r важи:
$r \cdot 1 = 1 \cdot r = r$;
$r : 1 = r$;
$r : r = 1, r \neq 0$;
$r \cdot 0 = 0 \cdot r = 0$;
$0 : r = 0, r \neq 0$.

Број 1 је **неутрални елемент за множење**, јер као чинилац не утиче на вредност производа.

Нулом се не дели!

Slika 12. Pravila koja važe prilikom množenja i deljenja sa razlomcima (str. 172, [10])

Na strani 183. istog udžbenika [10] u Primeru 5. prikazanom na slici 13. date su 4 urađene nejednačine, u kojima je u svakoj posebno naglašeno da promenljiva x ne može biti nula jer je nepoznata promenljiva x data u deliocu.

Пример 5. Решићемо четири неједначине у којима је непознат делилац.

$1{,}7 : x < 0{,}8$
$x > 1{,}7 : 0{,}8$
$x > 17 : 8$
$x > 2{,}125$
$x \neq 0$
$x > 2{,}125$

$2\frac{1}{3} : x \leq 4$
$x \geq \frac{7}{3} : 4$
$x \geq \frac{7}{3 \cdot 4}$
$x \geq \frac{7}{12}, x \neq 0$
$x \geq \frac{7}{12}$

$0{,}93 : x > 1{,}2$
$x < 0{,}93 : 1{,}2$
$x < 9{,}3 : 12$
$x < 0{,}775$
$x \neq 0$
$0 < x < 0{,}775$

$\frac{5}{8} : x \geq 3\frac{3}{4}$
$x \leq \frac{5}{8} : \frac{15}{4}$
$x \leq \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{15}$
$x \leq \frac{1}{6}, x \neq 0$
$0 < x \leq \frac{1}{6}$

Slika 13. Primer rešavanja nejednačina, pri čemu je promenljiva data u ulozi delioca, (str. 183, [10])

Odmah na narednoj strani istog udžbenika [10] imamo jednu veoma prigodnu napomenu (slika 14.), ovako bitna pravila nije na odmet ponavljati.

Напомена. Сваки разломак, осим броја 0, јесте решење неједначина $0{,}93 : x > 0$ и $0{,}93 : x \geq 0$, као и неједначине $0 : x \geq 0$. Неједначина $0 : x > 0$ нема решење у скупу разломака.

Slika 14. Napomena za rešavanja nejednačine $0 \div x > 0$, (str. 184, [10])

Udžbenik za VI razred osnovne škole

U VI razredu osnovne škole na nastavi matematike uvodi se *skup celih brojeva*, učenici se prvi put na časovima matematike susreću sa negativnim brojevima. U okviru ove nastavne teme učenici šestog razreda susreću se i sa primenom računskih operacija nad negativnim odnosno celim brojevima. U nastavku smo iz udžbenika za šesti razred [11] izdvojili dve definicije u kojima definišemo provizod celog broja i nule i deljenje celih brojeva.

Na strani 26. udžbenika [11] u okviru lekcije *Množenje celih brojeva* koja se obrađuje u šestom razredu na slici 15. vidimo pravilo za prozivod broja nule i proizvoljnog celog broja. Ovde vidimo cikličnost nastave matematike, ovo pravilo smo uveli u nižim razredima na skupu prirodnih brojeva i pozitivnih racionalnih brojeva, a sad proširujemo na skup celih brojeva. Ovo pravilo važi za množenje nule sa bilo kojim brojem pa tako i sa celim brojem.

Производ броја 0 и прозвољног целог броја једнак је 0. За сваки цео број a важи $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Slika 15. Definisanje proivoda nule i celih brojeva, (str. 26, [11])

Na 31. strani ovog istog udžbenika [11] u okviru lekcije *Deljenje celih brojeva* na slici 16. imamo definiciju za deljenje brojeva, pri čemu je posebno naglašeno da se nulom ne deli.

Ако за целе бројеве a, b и c, при чему је $a \neq 0$, важи $a \cdot b = c$, онда је $c : a = b$. Тада кажемо да је број c дељив бројем a или да a дели c, и пишемо $a \mid c$.
Нулом се не дели.

Slika 16. Definicija za deljenje brojeva, (str.31, [11])

Udžbenik za VII razred osnovne škole

U VII razredu na časovima matematike uvodi se *skup racionalnih*, *iracionalnih* i posebno bitan, *skup realnih brojeva*, kao najširi skup brojeva koji se obrađuje u osnovnoj školi. Pored toga obrađuju se *kvadriranje* i *korenovanje realnih brojeva*, *Pitagorina teorema* kao i *stepenovanje brojeva*, *obim i površina kruga* i druge. U nasavku je analiziran udžbenik za VII razred [12] sa akcentom na deljenje nulom.

U okviru lekcije *Osnovna svojstva operacija sabiranja i množenja realnih brojeva* koja se obrađuje na samom početku sedmog razreda, na slici 17. vidimo definisanje pojma inverznog elementa, koji se sada po prvi put uvodi. Posebno je naglašeno da nula nema inverzni element, odnosno da nema recipročnu vrednost, jer sa nulom ne možemo deliti pa iz tog razloga broju nuli ne možemo odrediti inverzni element. Iz ovoga vidimo da je nula ponovo definisana kao broj sa jedinstvenim svojstvom, jer nema inverzni element, nijedan broj pomnožen sa nula ne može kao rezultat dati broj jedan, slika 17.

Ако је производ два броја једнак броју 1, за та два броја кажемо да су један другом инверзни. За сваки реалан број различит од 0 његова реципрочна вредност (његов реципрочан број) је његов инверзан елемент за множење. Број 0 нема инверзан елемент (нема реципрочну вредност).

За сваки реалан број a, $a \neq 0$, важи $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$

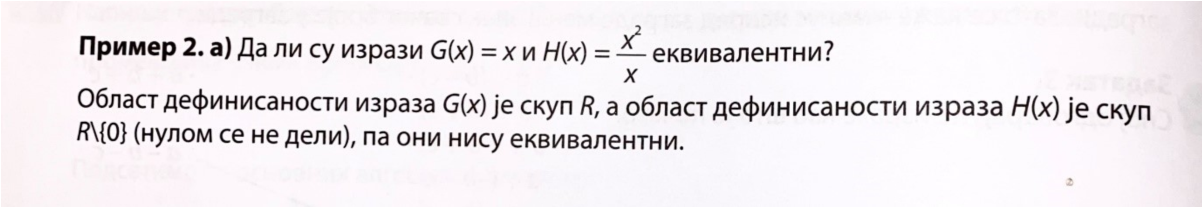
Slika 17. Definisanje pojma inverznog elementa u skupu realnih brojeva, (str.21 , [12])

Na narednoj stranici ovog udžbenika [12] u sklopu iste lekcije, na slici 18. vidimo predstavljanje razlike brojeva preko zbira kao i količnika preko proizvoda i prigodnu napomenu da se nulom ne deli, koja je napisana i matematičkim simbolim i ponovljena u poslednjoj rečenici rečima.

За свака два реална броја a и b важи $a - b = a + (-b)$.
За сваки реалан број a и сваки реалан број b, $b \neq 0$, важи $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$.
Нулом се не дели.

Slika 18. Predstavljanje razlike preko zbira umanjenika i suprotnog broja umanjenioca kao i količnika preko proizvoda deljenika i inverznog elementa delioca, (str.22 , [12]) Veći deo gradiva za osmi razred je posvećen *geometriji*, ali imamo i *obradu linearnih jednačina i nejednačina* kao i *sisteme linearnih jednačina*. U nastavku je data analiza udžbenika za osmi razred [13] .

U okviru lekcije *Ekvivalentnost izraza. Linearan izraz* na strani 62. udžbenika [13], nailazimo na zanimljiv primer, prikazan na slici 19. gde uočavamo da je oblast definisanosti jedan od ključnih stvari prilikom određivanja ekvivalentnih izraza. Iz ovog primera zaključujemo da je za određivanje oblasti definisanosti neophodno znanje o nuli kao deljeniku.

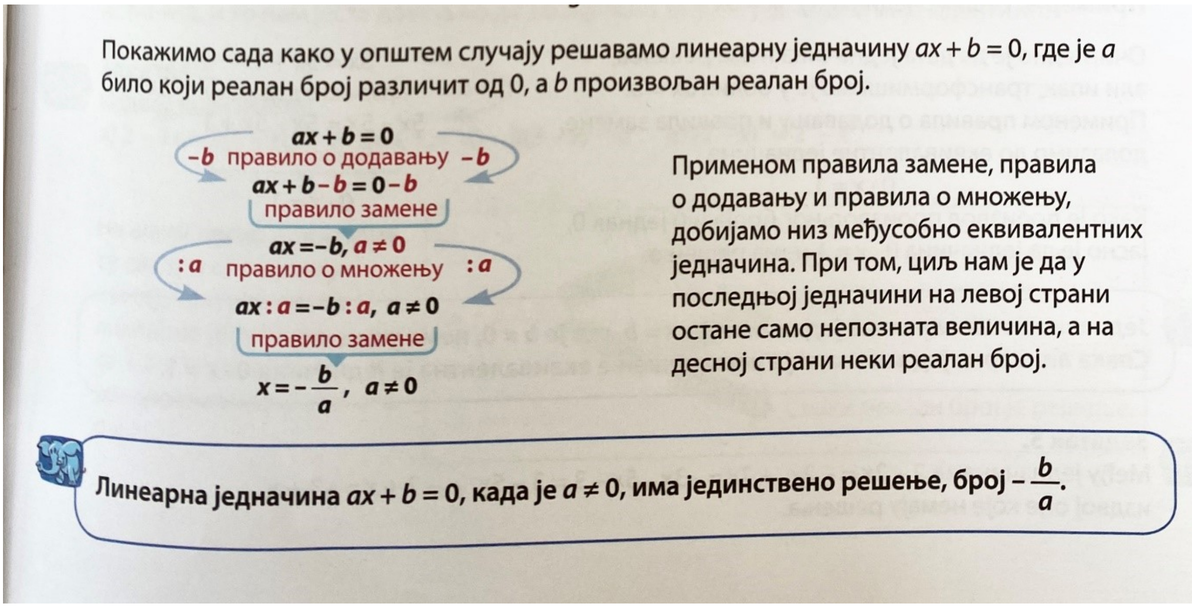


Пример 2. а) Да ли су изрази $G(x) = x$ и $H(x) = \frac{x^2}{x}$ еквивалентни?

Област дефинисаности израза $G(x)$ је скуп R, а област дефинисаности израза $H(x)$ је скуп $R\backslash\{0\}$ (нулом се не дели), па они нису еквивалентни.

Slika 19. Ekvivalentni izrazi, (str. 62, [13])

Na 67. strani ovog udžbenika [13] u lekcije *Rešavanje linearnih jednačina s jednom nepoznatom* vidimo na slici 20. opšti postupak za rešavanje linearne jednačine.



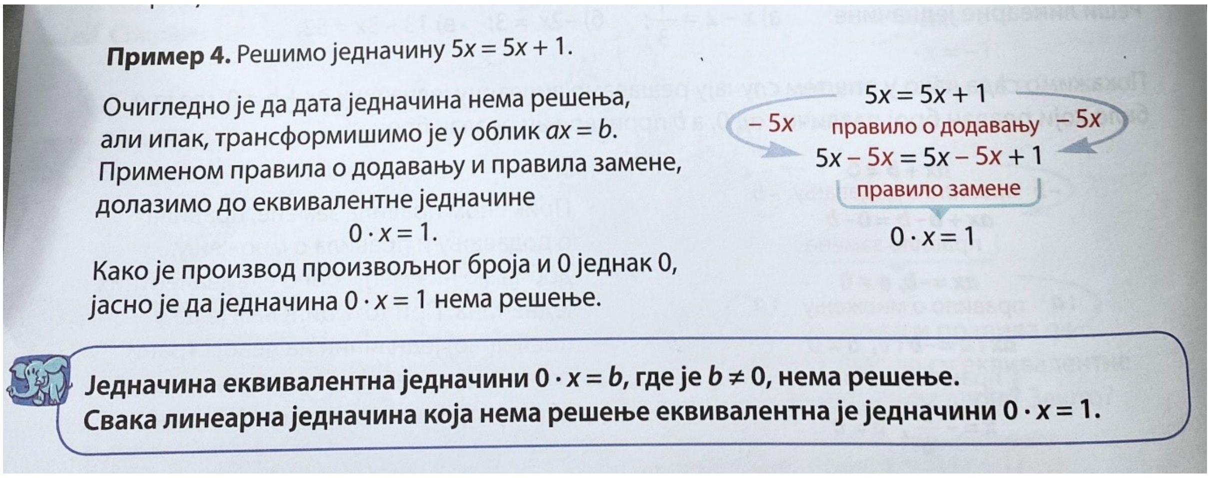
Покажимо сада како у општем случају решавамо линеарну једначину $ax + b = 0$, где је a било који реалан број различит од 0, а b произвољан реалан број.

Применом правила замене, правила о додавању и правила о множењу, добијамо низ међусобно еквивалентних једначина. При том, циљ нам је да у последњој једначини на левој страни остане само непозната величина, а на десној страни неки реалан број.

Линеарна једначина $ax + b = 0$, када је $a \neq 0$, има јединствено решење, број $-\frac{b}{a}$.

Slika 20. Postupak rešavanja linearne jednačine i definicija za jedinstveno rešenje linearne jednačine, (str.67, [13])

Već na narednoj stranici istog udžbenika [13] u okviru iste lekcije vidimo iz Primera broj 4. prikazanog na slici 21. zašto linearna jednačina $5 \cdot x = 5 \cdot x + 1$ nema rešenje.



Пример 4. Решимо једначину $5x = 5x + 1$.

Очигледно је да дата једначина нема решења, али ипак, трансформишимо је у облик $ax = b$. Применом правила о додавању и правила замене, долазимо до еквивалентне једначине

$$0 \cdot x = 1.$$

Како је производ произвољног броја и 0 једнак 0, јасно је да једначина $0 \cdot x = 1$ нема решење.

$5x = 5x + 1$

$-5x$ правило о додавању $-5x$

$5x - 5x = 5x - 5x + 1$

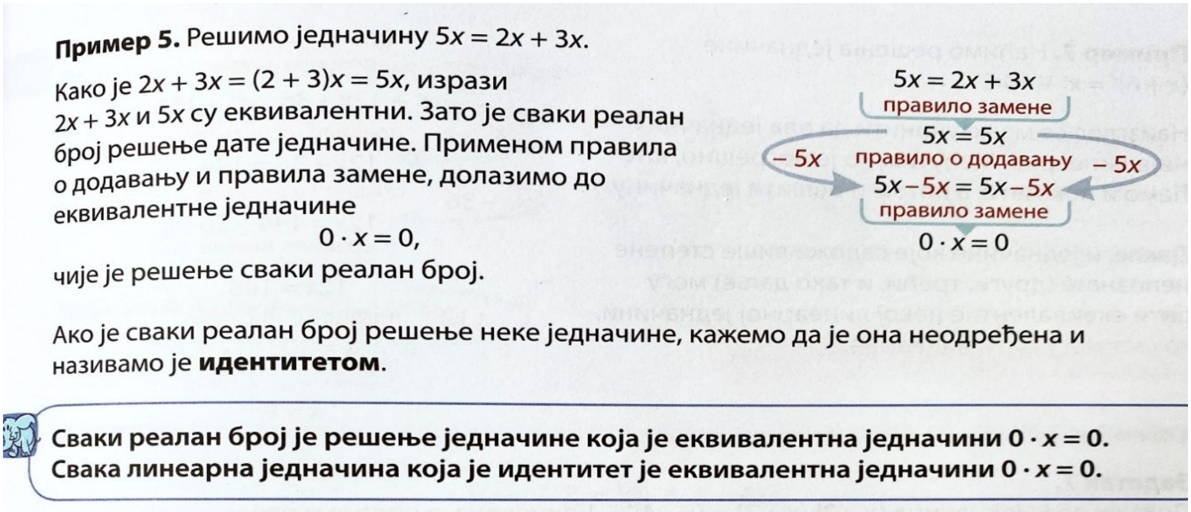
правило замене

$0 \cdot x = 1$

Једначина еквивалентна једначини $0 \cdot x = b$, где је $b \neq 0$, нема решење.
Свака линеарна једначина која нема решење еквивалентна је једначини $0 \cdot x = 1$.

Slika 21. Primer linearne jednačine koja nema rešenje, (str.68, [13])

U sklopu narednog primera u istom udžbeniku [13] dolazimo do objašnjenje linearnih jednačina čije je rešenje svaki realan broj. (slika 22.)



Пример 5. Решимо једначину $5x = 2x + 3x$.

Како је $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$, изрази $2x + 3x$ и $5x$ су еквивалентни. Зато је сваки реалан број решење дате једначине. Применом правила о додавању и правила замене, долазимо до еквивалентне једначине

$$0 \cdot x = 0,$$

чије је решење сваки реалан број.

$5x = 2x + 3x$

правило замене

$5x = 5x$

$-5x$ правило о додавању $-5x$

$5x - 5x = 5x - 5x$

правило замене

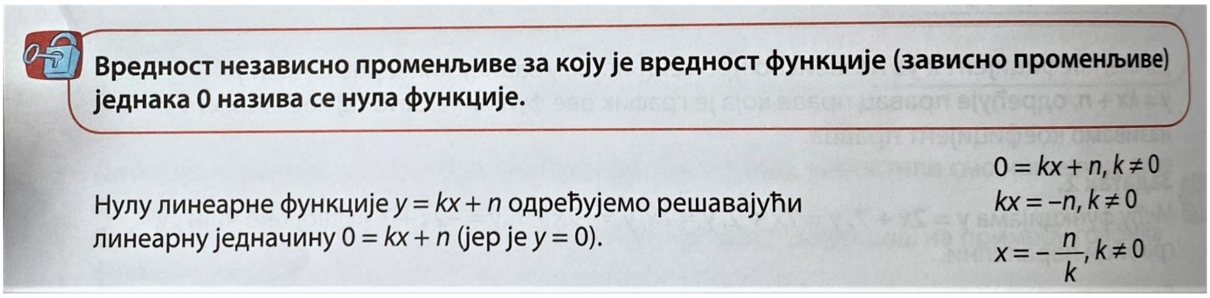
$0 \cdot x = 0$

Ако је сваки реалан број решење неке једначине, кажемо да је она неодређена и називамо је **идентитетом**.

Сваки реалан број је решење једначине која је еквивалентна једначини $0 \cdot x = 0$.
Свака линеарна једначина која је идентитет је еквивалентна једначини $0 \cdot x = 0$.

Slika 22. Primer jednačine čije je rešenje svaki realan broj i definicija identiteta, (str.69, [13])

Na strani 118. ovog udžbenika u okviru lekcije *Nula funkcije* na slici 23. vidimo definiciju pojma nula funkacije kao i pojašnjenje kako se određuje nula funkcije proizvoljne linearne jednačine $y = k \cdot x + n$. Ukoliko je koeficijent linearne funkcije k različit od nule, nula funkcije predstavlja tačku sa koordinatama $-\frac{n}{k}$ i 0.

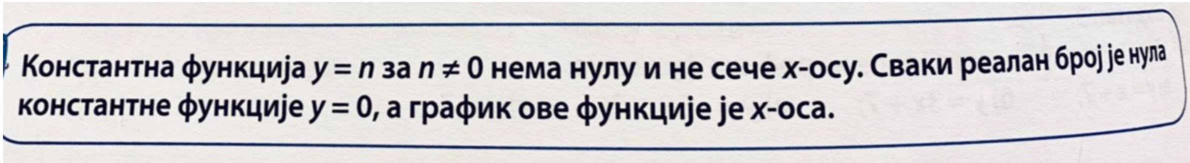


Вредност независно променљиве за коју је вредност функције (зависно променљиве) једнака 0 назива се нула функције.

Нулу линеарне функције $y = kx + n$ одређујемо решавајући линеарну једначину $0 = kx + n$ (јер је $y = 0$).

$$0 = kx + n, k \neq 0$$
$$kx = -n, k \neq 0$$
$$x = -\frac{n}{k}, k \neq 0$$

Slika 23. Definicija nula funkcije, (str.118, [13]) Na istoj strani ovog udžbenika [13] imamo i objašnjen slučaj kada je koeficijent k = 0, ta linearna funkcija nema nulu, odnosno njen grafik ne seče x-osu, već je grafik prava koje u tački n seče y-osu i koja je paralelna sa x-osom, slika 24.



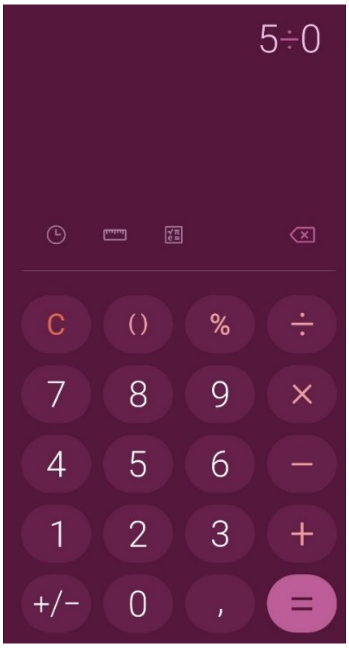
Константна функција $y = n$ за $n \neq 0$ нема нулу и не сече x-осу. Сваки реалан број је нула константне функције $y = 0$, а график ове функције је x-оса.

Slika 24. Deifinicija nule kostantne funkcije, (str.118, [13])

Primena IT uređaja

U XXI veku gotovo svi učenici svakodnevno koriste različite uređaje kao što su mobilni telefoni, tableti, računari itd. Svakako da je korišćenje ovih uređaja u nastavnom procesu veoma važno, pa bi trebalo nastavu u značajnijoj meri unaprediti. Ako je učenik zainteresovan za nastavu matematike za očekivati je da će pokušati da koristi IT tehnologiju u rešavanju zadataka, a na nastavniku je da mu pruži podršku u pravilnom korišćenju i razumevanju dobijenih rezultata. U nastavku ćemo istražiti koji rezultat pokazuju kalkulatori na različitim IT uređajima prilikom deljenja sa nulom. Budući da su učenicima danas više nego ikad dostupni IT uređaji potrebno je usmeriti učenike na korišćenje istih radi istraživanja.

Prvo ćemo razmatrati slučaj deljenja broja 5 sa 0 na Samsung A40 mobilnom telefonu. Na mobilnom telefonu kalkulator ne izvršava naređenu operaciju, odnosno nakon unosa izraza 5 ÷ 0 i pritiska tipke = dobija se isti zapis.



Slika 25. Pokušaj deljenja broja 5 sa 0 na Samsung A40 mobilnom telefonu

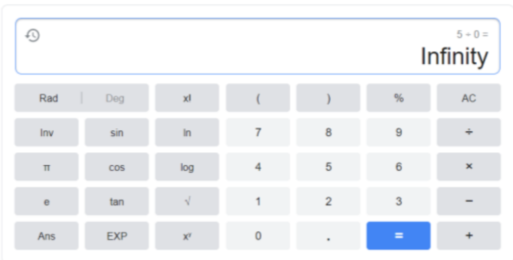
Online kalkulator ovaj postupak, kada se na mestu delioca stavi nula, prepoznaje kao grešku. Kako smo razvojem tehnologija i svih ostalih promena sve više u online prostorima, greške ovog tipa bi bilo poželjno ukloniti. Iz matematičkog ugla bi bilo poželjno da sam rezultat bude drugačiji, odnosno detaljnije definisan.

Slika 26. Pokušaj deljenja broja 5 sa nulom na online kalkulatoru,
Izvor slike: https://www.kalkulator.in.rs/

Drugi online kalkulator prikazan na slici 27. , za razliku od prethodno navedenog, kao rezultat daje vrstu greške, iako je krajnji rezultat u osnovi isti.

Slika 27. Pokušaj deljenja broja 5 sa nulom na online kalkulatoru
Izvor slike: https://www.math10.com/sr/algebra/nauchni-kalkulator.html

Još jedan od online instrumenata je google online kalkulator. Google je najpoznatiji internet pretraživač, a na osnovnu slike 28. vidimo da njegova alatka google online kalkulator kao rezultat deljenja broja 5 sa brojem 0 pokazuje beskonačno. Ovaj kalkulator tokom računanja primenjuje granične vrednosti i njegov rezultat pokazuje šta se događa u okolini nule, odnosno kada težimo nuli količnik teži beskonačnosti.



Slika 28. Deljenje broja 5 sa nulom na google online kalkulatoru

Izvor slike:
https://www.google.com/search?sxsrf=ALeKk033KL0dsCnmFMRBad1C5DWxOYnXZQ:1603038250188&q=calculator+online+google&sa=X&ved=2ahUKEwjSrtrrxr7sAhWMmIsKHUifBTkQ7xYoAHoECA0QKQ&biw=1536&bih=722

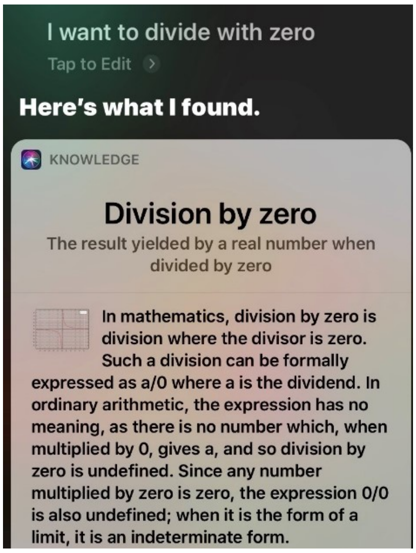
Laptop se sve češće koristi kao nastavno sredstvo. Kada pomoću njegove alatke kalkulatora pokušamo podeliti broj 5 sa 0 dobijamo zadovoljavajuće rešenje odnosno obaveštenje.

Slika 29. Pokušaj deljenja broja 5 sa nulom na kalkulatoru na ASUS laptopu

S obzirom na veoma velike promene u tehnologiji nije iznenađujuće što postoji aplikacija za android telefone Photomath koja rešava matematičke zadatke, postupke, počevši od onih najjednostavnijih pa sve do složenijih jednačina, nejednačina, integrala, limesa kao i diferencijalnih jednačina prvog reda, matrica, izuzimajući tekstualne zadatke. Ova aplikacija rešava matematičke izraze unete fotografisanjem izraza koji je potrebno izračunati. Rezultat koji nam daje ova aplikacija za deljenje broja 5 sa brojem 0 prikazan je na slici 30.

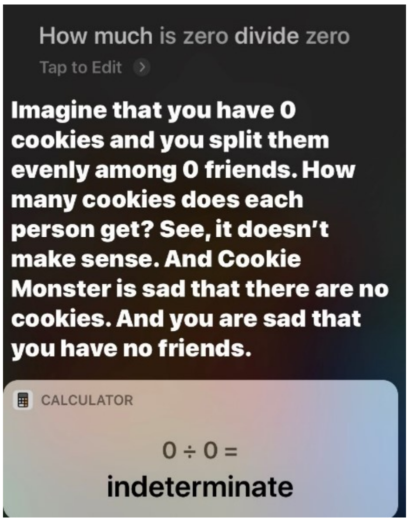
Slika 30. Rešenje koje pokazuje aplikacija photomat

Siri je deo Iphone tehnologije koja funkcioniše kao lični asistent korisnika. Funkcija koristi prirodni korisnički interfejs jezika, koji podržava dodir, pokret i glas, da odgovara na pitanja, daje preporuke i obavlja radnje delegiranja zahteva na skupu Web servisa. Za matematička pitanja, zahtevi se preusmeravaju kroz Wolfarm Alpha. Svi ostali zahtevi se preusmeravaju na Google. Na slici 31. vidimo detaljno i veoma opširno objašnjenje zašto ne možemo deliti sa nulom.



Slika 31. Deljnje nulom u okviru aplikacija na Iphone telefonima

Za razliku od prethodnog slučaja, na pitanje: „Koliko je nula podeljeno sa nula?“ Siri nam daje veoma zanimljiv i interesantan odgovor (slika 32.) : „Zamislte da imate nula kolačića, pa ih podjednako podelite između nula prijatelja. Koliko kolačića dobije svaka osoba? To nema nikakvog smisla. I Cookie Monster je tužan što nema kolačića, a vi ste tužni što nemate prijatelja.” Ovakav odgovor bi bio pogodan i adekvatan za učenike osnovne škole, interesantnim primerom je objašnjeno zašto ovakvo deljenje nema smisla i da se sa takvim deljenjem u stvarnom životu, izvan matematičkih problema, neće susretati.



Slika 32. Siri aplikacija deljnje 0 sa 0

Kao najbolji i najpribližniji odgovor bih izvdojila Siri funkciju na Iphone uređajima. Ova aplikacija na najpribližniji način daje objašnjenje rezultata izraza $5 \div 0$, đacima treba što kreativnije i primerima iz svakodnevnog života približavati matematičke probleme, kad je to moguće. Na primenu savremene tehnologije radi matematičkih istraživanja treba usmeravati učenike. Na ovaj način razvijaju kreativnost i maštu, a s druge strane dobijaju neke različite informacije u zavisnosti od izvora na koji se oslanjanju, pa dolazi do izražaja njihov način zaključivanja, koji na časovima matematike razvijamo da bude pravilan i zasnovan na istinitosnim činjenicama. Učenike trebamo usmeriti na korišćenje različitih mogućnosti koje nude IT uređaji, ali ih isto tako trebamo usmeravati tokom tumačenja rezultata, da ne bi došlo do pogrešnih zaključaka. Svaki od dobijenih odgovora u ovom kratkom istraživanju je tačan, bilo da kalkulator ne izvrši operaciju, izbaci grešku kao rezultat. Učenike ne bi trebali prepuštati da sami zaključuju i „biraju" koji je tačan odgovor već ih treba usmeriti na pravilan način razmišljanja. Na ovaj način razvijamo digitalne kompetencije učenike, koja podrazumeva sigurnu i kritičku upotrebu elektronskih uređaja. Kao i kompetencije rešavanja problema, jer upoređuju na izgled različite rezultate istog problema odnosno izraza. Ovo može biti tema na nekoj od matematičkih sekcija ili dodatnih nastava, ali svakako se može i sprovesti na nastavi matematike, budući da je korišćenje mobilnih telefona postala svakodnevnica svakog učenika.

Po završetku analize nastavnih sadržaja sa posebnim akcentom na udžbenike kao deo nastavnih sredstava i primenu savremene tehnologije u nastavi matematike, primećujemo da je broj nula opšte prisutan pojam, kako u nastavi matematike tako i u udžbenicima. Osim u oblastima geometrije, koja joj ne pridaje poseban značaj, broj nula je sastavni deo svakog računanja, pri čemu smo posebnu pažnju obratili na računsku operaciju deljenja tačnije na broj nulu u deliocu. Ovo nam je veoma važno i prilikom rešavanja jednačina i nejednačina, zato je važno napraviti dobre temelje pri samom uvođenju nule u operaciji deljenja.

III ISTRAŽIVANJA O POJMU NULE U NASTAVI MATEMATIKE

U cilju unapređenja nastavnog procesa, a kako bi se u što većoj meri razvijale matematičke kompetencije kod učenika potrebno je neprekidno pratiti stanje u učionici, odnosno meriti rezultate ostvarene od strane učenika. Jedan od načina je primena različitih istraživanja u oblasti nastave. U nastavku dajemo primer dva istraživanja koja su dala uvid u razumevanje koncepta nule od strane aktera u nastavnom procesu (učenika i nastavnika).

Pregled publikovanih istraživanja o nuli

Istraživanje o razumevanju nule kod budućih nastavnika

U ovom delu rada posebna pažnja će biti posvećena istraživanju autora Wheeler i Feghali, [14] čiji je cilj bio analiza znanja o broju nuli budućih nastavnika matematike u osnovnim školama. Naime, istraživanje je objavljeno u časopisu za istraživanje matematičkog znanja, gde su ispitanici bili upisani u jedan od tri smera kursa matematičkih metoda za osnovnu školu na državnom univerzitetu tokom leta 1981. godine. Ovo je jedan od dva jednosemestralna kursa matematike koji ispunjavaju zahteve za sticanje univerzitetskih diploma i državnih sertifikata za rad sa decom u osnovnim školama. Istraživanja koja se tiču razumevanja nule kod učenika bila su veoma česta, nasuprot tome, istraživanja o razumevanju nule kod nastavnika vrlo su se retko sprovodila. Dolazimo do pitanja kako znanje nastavnika utiče na obrazovanje. Da li su nastavnici u osnovnim školama adekvatni za prenošenje znanja o nuli? To pitanje je upravo i svrha ovog istraživanja koje je usredsređeno na razumevanje budućih nastavnika o konceptu nule.

Znanje budućih nastavnika matematike o nuli istraženo je na osnovu podataka koji su prikupljeni od 52 kandidata sa Univerziteta u Severnom Ilinoisu. Rezultati su pokazali da ovi ispitanici nemaju dovoljno znanja o nuli. Tokom istraživanja kandidati nisu uvažavali nulu kao atribut za klasifikaciju. Aritmetika odnosno računski izrazi koji uključuju nulu teški su za mnoge osnovnoškolce. Razumevanje broja nule kod dece osnovnoškloskog uzrasta često može dovesti do pogrešnih zaključaka poput „nula nije broj“ i "nula nije ništa", što može biti posledica lošeg prenošenja znanja o nuli od strane učitelja ili nastavnika. Razumevanje obuhvata aritmetičke proračune koji uključuju nulu, svest o nuli i nulti skup kako ga je konceptualizova Piaget i nominalnu upotrebu nule u društvenom kontekstu. Primenjene su dve vrste testiranja: pismeno u grupi odnosno test i individualni intervjui.

Ispitivanje na testu sastojalo se od 18 nasumično postavljenih zadataka :

- ✓ 6 zadataka sa nenula deljenikom i nenula deliocem,
- ✓ 6 zadataka sa nulom u deljeniku i nenula deliocem,
- ✓ 6 zadataka sa nenula deljenikom i nulom u deliocu.

Izrazi koji ne uključuju nulu bili su najlakši, dok su se izrazi koji uključuju nulu kao delioca pokazali kao najteži. Od 11 ispitanika koji su napravili više od 2 greške u izrazima gde je nula u funkciji deljenika, čak njih 8 napravilo je grešku na identičan način. Kada su u pitanju izrazi gde je nula u deliocu, istu greške su napravili čak 30 od 38 ispitanika sa višestrukim greškama.

Pored ovih aritmetičkih izraza, istraživanje se bavilo i otvorenim pitanjima kao što su: „Šta je nula?“, „Da li je nula broj? Zašto? Zašto ne?“ i „Šta je nula podeljeno sa nulom?“.

Svaki od 52 napisana odgovora na pitanje „Šta je nula?“ bio je kategorisano u jednu od osam kategorija:

1. broj,
2. prazan skup,
3. ništa (uključujući odsustvo stvari),
4. simbol (uključujući broj, reprezentacija i cifra),
5. rezervirano mesto,
6. identitet za dopunu,
7. ostalo i
8. ne klasifikuje se.

Odgovor je kategorisan u prvih šest kategorija ako je doslovno ili nedvosmisleno upućivao na taj termin. Da se odgovor klasifikuje kao ostalo zahtevao je nedvosmislenu identifikaciju svojstva nule različitu od prvih šest kategorija. Dvosmislen odgovor je kategoriziran u ne klasifikuje se. Svaki odgovor je svaki istraživač nezavisno kategorisao. Neki od odgovora svrstavani u ove navedene grupe su:

Broj:

- Nula je broj koji se nalazi između -1 i +1 na brojevnoj pravi.
- Nula je broj koji ništa ne znači.
- Nula je ceo broj koji se koristi da izrazi da u skupu nema elemenata.

Prazan skup:

- Nula znači prazan skup ili nulti skup.

Ništa:

- Nula nije ništa.
- Nula nema objekata.

Simbol:

- Nula je prvi simbol ili brojka u hinduističkom brojevnom sistemu.
- Nula je broj koji označava prazan skup ili ništa.
- Nula je cifra (0) koja ima nominalnu vrednost, ali nema ukupnu vrednost.

Rezervno mesta:

- U našem sistemu vrednosti mesta to je „držač mesta“.

Identitet:

- Kada se od broja doda ili oduzme broj, on ostaje isti.

Ostalo:

- ◊ Nula se koristi za pokretanje odbrojavanja brojeva.
- ◊ Nula je granična tačka između pozitivnih brojeva i negativnih brojeva.

Neklasifikovano:

- ∆ Nula se ne može prebrojati, ali može se videti.
- ∆ U množenju i deljenju, nula uzrokuje da je odgovor neosnovan.
- ∆ Nula nas sprečava da se zbunimo.

Otprilike 40% (21) ispitanika dali su odgovore koji su klasifikovani u jednoj kategoriji dok su ostali odgovori zahtevali višestruku kategorizaciju. Za ukupno 52 odgovora korišteno je 102 kategorizacije tih odgovora. Bez obzira da li je odgovor kategorisan pojedinačno ili višestruko, najčešći odgovori na pitanje „Šta je nula?“ bili su simbol i broj. Kada se razmotri ukupnost odgovora, odgovor simbol je dalo više od 20% ispitanika.

Da li je nula broj? Na pitanje "Da li je broj nula?" osam (15%) ispitanika je odgovorilo ne. Neki od odgovora ovih predstavnika su sledeći:

- → Nula nije broj jer nema vrednost, to je cifra označena sa 0.
- → Nula nije broj jer nema nominalnu vrednost, to je broj koji se koristi kao rezervirano mesto.
- → Nula nema nikakvu vrednost.
- → Ne, nula nije broj jer broj je apstraktna vrednost količine skupa.
- → Ne, nula nije broj, to je samo simbol koji se koristi da predstavi da nema ničega, brojevi predstavljeni u količini.

Šta je nula podeljeno sa nula? Svaki od 52 odgovora na pitanje „Šta je nula podeljeno sa nulom?" je kategorisan kao tačan ukoliko upada u neki od sledećih odgovora: " ne može se deliti sa nulom "," nedefinisano "," ne postoji odgovor”, u suprotnom je odgovor kategorisan kao netačan. Više je bilo netačnih (77%) nego tačnih odgovora. Najčešći odgovor je bio da je nula podijeljena sa nulom jednaka nuli (67.3%), sledeći najzastupljeniji odgovor je bio da se ne može deliti sa nulom, odnosno da ovakvo deljenje nije deifinisano (23.1%), nako toga je odgovor jedan (5.8%), dok je svega par učesnika istraživanja dalo odgovor različit od gore pomenutih odgovora (3.8%).

Cilj istraživanja bio je ispitati nekoliko komponenti razumevanje nule kod potencijalnih nastavnika. Rezultati sugerišu da ovi kandidati nisu imali adekvatno razumevanje broja nule. Kognitivno, čini se da ovi kandidati za nastavnike ne prihvataju broj nulu kao atribut za klasifikaciju. Konceptualno su izložili da nerado identifikuju nulu kao broj. Računski, zadaci sa nulom u deljeniku ili deliocu mogu biti teški, pa ih nastavnici često izbegavaju. Što se tiče kvantitavitnog izražavanja nule, ispitanici su češće koristili izraz „nula“ nego termin "nijedan". Na osnovnu rezultata ovog istraživanja vidimo da je neophodno posvetiti veću pažnju razumevanju koncepta nule kod budućih nastavnika, da bi oni to znanje mogli preneti učenicima. Samo na osnovnu računskih zadataka sa nulom, potencijalni nastavnici ne mogu u dovoljnoj meri savladati značaj i funkciju broja nule. Sadržaji na ovom matematičkom kursu bi trebali da budu bogatiji sadržajima koji se tiču samog razumevanje broja nule i načina prenošnja znjanja o nuli na učenike.

Istraživanje o razumevanju nule kod učenika u osnovnoj školi

Naredno istraživanje autora Smith, Solomon i Carey, [15], za razliku od prethodno navedenog [14], bazirano je na deci odnosno učenicima kao glavnim akterima u istraživanju. Naime, učestvovalo je 50 dece (22 učenika trećeg i četvrtog razreda i 28 učenika petog i šestog razreda) iz osnovnih škola u oblasti Bostona. Među učesnicima je bilo 24 dečaka i 26 devojčica različitog rasnog, etničkog i socijalno-ekonomskog porekla. Učenici trećeg i četvrtog razreda bili su u starosnoj dobi od 8 do 10 godina, dok su učenici petog i šestog razreda bili u razdoblju od 10 do 12 godina. Svi učenici trećeg i četvrtog razreda, kao i učenici petog i šestog razreda, intervijuisani su tokom drugog polugodišta. Autori su odabrali ovu starosnu grupu za istraživanje jer je ovo vreme kada se uči o razlomcima, decimalnim brojevima kao i o deljenju brojeva pa je ovo važan deo matematičkog obrazovanja, da bi deci pružili dobru osnovu za razumevanje racionalnog broj.

U istraživanju se ispitivalo razumevanje učenika o gustini između brojeva 0 i 1 odnosno da li postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva između bilo koja dva cela broja, konkretno bazirajući se na brojeve koji se nalaze između brojeva 0 i 1. Ako bi negirali postojanje brojeva između 0 i 1, pitani su da li je $\frac{1}{2}$ između 0 i 1. Ako su rekli da postoje brojevi između 0 i 1 od njih se tražilo da navedu neki broj koji je između 0 i 1. Zatim su pitani koliko brojeva ima između 0 i 1. U prethodnom radu [16], utvrdili su da je većina dece iz vrtića i deca drugog razreda negirala postojanje brojeva između 0 i 1, što je u skladu sa njihovim razumevanjem broja kao brojanja brojeva.

Nakon razgovora o brojevima između 0 i 1 učenicima je postavljeno pitanje šta će se dogoditi ako počnemo sa brojem 2 i podelimo ga na pola, dobili bismo broj 1, a ako bismo ga podelili ponovo na pola dobili bi broj 1/2. Zatim je usledilo pitanje da li možemo nastaviti da delimo brojeve na pola zauvek ili ćemo doći do tačke gde ne bi preostao broj za podelu. Konačno, postavnjeno je pitanje hoćemo li ikad doći do broja 0. Takođe, u skladu sa tvrdnjom da deca brkaju oduzimanje sa deljenjem, mnoga deca su verovala da će polovljenje brojeva prilično brzo dovesti do 0. Među ovom decom poslednji broj je bio onaj koji su verovali da je nula, mislili su da će se zaustaviti sa nulom, dok su oni koji su znali za druge brojeve mislili da će polovljenjem preći nulu i preći na negativne brojeve. Ovaj misaonim eksperimentom reflektuje induktivni skok koji su deca napravila sama: deca nisu direktno naučena da postoji beskonačan broj razlomaka između 0 i 1.

Tabela 1. prikazuje odnos između uzrasta učenika i njihovog razumevanja beskonačne podeljenosti broja. Samo 9% učenika trećeg i četvrtog razreda (2 od 22) smatrali su da su brojevi beskonačno deljivi, dok je kod petih i šestih razreda to uočilo čak 61% (17 od 28) učenika. Ovo je statistički značajna razlika ($p < 0.001$). Velike promene u rezonovanju broja najčešće se javlja između četvrtog i petog razreda. Naravno ne znači, da učenici petog i šestog razreda uvek dođu do ovakvih uvida, 39% učenika petog i šestog razreda su dali odgovore koji su svrstani u „stići ćemo do nule" ili „prelazni" obrasci. Samo šestoro dece imalo je obrasce za koje se činilo da odražavaju nedosledno rezonovanje, ovi problemi su različiti i ocenjeni su kao prelazni.

	„Nećemo dobiti 0“	Prelazni	„Stići ćemo do 0“	Ukupno
Učenici 3. i 4. razreda	2 (9%)	3 (14%)	17 (77%)	22
Učenici 5. i 6. razreda	17 (61%)	3 (11%)	8 (28%)	28
Ukupno	19	6	25	50

Tabela 1. Odnos između nivoa učenika i njihovog razumevanja beskonačnog polovljenja broja

Tokom istraživanja [17] Inhelder & Piaget otkrili su da deca mlađa od 10 ili 11 godina ne identifikuju prazan skup na primer skup slika bez ptica u odnosu na skup slika sa jednom pticom. Ovim istraživanjem [17] otkriveno je da učenici ne prepoznaju nulu kao broj, oni to vide samo kao deo simbola za deset. U stvari, mnogi đaci veruju da „Nula zapravo nije broj, to je samo ništa“. Neki učenici prepoznaju nulu kao broj koji se „razvija i postoji odvojeno od ostalih pravila brojeva“ [18]. Studenti su takođe pokazali da se bore sa matematičkim konceptom nule jer su nedosledne upotrebe usmenog i pismenog jezika povezanog sa nulom u društvu. Čak ni u nazivima brojeva na engleskom jeziku, nula se ne pominje u okviru naziva (na primer 203 se čita kao dvesta tri, a ne dvesta nula tri). Ova konvencija matematike može prouzrokovati da učenici pogrešno razumeju nulu. Učenici pokušavaju da „pišu“ brojeve na isti način na koji "pišu" reči, tako da se sto dvadeset često piše kao 10020 [19] . Ova konvencija o „ignorisanju nule“ u imenovanju brojeva podržava učenička uverenje da je nula „ništa“ i stoga se može zanemariti. Istraživanjem [19] utvrđeno je da učenici nailaze na poteškoće prilikom množenja dvocifrenih brojeva čija je poslednja cifra odnosno vrednost jedinica upravo broj 0, jer često zanemaruju poslednju cifru ukoliko je nula i kao rezultat dobiju broj koji ima znatnu manju vrednost od stvarne vrednosti. Na primer za prozivod brojeva 18 i 20, izostavljajući poslednju nulu prilikom množenja, kao rezultat dobiju broj 36 umesto broja 360.

Bez obzira da li se shvatanje nule razmatra iz perspektive učenika ili nastavnika, postoje jasni dokazi u istraživanjima matematičkog obrazovanja da postoji razlog za zabrinutost, ne samo u višim razredima, kada nastavnici prvi put upoznaju učenike sa složenošću deljenja sa nulom, nego čak i unutar najranijih razreda osnovne škole. Razumevanje nule osnova je za razumevanje matematike. Nula treba da postane više od „ništa“ unutar učionice i u programima obrazovanja nastavnika i učitelja.

Pilot istraživanje

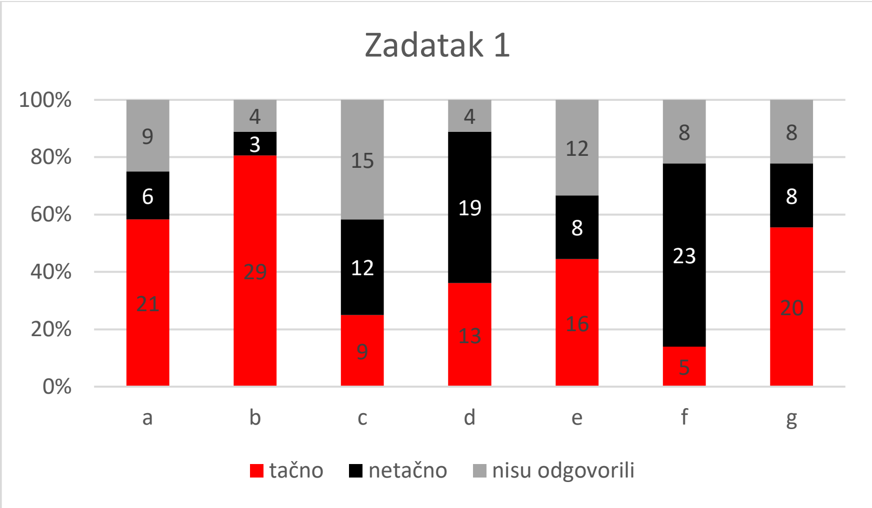
Test je popunilo ukupno 36 učenika, od kojih su 19 učenici VII, a 17 učenici VIII razreda. Učenici su test popunjavali za vreme reodovnog školskog časa, u trajanju od 12 minuta, uz prisustvo nastavnika matematike. Test su popunjavali anonimno i test nije bio za ocenu. Upitnik je sadržao 4 pitanja. Instrument istraživanja (upitnik) se nalazi u prilogu, na kraju rada. Prva tri zadatka u okviru upitnika su samostalno osmišljena dok je poslednji četvrti zadatak preuzet iz upitnika sa Pisa tesiranja i spada u nivo 5, pa se baš iz tog razloga nalazi na samom kraju upitnika. Zadaci su poređani po težini i po vrsti zadatka, i u okviru svakog zadatka nalozi su zadati od jednostavnijih ka složenijim. Cilj istraživanja je bio ispitati primenu do tada naučenog znanja o nuli kako u računskim operacijama tako i u jednačinama, kao i sa decimalnim brojevima ali i razumevanje dokaza

Prvim pitanje u okviru kojeg ima sedam naloga cilj je bio ispitati znanje o nuli u različitim računksim operacijama. Od sedam naloga u okviru prvog zadatka jedan nalog se ticao računske operacije oduzimanja i samo jedan nalog se odnosi na deljenje brojeva, dok se u tri naloga pojavljuje računska operacija množenja i čak u tri naloga se pojavljuje računska operacija sabiranja ali u dva od ta tri naloga se nalazi u kombinaciji sa stepenovanjem i kvadriranjem. Cilj ovog zadatka je bio ispitati znanje o nuli u različitim računksim operacijama. Rezultati odgovora su dati u tabli 2.

	zadatak 1						
	a	b	c	d	e	f	g
tačno	21	29	9	13	16	5	20
netačno	6	3	12	19	8	23	8
nisu odgovorili	9	4	15	4	12	8	8

Tabela broj 2. Broj učenika sa tačnim, netačnim i bez odgovora

Prvi zadatak pod a) je 6 učenika uradilo netačno, najčešća greška kod ovog zadatka je bilo rešenje 0. Jedan od razloga za ovu grešku može biti slaba primena negativnih brojeva i nedovoljno poznavanje suprotnih brojeva, da bi ovo sa sigrunošću tvrdili potrebna su još neka dodatna istraživanja. Što se tiče zadatak pod b) svega 3 učenika je pogrešno odgovorilo, ti pogrešni odgovori su bili 1,1 odnosno -1,1. Iz ovoga možemo zaključiti da su učenici dobro savladali osobinu množenja nulom. Naredni zadatak pod c) 12 učenika nije uspelo tačno da reši dok 15 učenika nije ni pokušalo da reši ovaj zadatak. Na osnovnu ovoga možemo da zaključimo da ne vladaju znanjem o inverznim elemtnima. Zadatak pod d) je za nijansu složeniji u odnosu na prethodne naloge, jer imamo kombinaciju oduzimanja i množenja, ovaj zadatak je 13 učenika uspelo tačno da reši. Najčešći pogrešan odgovor je bio 0, na osnovnu kog možemo da zaključimo da su učenici videvši operaciju množenja i broj 0 kao rešenje "jednačine" brzopleto stavili 0 kao odgovor, zanemarujući operaciju oduzimanja. Što se tiče zadatka pod f) gde se 0 pojvljuje u stepenu, ovde su greške najčešće pravili učenici sedmog razredu, jer u momentu rešavanja upitnika nisu obradili lekciju stepenovanje. Najčešći netačan odgovor je bio broj 2, na osnovu čega možemo da zaključimo da učenici ne očekuju da se stepenovanjem broj može smanjiti. Poslednji zadatak je netačno odgovorilo 8 učenika, dok 8 učenika nije ni pokušalo da reši ovaj nalog. Najčešći netačan odgovor je bio 2^2 , na osnovnu čega vidimo pogrešnu primenu osobine kvadriranja. Učenici su osobinu množenja stepena sa istim osnovama primenili na sabiranja pri čemu imamo stepene različitih osnova. Zadatak sa najviše tačnih odgovora je upravo zadatak sa množenjem koji za rezultat daje broj nula. Dok je zadatak sa najviše pogrešnih odgovora zadatak u kome se nula nalazi u stepenu broja. Iako je učenicima osmih razreda ovo gradivo poznato, nisu baš znali da ga primene. Rezultati odgovora na prvi zadatak su prikazni grafikom broj 1.



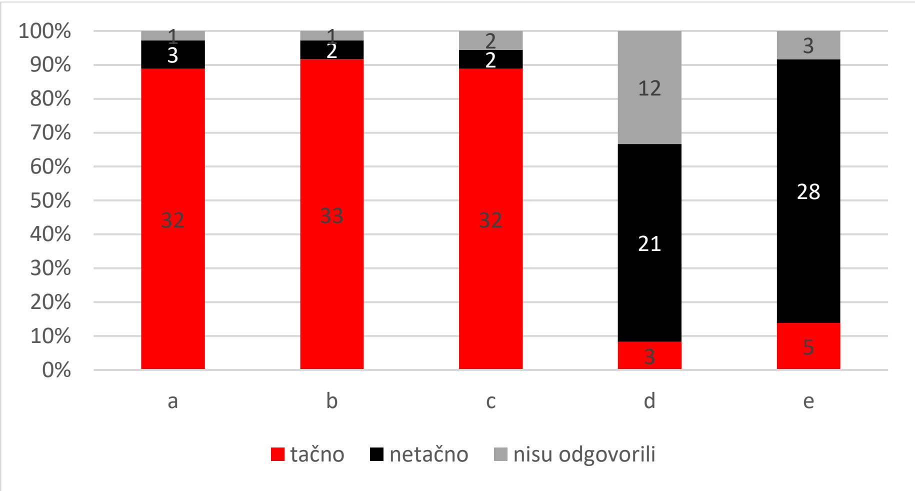
Grafik 1. Učestalost i procenti rezultata zadatak broj 1.

U okviru drugog zadatka dato je pet različitih naloga. U pitanju su jednačine u kojima se nula javlja kao rešenje jednačine ali u okviru postavke same jednačine. Ovde imamo zastupljene računske operacije sabiranja i množenja. Ovaj zadatak je vrlo sličan prethodnom, s tim što je u ovom zadatku naglašeno da je reč o jednačinama i nepoznata promenljiva x je data u okviru svakog naloga, dok smo u prethodnom zadatku imali ostavljenu praznu crtu za dopisivanje vrednosti koji nedostaje da bi izraz bio tačan. Nalozi su delimično poređani po težini, s tim što bih kao najtežu jednačinu izdvojila jednačinu koja nema rešenje $0 \cdot x = 1$, koju je svega tri učenika tačno rešilo. Cilj ovog zadatka je bio ispitati kako se učenici snalaze sa jednačinama čije je rešenje nula.

	zadatak 2				
	a	b	c	d	e
tačno	32	33	32	3	5
netačno	3	2	2	21	28
nisu odgovorili	1	1	2	12	3

Tabela broj 3. Rezultati odgovora na 2. pitanja

Drugi zadatak, u kome je trebalo rešiti zadate jednačine, odnosno izraziti vrednost nepoznate promenljive x, učenici su znatno bolje uradili u odnosu na prvi zadatak, koji se takođe može posmatrati kao neka vrsta jednačina. Prve tri jednačine je više od 88% učenika tačno rešilo, dok kod četvrte i pete jednčine dolazimo do veoma zanimljivih i različitih odgovora. Najčešći netačan odgovor kod nerešive jednačine $x \cdot 1 = 0$ je bio 1, što je napisalo 12 učenika dok je broj 0 napisalo 5 učenika. Mogući razlozi za neuspešno rešavanje ovog naloga jeste nestadnardan način postavljanja zadatka, u osnovnoj školi se vrlo retko postavlja zadatak koji nema rešenje, iako su jednačine ovakvog tipa sastavi deo gradiva za VII razred osnovne škole, i ovakvi nalozi se mogu videti i u udžbenicima. Što se tiče poslednje jednačine najčešći netačan odgovor je 0, 20 učenika je dalo taj odgovor. Broj 0 zamenjen u ovu jednačinu daje nam tačan rezultat, ali to nije jedino rešenje. Odogovri koji su bili priznavani kao tačni su „1,2,3,...“ kao i odgovori „svi pozitivni brojevi“ i „svi celi brojevi“, jer u nalogu nije naglašeno u kom skupu brojeva tražimo rešenja, a sve jednačine su date sa celobrojnim koeficijentima. Odavde možemo zaključiti da učenici ne barataju matematičkim simbolima za ispravan zapis rešenja jednačine, jer nijedno rešenje nije bilo zapisano u obliku $x \in \mathbb{N}$ ili $x \in \mathbb{Z}$. Rezultati ovog zadatka su prikazani u stubičastim grafikom broj 2.



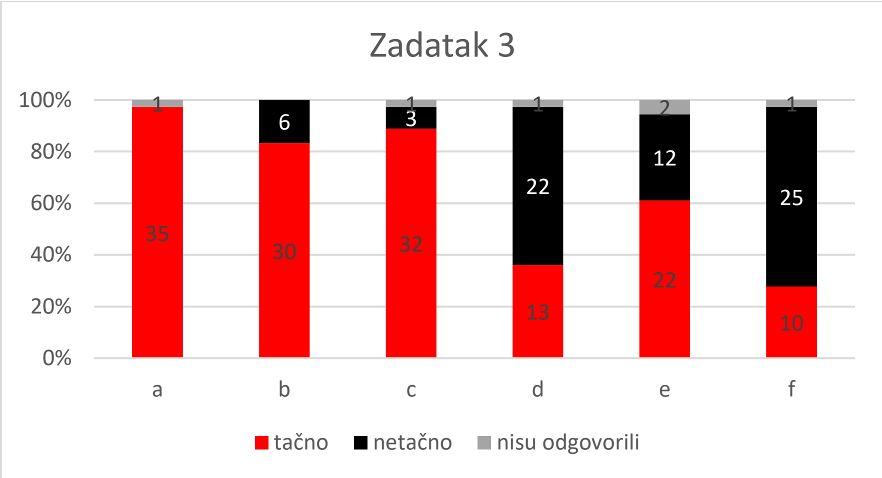
Grafik broj 2. Učestalost i procenti postignuća učenika u 2. zadatku

Treći zadatak je zatvorenog tipa, u vidu pitanja čiji su odgovori DA ili NE. Ovaj zadatak u sebi ima šest pitanja od kojih se četiri pitanja tiču upoređivanja decimalnih brojeva u kojima se kao celina ili decimlani deo pojavljuje broj nula, dok se poslednja dva pitanja tiču deljenja nule i deljenja nulom. Cilj ovog zadatka je bio ispitati znanje o veličini brojeva, tačnije o odnosima među brojevima, u kom slučaju se dopisivanjem nule smanjuje vrednost broja a u kom slučaju se povećava vrednost broja, ali i samo deljenje nule i deljenje nulom, što i jeste tema celokupnog rada.

	Zadatak 3.					
	a	b	c	d	e	f
tačno	35	30	32	13	22	10
netačno	0	6	3	22	12	25
nisu odgovorili	1	0	1	1	2	1

Tabela broj 4. Rezultati odgovora na 3. pitanje

U trećem zadatku, gde su data pitanja zatvorenog tipa, prvim pitanjem smo hteli da proverimo da li učenici razumeju značaj nule kada se nalazi ispred i iza decimalnog zapisa. Na ovo pitanje je najviše učenika tačno odgovorilo. Naredna tvrdnja se takođe tiče decimalnog zapisa broja, na ovo pitanje imamo za nijansu više pogrešaka. Treća tvrdnja nam služi da proverimo da li učenici razumeju da dodavanjem nula iza poslednje decimale u deicmalnom zapisu, broj ne menja vrednost. Četvrta tvrdnja se tiče upoređivanja negativnih brojeva, ovde je očekivani pad tačnih odgovora, jer učenici nemaju dovoljno znanja kad su u pitanju negativni brojevi. Poslednje dve tvrdnje tiču se deljenja nule i deljenja nulom. Peta tvrdnja se tiče deljenja nule, međutim tvrdnja nije dovoljno precizno definisana, jer nulu možemo podeliti sa svim brojevima ako izuzmemo nulu, deljenje nule sa nulom nije definisano. Tačan odgovor je bio ne, jer ne možemo nulu podeliti nulom. Na ovo pitanje je 22 učenika tačno odgovoilo, a 12 učenika je netačno odgovorilo dok svega 2 učenika nije dalo odgovor. Učenici su mogli zamenom manjih vrednosti brojeva da isprobaju šta će se dogotiti recimo za $0 \div 5$ ili za $0 \div 1000$ i po principu induktivnog načina zaključiva da dođu do pogrešnog zaključka. Poslednja tvrdnja je pitanje sa najvećim procentom netačnih odgovora, 25 učenika je netačno odgovorilo, u okviru ovog zadatka. To je upravo ono čemu je posvećen najveći deo ovog rada. Nijedan broj ne možemo podeliti nulom, nula se ne sme naći u ulozi delioca. Na osnovnu analize odgovora na poslednju tvdnju dolazimo do zaključka da se u osnovnoj školi ne pridaje dovoljno pažnje nuli u ulozi delioca.



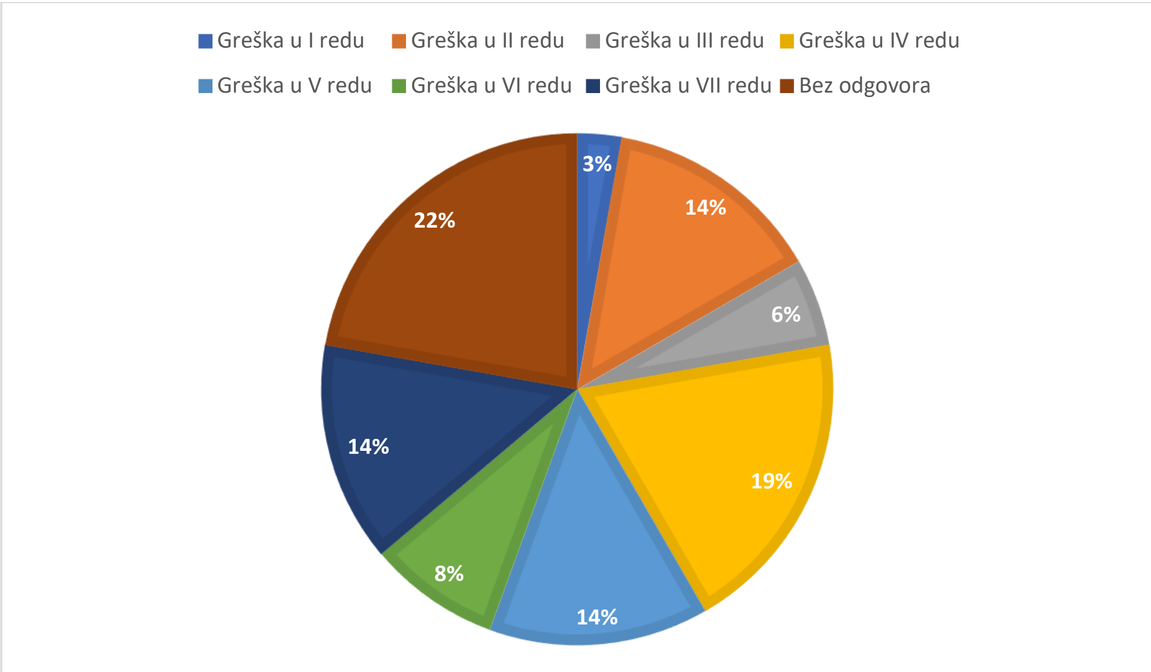
Grafik broj 3. Učestalost i procenti postignuća učenika u 3. zadatku

Četvrti zadatak spada u nivo 5 na osnovu PISA testiranja (međunarodni program učeničkih postignuća). U okviru ovog zadatka dat je jedan matematički postupak u kojem je napravljena jedna greška prilikom rešavanja, jer se od izraza $a = b$ dobija izraz $2 = 1$. Zadatak ispitanika je bio da uoče u kom koraku se nalazi greška i da napišu zašto je to greška. Cilj ovog zadatak bio je ispitati učeničku sposobnost baratanja sa dokazima, iako ovo nije pravi matematički dokaz, samo jedan matematički postupak.

Zadatak 4.	
red	broj učenika
1	1
2	5
3	2
4	7
5	**5**
6	3
7	5
bez odgovora	8

Tabela broj 5. Rezultati odgovora na 4. pitanje

Više od 20% učenika nije ni pokušalo da reši ovaj zadatak, dok su greške, onih koji su pokušali da ga reše, bile veoma raznovrsne. Ovako raznolike odgovore možemo pripisati rešavanju ovog naloga metodom slučajnog odabira, budući da obrazloženja zbog čega je taj korak pogrešan nisu bila navedena ili su navedna kao prepisan sam korak u kom se smatra da je greška. Sedam učenika je odgovorilo da je greška u 4. redu, gde imamo rastavljanje razlike kvadrata. Učenicima sedmog razreda u momentu popunjavanja testa nije poznata razlika kvadrata. Od pet učenika koji su tačno odgovorili na ovo poslednje pitanje, nijedno obrazloženje nije korektno. Ovaj tip zadatka je pretežak za učenike osnovne škole, učenici osnovnoškolskog uzrasta umeju da koriste konkretizaciju, zamenom određenih vrednosti u matematičke formule, međutim kada je u pitanju korišćenje apstrakcije, koja predstavlja značajno složeniji postupak, učenici ne umeju da je primenjuju. Rezultati ovog zadatka suu prikazani grafikonom broj 4.



Grafik broj 4. Procentualni prikaz odgovora na 4. zadatak

Rezultati ovog pilot istraživanja ukazuju da učenici jako retko primenjuju matematičke termine i izraze, već sve prevode u brojevne zapise i šablonski računaju. Na nastavnicima matematike je veoma težak i zahtevan zadatak da tokom nastave matematike nauče učenika da razmišljaju i donose ispravne zaključke kao i da razvijaju kritičkog mišljenje. To je moguće diskutovanjem o njihovim predlozima za rešavanje matematičkih zadataka, kao i izbegavati primenu šablonskih zadataka.

IV PREDLOG NASTAVIH AKTIVNOSTI

Mnogim učenicima osnovnih škola nula stvara probleme. Samim time javlja se sve veća potreba za boljom metodičkom pripremom nastavnika od kojih se očekuju nove ideje i metode kojima će pristupiti ovom problemu.

Iako se deljenje kao računska operacija uvodi već u drugom razredu osnovne škole, mnogi učenici u višim razredima nailaze na poteškoće prilikom računanja sa nulom, posebno kad se nula nađe u ulozi delioca, jer im je teško da zapamte i primenjuju pravila koja ne razumeju, jedan od razloga za to je prerano uvođenje deljenja nulom u osnovne škole.

U radu je razmatrana primena nule u računskim operacijama sa posebnim akcenotm na deljenje nulom. Kao posebno bitno i značajno u savladavanju koncepta nule u osnovnoj školi je savladavanje množenja i deljenja nule odnosno deljenje nulom, gde nula ima veoma značajnu i poprilično drugačiju ulogu u odnosu na sve ostale brojeve.

Pogodan trenutak za uvođenje konkretnih primera za deljenje nule i deljenje nulom je nakon obrade operacija množenja i deljenja, odnosno objašnjenja njihove povezanosti. Moguće je da učenici postave pitanje je li $0 \div 0 = 0$, jer mogu zaključiti da je $0 \cdot 0 = 0$. Kada bi ta tvrdnja bila tačna, važilo bi da je $0 \div 0 = 2$, jer je $2 \cdot 0 = 0$, takođe bi važilo da je $0 \div 0 = 253$ jer je $253 \cdot 0 = 0$. Učenicima objašnjavamo da deljenje nule nulom, kao i deljenje ostalih brojeva sa nulom nije definisano. Napominjemo im da je deljenje $0 \div 0$ neodređeno, a deljenje $2 \div 0$ nemoguće.

PRIMER 1.

Osim korisnih dokaza i zadataka, poželjno je već u osnovnoj školi koristiti kreativne načine učenja. Sledeća pesmica je veoma pogodna i za starije uzraste i više razrede. Iako bi pravila računanja trebalo da znaju, često su učenici veoma nesigurni kad je u pitanju broj nula, bilo da se radi o množenju ili deljenju, pa čak i o oduzimanju. S obzirom da planom i programom za osnovnu školu nisu predviđeni limesi odnosno granične vrednosti, kojima bi se moglo pojasniti i približiti šta se bi se dogodilo kad bi pokušali deliti sa brojem koji je veoma blizu broja nule, u ovom periodu im je dovoljno da znaju, razumeju i primenjuju pravila koja važe za računske operacije sa nulom, pa će kasnije u srednjoj školi, prilikom uvođenja graničnih vrednosti i razumeti u potpunosti zašto se ne može deliti nulom.

Ja sam jedna mala Nula
svake laži ja sam čula:
Da ja ništa baš ne vredim,
samo da na pravoj sedim.

Zato slušaj šta ću reći:
Moj je značaj puno veći!

Iako baš nisam snažna,
u računu ja sam važna!

Jedinica ima jedna,
misli da je jako vredna.
Ako njoj me sleva staviš,
veliku mudrost ne napraviš.

Ali kad joj zdesna stanem,
veliku snagu ja joj dajem:
Zajedno nam vrednost znači
– deset puta sad smo jači!

Sabereš li me s brojem jedan,
ja se vrlo lako predam.
U toj igri bez pardona
pobednik je uvek ona.

Oduzimanje – to je isto
glupa igra skroz na čisto.
Oduzmeš li me od jedan,
rezultat je isto vredan.

Množenjem se, blago meni,
celi rezultat promeni.
Jedinica sada gubi,
pa da varam, svima trubi.

Probale su Dvica, Trica,
al' su prošle tužna lica.
Jer kad množiš brojem Nula,
rezultat je opet: NULA!

Kad sa jedan deliš mene,
rezultat se ne okrene.
Nula podeljeno s osam
Nulu daje, a ja to sam!

Ali sada savet slušaj:

NIKADA ni ne pokušaj
s Nulom neki broj podelit'
jer se nećeš baš veselit.

Evo, to je sa mnom tako,
vidiš da je sve to lako.
Ako imaš to u glavi,
matematičar ti si pravi!

Nula Tekst : Dubravka Glasnović, Samobor

Ovu pesmicu sa prigodnom rimom, možemo iskoristi za matematičku sekciju, na kojoj možemo analizirati pesmicu. Zajedno sa učenicima ćemo analizirati pesmicu, pitanjima ih treba usmeravati na suštinu svake strofe. U prvoj strofi bismo diskutovali o značaju prideva mala, koji stoji ispred broja nule i zašto u strofi piše da nula ništa ne vredi. Poželjan odgovor bi bio da nula nema vredenost jer označava odsustvo nečega pa je iz tog razloga njena vrednost mala. Pitanja za razmišljanje koja se postavljaju na osnovu druge strofe bi bila: U čemu je značaj nula i gde nam je ona tako važna? Čiji nam se odgovor nalazi već u sledećoj strofi, da broj nula ima značajnu ulogu u zapisu višecifrenih brojeva. Što nam upravo i govore naredne dve strofe. Dodavanjem nule ispred nekog broja vrednost broja se ne promeni dok dodavanjem broja nule iza nekog broja, broj se uveća deset puta. Peta strofa nam govori o značaju nule prilikom računske operacije sabiranja, da sabiranjem nule sa bilo kojim drugim brojem rezultat uvek bude drugi sabirak. U šestoj strofi pesmica govori o računskoj operaciji oduzimanja u kojoj nula „gubi igru“ jer se umanjivanjem broja brojem nula broj ne promeni. Nakon toga na red dolazi računska operacija množenja, koja je broju nuli u ovoj pesmici veoma draga, jer u svakom proizvodu gde je jedan od činilaca nula rezultat je nula. Nakon toga su dve strofe posvećene računskoj operaciji deljenja, i to prvo je obrađen slučaj deljenja nule bilo kojim drugim brojem, gde se rezultata ne promeni odnosno ostaje nula. Dok u pretposlednjoj strofi imamo savet da sa nulom ne delimo, na ovom mestu treba pojasniti učenicima zašto nam autor pesmice daje ovakav savet. Za pojašnjenje ovog saveta potrebno učenicima na primerima iz svakodnevnog života objasniti da to nije definisano. Ne možemo tortu podeliti na nula delova, niti možemo deset bombona ravnomerno podeliti među nula devojčica. Ovom obradom pesmice smo ponovili sva važna pravila vezana za broj nula koja smo naučili do šestog razreda, stoga je obrada ove pesmice adekvatna u šestom razredu pred uvođenja celih brojeva, budući da se u pesmici spomionju samo pozitivni celi brojevi. Nakon obrade pesmice pozivamo učenike da osmisle po jednu strofu za neke druge značajne matematičke pojmove koje smo obrađivali kao što su duž, tačka, trougao, brojevi i slično.

Ovom pesmicom učenicima pokazujemo da matematika nije uvek dosadna i data samo kroz definicije, formule i teoreme čije značenje učenici u potpunosti ne shvataju.

PRIMER 2.

U sedmom razredu se uvodi pojam funkcije i crtanja grafika, ovu lekciju možemo iskoristiti za podsećanje i ponavljanje pravila o deljenju sa nulom. Crtanjem grafika n/x, pri čemu za n možemo uzeti bilo koji prirodan broj, a za promenljivu x uzimamo brojeve koji se smanjuju od nekog pozitivnog broja do broja veoma blizu nuli (npr. do broja 0.00001, kao što vidimo na slici broj 32.).

Pogledajmo ovaj niz u kojem delimo broj 12 raznim deliteljima koji se u svakom koraku smanjuju i sve više približavaju nuli:

12 : 12 = 1,

12 : 6 = 2,

12 : 4 = 3,

12 : 3 = 4,

12 : 2 = 6,

12 : 1 = 12,

12 : 0.5 = 24,

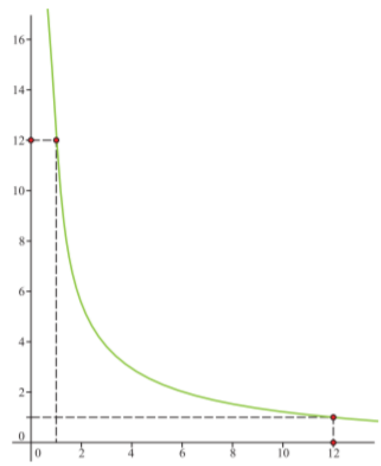
12 : 0.1 = 120,

12 : 0.01 = 1200,

12 : 0.001 = 12 000,

12 : 0.0001 = 120 000,

12 : 0.00001 = 1 200 000



Slika 33. Grafik funkcije 12/x, pri čemu se x u svakom koraku smanjuje

U ovom slučaju učenicima treba naglasiti da se niz delitelja može nastaviti u beskonačno, jer od svakog broja, dodavanjem nule ispred poslednje decimale dobijamo manji broj (na primer 0.001 > 0.0001), a niz količnika se takođe nastavlja, dobijamo sve veće brojeve. Treba navesti učenike da sami zaključe što je delilac bliže nuli količnik je bliži beskonačnosti. Ali prilikom zapisivanja moramo biti pažljivi, jer nas može dovesti do raznih paradoksa. Zapis 12 : 0 = ∞ nije ispravan, jer bi primenom operacije množenja dobili ∞ · 0 = 12, odnosno da će proizvod beskonačnosti i nule kao rezultati dati bilo koji broj. Treba napomenuti da ∞ nije broj, već fiktivni element.

Jedan primer šta bi se dogodilo ako bi zanemarili pravilo o deljenju sa nulom:

Neka je $x = 0$.

Kada broj nula pomnožimo bilo kojim brojem rezultat ostaje nula. Pa tako u narednom koraku množimo x sa bionomom $x - 1$ i dobijamo :

1. korak $\qquad x \cdot (x - 1) = 0$

U sledećem koraku ovu jednačinu, i levu i desnu stranu jednakosti, delimo sa brojem x, nakon čega dobijamo:

2. korak $\quad x - 1 = 0$

Ovu jednačinu rešavamo na standradni način, dodavanjem broja suprotnog broju -1, odnosno dodajemo broj 1 i na levu i na desnu stranu jednakosti i dobijamo:

3. korak $\quad x - 1 + 1 = 0 + 1$

Nakon što izračunamo vrednosti leve i desne strane jednakosti dobijamo:

4. korak $\quad x = 1$

Onda iz pretpostavke da je $x = 0$ sledi da je $0 = 1$.

Greška je učinjena odmah u prvom koraku, prilikom dijeljenja $x \cdot (x - 1) = 0$ sa x, jer smo pretpostavili da je x = 0, a deljenje nulom nije definisano.

Ovo su samo neki primeri za unapređenje nastavnih aktivnosti, na svakom nastavniku matematike da zadatak da na što kreativniji način đacima predstavi deljenje nule u okviru svake oblasti u kojima se primenjuje računska operacija deljenja.

Zaključak

Nula je sveprisutan pojam, ne samo u nastavi matematike, već i u svakodnevnom životu koristimo ovaj pojam u različitim metaforama, kao na primer kada želimo da kažemo da smo daleko od nekog željenog cilja koristimo izreku „Počinjem od nule“ što označava da počinjemo ni od čega. Kad potrošimo sav novac koji smo imali često koristimo izraz „Na nuli sam“. Što se tiče nule kao matematičkog pojma, ona ima dvojaku ulogu: kao rezervno mesto odnosno kao cifra i kao sam broj koji označava meru i količinu.

U nastavu matematike nula se uvodi već u prvom razredu prilikom obrade prirodnih brojeva do 10, ali kroz celokupno obrazovanje nadograđujemo matematička znanja pa samim tim i znanja o nuli. Nula je prisutna u nastavi tokom svih osam razreda osnovne škole. Analizom udžbenika kao jednog od glavnih nastavnih sredstava utvrdili smo da se veoma često u njima pojavljuju prigodne napomene za slučaj nule u ulozi deljenika. Analizom kalkulatora na različitim IT uređajima došli smo da zaključka da svi daju ispravne odgovore iako se svi odgovori na prvi pogled razlikuju, suština je ista, ne možemo deliti sa nulom, pa nam iz toga razloga ovi kaklkulatori pri pokušaju deljenja sa nulom kao rezultat izbacuju grešku ili ne izvršavaju operaciju odnosno ostavljaju isti rezultata kao što je i sama postavka izraza, ili nam vraćaju beskonačnost kao rešenje, koje može biti rešenje izraza koji u deljeniku ima nulu ali samo u slučaju kada koristimo granične vrenosti odnosno prilazimo nuli sa leve ili desne strane.

Na osnovnu rezultata publikovanih istraživanja koja smo koristili u radu, vidimo da je znanje o nuli veoma teško shvatljivo ne samo učenicima već i potencijalnim učiteljima i nastavnicima matematike. Do poteškoća dolazi, ne samo tokom primene nule u računskim operacijama već i kod zapisivanja višecifrenih brojeva sa nulom.

Kratko pilot istraživanje koje je sprovedno i čiji rezultati su prikazani u radu, nam govori da učenici osnovnih škola, konkretno sedmog i osmog razreda ne vladaju potrebnim znanjima o broju nuli, njegovim specifičnostima i pravilima koje važe prilikom računanja sa nulom. Poslednji zadatak u okviru instrumenta istraživanja – upitnika, u kome je kao grešku trebalo izdvojiti korak u kome se vrši deljenje sa promenljivom koja ima vrednost nula, nijedan učenik nije tačno uradio. Ovo nam ukazuje da učenici ne znaju da primene svoja znanja u slučaju generalizacije, odnosno ako nisu dati nalozi sa konkretnim brojevima, oni ne znaju da izvrše nalog.

Da ne bi došlo do sličnih ili lošijih rezultata kod budućih generacija učenika, ovom pojmu – nuli treba posvetiti više pažnje tokom obrade različitih nastavnih tema iz matematike i u okviru matematičkih sekcija, jer je ona prisutna u mnogim oblastima matematike. Učenike na časovima matematike treba usmeravati na pravilno i logičko razmišljanje, posebno u periodu razvoja apstraktnog mišnjenja, na povezivanje gradiva i na generalizaciju naučenog gradiva.

Broj nula je veoma zahtevan i sveprisutan pojam, ne samo za učenike već i za nastavnike. Dugi vremenski period je ulazila u upotrebu, a još uvek se neka njena svojstva i mogućnosti ispituju.

Literatura

[1] H. Arsham, “Zero in Four Dimensions : Historical , Psychological , Cultural , and Logical Perspectives Contents :” Johns Hopkins University, 2014.

[2] G. Russell and E. J. Chernoff, “Seeking more than nothing: Two elementary teachers’ Conceptions of zero,” *Mont. Math. Enthus.*, vol. 8, no. 1&2, pp. 77–112, 2011.

[3] S. Šehalić, “Ništa koje može sve,” 2017. https://salonknjiga.rs/nista-koje-moze-sve/ (accessed Aug. 10, 2020).

[4] R. Calinger, “A conceptual history of mathematics.” Prentice Hall, 1999.

[5] M. i L. Petković, *Matematički vremeplov - prilozi za istoriju matematike*, Zmaj. Novi Sad, 2006.

[6] Gracin and D. Glasnovć, “Problem dijeljenja nulom,” *Miš*, pp. 152–156, 2009.

[7] A. Nieder, “Representing Something Out of Nothing: The Dawning of Zero,” *Trends Cogn. Sci.*, vol. 20, no. 11, pp. 830–842, 2016, doi: 10.1016/j.tics.2016.08.008.

[8] B. Popović, N. Vulović, P. Anokić, and M. Kandić, *Maša i Raša 2 razred*, Četvrto iz. “Klett,” 2015.

[9] B. Popović, N. Vulović, P. Anokić, and M. Kandić, *Matematika 2, Udžbenik za drugi razred osnovne škole*, Prvo izdan. Beograd: „Klett“ d.o.o, Beograd, 2019.

[10] N. Ikodinović and S. Dimitrijević, *Matematika 5, Udžbenik za peti razred osnovne škole*, Prvo izdan. Beograd: „Klett“ d.o.o, Beograd, 2018.

[11] N. Ikodinović and S. Dimitrijević, *Matematika 6, Udžbenik za šesti razred osnovne škole*, Prvo izdan. Beograd: „Klett“ d.o.o, Beograd, 2018.

[12] N. Ikodinović and S. Dimitrijević, *Matematika 7, Udžbenik za sedmi razred osnovne škole*, Sedmo izda. „Klett“ d.o.o, Beograd, 2015.

[13] N. Ikodinović and S. Dimitrijević, *Matematika 8, Udžbenik za osmi razred osnovne škole*, Prvo izdan. „Klett“ d.o.o, Beograd, 2010.

[14] M. M. Wheeler and I. Feghali, “Much Ado about Nothing: Preservice Elementary School Teachers’ Concept of Zero,” *J. Res. Math. Educ.*, vol. 14, no. 3, p. 147, 1983, doi: 10.2307/748378.

[15] C. L. Smith, G. E. A. Solomon, and S. Carey, “Never getting to zero: Elementary school students’ understanding of the infinite divisibility of number and matter,” *Cogn. Psychol.*, vol. 51, no. 2, pp. 101–140, 2005, doi: 10.1016/j.cogpsych.2005.03.001.

[16] P. Gelman, R., Cohen, M., & Hartnett, “To know mathematics is to go beyond thinking that ‘fractions aren’t numbers.’” International Group for Psychology of Mathematics Education. New Brunswick, NJ, 1989.

[17] D. H. Wheeler, B. Inhelder, and J. Piaget, “The Early Growth of Logic in the Child,” *Math. Gaz.*, 1965, doi: 10.2307/3612335.

[18] D. W. Evans, “Understanding zero and infinity in the early school years.” University of Pennsylvania., 1983.

[19] M. Kamii, "Children's ideas about written number." University Press, pp. 47–59, 1981.

Prilozi

TEST ZA SEDMI I OSMI RAZRED OSNOVNE ŠKOLE

Zadatak 1: Dopiši brojeve tako da dobiješ tačne jednakosti.

a) $\_\_\_ + 22 = 0$

b) $1{,}1 \cdot \_\_\_ = 0$

c) $\_\_\_ \cdot \frac{1}{3} = 1$

d) $2 - 2 \cdot \_\_\_ = 0$

e) $\_\_\_ : 3{,}1 = 0$

f) $2^0 + 0 = \_\_\_$

g) $0^2 + 2 = \_\_\_$

Zadatak 2: Popuni tabelu.

Jednačina	Rešenja
$x + 1 = 3$	
$3 + x = 3$	
$2 \cdot x = 0$	
$0 \cdot x = 1$	
$0 \cdot x + 1 = 1$	

Zadatak 3: Pored sledećih rečenica zaokruži DA ukoliko je rečenica tačna, a NE ako rečenica nije tačna.

Broj 0,2 ima istu vrednost kao broj 2,0	DA	NE
Broj 8,01 je manji od broja 8,001.	DA	NE
Broj 5,1 ima istu vrednost kao broj 5,100	DA	NE
Broj -0,1 je veći od broja -0,01	DA	NE
Broj 0 možemo podeliti bilo kojim brojem	DA	NE
Bilo koji broj možemo podeliti brojem nula	DA	NE

Zadatak 4: Ispred tebe se nalazi jedan matematički postupak. Međutim u jednom koraku je napravljena greška i došlo se do netačne relacije da je 2=1.

$$
\begin{array}{lc}
1.red: & a = b \\
2.red: & a^2 = ab \\
3.red: & a^2 - b^2 = ab - b^2 \\
4.red: & (a+b)(a-b) = b(a-b) \\
5.red: & a + b = b \\
6.red: & 2b = b \\
7.red: & 2 = 1
\end{array}
$$

U kom redu je napravljena greška? _________

Zašto je to greška? _________

Biografija

Ivana Temunović je rođena 25. aprila 1995. godine u Subotici. Osnovnu školu „Đuro Salaj“ u Subotici, je završila kao odličan đak i nosilac Vukove diplome 2010. godine. Svoje dalje obrazovanje je nastavila u svom rodnom gradu, u ekonomskoj srednjoj školi „Bosa Milićević“, gde je stekla zvanje ekonomskog tehničara. Nakon završene srednje škole, 2014. godine upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, četvorogodišnji smer diplomirani profesor Matematike. 2018. godine se upisuje na smer integrisanih studija, na studijski program master profesor matematike prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Sve ispite predviđene planom i programom na ovom smeru je položila u julu 2020. godine sa prosekom 8.71 i time stekla uslova za odbranu master rada.

Novi Sad, 2020. Temunović Ivana

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Ivana Temunović
AU

Mentor: dr Zorana Lužanin
MN

Naslov rada: Razumevanje koncepta nule u osnovnoj školi
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski i engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2020.
GO

Izdavac: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovica 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: 4/50/19/5/33/4/1
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Metodika matematike
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: koncept nule, nastava matematike, osnovna škola, udžbenik za predmet matematike
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Tema ovog master rada je razumevanja koncepta nule u osnovnoj školi. Nula je pojam koji je veoma apstraktan i intuitivno neshvatljiv u ranim uzrastima, jer je teško zamisliti odsustvo nečega, pa je zbog toga veoma važno pronaći adekvatan način i metod za uvođenje ovog pojma u osnovno obrazovanje. U uvodu rada prikazan je istorijski aspekt uvođenja nule u matematiku i teorijski značaj ovog pojma u matematičkoj teoriji. U drugom delu obrađen je koncept nule u nastavi matematike u osnovnoj školi. Poseban značaj je dat analizi nastavnih sredstava koja se bazirala na analizi udžbenika koji se koriste tokom izvođenja nastave. U okviru trećeg dela prikazano je nekoliko istraživanja na ovu temu. Nakon toga su predstavljeni rezultati pilot istraživanja koje se odnosi na razumevanje koncepta nule nad učenicima sedmih i osmih razreda osnovne škole. Poslednjim delom predstavljen je predlog inovativnih nastavnih metoda u vidu dva primera, jedan za matematičku sekciju a drugi za nastavu matematike u okviru teme crtanje grafika funkcije.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veca: 09.09.2020.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Đurđica Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor:	dr Zorana Lužanin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Goran Radojev, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master’s thesis
CC

Author: Ivana Temunović
AU

Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D.
MN

Title: Understanding of the concept of zero in elementary school
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian and English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2020
PY

Publisher: Author’s reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 4/51/19/5/33/4/1
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Teaching of mathematics
SD

Subject/Key words: concept of zero, teaching mathematics, elementary school, classbook for the subject of mathematics
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The topic of this master's thesis is the research of understanding of the concept of zero in primary school. Zero is a concept that is very abstract and intuitively incomprehensible at an early age, because it is difficult to imagine the absence of something, so it is very important to find an adequate way and method to introduce this concept in primary school. The first part presents the historical aspect of the introduction of zero in mathematics and the theoretical significance of this concept in mathematics theory. The second part provides an analysis of the inclusion of this concept in the teaching of mathematics in primary school, especially of its presentation in classbooks. In the third part, several researches on this topic are presented. After that, the results of a short pilot research related to understanding the concept of zero over seventh and eighth grade elementary school students were presented. The last part presents a proposal of innovative teaching methods in the form of two examples, one for the mathematics section and the other for the teaching of mathematics within the topic of drawing function graphs.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 09.09.2020.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Đurđica Takači, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor:	Zorana Lužanin, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Goran Radojev, Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad