UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Friderika Vereš

Kvadratno programiranje i primena u finansijama

Master rad

Mentor: Prof. dr Sanja Rapajić

Novi Sad, 2020.

Sadržaj

* * *

Veliku zahvalnost, u prvom redu, dugujem mentorki prof. dr. Sanji Rapajić na sugestijama i odvojenom vremenu. Hvala joj na korisnim savetima i pomoći u izradi ovog master rada.

Želela bih da se zahvalim i svojim najbližim prijateljima i kolegama koji su uvek bili uz mene i učinili studiranje zabavnim.

Na kraju, beskrajno se zahvaljujem svojoj porodici, a posebno mami i sestri na podršci koju su pružili ne samo tokom školovanja, već i u celom životu.

1 Uvod

Optimizacija je matematička disciplina koja se bavi optimizacionim problemima, njihovim osobinama, razvojem i implementacijom algoritma koji se koriste za njihovo rešavanje. Problemi optimizacije se javljaju u raznim oblicima u prirodnim i društvenim naukama, tehnici, ekonomiji kao i u svakodnevnom životu. Problem optimizacije podrazumeva minimizaciju ili maksimizaciju funkcije cilja nad nekim skupom ograničenja ili na celom prostoru. Ukoliko se funkcija optimizuje na celom prostoru reč je o optimizaciji bez ograničenja, a u suprotnom o optimizaciji sa ograničenjima.

U zavisnosti od toga da li su funkcija cilja i ograničenja linearni ili ne, optimizacioni problemi se dele na linearne i nelinearne. Linearni problemi su problemi u kojima je funkcija cilja linearna i sva ograničenja su zadata linearnim funkcijama. Ukoliko postoji nelinearnost bilo u funkciji cilja bilo u ograničenjima, reč je o nelinearnom problemu. U opštem slučaju rešavanje nelinearnih problema je kompleksno i složeno i u zavisnosti od vrste nelinearnog problema razvijeni su razni algoritmi za njihovo rešavanje.

Ovaj rad se bavi problemima kvadratnog programiranja i njihovom primenom u finansijama. Prvi deo rada je uvod u kome su date neke oznake, definicije i teoreme. U drugom delu predstavljeno je nelinearno programiranje. Navedene su osnovne definicije i teoreme neophodne za razumevanje. U trećem delu predstavljen je problem kvadratnog programiranja. Objašnjene su metode za rešavanje datog problema i prikazani su softveri koji se mogu jednostavno koristiti za rešavanje problema kvadratnog programiranja. U četvrtom delu je predstavljena primena kvadratnog programiranja u finansijama. Peti deo rada je zaključak, u kome je dat pregled izložene materije.

Optimizacija portfolija je tipičan problem koji se javlja u finansijama. Opšti model optimizacije portfolija je uveo američki ekonomista Markovic (Harry Markowitz) i za to je dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju. Markovicov model je i posle više od 60 godina najpopularniji model optimizacije portfolija. Metode za rešavanje problema kvadratnog programiranja omogućavaju brzo rešavanje ovog modela.

1.1 Neke oznake, definicije, teoreme

- $\mathbb{R}$ - skup realnih brojeva
- $\mathbb{R}^n$ - skup realnih vektora dimenzije n
- $\mathbb{R}^{m\times n}$ - skup realnih matrica dimenzije $m \times n$
- $\mathbb{C}^1(A)$ - skup svih neprekidno-diferencijabilnih funkcija na skupu A
- $\mathbb{C}^2(A)$ - skup svih dva puta neprekidno-diferencijabilnih funkcija na skupu A
- x^T - transponovan vektor
- A^T - transponovana matrica
- $A \geq 0$ - pozitivno semidefinitna matrica
- $A > 0$ - pozitivno definitna matrica
- I - jedinična matrica dimenzije $n \times n$, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ - realan vektor, $x \in \mathbb{R}^n$
- $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ - dijagonalna matrica koja na glavnoj dijagonali ima elemente $d_1, d_2, \ldots, d_n$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\blacksquare$ - kraj dokaza

Definicija 1.1. [3] Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Gradijent* funkcije f, u oznaci $\nabla f(x)$, je vektor prvih parcijalnih izvoda funkcije koji se definiše kao

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Definicija 1.2. [3] Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Hesijan* funkcije f, u oznaci $\nabla^2 f(x)$, je matrica drugih parcijalnih izvoda funkcije i definiše se kao

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Ukoliko funkcija f ima osobinu da svaki njen parcijalni izvod postoji, ona je *diferencijabilna*, a ako su njeni parcijalni izvodi još i neprekidni, ona je *neprekidno-diferencijabilna.* Ako postoje i parcijalni izvodi drugog reda, funkcija je *dva puta diferencijabilna*, a ako su ovi izvodi neprekidni, ona je *dva puta neprekidno-diferencijabilna.*

Definicija 1.3. [3] Matrica $A \in R^{n \times n}$ je simetrična ako je $A = A^T$.

Definicija 1.4. [4] Funkcija $f(x) = x^T A x = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ naziva se *kvadratna forma.*
Simetrična matrica A je

* *pozitivno definitna* ako za svako $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ važi $x^T A x > 0$,
* *pozitivno semidefinitna* ako za svako $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ važi $x^T A x \geq 0$.

Za matricu za koju važi uslov sa $<$ ($\leq$) se kaže da je negativno (semi)definitna. Veliki broj matrica ne spada ni u jednu od ove četiri klase.

Kvadratna forma $x^T A x$ je pozitivno/negativno (semi)definitna ako je matrica A pozitivno/negativno (semi)definitna.

Teorema 1.1. [4] **(Silvestrov kriterijum)** Simetrična matrica $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ je pozitivno definitna ako i samo ako je svaki glavni minor matrice A pozitivan, to jest

$$D_1 = a_{11} > 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Definicija 1.5. [15] *Očekivanje* slučajne promenljive X u oznaci $E(X)$ je srednja, prosečna vrednost oko koje se grupišu registrovani podaci dobijeni vršenjem nekog eksperimenta.
Ako je X diskretna slučajna promenljiva, $E(X) = \sum x_k p(x_k)$.
Ako je X apsolutno-neprekidnog tipa, $E(X) = \int x \varphi_X(x) dx$.

Definicija 1.6. [15] *Varijansa* ili *disperzija* slučajne promenljive X u oznaci $D(X)$ ili σ^2 definiše se kao mera odstupanja ili srednje kvadratno odstupanje od očekivane vrednosti. Računa se kao

$$D(X) = E[X - (E(X))^2].$$

Definicija 1.7. [15] *Standardna devijacija* slučajne promenljive X u oznaci σ je pozitivan kvadratni koren njene disperzije $D(X)$.

Definicija 1.8. [15] *Kovarijansa* dve slučajne promenljive X i Y označena je sa $cov(X,Y)$ i izračunava se kao

$$cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Definicija 1.9. [15] *Koeficijent linearne korelacije* dve slučajne promenljive X i Y označen je sa $\rho_{X,Y}$ i izračunava se kao

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

2 Nelinearno programiranje

Nelinearno programiranje (NLP) je jedna osnovna klasa matematičkog programiranja. Problem nelinearnog programiranja podrazumeva traženje optimalne vrednosti funkcije cilja nad nekim skupom ograničenja ili na celom prostoru, pri čemu su funkcija cilja i/ili bar neko od ograničenja nelinearni.

Ova oblast programiranja je izuzetno važna, jer u praksi skoro uvek postoji neki stepen nelinearnosti. Nelinearno programiranje se i dan danas razvija, jer su problemi koji se javljaju veoma raznovrsni, pa postoji potreba za stalnim usavršavanjem metoda za njihovo rešavanje.

Kod problema linearnog programiranja (LP) i funkcija cilja i ograničenja su linearni. Pomoću simpleks algoritma može se rešiti svaki ovako definisan problem. Nažalost, za probleme nelinearnog programiranja ne postoji univerzalni metod koji može rešiti svaki problem. Štaviše, uprkos brzom razvoju tehnologije, mnoštvo problema nije moguće rešiti čak ni u ovo vreme. Uz dodatne pretpostavke o funkciji cilja može se doći do specijalnih vrsta problema - kao što je i kvadratno programiranje - za čije rešavanje postoje efikasne metode.

2.1 Osnovni pojmovi

Opšti problem NLP se može formalno zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\min_x(\max) \quad & f(x_1,\dots,x_n) \\
& g_1(x_1,\dots,x_n) \quad (\leq, = \text{ ili } \geq) \quad b_1 \\
& g_2(x_1,\dots,x_n) \quad (\leq, = \text{ ili } \geq) \quad b_2 \\
& \vdots \\
& g_m(x_1,\dots,x_n) \quad (\leq, = \text{ ili } \geq) \quad b_m,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

gde je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija cilja, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za $i = 1,\dots,m$ su funkcije ograničenja, a $b = (b_1,\dots,b_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Ukoliko se traži min (max) funkcije cilja na celom prostoru tj. ako ne postoje ograničenja, reč je o NLP problemu bez ograničenja.

Ekvivalentan oblik NLP je:

$$\begin{aligned} &\min_x(\max) \quad f(x) \\ &\qquad\qquad g_i(x) \quad (\leq, = \text{ ili } \geq) \quad b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gde je $x \in \mathbb{R}^n$ n-torka, to jest $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, odnosno

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ako se uvede oznaka dopustivog skupa $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x)\ (\leq, = \text{ ili } \geq)\ b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$, dobija se još jedan način zapisivanja problema NLP

$$\min_{x \in X} (\max_{x \in X})\ f(x). \tag{2.3}$$

U daljem tekstu bavićemo se problemom minimizacije, odnosno problemom oblika

$$\min_{x \in X} f(x), \tag{2.4}$$

gde $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x)\ (\leq, = \text{ ili } \geq)\ b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$.

Problem maksimizacije se uvek može svesti na problem minimizacije, množenjem funkcije cilja sa (-1).

Definicija 2.1. [2] Dopustivo rešenje problema (2.4) je tačka koja pripada dopustivom skupu X.

Definicija 2.2. [2] Tačka $\bar{x}$ dopustivog skupa za koju važi $f(\bar{x}) \leq f(x)$ za svako $x \in X$ je optimalno rešenje problema (2.4). Analogno, za problem maksimizacije $\bar{x}$ je optimalno rešenje ako $f(\bar{x}) \geq f(x)$ za svaku dopustivu tačku.

Slede definicije za globalne i lokalne ekstreme.

Definicija 2.3 [8] Tačka $x^* \in X$ je *globalni minimum* funkcije f na skupu X, ili *globalni minimum* problema (2.4), ako važi $f(x^*) \leq f(x)$ za svako $x \in X$.

Definicija 2.4 [8] Tačka $x^* \in X$ je *strogi globalni minimum* funkcije f na skupu X, ili *strogi globalni minimum* problema (2.4), ako važi $f(x^*) < f(x)$ za svako $x \in X$, gde $x \neq x^*$.

Definicija 2.5. [4] Tačka $x^* \in X$ je *lokalni minimum* funkcije f na skupu X, ili *lokalni minimum* problema (2.4), ako postoji $\delta > 0$ tako da je

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ za sve } x \in X \text{ takve da je } \|x - x^*\| < \delta,$$

gde je $\| x - x^* \| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + ... + (x_n - x_n^*)^2}$ rastojanje tačaka x i x^*.

Definicija 2.6. [4] Tačka $x^* \in X$ je *strogi lokalni minimum* funkcije f na skupu X, ili *strogi lokalni minimum* problema (2.4), ako postoji $\delta > 0$ tako da je

$$f(x^*) < f(x) \text{ za sve } x \in X \text{ takve da je } \|x - x^*\| < \delta, \; x \neq x^*.$$

Analogno se može izvesti pojam (strogog) globalnog i lokalnog maksimuma.

2.2 Optimizacija bez ograničenja

Problem optimizacije bez ograničenja je problem oblika

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} (\max) f(x).$$

Zbog jednostavnosti posmatramo problem minimizacije bez ograničenja

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \tag{2.5}$$

2.2.1 Potrebni i dovoljni uslovi optimalnosti

Teorema 2.1. [8] Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Ako je x^* lokalni minimum problema (2.5) tada $\nabla f(x^*) = 0$.

Definicija 2.7. [4] Tačka koja zadovoljava uslov $\nabla f(x) = 0$ naziva se *stacionarna tačka* funkcije f.

Na osnovu prethodne teoreme se dolazi do sledećeg rezultata. Kandidati za lokalni ekstrem diferencijabilne funkcije f nalaze se među stacionarnim tačkama. Dakle, za pronalaženje stacionarnih tačaka funkcije f treba rešiti n jednačina oblika $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0$ i tako se dobija sistem od n jednačina sa n nepoznatih.

Teorema 2.2. [8] Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Ako je x^* lokalno rečenje problema (2.5) tada

1. $\nabla f(x^*) = 0$;
2. $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$.

Prethodne teoreme daju potrebne uslove za lokalni minimum, a sada slede dovoljni uslovi.

Teorema 2.3. [8] Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Ako važi

1. $\nabla f(x^*) = 0$ i
2. $\nabla^2 f(x^*) > 0$,

tada je x^* strogi lokalni minimum problema (2.5).

2.3 Optimizacija sa ograničenjima

Kao što je pomenuto, problem optimizacije sa ograničenjima je problem oblika

$$\min_x(\max) \quad f(x)$$
$$g_i(x) \quad (\leq, = \text{ ili } \geq) \quad b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

gde je $x \in \mathbb{R}^n$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

Specijalan slučaj optimizacije sa ograničenjima je konveksno programiranje, kod kojeg su funkcija cilja i dopustiv skup konveksni. Konveksnost igra važnu ulogu kod problema NLP, jer bez ove osobine rešavanje problema može biti veoma složeno. Dobro poznat primer konveksnog programiranja je linearno programiranje kod kojeg su funkcija cilja i funkcije ograničenja linearne, pa usled toga i konveksne.

2.3.1 Konveksne funkcije

Definicija 2.8. [8] $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konveksan skup* ako za svako $x, y \in S$ i za svako $\lambda \in [0,1]$ važi da je $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.

Definicija 2.9. [8] Neka je S konveksan skup. $f : S \to \mathbb{R}$ je *konveksna funkcija* na skupu S, ako za svako $x, y \in S$ i za svako $\lambda \in [0,1]$ važi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \ .$$

Definicija 2.10. [8] Neka je S konveksan skup. $f : S \to \mathbb{R}$ je *strogo konveksna funkcija* na skupu S, ako za svako $x, y \in S$, gde $x \neq y$ i za svako $\lambda \in (0,1)$ važi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Analogno se definiše pojam (stroge) konkavnosti.

Definicija 2.11. [4] Funkcija f je *konkavna (strogo konkavna)* na konveksnom skupu S ako je funkcija $-f$ konveksna (strogo konveksna) na tom skupu.

Teorema 2.4. [8] Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup i $f \in C^1(S)$. Tada je f konveksna na S ako i samo ako važi

$$f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y-x) \tag{2.6}$$

za svako $x, y \in S$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je f konveksna na S i neka su $x, y \in S$ i $\lambda \in [0,1]$. Definiše se $z := \lambda y + (1-\lambda)x$. Iz činjenice da je S konveksan sledi da z pripada skupu S za svako $\lambda \in [0,1]$. Dalje, kako je f konveksna, važi

$$f(z) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x), \tag{2.7}$$

pa oduzimanjem $f(x)$ sa obe strane ove nejednakosti dobija se

$$f(z) - f(x) \leq \lambda(f(y) - f(x)).$$

z se može napisati i kao $x + \lambda(y-x)$, pa ako se prethodna nejednakost podeli sa λ dobija se

$$\frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x).$$

Puštajući $\lambda \to 0^+$, dobija se izvod funkcije po pravcu vektora i to je

$$\nabla^T f(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$$

što je tražena nejednakost (2.6).

($\Leftarrow$) Neka važi (2.6). Neka su $x, y \in S$ i $\lambda \in [0,1]$ i $z = \lambda y + (1-\lambda)x$. Primenom (2.6) dobija se

$$f(x) \geq f(z) + \nabla^T f(z)(x - z(\lambda)) \tag{2.8}$$

i

$$f(y) \geq f(z) + \nabla^T f(z)(y - z(\lambda)). \tag{2.9}$$

Sada, pošto je $x - z = \lambda(x-y)$ i $y - z = (1-\lambda)(y-x)$, množeći (2.8) sa $(1-\lambda)$ i (2.9) sa λ pa sabirajući ih, dobija se nejednakost (2.7), što implicira konveksnost funkcije f. ■

Teorema 2.5. [8] Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup i $f \in C^1(S)$. Neka važi

$$f(y) > f(x) + \nabla^T f(x)(y-x)$$

za svako $x, y \in S$, gde je $x \neq y$. Tada je f strogo konveksna na skupu S.

Teorema 2.6. [8] Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup i $f \in C^2(S)$. Tada

1. f je konveksna na S ako je $\nabla^2 f(x) \geq 0$ za svako $x \in S$,

2. f je strogo konveksna na S ako je $\nabla^2 f(x) > 0$ za svako $x \in S$.

3. $\nabla^2 f(x) \geq 0$ za svako $x \in S$, ukoliko je S otvoren i f konveksna na S.

Dokaz. 1. Neka je $\nabla^2 f(x) \geq 0$ za svako $x \in S$ i neka su $x, y \in S$. Iz Tejlorovog razvoja u tački y sledi da postoji $z \in S$ tako da

$$f(y) = f(x) + \nabla^T f(x)(y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^T \nabla^2 f(z)(y-x).$$

Zbog pretpostavke za $\nabla^2 f(z)$, važi da je $f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y-x)$ i prema Teoremi 2.4 f je konveksna.

2. Analognim postupkom kao u prvom delu dolazi se do $f(y) > f(x) + \nabla^T f(x)(y-x)$ i Teorema 2.5. implicira da je f strogo konveksna.

3. Neka su $x \in S$ i $d \in \mathbb{R}^n$ proizvoljne. S je otvoren, pa se može naći neko $\bar{h}$ tako da $x + hd$ pripada skupu S za svako $0 \leq h \leq \bar{h}$. Dalje, važi

$$f(x+hd) = f(x) + h\nabla^T f(x)d + \frac{1}{2}h^2 d^T \nabla^2 f(x)d + o(\| hd \|^2). \quad (2.10)$$

Iz konveksnosti f i na osnovu Teoreme 2.4. sledi $f(x+hd) > f(x) + h\nabla^T f(x)d$, pa iz (2.10) sledi

$$\frac{1}{2}h^2 d^T \nabla^2 f(x)d + o(\| hd \|^2) \geq 0.$$

Ovo je ispunjeno za svako $h \in (0, \bar{h})$ pa ako se to podeli sa h^2 i pusti da h teži ka 0 dobija se $\frac{1}{2}h^2 d^T \nabla^2 f(x)d \geq 0$. Kako je vektor d proizvoljan, mora da važi da je $\nabla^2 f(x) \geq 0$. Na kraju, kako je i x proizvoljno iz S zaključak je da je $\nabla^2 f(x) \geq 0$ za svako $x \in S$.

■

Konačno sledi ključna teorema koja obuhvatanjem svega što je do sada dokazano dovodi do važnog rezultata.

Teorema 2.7. [8] Neka je S konveksan skup i funkcija f konveksna na S. Tada, svaki lokalni minimum funkcije f je i njen globalni minimum.

Dokaz. Neka važi suprotna pretpostavka, tj. neka je x^* lokalni, ali nije globalni minimum za f. Tada, za neku tačku $y^* \in S$ je $f(y^*) < f(x^*)$. Iz konveksnosti funkcije za svako $\lambda \in (0,1)$ je

$$f(x^* + \lambda(y^* - x^*)) = f(\lambda y^* + (1-\lambda)x^*) \leq \lambda f(y^*) + (1-\lambda)f(x^*) < f(x^*).$$

Ovo znači da uvek postoji dovoljno malo λ za koje se tačka $z = x^* + \lambda(y^* - x^*)$ nalazi u proizvoljnoj maloj okolini tačke x^* tako da $f(z) < f(x^*)$. Ovo daje kontradikciju sa pretpostavkom da je x^* lokalni minimum. ■

Gore navedene teoreme se mogu izvesti i u slučaju kada je problem (2.5) u obliku maksimizacije.

2.3.2 Lagranžovi množitelji

Neka je dat klasičan problem minimizacije u kome su sva ograničenja zadata jednačinama

$$\begin{aligned} &\min_x \quad f(x) \\ &g_i(x) = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2.11}$$

gde su funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ diferencijabilne na R^n, a $b_i \in \mathbb{R}$ za svako $i = 1, \ldots, m$.

Definicija 2.12. [4] Funkcija

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i) \tag{2.12}$$

se naziva *Lagranžova funkcija* pridružena problemu (2.11) gde je $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$ vektor Lagranžovih množilaca.

Cilj je naći odgovarajući vektor $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)^T$ koji minimizira Lagranžovu funkciju $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ jer će to implicirati da je $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$ tada rešenje problema (2.11).

Neka je $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$ rešenje problema (2.11) i neka je $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$ proizvoljna tačka dopustivog skupa. Ako $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)^T$ minimizira Lagranžovu funkciju L, tada je

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_i = 0$$

odnosno, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$ zadovoljava ograničenja problema (2.11). S druge strane, ako $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)^T$ minimizira Lagranžovu funkciju L, tada važi

$$L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m) \leq L(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m)$$

za proizvoljne $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$.
Stavljajući 0 za sve λ, prethodna nejednačina je ekvivalentna sa $f(\bar{x}) \leq f(x')$, pa je $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^T$ rešenje problema (2.11).

Neka je $J(x)$ Jakobijan preslikavanja $G(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x))^T$ pridružen ograničenjima problema (2.11):

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Sledi teorema koji daje potreban uslov za lokalni minimum.

Teorema 2.8. [4] Neka su funkcije $f, g_1, g_2, ..., g_m$ neprekidno diferencijabilne u nekoj okolini tacke x^*. Ako je x^* lokalni minimum problema (2.11) i ako je $rang J(x^*) = m$, tada postoji λ^* za koje važi $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$.

Odnosno, ako za svaku dopustivu tačku x važi da je rang matrice Jakobijana jednak broju ograničenja, onda se može izvesti da se svi kandidati za lokalni minimum problema (2.11) nalaze među stacionarnim tačkama Lagranžove funkcije. Stacionarne tačke se dobijaju iz sistema

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \ldots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0. \tag{2.13}$$

Vektorski zapis (2.13) je $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ i $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$. Znači, treba rešiti sledeći sistem od $n + m$ skalarnih jednačina:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, j = 1, \ldots, n \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) - b_i = 0, i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Ekvivalentan zapis prethodnog sistema je

$$\begin{aligned} &\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0, \\ &g_i(x) = b_i, i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Sada slede dovoljni uslovi za strogi lokalni minimum. Stoga, treba uvesti definiciju tzv. *tangentnog prostora*. Skup rešenja homogenog sistema od m linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih u obliku

$$T(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : J(x^*)x = 0\}$$

je tangentni prostor.

Teorema 2.9. [4] Neka su funkcije $f, g_1, \ldots, g_m$ dva puta neprekidno diferencijabilne u nekoj okolini tačke x^*. Tada je x^* strogi lokalni minimum problema (2.11) ukoliko važi $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$ i $\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*)$ je pozitivno definitna na $T(x^*)$.

Ispitivanje pozitivne definitnosti matrice $\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*)$ (koja predstavlja Hesijan Lagranžove funkcije) je moguće pomoću generalizovanog Silvesterovog kriterijuma. Neka je $H(x^*, \lambda^*)$ blok matrica dimenzije $(m + n) \times (m + n)$:

$$H(x^*, \lambda^*) = \left[\begin{array}{c|c} O & J(x^*) \\ \hline J^T(x^*) & \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) \end{array} \right]$$

gde je $O \in \mathbb{R}^{m \times m}$ čiji su svi elementi jednaki 0.

Teorema 2.10. [4] (**Generalizacija Silvestrovog kriterijuma**) Neka je $rangJ(x^*) = m$ i neka su $D_1, \dots, D_{m+n}$ glavni minori matrice $H(x^*, \lambda^*)$. Matrica $\nabla^2_{xx}L(x^*, \lambda^*)$ je pozitivno definitna na $T(x^*)$ ako važi

$$(-1)^m D_{2m+1} > 0, \dots, (-1)^m D_{m+n} > 0.$$

Sledeća teorema govori o tome da je za ispitivanje dovoljnih uslova za strogi lokalni ekstrem dovoljno poznavanje znaka glavnih minora matrice H u stacionarnim tačkama Lagranžove funkcije.

Teorema 2.11. Neka je $rangJ(x^*) = m$, neka su $D_1, \dots, D_{m+n}$ glavni minori matrice $H(x^*, \lambda^*)$ i neka je $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$.

- x^* je strogi lokalni minimum problema (2.11) ako važi $(-1)^m D_{2m+j} > 0, j = 1, \dots, n-m$.
- x^* je strogi lokalni maksimum ako važi $(-1)^{m+j} D_{2m+j} > 0, j = 1, \dots, n-m$.

Naredna teorema daje vezu između osobine konveksnosti Lagranžove funkcije i optimalnog rešenja problema (2.11).

Teorema 2.12. [2] Neka je f konveksna funkcija i g_i su linearne funkcije za svako $i = 1, \dots, m$. Tada svaka tačka $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m)^T$ koja zadovoljava (2.13) daje optimalno rešenje $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ problema (2.11).

2.3.3 Kun-Takerovi uslovi

Sada posmatramo problem minimizacije oblika

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ & g_i(x) \le b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{2.14}$$

gde su funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ konveksne i diferencijabilne, a $b_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, \dots, m$.

Pre formulisanja Kun-Takerove teoreme potrebno je navesti uslov regularnosti.

Definicija 2.13. Uslov regularnosti (Slaterov uslov) Neka su funkcije $f, g_1, \dots, g_m$ konveksne. Za funkcije $g_1, \dots, g_m$ se kaže da zadovoljavaju Slaterov uslov ako postoji $\hat{x}$ tako da je $g_i(\hat{x}) < 0$, za svako $i = 1, \dots, m$.

U nastavku se pretpostavlja da je uvek zadovoljen uslov regularnosti.

Teorema 2.13. [2] **(Kun-Takerova teorema)** Neka je $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^T$ optimalno rešenje problema (2.14). Tada $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^T$ zadovoljava svih m ograničenja u (2.14) i postoje množitelji $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m$ tako da važi

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.15a}$$

$$\bar{\lambda}_i (b_i - g_i(\bar{x})) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.15b}$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.15c}$$

Kada su sva ograničenja linearne funkcije, ova teorema važi bez obzira da li je zadovoljen Slaterov uslov.

Često se javljaju problemi gde promenljive moraju biti nenegativne. Kun-Takerovi uslovi mogu biti korisni i u takvim slučajevima. Neka je dat problem u obliku

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x_1, \ldots, x_n) \\ & g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq \quad b_1 \\ & g_2(x_1, \ldots, x_n) \leq \quad b_2 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq \quad b_m \\ & -x_1 \leq \quad 0 \\ & -x_2 \leq \quad 0 \\ & \vdots \\ & -x_n \leq \quad 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Teorema 2.14. [2] **(Kun-Takerova teorema)** Neka je $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^T$ optimalno rešenje problema (2.16). Tada $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^T$ zadovoljava skup ograničenja u (2.16) i postoje množitelji $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m, \bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_n$ tako da važi

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} - \mu_j = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.17a}$$

$$\bar{\lambda}_i (b_i - g_i(\bar{x})) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.17b}$$

$$\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right) \bar{x}_j = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.17c}$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.17d}$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.17e}$$

Pošto je $\bar{\mu}_j \geq 0$, prvi tip jednačina može se transformisati u obliku

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n,$$

pa se dobija sistem ekvivalentan sa uslovima prethodne teoreme:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
\bar{\lambda}_i (b_i - g_i(\bar{x})) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
\left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right) \bar{x}_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
\bar{\lambda}_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned}
$$

Do sada su bile navedene teoreme koje govore o potrebnim uslovima za optimalno rešenje, a sledeća teorema daje dovoljne uslove.

Teorema 2.15. [2] Neka je f konveksna funkcija i $g_1, \dots, g_m$ su konveksne funkcije i neka su za tačku $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ zadovoljene pretpostavke (2.15a)$-$(2.15c) Teoreme 2.13. Tada je tačka $\bar{x}$ optimalno rešenje problema (2.14).
Analogno, neka je f konveksna funkcija i $g_1, \dots, g_m$ konveksne funkcije i neka su za tačku $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ zadovoljene pretpostavke (2.17a)$-$(2.17e) Teoreme 2.14. Tada je tačka $\bar{x}$ optimalno rešenje problema (2.16).

2.3.4 Dualnost u nelinearnom programiranju

Nekada je jako korisno posmatrati probleme u dualnom obliku jer upravo dualni oblik može da ima zgodnu matematičku strukturu koja omogućava jednostavno rešavanje. Između ostalog, rešavanjem dualnog problema može se odrediti ili tvrditi optimalnost rešenja primala. Između primala (P) i duala (D) postoji veza. Neka je opšti nelinearni optimizacioni problem sa ograničenjima dat u obliku

$$
\begin{aligned}
(P) \quad \min_{x} \quad & f(x) \\
& g_1(x) \leq 0 \\
& \vdots \\
& g_m(x) \leq 0 \\
& x \in X
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

gde je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za sve $i = 1, \dots, m$, a $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lagranžova funkcija za ovaj problem je

$$
L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x),
$$

gde je $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \geq 0$.

Sad se definiše dualna funkcija

$$L^*(\lambda) \;=\; \min_{x\in X} L(x,\lambda) \;=\; \min_{x\in X} f(x) \;+\; \lambda^T g(x).$$

Odgovarajući dualni problem je oblika:

$$(D) \quad \max_{\lambda\geq 0} \quad L^*(\lambda). \tag{2.19}$$

Teorema 2.16. Dualna funkcija $L^*(\lambda)$ je konkavna funkcija.

Dokaz. Neka su $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, neka je $\alpha \in [0,1]$ i $\lambda = \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2$. Tada

$$\begin{aligned}
L^*(\lambda) \quad &= L^*(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2) \\
&= \min_{x\in X} f(x) + (\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)^T g(x) \\
&= \min_{x\in X} \alpha[f(x) + \lambda_1^T g(x)] + (1-\alpha)[f(x) + \lambda_2^T g(x)] \\
&\geq \alpha[\min_{x\in X} f(x) + \lambda_1^T g(x)] + (1-\alpha)[\min_{x\in X} f(x) + \lambda_2^T g(x)] \\
&= \alpha L^*(\lambda_1) + (1-\alpha)L^*(\lambda_2),
\end{aligned}$$

pa prema definiciji, $L^*(\lambda)$ je konkavna funkcija. ∎

Neka je z^* rešenje primalnog problema (2.18), a v^* rešenje dualnog problema (2.19). Tada važe sledeća tvrđenja.

Teorema 2.17. [9] *(Teorema slabe dualnosti)* Neka je $\bar{x}$ dopustivo rešenje primala i $\bar{\lambda}$ dopustivo rešenje duala. Tada je

$$f(\bar{x}) \geq L^*(\bar{\lambda}).$$

Osim toga važi

$$z^* \geq v^*.$$

Dokaz. Iz pretpostavke da je $\bar{x}$ dopustivo za P i $\bar{\lambda}$ dopustivo za D sledi:

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \geq \min_{x\in X} f(x) + \bar{\lambda}^T g(x) = L^*(\bar{\lambda}),$$

a na osnovu prethodnog i definicije rešenja sledi $z^* \geq v^*$. ∎

Posledica 2.1. Neka je $\bar{x}$ dopustivo rešenje primala P i $\bar{\lambda} \geq 0$ dopustivo rešenje duala D i važi $f(\bar{x}) = L^*(\bar{\lambda})$. Tada su redom $\bar{x}$ i $\bar{\lambda}$ optimalna rešenja za P i D.

Posledica 2.2. Neka je $z^* = -\infty$. Tada ne postoji dopustivo rešenje dualnog problema.

Posledica 2.3. Neka je $v^* = +\infty$. Tada ne postoji dopustivo rešenje primalnog problema.

Definicija 2.14. [9] $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ se naziva *sedlasta tačka* Lagranžove funkcije $L(x, \lambda)$ ako $\bar{x} \in X$ i $\bar{\lambda} \geq 0$ i važi

$$L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}) \text{ za sve } x \in X \text{ i } \lambda \geq 0.$$

Teorema 2.18. [9] $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ je sedlasta tačka Lagranžove funkcije ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = L^*(\bar{\lambda})$;

2. $g(\bar{x}) \leq 0$;

3. $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$.

Osim toga, $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ je sedlasta tačka funkcije Lagranža $L(x, \lambda)$ ako i samo ako su $\bar{x}$ i $\bar{\lambda}$ redom, optimalna rešenja primala i duala, takva da je $z^* = f(\bar{x}) = L^*(\bar{\lambda}) = v^*$.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Neka je $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ sedlasta tačka Lagranžove funkcije.
Uslov 1. sledi iz definicije. Dalje prema definiciji sedlaste tačke, za svako $\lambda \geq 0$ važi

$$f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) + \lambda^T g(\bar{x}).$$

Izborom odgovarajuće $\lambda \geq 0$, prethodna nejednakost bi bila narušena u slučaju da je $g(\bar{x}) \geq 0$, pa sledi da je $g(\bar{x}) \leq 0$. Ovim je 2. uslov ispunjen. Birajući $\lambda = 0$ dobija se $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \geq 0$, ali zbog definicije i 2. uslova mora da $\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0$, pa je i 3. uslov ispunjen.
Takođe, iz pretpostavke da su $\bar{x}$ i $\bar{\lambda}$ dopustiva rešenja primala i duala, respektivno i da važi $f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = L^*(\bar{\lambda})$ sledi da je $\bar{x}$ optimalno rešenje za P, a $\bar{\lambda}$ optimalno rešenje za D.

$(\Leftarrow)$ Neka su uslovi 1.-3. zadovoljeni za $\bar{x}$ i $\bar{\lambda} \geq 0$. Tada, prema 1. uslovu sledi $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda})$ za svako $x \in X$. Zatim, 2. i 3. uslov zajedno impliciraju $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) \geq L(\bar{x}, \lambda)$ za svako $\lambda \geq 0$, a na osnovu ovoga je $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ sedlasta tačka funkcija Lagranža.

Neka su sada $\bar{x}$ i $\bar{\lambda}$ optimalna rešenja za P i D, redom. Kako je onda prema Teoremi 2.16.

$$L^*(\bar{\lambda}) \leq f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$$

i kako je

$$z^* = f(\bar{x}) = L^*(\bar{\lambda}) = v^*,$$

sledi da su uslovi 1-3. ispunjeni i $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ je sedlasta tačka funkcije Lagranža. ■

Neka je dat primalni problem

$$\begin{aligned} z^* = \quad & \min_x f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.20}$$

gde su f i $g = (g_1, \ldots, g_m)^T$ konveksne funkcije i $X = \mathbb{R}^n$.

Neka su ispunjeni Kun-Takerovi uslovi za $\bar{x}$ i $\bar{\lambda}$:

(i) $\nabla f(\bar{x}) + \bar{\lambda}^T \nabla g(\bar{x}) = 0$

(ii) $g(\bar{x}) \leq 0$

(iii) $\bar{\lambda} \geq 0$

(iv) $\bar{\lambda}^T \nabla g(\bar{x}) = 0$.

Iz diferencijabilnosti i konveksnosti funkcija sledi da je uslov (i) ekvivalentan sa $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = L^*(\bar{\lambda})$, pa Kun-Takerovi uslovi impliciraju uslove 1.-3. iz prethodne teoreme.

Teorema 2.19. [9] Neka je $X = \mathbb{R}^n$, $f, g_1, \ldots, g_m$ su diferencijabilne i konveksne funkcije i $\bar{x}$ i $\bar{\lambda}$ zadovoljavaju Kun-Takerove uslove. Tada, $\bar{x}$ i $\bar{\lambda}$ su optimalna rešenja za P i D respektivno i važi $f(\bar{x}) = L^*(\bar{\lambda})$.

Konstrukcija dualnog problema:

1. korak: Napraviti funkciju Lagranža

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

2. korak: Napraviti dualnu funkciju

$$\begin{aligned} L^*(\lambda) = \min_x \, & f(x) + \lambda^T g(x) \\ & x \in X \end{aligned}$$

3. korak: Napraviti dualni problem

$$\begin{aligned} D: v^* = \max_\lambda \, & L^*(\lambda) \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

3 Kvadratno programiranje

3.1 Problem kvadratnog programiranja

Nelinearni problem kod kojeg je funkcija cilja kvadratna, a sva ograničenja su zadata *linearnim* funkcijama, naziva se problem kvadratnog programiranja (KP). Ovaj problem se najlakše prepoznaje ukoliko se u funkciji cilja javljaju izrazi x_i^2 i $x_i x_j$. Neka je reč o minimizaciji. Opšti matematički oblik problema kvadratnog programiranja je

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gde je $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrica, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Ako se funkcija $f(x)$ napiše na sledeći način

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

onda se vidi da je $\frac{1}{2}q_{ii}$ koeficijent ispred x_i^2, dok je $\dfrac{1}{2}(q_{ij}x_i x_j + q_{ji}x_j x_i) = q_{ij}x_i x_j$, tj. q_{ij} je koeficijent uz $x_i x_j$. Broj $\frac{1}{2}$ u funkciji cilja treba pisati samo zbog tehničkih razloga, zbog lakšeg računanja. Elementi matrice Q su uvek realni brojevi i važi $q_{ij} = q_{ji}$. U slučaju kad je Q pozitivno semidefinitna, KP problem je problem konveksnog programiranja i rešavanje problema (3.1) je jednostavno. Metod koji se koristi je dobijen modifikacijom poznatog simpleks metoda. Međutim, ako Q nema takvu lepu osobinu, postupak za rešavanje se znatno komplikuje.

KP se može primeniti u optimizaciji portfolija, o čemu će biti reči, zatim kod problema najmanjih kvadrata, kao i u rešavanju problema sekvencijalnog programiranja. Postoje programski paketi koji su jednostavni za upotrebu i koji efikasno rešavaju zadatke ovog tipa, kao što su Excel, MATLAB, LINDO, LINGO, itd.

Neka je dat problem minimizacije i neka je m broj ograničenja, tako da važi $m \leq n$. Dakle, posmatramo KP problem oblika

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

gde je $A = [a]_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $Q = [q]_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i Q je simetrična i pozitivno definitna matrica. KP problem (3.2) je problem konveksnog programiranja pa se mogu primeniti Kun-Takerovi uslovi optimalnosti.
Ekvivalentan oblik problema (3.2) je

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ & a_i^T x - b_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, m \\ & -x_j \leq 0,\ j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ako se uvedu oznake $g_i(x) = a_i^T x - b_i$ za $i = 1, \ldots, m$ i $h_j(x) = -x_j$ za $j = 1, \ldots, n$, Lagranžova funkcija pridružena problemu (3.3) je

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^n \mu_j h_j(x),$$

i važi

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= Qx + c, \\ \nabla g_i(x) &= a_i, \\ \nabla h_j(x) &= -e_j, \end{aligned}$$

gde je e_j j-ti koordinatni vektor. Primenjujući Kun-Takerove uslove optimalnosti dobija se

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^n \mu_j \nabla h_j(x) = 0 \tag{3.4a}$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m \tag{3.4b}$$

$$\mu_j h_j(x) = 0, j = 1, \ldots, n \tag{3.4c}$$

$$\lambda \geq 0, \mu \geq 0 \tag{3.4d}$$

$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m \tag{3.4e}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n. \tag{3.4f}$$

Prethodni sistem (3.4a)−(3.4f) je ekvivalentan sistemu:

$$Qx + c + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(-e_j) = 0 \tag{3.5a}$$

$$\lambda_i(a_i^T x - b_i) = 0,\ i = 1, \ldots, m \tag{3.5b}$$

$$\mu_j x_j = 0,\ j = 1, \ldots, n \tag{3.5c}$$

$$\lambda \geq 0, \mu \geq 0 \tag{3.5d}$$

$$a_i^T x + y_i = b_i,\ i = 1, \ldots, m \tag{3.5e}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, \tag{3.5f}$$

pri čemu su y_i izravnavajuće promenljive koje su uvedene kao

$$y_i = a_i^T x - b_i,$$

za sve $i = 1, \ldots, m$. Ovo je u matričnom zapisu ekvivalentno sa $Ax + y = b$.

Ekivalentan oblik sistema (3.5a)−(3.5f) je

$$-Qx - A^T\lambda + \mu = c \tag{3.6a}$$

$$Ax + y = b \tag{3.6b}$$

$$\lambda^T y = 0, \mu^T x = 0 \tag{3.6c}$$

$$\lambda \geq 0, \mu \geq 0, x \geq 0, y \geq 0. \tag{3.6d}$$

Ako se uvede matrica M i vektori q, w i z kao

$$M = \begin{bmatrix} O & -A \\ A^T & Q \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} y \\ \mu \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix}$$

tada je prva dva uslova (3.6a) i (3.6b) moguće napisati na još jedan način

$$\begin{bmatrix} y \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O & -A \\ A^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix},$$

gde je $O \in \mathbb{R}^{m \times m}$ čiji je svaki elemenat 0. Uslovi u (3.6c) su ekvivalentni sa

$$\begin{bmatrix} y & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} = 0$$

i pomoću novih oznaka se dobija linearni komplementarni problem oblika:

$$\begin{array}{l} w - Mz = q \\ w^T z = 0 \\ w \geq 0, z \geq 0, \end{array} \tag{3.7}$$

koji je ekvivalentan sistemu (3.6a)−(3.6d). U ovom problemu matrica $M \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$, a vektori $w, z,\ q \in \mathbb{R}^{m+n}$.

Iz poslednjeg uslova se vidi da je svaki elemenat vektora w i z svakako nenegativan. Uslov $(w^T z = 0)$ je *uslov komplementarnosti* i implicira da ni na jednoj poziciji i ne može istovremeno da važi $w_i > 0$ i $z_i > 0$, nego da bar jedan od njih na svakom mestu i mora da bude jednak 0. Pošto je prvi uslov linearan, prethodno definisan problem se naziva *linearni komplementarni problem* i ovako izgleda postupak pomoću kojeg se problem KP može svesti na njega. Sada još preostaje rešavanje linearnog komplementarnog problema, tj. određivanje njegovog optimalnog rešenja w^*, z^*, iz kojeg će se dobiti i optimalno rešenje x^* polaznog problema KP.

3.1.1 Komplementarni algoritam

Metod koji se najčešće koristi zbog jednostavnosti za rešavanje problema KP se može naći i pod nazivom Wolfe-ov metod ili Modifikovani simpleks metod. Ideja je do sada uvedenim oznakama konstruisati tablicu na odgovarajući način, zatim uz sitne modifikacije simpleks metoda za LP doći do optimalnog rešenja problema (3.7). Tablica će uvek dati rešenje $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_{m+n}^*)^T$, pa onda još iz njega treba izvući komponente rešenja $x^* = (z_{m+1}^*, \dots, z_{m+n}^*)^T$ polaznog problema KP.

Najpre, ako je $q_i \geq 0$, za $i = 1, \dots, m+n$ odnosno ako je $b, c \geq 0$, onda je rešenje linearnog komplementarnog problema (3.7) trivijalno tj. $w^* = q$ i $z^* = 0$, što implicira da je $x^* = 0$ rešenje početnog problema KP.

Ako je pak $q_i < 0$ za neko $i = 1, \dots, m+n$, dodaje se veštačka promenljiva $z_0 \geq 0$, analogno, kao i kod simpleks metode. Problem (3.7) postaje

$$\begin{aligned} & w - Mz - z_0 e = q \\ & w^T z = 0 \\ & w \geq 0, z \geq 0, z_0 \geq 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

gde je e vektor jedinica istog formata kao w, z i q tj. $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{m+n}$. Dalje, treba napraviti tablicu za ovaj problem. Ona će imati sledeći oblik

$$\left[\overbrace{I}^{w} \;\middle|\; \overbrace{-M}^{z} \;\middle|\; \overbrace{-e}^{z_0} \;\middle|\; q\right].$$

Sledi opis algoritma.

Komplementarni algoritam

Priprema: Prvo, u slučaju da je $q \geq 0$, proces je završen i $w = q, z = 0$ je rešenje linearnog komplementarnog problema, što implicira da je $x = 0$ optimalno rešenje problema KP. Inače, dodati veštačku promenljivu $z_0 \geq 0$ i prikazati sistem u obliku problema (3.8).
Dalje, na osnovu tabele odrediti indeks s tako da je $q_s = \min_i q_i$. Elemenat

koji se nalazi u preseku kolone z_0 i vrste s izabrati za pivot. U bazu ulazi z_0, a w_s napušta bazu. Dakle, z_0 i w_i, $i = 1, \ldots, m+n$, $i \neq s$ su sada bazične promenljive, a w_s je nebazična. Izvršiti elementarne transformacije sa pivotom.
Pošto je w_s postala nebazična promenljiva, važi $w_s = 0$. Zbog uslova komplementarnosti u narednom koraku z_s treba da uđe u bazu.
Neka je $y = z_s$. Preći na glavni deo ovog algoritma.

Glavni deo:

i) Neka je d kolona koja odgovara promenljivoj y.
Ako je $d \leq 0$, to znači da ne postoji optimalno rešenje problema jer je rešenje neograničeno sa donje strane.
Inače, odrediti indeks r tako da je

$$\frac{q_r}{d_r} = \min_i \left\{ \frac{q_i}{d_i} \,\middle|\, d_i > 0 \right\}.$$

Izabrati pivot u preseku vrste r i kolone y. Ako je bazična promenljiva u vrsti r baš z_0, treba preći na iii), a ako to nije slučaj, nastaviti prema ii).

ii) Bazična promenljiva u vrsti r jednaka je w_l za neko $l \neq s$. Izvršiti elementarne transformacije sa pivotom. Promenljiva y ušla je u bazu. Ukoliko je promenljiva koja je upravo izašla iz baze w_l, staviti $y = z_l$, a u slučaju da je ta promenljiva z_l, staviti $y = w_l$. Vratiti se na početak glavnog dela, tj. na korak i) sa tako dobijenom promenljivom y.

iii) Promenljiva z_0 izlazi iz baze (to je i cilj ovog algoritma). Izvršiti elementarne transformacije sa pivotom. Nađeno je rešenje linearnog komplementarnog problema koja je oblika $(w, z)^T$, a time i rešenje polaznog problema KP koja se čita iz njega.

Može se pokazati da se komplementarni algoritam završava posle konačno mnogo koraka ako je Q pozitivno definitna matrica.

Primer 3.1. Rešiti problem

$$\begin{aligned} \min_x \qquad & f(x) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2 + 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Jasno je da je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

a osim toga Q je pozitivno definitna matrica.

Pošto q sadrži i negativne elemente, dodaje se veštačka promenljiva z_0 i problem se zapisuje u obliku (3.8), pa je početna tabela oblika

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	0	0	0	0	2	1	-1	5
w_2	0	1	0	0	0	0	1	1	-1	3
w_3	0	0	1	0	-2	-1	-8	-2	-1	-1
w_4	0	0	0	1	-1	-1	-2	-2	$\boxed{-1}$	-2

Iz

$$q_s = \min_i q_i = \min\{5, 3, -1, -2\} = -2$$

dobija se da je $s = 4$, pa je elemenat u preseku četvrte vrste i kolone z_0 zaokružen i izabran za pivot i to je -1. z_0 ulazi u bazu, w_4 napušta bazu. Posle izvršene elementarne transformacije dolazi se do sledeće tabele, iz kojeg se vidi da je kolona za q postala pozitivna

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1	1	0	0	-1	1	1	4	3	0	7
w_2	0	1	0	-1	1	1	3	3	0	5
w_3	0	0	1	-1	-1	0	-6	0	0	1
z_0	0	0	0	-1	1	1	2	$\boxed{2}$	1	2

w_4 je sada nebazična, tj. $w_4 = 0$ i zato u narednom koraku z_4 treba da postane bazična jer je tako uslov komplementarnosti $w_4 z_4 = 0$ zadovoljen. Sada je $y = z_4$, a d je oznaka za kolonu koja odgovara promenljivoj y, tj.

$$d = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

U nastavku procesa određuje se indeks r koji se dobija iz

$$\frac{q_r}{d_r} = \min_i \left\{ \frac{q_i}{d_i} \,\middle|\, d_i > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{2} \right\} = \frac{2}{2}.$$

Pošto je minimum dostignut za $i = 4$, to se uzima za r, a pivot je $d_4 = 2$, koja je zato zaokružen u prethodnoj tabeli. U ovom slučaju je $r = z_0$, pa prema algoritmu treba preći na iii). Promenljiva z_0 izlazi iz baze i preostaje još samo izvršavanje elementarnih transformacija. Nakon toga, poslednja tabela je oblika

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
w_1										4
w_2										2
w_3										1
z_4										1

Pošto se z_0 nalazi izvan baze, tabela je optimalna. Rešenje linearnog komplementarnog problema se čita iz njega, pa je $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T = (0, 0, 0, 1)^T$, a $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T = (4, 2, 1, 0)^T$, odakle se dobija rešenje polaznog problema $x^* = (0, 1)^T$ i vrednost funkcije cilja u rešenju $f(x^*) = 3$.

3.2 Dualnost u KP

Neka je Q simetrična pozitivno definitna matrica i neka je primalni problem

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + x^T c \\ & Ax \geq b. \end{aligned}$$

Lagranžova funkcija pridružena KP problemu je

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T Q x + x^T c - \lambda^T (Ax - b).$$

Kako je $L^*(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$ i L diferencijabilna po x, rešava se jednačina $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ tj.

$$\begin{aligned} & Qx + c - A^T \lambda = 0 \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Pretpostavka o pozitivnoj definitnosti Q povlači da su njeni karakteristični koreni pozitivni. Ovo dalje znači da je ona regularna, pa postoji njena inverzna matrica Q^{-1}. Tada iz druge jednačine sledi $\tilde{x} = Q^{-1}A^T\lambda - Q^{-1}c$. Uvrštavajući $\tilde{x}$ dobija se

$$L^*(\lambda) = L(\tilde{x}, \lambda) = -\frac{1}{2}(c - A^T\lambda)^T Q^{-1}(c - A^T\lambda) + \lambda^T c,$$

pa je odgovarajući dualni problem

$$\max_{\lambda \geq 0} L^*(\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} - \frac{1}{2}(c - A^T\lambda)^T Q^{-1}(c - A^T\lambda) + \lambda^T b.$$

3.3 Metode unutrašnje tačke

Metode unutrašnje tačke se mogu posmatrati kao modifikacije Njutnove metode za rešavanje problema optimizacije sa ograničenjima tipa nejednakosti. Ove metode se uspešno koriste u rešavanju problema konveksnog, konusnog i kvadratnog programiranja. Metode unutrašnje tačke su tzv. primal-dual metode jer generišu iteracije za primalni i za dualni problem.

Problem KP koji se razmatra je oblika

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + x^Tc \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

gde je Q simetrična, pozitivno semidefinitna matrica, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x, c \in \mathbb{R}^n$ i $b \in \mathbb{R}^m$.

Dualni problem za primalni problem (3.9) je oblika

$$\begin{aligned} \max_{x,y,s} \quad & b^Ty - \frac{1}{2}x^TQx \\ & A^Ty - Qx + s = c \\ & x, s \geq 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

gde su $y \in \mathbb{R}^m$ i $s \in \mathbb{R}^n$ tzv. dualne promenljive.

Primenljivajući Kun-Takerove uslove optimalnosti za posmatrani primalni problem dolazi se do sledećeg tvrđenja.

Teorema 3.1. [1] Neka je x lokalno optimalno rešenje problema (3.9). Tada je x i globalno optimalno rešenje i postoje vektori y i s tako da važe uslovi:

$$A^Ty - Qx + s = c \tag{3.11a}$$

$$s \geq 0 \tag{3.11b}$$

$$x_is_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.11c}$$

Obrnuto, ako x, y, s zadovoljavaju uslove (3.11a)$-$(3.11c) kao i $Ax = b$ i $x \geq 0$, tada je x globalno rešenje za (3.9). Drugim rečima uslovi (3.11a)$-$(3.11c); $Ax = b, x \geq 0$ su potrebni i dovoljni uslovi koji garantuju globalno optimalno rešenje problema KP. Dakle, to su uslovi:

- *Uslovi za primal:* $Ax = b$, $x \geq 0$
- *Uslovi za dual:* $A^Ty - Qx + s - c = 0$, $s \geq 0$

- *Uslovi komplementarnosti:* $x_i s_i = 0$ za svako $i = 1, \dots, n$.

Ako se konstruišu matrice $X = diag(x_1, \dots, x_n)$ i $S = diag(s_1, \dots, s_n)$, prethodni uslovi se mogu zapisati u matričnom obliku $F(x, y, s) = 0$ uz ograničenje tipa nejednakosti, tj.

$$F(x,y,s) = \begin{bmatrix} A^T y - Qx + s - c \\ Ax - b \\ XSe \end{bmatrix} = 0 \qquad (x,s) \geq 0, \tag{3.12}$$

gde je $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ i $F : \mathbb{R}^{2n+m} \to \mathbb{R}^{2n+m}$.

Jasno je da je zbog jednačine $XSe = 0$ reč o nelinearnom sistemu koji se može rešiti Njutnovim postupkom, ali čije rešavanje otežavaju ograničenja tipa nejednakosti. Ideja metoda unutrašnje tačke je da se početna iteracija odredi tako da zadovoljava prva dva bloka ograničenja u F zajedno sa uslovom striktne nenegativnosti, a da ne mora nužno da zadovolji i treći blok. Tako dobijena početna iteracija $(x^0, y^0, s^0)^T$ zbog uslova stroge nenegativnosti leži u unutrašnjosti oblasti definisane ograničenjima, pa se zato ove metode i nazivaju metodama unutrašnje tačke. Dakle, zbog uslova striktne nenegativnosti, tačka ne može da se nađe na granici, nego se nalazi u unutrašnjosti dopustivog skupa.
Nakon određivanja početne iteracije vrši se generisanje novih iteracija $(x^k, y^k, s^k)^T$ koje zadovoljavaju prva dva bloka ograničenja, ali su bliže da zadovolje i treći blok ograničenja.

Definicija 3.1. [1] Skup dopustivih tačaka, ili kraće dopustiv skup je

$$\mathcal{F} = \{\ (x, y, s) \mid A^T y - Qx + s - c = 0,\ Ax - b = 0,\ (x, s) \geq 0\ \}.$$

Definicija 3.2. [1] Skup striktno dopustivih tačaka, ili kraće striktno dopustiv skup je

$$\mathcal{F}^0 = \{\ (x, y, s) \mid A^T y - Qx + s - c = 0,\ Ax - b = 0,\ (x, s) > 0\ \}.$$

Skup $\mathcal{F}^0$ je unutrašnjost skupa $\mathcal{F}$.

Metode unutrašnjih tačaka generišu nove iteracije $(x^k, y^k, s^k)^T$ tako da sve pripadaju skupu $\mathcal{F}^0$.

Za sve algoritme koji se koriste u optimizaciji, dve stvari su jako važne: mera kojom se određuje i upoređuje kvalitet približnog rešenja i sam postupak koji generiše bolje rešenje.

Za generisanje nove iteracije metode unutrašnje tačke koriste Njutnov metod. Posmatramo nelinearan sistem $F(x, y, s) = 0$ bez ograničenja nenegativnosti. Neka je $(x^k, y^k, s^k)^T$ trenutna aproksimacija rešenja. Da bismo odredili narednu iteraciju, najpre rešavamo linearan sistem

$$J(x^k, y^k, s^k) \begin{bmatrix} \triangle x^k \\ \triangle y^k \\ \triangle s^k \end{bmatrix} = -F(x^k, y^k, s^k) \tag{3.13}$$

gde je $J(x^k, y^k, s^k)$ Jakobijan funkcije F, odnosno

$$J(x^k, y^k, s^k) = \begin{bmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^k & 0 & X^k \end{bmatrix}.$$

Rešavanjem ovog sistema dobija se *Njutnov pravac pretraživanja* $(\triangle x^k, \triangle y^k, \triangle s^k)^T$.
Ako je $(x^k, y^k, s^k)^T \in \mathcal{F}^0$, tj. unutrašnja tačka, tada je

$$F(x^k, y^k, s^k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X^k S^k e \end{bmatrix},$$

pa je (3.13) oblika

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^k & 0 & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle x^k \\ \triangle y^k \\ \triangle s^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -X^k S^k e \end{bmatrix}.$$

U standardnom Njutnovom metodu nova iteracija $(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})^T$ se dobija dodavanjem Njutnovog pravca na tekuću iteraciju $(x^k, y^k, s^k)^T$. To se ne preporučuje u ovom slučaju jer ne postoji garancija da će tako dobijena nova iteracija zadovoljavati uslove nenegativnosti, pa se zato uzima broj $\alpha_k \in (0, 1]$ u svakom koraku, te se nova iteracija računa kao

$$(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})^T = (x^k, y^k, s^k)^T + \alpha_k(\triangle x^k, \triangle y^k, \triangle s^k)^T,$$

pod uslovom da važi $x^k + \alpha_k \triangle x^k > 0$ i $s^k + \alpha_k \triangle s^k > 0$.

Primer 3.2. Neka je dat problem

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

i neka je $x^k = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$, $y^k = (\frac{4}{3}, \frac{7}{6})^T$ i $s^k = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)^T$ trenutna iteracija. $(x^k, y^k, s^k)^T \in \mathcal{F}^0$, pošto zadovoljava svako ograničenje dopustivog skupa. Posle određivanja standardnih elemenata Q, c, b i A dobija se Njutnova jednačina u ovoj tački:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle x_1^k \\ \triangle x_2^k \\ \triangle x_3^k \\ \triangle y_1^k \\ \triangle y_2^k \\ \triangle s_1^k \\ \triangle s_2^k \\ \triangle s_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Rešenje sistema je Njutnov pravac pretraživanja

$$\left(\triangle x^k, \triangle y^k, \triangle s^k\right)^T = \left(0, 0, 0, 3, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)^T,$$

pa je sledeća iteracija

$$\left(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}\right)^T = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)^T + \alpha_k \left(0, 0, 0, 3, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)^T$$

koja samo zavisi od izbora parametra α_k. Očigledno, za $\alpha_k = 1$, $s^{k+1} = 0$, pa zato u ovom slučaju treba uzeti $\alpha^k \in (0, 1)$ za koju važi $(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})^T \in \mathcal{F}^0$.

Nažalost, ovaj modifikovani Njutnov metod nije toliko dobar u praksi jer ukoliko su vrednosti α_k jako male, sporo se napreduje ka optimalnom rešenju. Zato se u praksi javila potreba za uvođenjem nekih izmena. Tako su nastale centralne Njutnove metode koje su prikazane u narednom odeljku.

3.3.1 Centralna putanja

Centralna putanja je trajektorija koja pripada skupu $\mathcal{F}^0$, tj. unutrašnjosti dopustivog skupa. Centralna putanja je trajektorija oblika

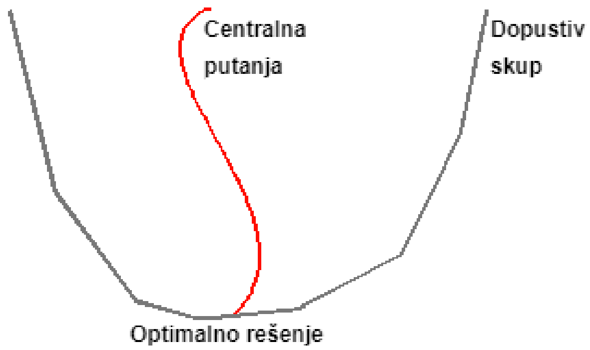
$$\mathcal{C} = \{(x_\tau, y_\tau, s_\tau)^T \mid \tau > 0\}$$

za neki parametar $\tau > 0$, a tačke tog skupa su dobijene kao rešenje sistema

$$F(x_\tau, y_\tau, s_\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}, \ (x_\tau, s_\tau) > 0. \tag{3.14}$$

Uslov $XS = T$, tj. $(x_\tau)_i (s_\tau)_i = \tau$, za svako $i = 1, \ldots, m$ podrazumeva da svaki proizvod odgovarajućih dijagonalnih elemenata matrica X i S bude

jednak konstanti.
Prethodni sistem ima jedinstveno rešenje za svako $\tau > 0$ i implicira da je skup $\mathcal{F}^0$ neprazan. Osim toga, ako je $\mathcal{F}^0$ neprazan, trajektorija $(x_\tau, y_\tau, s_\tau)^T$ konvergira ka optimalnom rešenju problema KP. Jedan primer ovoga je prikazan na Slici 3.1.



Slika 3.1: Centralna putanja

Kad τ teži ka nuli, sistem (3.14) definiše tačke na centralnoj putanji, koje sve bolje aproksimiraju optimalno rešenje sistema (3.12).

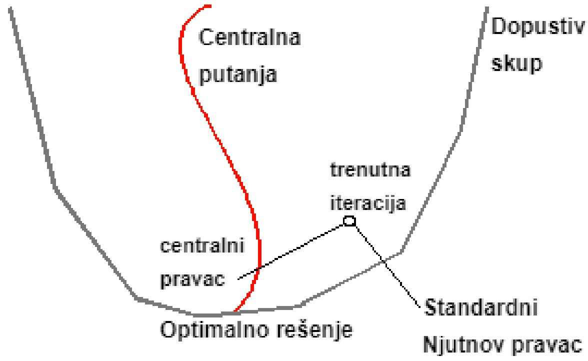
Algoritmi koji prate putanju

Traženje centralnih tačaka je veoma težak i računski složen posao, zbog prirode sistema iz kojeg se one dobijaju. Međutim, relativno se lako dolazi do njihovih aproksimacija i čim je jedna nađena, može se naći sledeća, koja aproksimira neku drugu centralnu tačku za manju vrednost τ. Ponavljanjem se dobijaju tačke koje aproksimiraju centralnu putanju za sve manje vrednosti τ čime se dostiže optimalno rešenje.

Pošto se zna da centralne tačke konvergiraju ka optimalnom rešenju problema KP, njihove aproksimacije takođe konvergiraju ka optimalnom rešenju problema KP. Zapravo iz ove činjenice potiče ideja ovih algoritma, a to je generisanje tačaka koje aproksimiraju centralnu putanju sa što manjom vrednošću parametra τ.

Centralni Njutnov pravac

Upotreba standardnog Njutnovog pravca u metodama unutrašnje tačke može generisati tačku koja leži van dopustivog skupa, pa je zato standardni Njutnov pravac nepraktičan za primenu. Stoga se koriste pravci koji su usmereni prema centralnoj putanji $\mathcal{C}$ i oni se nazivaju centralnim pravcima.



Slika 3.2: Primer Njutnovog pravca i centralnog Njutnovog pravca

Rešava se nelinearan sistem

$$\hat{F}(x, y, s) = \begin{bmatrix} A^T y - Qx + s - c \\ Ax - b \\ XSe - \tau e \end{bmatrix} = 0. \tag{3.15}$$

Centralni Njutnov pravac za rešavanje sistema (3.15) dobija se rešavanjem modifikovane Njutnove jednačine oblika

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^k & 0 & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle x_c^k \\ \triangle y_c^k \\ \triangle s_c^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e - X^k S^k e \end{bmatrix}$$

gde indeks c znači da je u pitanju centralni pravac.

Ključna stvar pri određivanju centralnog Njutnovog pravca je izbor vrednosti parametra τ. U tu svrhu uvodi se oznaka mere dualnosti ili prosečne komplementarnosti

$$\mu(x, s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i s_i = \frac{x^T s}{n},$$

pri čemu važi $\mu(x, s) = 0$ ako i samo ako je $(x, y, s)^T$ optimalna. Cilj je da mera dualnosti $\mu(x, s)$ ima što manju vrednost, jer to znači da se tačka nalazi blizu optimalnog rešenja.

Mera dualnosti za centralnu tačku $(x_\tau, y_\tau, s_\tau)^T$ je

$$\mu(x_\tau, s_\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_\tau)_i (s_\tau)_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau}{n} = \tau,$$

pa skup centralnih tačaka čine sve dopustive tačke za koje važi $\mu(x, s) = \tau$. Za svaku tačku sa ovom osobinom kaže se da je na istom nivou kao i centralna tačka $(x_\tau, y_\tau, s_\tau)^T$. Kada se bira pravac iz trenutne iteracije postoje 3 mogućnosti za traženje aproksimacije centralnih tačaka:

- tačka je na nižem nivou od trenutne, tj. $\tau < \mu(x, s)$,
- tačka je na istom nivou kao trenutna, tj. $\tau = \mu(x, s)$,
- tačka je na višem nivou od trenutne, tj. $\tau > \mu(x, s)$.

Nema smisla izabrati poslednju opciju jer se tako dobija tačka koja je na većem rastojanju od optimalnog rešenja nego što je trenutna iteracija, pa je logično tražiti tačku za koju je $\tau \leq \mu(x, s)$.

Centralni Njutnov pravac se određuje kao rešenje sledećeg sistema

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^k & 0 & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle x_c^k \\ \triangle y_c^k \\ \triangle s_c^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma^k \mu^k e - X^k S^k e \end{bmatrix},$$

gde je parametar σ^k definisan kao mera dualnosti željene centralne tačke i trenutne tačke i važi $\sigma^k \in [0, 1]$. Ako je $\sigma^k = 1$ (tj. $\tau = \mu^k$), tada je u pitanju pravi centralni pravac. U slučaju da je $\sigma^k = 0$ reč je o Afino-skalirajućem pravcu. U praksi je najčešće $\sigma^k \in (0, 1)$.

Sada sledi algoritam uopštene metode unutrašnje tačke.

Algoritam 1 Uopšteni metod unutrašnje tačke

K0: Izabrati $(x^0, y^0, s^0)^T \in \mathcal{F}^0$. Za $k = 0, 1, 2, \dots$ radi

K1: Izabrati $\sigma^k \in [0, 1]$ i izračunati $\mu^k = \dfrac{(x^k)^T s^k}{n}$. Rešiti sistem

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^k & 0 & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle x^k \\ \triangle y^k \\ \triangle s^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma^k \mu^k e - X^k S^k e \end{bmatrix}.$$

K2: Izabrati α_k tako da

$$x^k + \alpha_k \triangle x^k > 0, \quad \text{i} \quad s^k + \alpha_k s^k > 0.$$

Odrediti $(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})^T = (x^k, y^k, s^k)^T + \alpha_k (\triangle x^k, \triangle y^k, \triangle s^k)^T$,
$k = k + 1$.

Primer 3.3. Neka je dat problem iz Primera 3.2. Tada je $\mu^k = \frac{1}{3}$ i neka je $\sigma^k = 1$. Rešavanjem vrlo sličnog sistema kao ranije dobija se centralni Njutnov pravac

$$(\triangle x_c^k, \triangle y_c^k, \triangle s_c^k)^T = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)^T,$$

kojim se generiše sledeća iteracija za odgovarajuće α_k.

Okoline centralne putanje

Metode unutrašnje tačke se međusobno razlikuju u zavisnosti od izbora centralnog parametra σ^k i dužine koraka α_k u svakoj iteraciji. Pažljivim izborom ovih parametara dobijaju se iteracije koje aproksimiraju centralne tačke, što je cilj svih metoda ovog tipa.

Kao što je pomenuto centralne tačke su one tačke skupa $\mathcal{F}^0$ za koje važi uslov $x_i s_i = \tau, \forall i$, za neko $\tau > 0$. Ako je $(x_\tau, y_\tau, s_\tau)^T$ centralna tačka i $(x, y, s)^T$ njena aproksimacija, tada je logično očekivati da razlika $\|(x, y, s)^T - (x_\tau, y_\tau, s_\tau)^T\|$ bude mala.

Zato se skup aproksimacija centralnih tačaka definiše na sledeći način

$$\left\{(x, y, s)^T \in \mathcal{F}^0 \middle| \, \|(x, y, s)^T - (x_\tau, y_\tau, s_\tau)^T\| \leq \varepsilon\right\},$$

za neko malo $\varepsilon \geq 0$. Do ovih tačaka se najlakše dolazi iz sistema (3.15). Tako se dobijaju okoline centralne putanje.
Najpoznatije okoline su:

- $\star$ *norma 2 okolina*

$$\mathcal{N}_2(\theta) = \left\{(x, y, s)^T \in \mathcal{F}^0 \middle| \, \|XSe - \mu e\| \leq \theta\mu, \ \mu = \frac{x^T s}{n}\right\}$$

  za neko $\theta \in (0, 1)$ i

- $\star$ *norma*$-\infty$ *okolina* ili *jednostrana norma* ∞ *okolina*

$$\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma) = \left\{(x, y, s)^T \in \mathcal{F}^0 \middle| \, x_i s_i \geq \gamma\mu, \text{za svako } i, \ \mu = \frac{x^T s}{n}\right\}$$

  za neko $\gamma \in (0, 1)$.

Specijalnom izborom $\theta = 0$ u $\mathcal{N}_2(\theta)$ i $\gamma = 1$ u $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$ dobija se centralna putanja $\mathcal{C}$.

Obe okoline obezbeđuju da se iteracije nalaze u blizini centralne putanje pa su i u njenoj okolini. Norma$-\infty$ okoline su relativno široke, dok su norma 2 okoline uže, pa kod njih ne postoji mogućnost za velike oscilacije u dužini koraka, tj. koraci su kratki. Na osnovu ovih okolina su razvijene dve metode: *kratko-koračni algoritam* koji koristi norma 2 okolinu i *dugo-koračni algoritam* koji se bazira na norma$-\infty$ okolini.

Kratko-koračni algoritam kreće iz proizvoljne tačke $(x^0, \lambda^0, s^0)^T \in \mathcal{N}_2(\theta)$ za neko fiksirano $\theta \in (0, 1)$ i generiše iteracije koje i dalje pripadaju tom skupu. Kako je

$$\|XSe - \mu e\| \leq \theta\mu,$$

prema definiciji norme 2 to je ekvivalentno sa

$$\left\| \frac{XSe - \mu e}{\mu} \right\| \leq \theta,$$

pa je

$$\left\| \frac{XSe - \mu e}{\mu} \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i s_i - \mu}{\mu} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i s_i}{\mu} - 1 \right)^2 \leq \theta^2 < 1.$$

Međutim, čak i ako je θ blizu jedinici, skup tačaka za koje važi da je suma kvadrata manja od 1 je mali, pa je skup $\mathcal{N}_2(\theta)$ veoma uzan tj. sadrži mali deo dopustivog skupa $\mathcal{F}^0$.

Što se tiče drugog pristupa, za male vrednosti broja γ (npr. za $\gamma = 0.001$), okolina oko centralne putanje $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$ je široka i sadrži dobar deo dopustivog skupa $\mathcal{F}^0$. Dugo-koračni algoritam kreće iz početne tačke $(x^0, \lambda^0, s^0)^T \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$, takođe. Za ranije određene σ_{min} i σ_{max} u svakom koraku se uzima $\sigma_k \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$, a pravac pretraživanja $(\triangle x^k, \triangle y^k, s^k)^T$ se dobija rešavanjem istog sistema kao u uopštenom algoritmu. Kod ove metode dužina koraka α_k se uzima proizvoljno u svakoj iteraciji, s ciljem da bude što veća, imajući u vidu da sledeća tačka $(x, y, s)^T$ mora da ostane u skupu $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$.

Sa teoretske tačke gledišta, kratko-koračni algoritam omogućava brzu konvergenciju jer su tačke iz norma 2 okoline blizu centralne putanje. Nasuprot tome, kod dugo-koračnog algoritma tačke mogu biti daleko od centralne putanje što teoretski usporava konvergenciju, ali u praksi se dugo-koračni algoritam pokazao kao uspešniji, pa je iz tog razloga ovde naveden.

Algoritam 2 Dugo-koračni algoritam

K0.: Za dato $\gamma \in (0,1)$, $0 < \sigma_{min} < \sigma_{max} < 1$, izabrati $(x^0, y^0, s^0)^T \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$. Za $k = 0, 1, 2, \ldots$ radi

K1: Izabrati $\sigma^k \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$ i izračunati $\mu^k = \dfrac{(x^k)^T s^k}{n}$. Rešiti sistem

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^k & 0 & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle x^k \\ \triangle y^k \\ \triangle s^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma^k \mu^k e - X^k S^k e \end{bmatrix}.$$

K2: Izabrati α_k tako da

$$(x^k, y^k, s^k)^T + \alpha_k (\triangle x^k, \triangle y^k, \triangle s^k)^T \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma).$$

Odrediti

$$(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})^T = (x^k, y^k, s^k)^T + \alpha_k (\triangle x^k, \triangle y^k, \triangle s^k)^T,$$

$k = k + 1$.

Pristup problema kada je početna tačka izvan dopustivog skupa

Prethodno opisane metode unutrašnje tačke zahtevaju da početna iteracija pripada dopustivom skupu. Pronalaženje dopustive početne iteracije nije uvek jednostavno. Ukoliko je početna iteracija van dopustivog skupa, malim promenama prethodnog linearnog sistema može se rešiti problem.

Neka je dovoljno samo da za početnu tačku $(x^0, y^0, s^0)^T$ važi $x^0 > 0$ i $s^0 > 0$. Prvo, treba rešiti sistem nelinearnih jednačina

$$\hat{F}(x,y,s) = \begin{bmatrix} A^T y - Qx + s - c \\ Ax - b \\ XSe - \tau e \end{bmatrix} = 0$$

tako da važi $x \geq 0$ i $s \geq 0$, pa se Njutnov pravac dobija rešavanjem sistema linearnih jednačina

$$J(x^k, y^k, s^k) \begin{bmatrix} \triangle x^k \\ \triangle y^k \\ \triangle s^k \end{bmatrix} = -\hat{F}(x^k, y^k, s^k)$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^k & 0 & X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle x^k \\ \triangle y^k \\ \triangle s^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c + Qx^k - A^T y^k - s^k \\ b - Ax^k \\ \tau e - X^k S^k e \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Više ne važe pretpostavke $Ax^k = b$ i $A^T y^k - Qx^k + s^k = c$, za $k = 0, 1, 2, \ldots$ pa je zato došlo do promene kod prvog i drugog elemenata sa desne strane jednakosti. Stavljajući rezultat iz (3.16) u sisteme koji se rešavaju kod uopštenog i dugo-koračnog algoritma, dolazi se do novih algoritama koji se upotrebljavaju kada početna iteracija ne pripada dopustivom skupu.

3.4 Rešavanje problema KP pomoću računara

3.4.1 LINDO

LINDO (Linear Interactive and Discrete Optimizer) je softver koji je izuzetno prikladan za rešavanje problema linearnog, celobrojnog i kvadratnog programiranja. Ovi problemi se uglavnom javljaju u trgovini, u distribuciji proizvoda, u istraživanjima i kod upravljanja zalihama. LINDO je odličan alat za rešavanje takvih problema jer se lako instalira i vrlo jednostavno koristi.

LINDO zahteva da svaki model mora da ima funkciju cilja, nepoznate i ograničenja. Pravila za konstruisanje modela su sledeća:

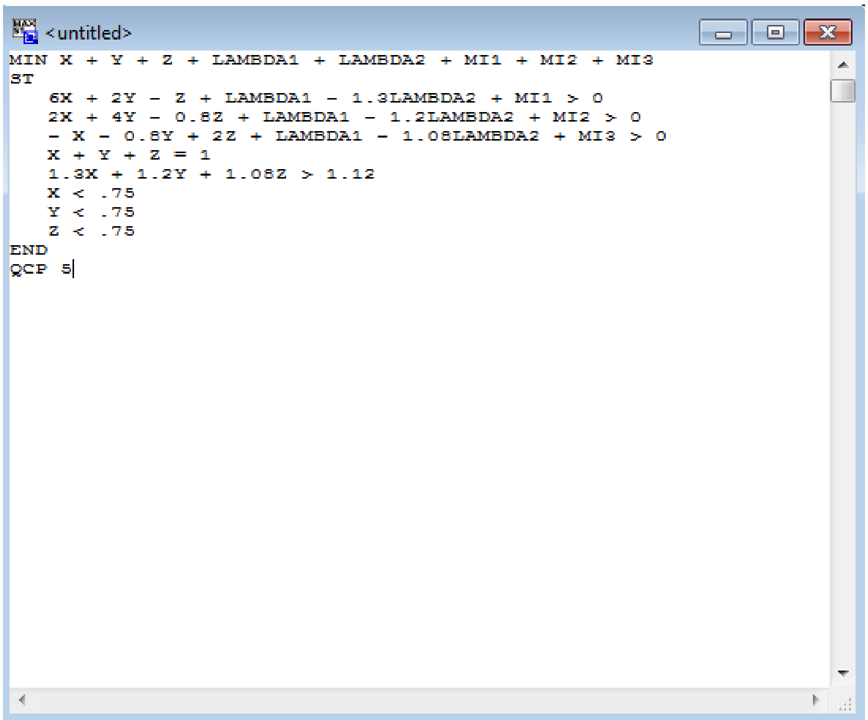
- Nepoznate mogu da budu izrazi koji se sastoje od maksimum 8 karaktera, gde je prvi karakter slovo, a ostali mogu biti proizvoljni sem ovih karaktera: $!,), +, -, =, <, >$.
- LINDO radi sa operatorima $+, -, >, <, =$. Interpretira $>$ kao $\geq$, a $<$ kao $\leq$.
- Posle ! se može pisati komentar bilo gde u kôdu.
- Ako se ne naglasi drugačije, LINDO tretira nepoznate kao nenegativne realne brojeve. Za označavanje slobodne promenljive je potrebna komanda FREE. Dalje, komanda GIN X znači da je X celobrojna, a INT X da je X binarna.

Kôd za rešavanje problema kvadratnog programiranja se unosi u prozor koji se otvara. Pošto je LINDO paket koji je prvenstveno razvijen za rešavanje problema LP, prilikom rešavanja problema KP neophodno je programski kôd uneti u linearnom obliku. Stoga, u prozoru koji se otvara prvo treba uneti linearnu funkciju cilja, koja se po pravilu dobija sumiranjem primalnih i dualnih promenljivih. Zatim treba uneti ograničenja koja takođe moraju biti linearna. Ovo se radi izračunanjem izvoda prvog reda Lagranžove funkcije redom po svim nepoznatima. Naravno, kôd treba da sadrži i sva ostala ograničenja koja ne treba menjati jer su ona kod problema KP u linearnom obliku. Poslednji red koji se piše u prozoru je neophodno uneti jer on daje informaciju programu u kojem redu se nalazi prvo pravo ograničenje koje nije parcijalni izvod Lagranžove funkcije. Ovo je ilustrovano na sledećem primeru.

Primer 3.4. Rešiti problem

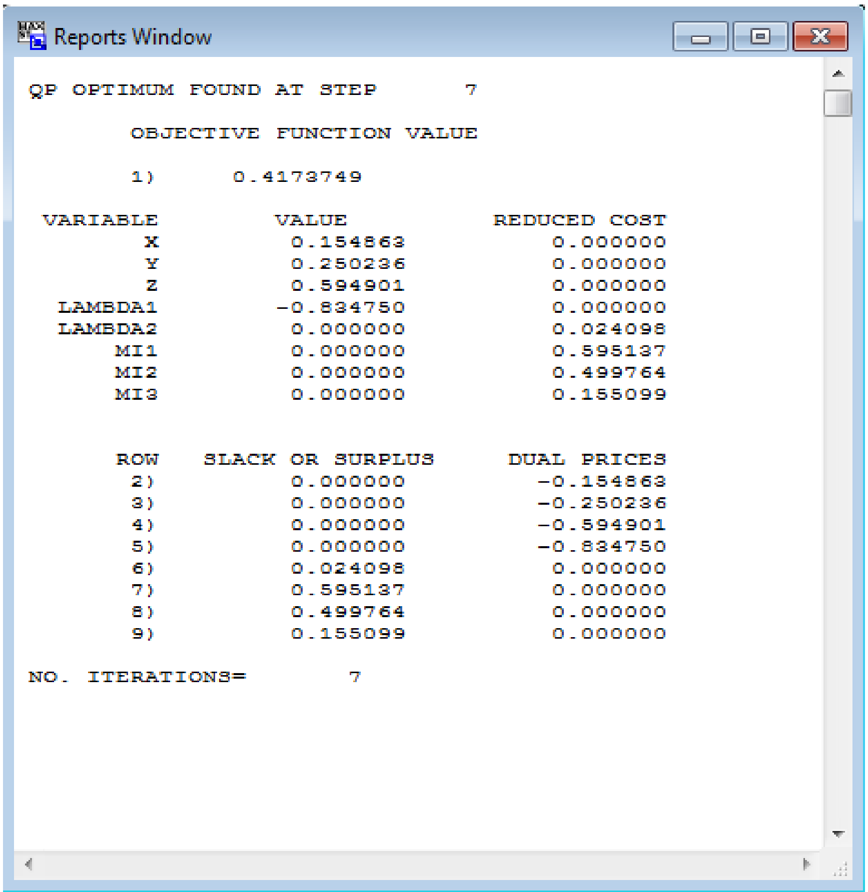
$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - xz - 0.8yz \\
& x + y + z = 1 \\
& 1.3x + 1.2y + 1.08z > 1.12 \\
& x < 0.75 \\
& y < 0.75 \\
& z < 0.75.
\end{aligned}
$$

Kôd je dat na slici 4.



Slika 3.3: Unos podataka

Klikom na **Solve**, pa opet na **Solve** se dobija rešenje:




```
QP OPTIMUM FOUND AT STEP       7

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      0.4173749

 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
        X         0.154863          0.000000
        Y         0.250236          0.000000
        Z         0.594901          0.000000
  LAMBDA1        -0.834750          0.000000
  LAMBDA2         0.000000          0.024098
      MI1         0.000000          0.595137
      MI2         0.000000          0.499764
      MI3         0.000000          0.155099


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000         -0.154863
       3)         0.000000         -0.250236
       4)         0.000000         -0.594901
       5)         0.000000         -0.834750
       6)         0.024098          0.000000
       7)         0.595137          0.000000
       8)         0.499764          0.000000
       9)         0.155099          0.000000

NO. ITERATIONS=       7
```

Slika 3.4: Rezultat

Optimalna vrednost funkcije cilja je $f(x^*, y^*, z^*) = 0.4174$, i ona se dostiže za $x^* = 15,49\%$, $y^* = 25,02\%$, $z^* = 59,49\%$.

Postavlja se pitanje da li je nađeno optimalno rešenje. Jedan način za utvrđivanje ovoga je ispitivanje osobine pozitivne definitnosti. Srećom, LINDO ima ugrađenu komandu za ovo, pa samo treba kliknuti na **Reports/Positive Definite**. Rezultat ovog upita se takođe nalazi u prozoru Reports Window.

```
(SUB)MATRIX IS
POSITIVE     DEFINITE;   RANK =    3 OUT OF     3
```

Slika 3.5

3.4.2 Excel Solver

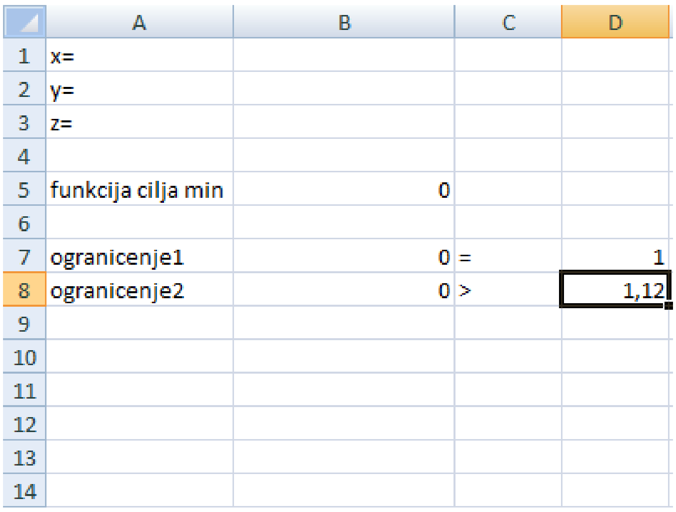
U Excelu je takođe moguće rešiti probleme optimizacije, kako linearnog, tako i nelinearnog programiranja. Kako Excel najčešće postoji na svakom računaru, potrebno je samo aktivirati Solver, što se radi sledećim koracima:

- U **Excel Options**-u treba kliknuti na **Add-Ins**, pa kod **Manage** box izabrati **Excel Add-ins**

- Klikom na **Go** otvara se prozor gde treba kliknuti na **Solver Add-in** pa zatim na **Ok**.

Posle aktiviranja, **Solver** komanda se nalazi u grupi **Analysis** u tabu **Data**.

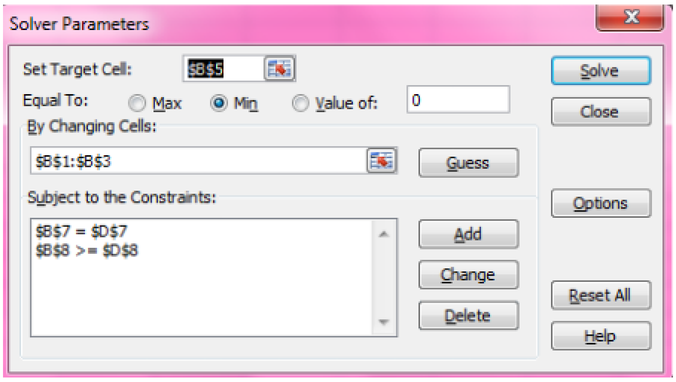
Primer 3.5. Rešiti problem iz Primera 3.4.



	A	B	C	D
1	x=			
2	y=			
3	z=			
4				
5	funkcija cilja min	0		
6				
7	ogranicenje1	0	=	1
8	ogranicenje2	0	>	1,12
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Slika 3.6: Popunjavanje polja

Polja B1-B3 reprezentuju vrednosti za promenljive x, y i z, dok u B5 treba da bude upisano $3*B1\wedge 2+2*B2\wedge 2+B3\wedge 2+2*B1*B2-B1*B2-0,8*B2*B3$. U poljima B7 i B8 se nalaze leve strane (ne)jednakosti ograničenja. Sada, treba kliknuti na **Solver** i tada se otvara prozor koji treba popuniti na dole prikazan način:



Slika 3.7: Popunjavanje Solver-a

Ograničenje se dodaje klikom na **Add**, zatim u polje **Cell Reference** treba izabrati B7, kod drugog B8, a kod **Constraint** D7, odnosno D8. U polje između je moguće izabrati samo oznake $=, \leq$ i $\geq$ (nema $<$ i $>$). Excel automatski stavlja da su promenljive nenegativne. Kada je sve popunjeno, klikom na **Solve** dobija se rešenje problema.

Rešenje dobijeno u Excelu se poklapa sa rešenjem dobijenim u programskom paketu LINDO. Vrednost funkcije cilja se može razlikovati u poslednjim ciframa, usled grešaka zaokruživanja.

3.4.3 MATLAB

MATLAB je programski jezik koji ima široku primenu i koji je poznat među matematičarima. *Optimization Toolbox* je kolekcija funkcija koja između ostalih sadrži i funkciju **quadprog** koja se koristi za rešavanje problema KP. Da se potvrdi da li je Optimization Toolbox instaliran, treba pisati komandu *ver* u komandnu liniju.

Problem KP u MATLAB-u je oblika

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ & Ax \leq b \\ & Aeqx = beq \\ & lb \leq x \leq ub, \end{aligned} \tag{3.17}$$

gde su Q, A, Aeq matrice, a c, b, beq, lb i ub su vektori.

Mogu se zahtevati još neke stvari, ali ako je cilj samo dobiti rešenje x^* i vrednost funkcije cilja f^* onda je kôd oblika

$$[x, fval] = quadprog(Q, c, A, b, Aeq, beq, lb, ub).$$

Ako je problem konveksan, rešenje je globalno, inače je lokalno. Ako se ne stavlja donje ili gornje ograničenje za x, to MATLAB tretira kao da su lb i ub $-\infty$ ili ∞, redom.

Na sledećem primeru je ilustrovana primena ugrađene funkcije **quadprog**.

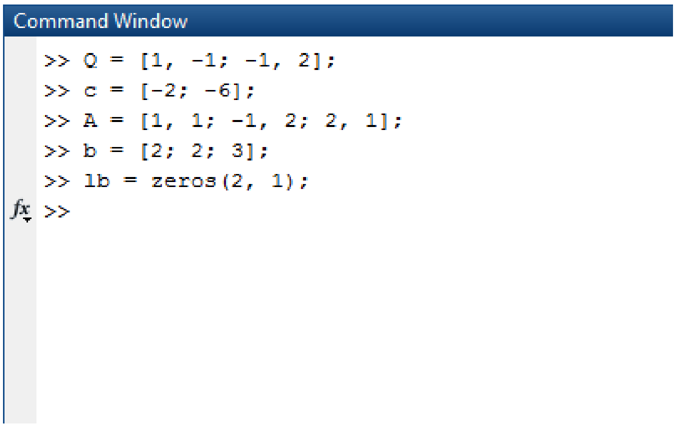
Primer 3.6. Rešiti problem

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 3 \\
& 0 \leq x_1, 0 \leq x_2.
\end{aligned}
$$

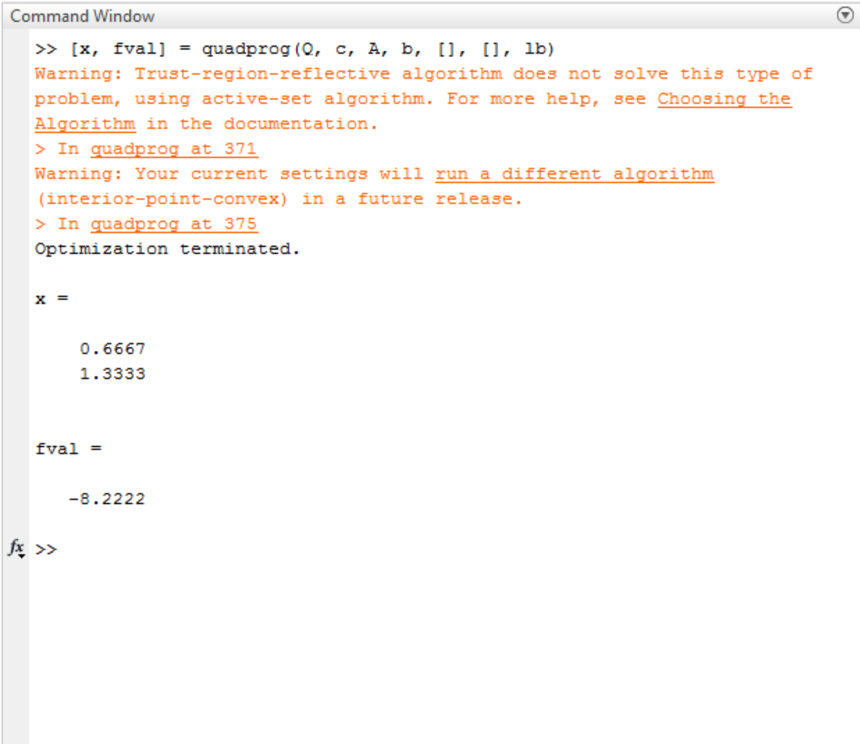
Očigledno je

$$
Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} lb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Unos podataka, MATLAB kôd i rešenje problema su prikazani na Slici 3.8 i Slici 3.9.



Slika 3.8: Unos podataka



Slika 3.9: Rešenje

Optimalno rešenje problema je $x_1^* = 0.6667$ i $x_2^* = 1.3333$, a vrednost funkcije cilja u optimalnom rešenju je $f(x_1^*, x_2^*) = -8.2222$.

4 Optimizacija portfolija

4.1 Markovicov model

Optimizacija portfolija je jedna izuzetno važna oblast u finansijama s kojom se investitori i analitičari vrlo često bave. Matematički modeli problema optimizacije portfolija su uglavnom konveksni problemi u obliku kvadratnog programiranja, pa se na njih mogu primeniti metode i algoritmi koji su opisani u ovoj tezi.

Posmatra se investitor sa svojom bogatstvom. Neka je dat skup $(s_1, \dots, s_n)^T$ sastavljen od n raspoloživih investicija, koji podrazumeva svako ulaganje u cilju ostvarivanja profita. Ulaganja mogu biti u vidu akcija, obveznica, ali obuhvataju i nekretnine, zemljište, itd. Intuitivno je jasno da svaki ulagač koji izađe na tržište konstruiše svoj portfolio tako da minimizira rizik uz željeni ostvareni profit, ili, da maksimizira profit do neke granice rizika. Ova odluka uvek zavisi od toga šta mu je lično važnije. Jasno je da što veći nivo prinosa želi da postigne, tako raste i rizik sa kojim se suočava.

Elementi portfolija (osim državnih obveznica i slično) su rizična ulaganja čija buduća vrednost, a samim tim ni prinosi nisu unapred poznati i zato su oni modelirani kao slučajne promenljive sa određenom raspodelom (najčešće normalna raspodela). Aktive su okarakterisane stopom prinosa tj. prinosom (u oznaci r_i) i rizikom, odnosno varijansom (σ_i^2). Kako je prinos okružen stopom neizvesnosti, potrebno ga je proceniti. Zato se računa očekivani prinos u praksi koji se obično dobija iz istorijskih podataka. Varijansa za i-tu aktivu meri odstupanje prinosa od očekivane vrednosti. Kovarijansa, označena sa σ_{ij} meri povezanost elemenata i i j, i ona je, takođe, skoro uvek prisutna.

Neka je portfolio označen vektorom $x_\pi = (x_1, \dots, x_n)^T$ gde je komponenta x_i težinski koeficijent i predstavlja udeo i-te aktive u portfoliju. Vektori prinosa, očekivanih prinosa i matrica varijanse i kovarijanse dati su sa

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \quad E(r) = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

Očigledno, kako je $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ za svako $i, j \in 1, \dots, n$, matrica Q je simetrična.

Kako je prinos r_π portfolija

$$r_\pi = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r^T x,$$

očekivani prinos μ_π je

$$\mu_\pi = E[r_\pi] = E\left[\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[r_i] x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \mu^T x.$$

Varijansa se računa kao srednje kvadratno odstupanje, odnosno

$$\sigma_\pi^2 = E[(r_\pi - \mu_\pi)^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = x^T Q x.$$

Kako ona predstavlja rizik, nikad nije negativna, iz čega sledi da je Q pozitivno semidefinitna matrica. Međutim, ovde se pretpostavlja da je Q pozitivno definitna, što je u realnosti tačno.

Dakle, traži se optimalni portfolio tako da se minimizira varijansa pod uslovom da ostvaren prinos bude veći ili jednak od neke vrednosti R. Neka je e jedinični vektor dimenzije n. Matematički zapis ovog problema je u opštem obliku problem kvadratnog programiranja

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} x^T Q x \\ & \mu^T x \geq R \\ & Ax = b \\ & Cx \geq d. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Drugo ograničenje je najčešće u formi $e^T x = 1$ i odnosi se na kapital, govori o tome da se ulaže celo bogatstvo, dok je treći uslov uglavnom $x \geq 0$ i zabranjuje kratku poziciju.

Sa druge strane, pošto u finansijama uvek postoji neki stepen neizvesnosti, nije ga moguće potpuno eliminisati, nego je potrebno naučiti kako se upravlja rizikom. Zato se koristi i drugačiji oblik kvadratnog programiranja, gde se maksimizira prinos uz uslov da rizik ne prekorači unapred datu granicu σ_π^2, pa je model oblika

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \mu^T x \\ & x^T Q x \leq \sigma_\pi^2 \\ & Ax = b \\ & Cx \geq d. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Prethodna dva modela se mogu kombinovati u jednom, tako da se prinos i rizik portfolija istovremeno pojave u funkciji cilja. Tako se dolazi do još jednog načina formulisanja zadatka

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & \frac{1}{2}x^T Q x - \kappa \mu^T x \\ & Ax = b \\ & Cx \geq d, \end{aligned} \tag{4.3}$$

gde je κ^{-1} koeficijent averzije prema riziku i pokazuje koliko je investitor odbojan prema riziku. Iskazuje ličnu preferenciju, i u zavisnosti od toga koliki je, prinos je manje ili više značajan za njega.

Potrebno je opisati još dva pojma u svetu portfolija. *Skup dopustivih portfolija* podrazumeva svaki portfolio koji se može sastaviti od investicija koje stoje na raspolaganju,a njegov podskup je *skup efikasnih portfolija* koji obuhvata svaku kolekciju elemenata za koju važi da ima najveći očekivani prinos između onih koji imaju isti nivo rizika sa jedne strane i sa druge, da ima najmanju varijansu (standardnu devijaciju) između onih koji donose isti prinos.

4.2 Primer - Konstruisanje optimalnog portfolija pomoću Markovicovog modela u obliku KP

Izabrano je prvih 5 akcija iz poznate liste američkog $S\&P$ 500 indeksa. Razmatran je period od 10 godina i podaci su uzeti kvartalno. U sledećoj tabeli su date korigovane istorijske cene [1] *(Adjusted Close)* zbog eventualnih dividendi za neke aktive. Za 4. aktivu cene do maja 2012. godine nisu dostupne.

	MSFT	AAPL	AMZN	FB	GOOGL
2010.01.01	22.12	23.82	125.41		265.24
2010.04.01	24.08	32.38	137.1		263.11
2010.07.01	20.45	31.9	117.89		242.67
2010.10.01	21.24	37.32	165.23		307.16
2011.01.01	22.22	42.08	169.64		300.48
2011.04.01	20.89	43.42	195.81		272.32
2011.07.01	22.23	48.42	222.52		302.15
2011.10.01	21.74	50.2	213.51		296.62
2012.01.01	24.29	56.61	194.44		290.35
2012.04.01	26.51	72.42	231.9		302.73
2012.07.01	24.56	75.74	233.3	21.71	316.8
2012.10.01	23.94	74.14	232.89	21.11	340.49
2013.01.01	23.22	56.99	265.5	30.98	378.22
2013.04.01	28.23	55.72	253.81	27.77	412.7
2013.07.01	27.35	57.32	301.22	36.8	444.32
2013.10.01	30.63	66.65	364.03	50.21	515.81
2014.01.01	32.98	64.2	358.69	62.57	591.08
2014.04.01	35.47	76.13	304.13	59.78	534.88
2014.07.01	38.16	86.82	312.99	72.65	579.55
2014.10.01	41.77	98.57	305.46	74.99	567.87
2015.01.01	36.17	107.39	354.53	75.91	537.55
2015.04.01	43.86	115.17	421.78	78.77	548.77
2015.07.01	42.38	112.09	536.15	94.01	657.5
2015.10.01	48.09	110.93	625.9	101.97	737.39
2016.01.01	50.67	90.75	587	112.21	761.35
2016.04.01	46.19	87.86	659.59	117.58	707.88
2016.07.01	52.87	98.27	758.81	123.94	791.34
2016.10.01	56.24	107.65	789.82	130.99	809.9
2017.01.01	61.09	115.65	823.48	130.32	820.19
2017.04.01	65.08	137.49	924.99	150.25	924.52
2017.07.01	69.51	142.94	987.78	169.25	945.5
2017.10.01	79.95	163.1	1105.28	180.06	1033.04
2018.01.01	91.78	162.13	1450.89	186.89	1182.22

[1] Podaci su uzete sa sajta https://finance.yahoo.com.

2018.04.01	90.77	160.68	1566.13	172	1018.58
2018.07.01	103.4	185.73	1777.44	172.58	1227.22
2018.10.01	104.52	214.36	1598.01	151.79	1090.58
2019.01.01	102.63	163.59	1718.73	166.69	1125.89
2019.04.01	128.89	198.08	1926.52	193.4	1198.96
2019.07.01	134.99	211.1	1866.78	194.23	1218.2
2019.10.01	142.49	247.43	1776.66	191.65	1258.8
2020.01.01	169.97	308.78	2008.72	201.91	1432.78

Tabela 4.1: Cene akcija u periodu 2010-2020

U nastavku su date stope prinosa za određene datume. One su izračunate preko formule

$$r_{it} = \frac{C_{i,t}}{C_{i,t-1}} - 1$$

gde je C oznaka za cenu, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ označava koja je investicija u pitanju, a t je vremenski trenutak (početak nekog meseca) u posmatranom periodu. Prinosi za januar 2010. godine su dobijani koristeći cene za prethodni mesec koje ovde nisu navedene.

	MSFT	AAPL	AMZN	FB	GOOGL
2010.01.01	2.08%	1.88%	5.56%		-1.15%
2010.04.01	8.86%	35.94%	9.32%		-0.80%
2010.07.01	-15.07%	-1.48%	-14.01%		-7.77%
2010.10.01	3.86%	16.99%	40.16%		26.58%
2011.01.01	4.61%	12.75%	2.67%		-2.17%
2011.04.01	-5.99%	3.18%	15.43%		-9.37%
2011.07.01	6.41%	11.52%	13.64%		10.95%
2011.10.01	-2.20%	3.68%	-4.05%		-1.83%
2012.01.01	11.73%	12.77%	-8.93%		-2.11%
2012.04.01	9.14%	27.93%	19.27%		4.26%
2012.07.01	-7.36%	4.58%	0.60%		4.65%
2012.10.01	-2.52%	-2.11%	-0.18%	-2.76%	7.48%
2013.01.01	-3.01%	-23.13%	14.00%	46.76%	11.08%
2013.04.01	21.58%	-2.23%	-4.40%	-10.36%	9.12%
2013.07.01	-3.12%	2.87%	18.68%	32.52%	7.66%
2013.10.01	11.99%	16.28%	20.85%	36.44%	16.09%
2014.01.01	7.67%	-3.68%	-1.47%	24.62%	14.59%
2014.04.01	7.55%	18.58%	-15.21%	-4.46%	-9.51%
2014.07.01	7.58%	14.04%	2.91%	21.53%	8.35%
2014.10.01	9.46%	13.53%	-2.41%	3.22%	-2.02%
2015.01.01	-13.41%	8.95%	16.06%	1.23%	-5.34%
2015.04.01	21.26%	7.24%	18.97%	3.77%	2.09%
2015.07.01	-3.37%	-2.67%	27.12%	19.35%	19.81%

2015.10.01	13.47%	-1.03%	16.74%	8.47%	12.15%
2016.01.01	5.36%	-18.19%	-6.22%	10.04%	3.25%
2016.04.01	-8.84%	-3.18%	12.37%	4.79%	-7.02%
2016.07.01	14.46%	11.85%	15.04%	5.41%	11.79%
2016.10.01	6.37%	9.55%	4.09%	5.69%	2.35%
2017.01.01	8.62%	7.43%	4.26%	-0.51%	1.27%
2017.04.01	6.53%	18.88%	12.33%	15.29%	12.72%
2017.07.01	6.81%	3.96%	6.79%	12.65%	2.27%
2017.10.01	15.02%	14.10%	11.90%	6.39%	9.26%
2018.01.01	14.80%	-0.59%	31.27%	3.79%	14.44%
2018.04.01	-1.10%	-0.89%	7.94%	-7.97%	-13.84%
2018.07.01	13.91%	15.59%	13.49%	0.34%	20.48%
2018.10.01	1.08%	15.41%	-10.09%	-12.05%	-11.13%
2019.01.01	-1.81%	-23.68%	7.55%	9.82%	3.24%
2019.04.01	25.59%	21.08%	12.09%	16.02%	6.49%
2019.07.01	4.73%	6.57%	-3.10%	0.43%	1.60%
2019.10.01	5.56%	17.21%	-4.83%	-1.33%	3.33%
2020.01.01	19.29%	24.79%	13.06%	5.35%	13.82%

Tabela 4.2: Kvartalni prinosi u periodu 2010-2020

U modeliranju finansijskih pojava najviše je preferirana geometrijska sredina u traženju prosečne vrednosti. Tako su izračunati pojedinačni očekivani prinosi koji su dati funkcijom

$$\mu_i = \left(\prod_{t=1}^{T} (1 + r_{it}) \right)^{\frac{1}{T}} - 1,$$

gde je $T = 41$ ($T = 30$ kod 4. elemenata) u ovom slučaju. Procene za prinose su date u narednoj tabeli.

	MSFT	AAPL	AMZN	FB	GOOGL
geom. sredina	5.15%	6.5%	7.14%	7.72%	4.17%

Tabela 4.3: Očekivani prinosi

Sledeći korak je određivanje matrice Q. Elementi su izračunati pomoću formule

$$cov(r_i, r_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j),$$

za svako $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dijagonalni elementi predstavljaju rizik odgovarajuće aktive. Kovarijansna matrica je data u narednoj tabeli.

Q	MSFT	AAPL	AMZN	FB	GOOGL
MSFT	0.0083	0.0045	0.0015	-0.0013	0.0033
AAPL	0.0045	0.0148	0.0011	-0.0041	0.0004
AMZN	0.0015	0.0011	0.0140	0.0062	0.0064
FB	-0.0013	-0.0041	0.0062	0.0177	0.0059
GOOGL	0.0033	0.0004	0.0064	0.0059	0.0082

Tabela 4.4: Kovarijansna matrica

Ispitivana je linearna zavisnost elemenata koristeći Pirsonov koeficijent linearne korelacije koji se računa prema formuli

$$\rho_{ij} = \frac{cov(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j},$$

gde je sa σ_i označena standardna devijacija, ili, ekvivalentno, kvadratni koren varijanse za i-tu aktivu. Podaci se nalaze u Tabeli 4.5.

korelacija	MSFT	AAPL	AMZN	FB	GOOGL
MSFT	1	0.4033	0.136	-0.111	0.3991
AAPL	0.4033	1	0.0798	-0.2553	0.0321
AMZN	0.136	0.0798	1	0.3922	0.5949
FB	-0.111	-0.2553	0.3922	1	0.4876
GOOGL	0.3991	0.0321	0.5949	0.4876	1

Tabela 4.5: Koeficijenti korelacije između elemenata

Primećuje se da postoji zavisnost između prinosa pojedinačnih aktiva i da je linearna povezanost između svaka dva skoro svugde pozitivna. Taj broj je prilično velik između 3. i 5. elemenata.

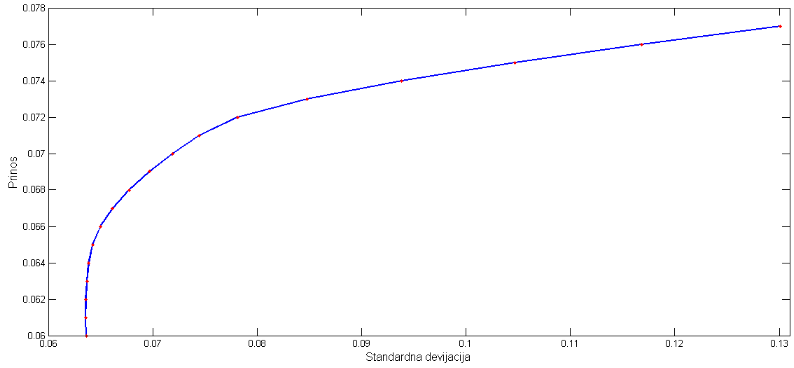
Cilj je minimizirati rizik uz određeni stepen prinosa R, tako da se investira celo bogatstvo i zabrani kratka prodaja. Dakle, matematički model je oblika:

$$\begin{aligned}
\min_x \quad f(x) \; &= \; 0.0083x_1^2 + 2\cdot 0.0045x_1x_2 + 2\cdot 0.0015x_1x_3 \\
&-2\cdot 0.0013x_1x_4 + 2\cdot 0.0033x_1x_5 + 0.0148x_2^2 \\
&+2\cdot 0.0011x_2x_3 - 2\cdot 0.0041x_2x_4 + 2\cdot 0.0004x_2x_5 \\
&+0.014x_3^2 + 2\cdot 0.0062x_3x_4 + 2\cdot 0.0064x_3x_5 \\
&+0.0177x_4^2 + 2\cdot 0.0059x_4x_5 + 0.0082x_5^2 \\
\text{s.t.} \quad & 0.0515x_1 + 0.065x_2 + 0.0714x_3 \\
&+0.0772x_4 + 0.0417x_5 \geq R \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Simetričnost i pozitivna definitnost matrice Q i linearnost funkcije ograničenja u skladu sa teorijom postavljenom u ranijim sekcijama obezbeđuju postojanje optimalne tačke x_π. Rešavanjem problema sa $R \geq 5\%$, MATLAB pronalazi optimalno rešenje
$x_\pi = (0.345268,\ 0.226852,\ 0.076779,\ 0.243401,\ 0.107699)^T$ koje donosi prinos 6.129%, a njegov rizik je 0.4041%. Za R između 6% i 7.7% softver može da nađe optimalno rešenje, stoga, prinosi i varijanse i sastav tako generisanog portfolija sa razmakom od 0.001 za R su dati u narednoj tabeli. Na Slici 4.1 su ovi portfoliji prikazani u $\sigma - r-$ravni. Za $R \geq 7.8\%$ ne postoji dopustivo rešenje ovog problema.

prinos	**rizik**	**MSFT**	**AAPL**	**AMZN**	**FB**	**GOOGL**
0.06	0.00405	0.3382	0.2226	0.0594	0.2264	0.1535
0.061	0.00404	0.3437	0.2259	0.0729	0.2396	0.118
0.062	0.004034	0.3491	0.2292	0.0863	0.2528	0.0825
0.063	0.004056	0.3546	0.2325	0.0998	0.266	0.047
0.064	0.00408	0.3601	0.2358	0.1133	0.2792	0.0116
0.065	0.004126	0.3268	0.2522	0.1249	0.2961	0
0.066	0.004224	0.2748	0.2748	0.1356	0.3149	0
0.067	0.004378	0.2227	0.2974	0.1462	0.3336	0
0.068	0.004588	0.1706	0.32	0.1569	0.3524	0
0.069	0.004852	0.1186	0.3426	0.1676	0.3712	0
0.07	0.005172	0.0665	0.3653	0.1783	0.3899	0
0.071	0.005547	0.0145	0.3879	0.1889	0.4087	0
0.072	0.006104	0	0.3409	0.1795	0.4796	0
0.073	0.007181	0	0.2671	0.1623	0.5706	0
0.074	0.008798	0	0.1933	0.1451	0.6616	0
0.075	0.010954	0	0.1195	0.1279	0.7526	0
0.076	0.01365	0	0.0457	0.1107	0.8436	0
0.077	0.01693	0	0	0.0345	0.9655	0

Tabela 4.6: Raspored budžeta za određeni prinos i rizik



Slika 4.1: Skup efikasnih portfolija

4.3 Optimizacija portfolija velikog obima

Pretpostavimo da postoji ogroman skup mogućih ulaganja na tržištu. U cilju maksimiziranja svog profita investitor može jednostavno da uloži sav svoj novac u onaj portfolio koji donosi najveći očekivani profit, ali treba i da plati cenu u smislu velikog rizika. To većina investitora ne radi jer hoće da postignu da portfolio bude *diverzifikovan*. Ovaj pojam ima veliki značaj u finansijama. Podrazumeva podelu rizika ulaganja, što se vrši investiranjem u što više hartija od vrednosti. Zahvaljujući ovome, rezultat investiranja na kraju perioda ne zavisi od kretanja cena jedne aktive.

Na početku perioda niko ne zna sa sigurnošću šta će se desiti npr. za godinu dana ne samo sa sopstvenim investicijama, nego i sa celim sektorom u proizvodnji. Princip "ne staviti sve u jednu korpu" asocira na to da ne treba trošiti celo bogatstvo na aktivu jednog tipa nego na što više. Takođe, treba uzeti u obzir kolika i kakva je povezanost između pojedinačnih ulaganja i kojom merom kretanje vrednosti cene jednog utiče na promenu vrednosti cene drugog elemenata. Ako je kovarijansa između elemenata pozitivna, to znači da se njihovi prinosi kreću u istom smeru. Ovo znači da kada stopa jednog prekorači očekivanu stopu, stopa drugog ima istu tendenciju, i to je razlog zbog čega se ne savetuje staviti aktive sa pozitivnim kovarijansom u isti portfolio.

Međutim, ništa ne sugeriše da će portfolio do kojeg se dolazi Markovicovim modelom biti diverzifikovan. Iskustvo pokazuje da su tako dobijeni težinski koeficijenti veliki za neke aktive, a u slučaju kada je dozvoljena kratka pozicija, oni imaju preveliko učešće u portfoliju. Zbog ovih razloga potrebno je definisati još neka ograničenja na udele pojedinačnih aktiva. Istovremeno treba voditi računa o tome da novih uslova ne bude previše, jer to komplikuje račun i samim tim rešavanje problema čini skupljim.

Moguće je ograničiti svako x_i npr. sa nekom vrednošću m i tako obezbediti da ne bude potrošen veći deo novca od m ni za jednu aktivu. To se može zapisati kao

$$x_i \leq m \quad \text{za svako} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ako su ulaganja kategorizovana po sektorima (ukupno k sektora), može se zahtevati da se ni u jedan sektor ne investira veći deo kapitala od npr. m_k. Dakle,

$$\sum_{\text{i u sektoru k}} x_i \leq m_k.$$

4.3.1 Troškovi transakcije

Troškovi transakcije obuhvataju kupovinu i prodaju investicija koje u realnom svetu postoje i trebalo bi ih razmatrati prilikom određivanja optimalnog portfolija. Takođe, preporučuje se praćenje dešavanja u svetu i vršenje rebalansiranja portfolija povremeno u skladu sa aktuelnim informacijama. Prema tome, posle nekog perioda je možda potrebno zameniti neku investiciju drugom jer ona više ne donosi dovoljan profit ili postaje suviše volatilna. Pošto su troškovi transakcije kod kupovine i prodaje aktiva uvek prisutni i pošto je matrica varijanse i kovarijanse u opštem slučaju bliska singularnoj matrici, ne savetuje se velika promena u sastavu portfolija.

Neka y_i označava količinu koja se kupuje, a z_i prodatu količinu za i-tu aktivu. Ako je x^0 oznaka za početnu imovinu, a x za novu, i ako se doda ograničenje da razlika između početnog i novog stanja ne bude veća od h, sledi

$$\begin{aligned} x_i - x_i^0 &\leq y_i, \ y_i \geq 0, \\ x_i^0 - x_i &\leq z_i, \ z_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i + z_i) &\leq h. \end{aligned}$$

Dalje, neka je t_i trošak koji treba isplatiti kod kupovine elemenata i, a t_i' trošak koji se stvara u prodaji istog. Uključivanjem prethodnih uslova u model, rebalansirani portfolio se dobija traženjem rešenja sledećeg, dosta složenijeg problema:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \\ & \sum_{i=1}^{n}(\mu_i x_i - t_i y_i - t_i' z_i) \geq R \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_i - x_i^0 \leq y_i, \ \text{za svako } i = 1, \ldots, n \\ & x_i^0 - x_i \leq z_i, \ \text{za svako } i = 1, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, \ \text{za svako } i = 1, \ldots, n \\ & z_i \geq 0, \ \text{za svako } i = 1, \ldots, n \\ & x_i \in \mathbb{R}, \ \text{za svako } i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pošto je u ovom radu reč o najjednostavnijim modelima KP za konstruisanje portfolija, zanemarićemo troškove transakcije.

4.3.2 Procenjivanje parametra μ_i, σ_i^2, σ_{ij}

Najjednostavniji pristup određivanja ovih parametara (kao što je rađeno u primeru) je formiranje vremenskih serija koje se sastoje od cena, pa posle i prinosa na osnovu istorijskih podataka. Međutim, do značajnog pomeranja očekivanog prinosa i varijanse može da dovede veći uspon ili pad cena u samo jednom od prethodnih perioda. Stoga se za procenjivanje parametara koristi i *CAPM (Capital Asset Pricing Model)* koji deli rizik na tzv. sistematski i nesistematski deo. Sistematski rizik, koji obuhvata promenu likvidnosti i kamatnih stopa, na primer, je vezan za tržište i on se ne može izbeći, uvek je prisutan. Nesistematski (finansijski, investicioni) deo rizika, nasuprot tome, može se potpuno diverzifikovati.

Neka je sa r_{it} označen prinos aktive i za vremenski period t, gde $i = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$. Neka je r_{mt} oznaka za očekivani prinos tržišnog portfolija, a r_{ft} za stopu bez rizika u posmatranom periodu. Potrebne su β_i za svaku aktivu do koje se dolazi iz CAP formule

$$r_{it} = r_{ft} + \beta_i(r_{mt} - r_{ft}) + \epsilon_{it},$$

gde ϵ_{it} predstavlja grešku zaokruživanja koja nastaje za i-tu aktivu, a β_i meri sistematski rizik i daje informaciju o ponašanju i-te aktive u odnosu na tržište. Pomoću tih vrednosti se računa očekivani prinos iz jednačine

$$\mu_i = E(r_f) + \beta_i(E(r_m) - E(r_f))$$

i posle se dobijaju varijanse i kovarijanse iz relacija

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2, \\ \sigma_{ij} &= \beta_i \beta_j \sigma_m^2, \text{ za svako } i \neq j, \end{aligned}$$

gde je σ_m^2 varijansa tržišnog portfolija, a $\sigma_{\epsilon_i}^2$ varijansa slučajne promenljive ϵ_{it}.

4.4 Blek-Litermanov model

Američki ekonomisti Blek (Black) i Literman (Litterman) tvrde da je istovremeno važno uzeti u obzir subjektivno mišljenje investitora o očekivanoj vrednosti i tržišnoj ravnoteži. Iz ovog razloga posmatraju proizvod dve normalne raspodele verovatnoća, gde je jedna vezana za tržište, a druga za investitora, pa μ uzimaju iz toga. Prva normalna raspodela je okarakterisana očekivanjem π i varijansom τQ, koja se, pošto je τ mali broj, malo razlikuje od kovarijansne matrice Q. Sa druge strane, mišljenje investitora je matematički predstavljeno u obliku

$$P\mu = q + \epsilon,$$

gde su $P \in \mathbb{R}^{k \times n}$ i $q \in \mathbb{R}^k$ različiti za svakog ulagača u zavisnosti od njihove informacije o budućnosti, a ϵ je vektor iz normalne raspodele sa očekivanjem 0 i kovarijansnom matricom $\Omega = [\omega]_{k \times k}$ koja je dijagonalna. Što je njegovo mišljenje sigurnije, odgovarajući elemenat je manji.

Ideja njihovog posmatranja dolazi iz pretpostavke da prinos i-te aktive može da se napiše kao zbir premije za rizik π_i, zajedničkog faktora $\gamma_i Z$ i nekog poremećaja na tržištu ν_i, odnosno

$$r_i = \pi_i + \gamma_i Z + \nu_i.$$

Neka μ ima normalnu raspodelu sa parametrima π i τQ, a mišljenje investitora je izraženo jednačinom $P\mu = q$ sa sigurnošću od 100%. Tada se $E(\mu)$ dobija iz problema

$$\begin{aligned} \min_{\mu} \quad & (\mu - \pi)^T (\tau Q)^{-1} (\mu - \pi) \\ & \mu_A - \mu_B = q. \end{aligned}$$

Rešenje ovog problema je

$$\bar{\mu} = \pi + (\tau Q) P^T [P(\tau Q) P^T]^{-1} (q - P\pi).$$

Naravno, retko se može sa tolikom sigurnošću formirati procena o budućnosti, pa se druga jednačina modifikuje u obliku $P\mu = q + \epsilon$. Ovako se dolazi do očekivanog prinosa $\bar{\mu}$ koji se sada ne bazira samo na informacijama iz prošlosti, pa oni to koriste u procesu određivanja optimalnog portfolija. Dakle,

$$\bar{\mu} = E(\mu) = [(\tau Q)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau Q)^{-1} \pi + P^T \Omega^{-1} q]. \tag{4.5}$$

Primer 4.2 Neka je reč o istim investicijama kao u prethodnom primeru. Njihovi očekivani prinosi koji se oslanjaju isključivo na informacije iz prošlosti dati su u Tabeli 4.7.

	MSFT	AAPL	AMZN	FB	GOOGL
μ	5.15%	6.5%	7.14%	7.72%	4.17%

Tabela 4.7

Sledi izbor potrebnih elemenata. Uzima se $\tau = 0.1$, i neka investitor ima 2 pogleda o budućnosti. Prvo, misli da će prinos za prvu aktivu u sledećem periodu iznositi 5.2% i sa nešto većim nivoom poverenja smatra da će prinos treće aktive imati za 3% bolji učinak na tržištu od prinosa poslednje aktive. Jedan mogući način ilustrovanja ovih činjenica je uvođenje sledećih matrica i vektora:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; q = \begin{bmatrix} 0.052 \\ 0.03 \end{bmatrix}, \; \Omega = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

jer

$$\begin{aligned} \mu_{MSFT} = 0.052, &\quad \omega_1 = 0.00001 \\ \mu_{AMZN} - \mu_{GOOGL} = 0.03, &\quad \omega_1 = 0.0001. \end{aligned}$$

Prema formuli (4.5) se dobijaju sledeći prinosi:

	MSFT	AAPL	AMZN	FB	GOOGL
$\bar{\mu}$	5.13%	3.51%	4.22%	-0.76%	1.63%

Tabela 4.8

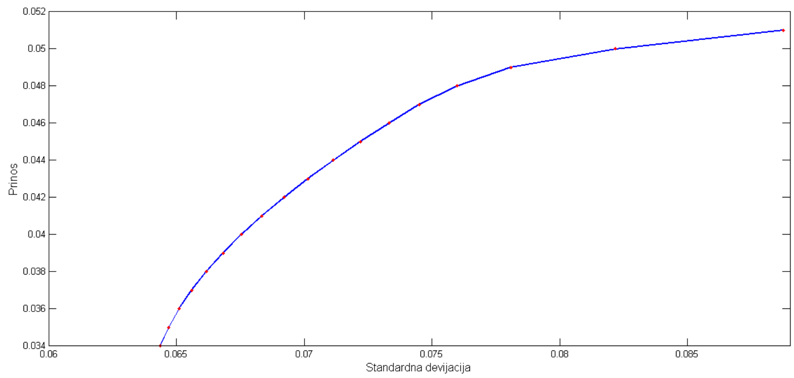
Preostaje rešavanje optimizacionog problema sa modifikacijom prvog ograničenja, odnosno

$$\begin{aligned}
\min_{x} \quad & 0.0083x_1^2 + 2\cdot 0.0045x_1x_2 + 2\cdot 0.0015x_1x_3 \\
& -2\cdot 0.0013x_1x_4 + 2\cdot 0.0033x_1x_5 + 0.0148x_2^2 \\
& +2\cdot 0.0011x_2x_3 - 2\cdot 0.0041x_2x_4 + 2\cdot 0.0004x_2x_5 \\
& +0.014x_3^2 + 2\cdot 0.0062x_3x_4 + 2\cdot 0.0064x_3x_5 \\
& +0.0177x_4^2 + 2\cdot 0.0059x_4x_5 + 0.0082x_5^2 \\
\text{s.t.} \quad & 0.0513x_1 + 0.0351x_2 + 0.0422x_3 \\
& -0.0076x_4 + 0.0163x_5 \geq R \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Rešavanjem ovog zadatka za različite R između 3.4% i 5.1% dobijaju se parovi prinosa i varijansi koje su sa komponentama dobijenog vektora x_π dati u Tabeli 4.9. Prinosi i standardne devijacije ovako formulisanih portfolija su ilustrovani na Slici 4.2. koja predstavlja skup efikasnih portfolija.

prinos	rizik	MSFT	AAPL	AMZN	FB	GOOGL
0.034	0.004142	0.435	0.1959	0.1467	0.2095	0.0129
0.035	0.004186	0.4511	0.1894	0.1595	0.2	0
0.036	0.004239	0.4644	0.1816	0.1705	0.1835	0
0.037	0.004303	0.4777	0.1738	0.1816	0.1669	0
0.038	0.004378	0.491	0.166	0.1926	0.1504	0
0.039	0.004465	0.5043	0.1582	0.2037	0.1338	0
0.04	0.004562	0.5176	0.1504	0.2147	0.1173	0
0.041	0.00467	0.5308	0.1426	0.2257	0.1008	0
0.042	0.004789	0.5441	0.1348	0.2368	0.0842	0
0.043	0.004919	0.5574	0.127	0.2478	0.0677	0
0.044	0.00506	0.5707	0.1192	0.2589	0.0511	0
0.045	0.005212	0.584	0.1115	0.2699	0.0346	0
0.046	0.005376	0.5973	0.1037	0.281	0.018	0
0.047	0.00555	0.6106	0.0959	0.292	0.0015	0
0.048	0.005771	0.6734	0.0462	0.2803	0	0
0.049	0.006096	0.7472	0	0.2527	0	0
0.05	0.006751	0.8571	0	0.1428	0	0
0.051	0.007873	0.967	0	0.033	0	0

Tabela 4.9: Raspored budžeta za određeni prinos i rizik



Slika 4.2: Skup efikasnih portfolija

4.5 Šarpov količnik

Američki ekonomista, Šarp (William F. Sharpe) je koristeći Markovicov model razvio CAPM (već pomenut u odeljku 4.2.2) koji malo pojednostavljuje teoriju. Svrha CAP modela je predviđanje očekivanog prinosa investitora imajući na raspolaganju sve statističke informacije o bezrizičnom prinosu,

prinosu tržišnog portfolija i njegovom riziku (koji je sistematski rizik).

Neka je dat problem u obliku

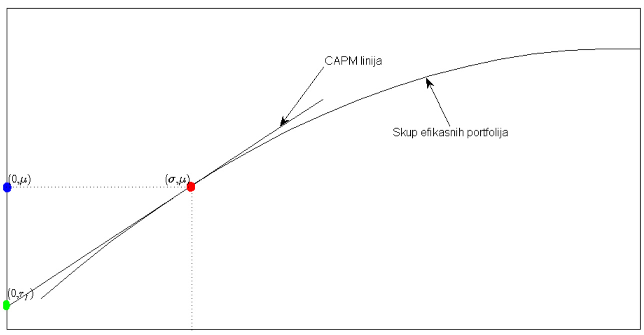
$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2}x^T Qx \\ & \mu^T x \geq R \\ & Ax = b \\ & Cx \geq d, \end{aligned} \tag{4.6}$$

i neka R_{min} i R_{max} predstavljaju najmanji i najveći očekivani prinos za efikasne portfolije. Tada se može uvesti funkcija $\sigma(R) : [R_{min}, R_{max}] \to \mathbb{R}$ kao

$$\sigma(R) = \sqrt{x_R^T Q x_R}.$$

U ovoj funkciji x_R označava jedinstveno rešenje problema (4.6) koje se dobija u zavisnosti od traženog prinosa R. Ako je Q pozitivno definitna onda prema Teoremi 2.6 funkcija $\sigma(R)$ je strogo konveksna na svom domenu.

Sada se razmatra situacija da pored rizičnih, postoji i bezrizična investicija na tržištu. Ovo ulaganje donosi prinos r_f (iz engl. *risk-free rate*) sa verovatnoćom 1, tj. garantuje siguran dobitak što znači da varijansa iznosi 0. Najčešće su to ulaganja sa jako malim, zanemarljivim prinosima, npr. državne obveznice i slično. Naravno, ona su uvek manja od prinosa sa rizikom, inače bi svaki investitor kupio samo državnu obveznicu pošto je njen prinos unapred poznat i ne nosi u sebi nikakav rizik. Kako je varijansa ovakvih hartija 0, ona se u $\sigma - r-$ravni nalaze na r-osi. Ako se iz tačke $(0, r_f)$ povuče tangenta na krivu efikasnih portfolija dobija se CAP linija koja postaje skup efikasnih portfolija u prisustvu bezrizičnog aktiva. Tačka u kojoj ova prava seče krivu se obično označava sa M i naziva se tržišni portfolio. On se na Slici 4.3 nalazi u tački (σ, μ).



Slika 4.3: CAPM linija i tržišni portfolio

Lako je videti da ako je $\mu = \mu^T x$ prinos, a $\sigma = \sqrt{x^T Q x}$ standardna devijacija tržišnog portfolija, onda je koeficijent pravca tangente

$$s = \frac{\mu^T x - r_f}{\sqrt{x^T Q x}},$$

koji takođe ima posebno ime - naziva se Šarpov količnik. Ovaj broj prikazuje višak prinosa u odnosu na bezrizični prinos koji investitor ostvaruje zahvaljujući tome da se suočava s rizikom. Prirodno je očekivati da svaki investitor želi maksimizirati Šarpov količnik pošto to na neki način predstavlja kompenzaciju koju dobija kao premiju za rizik. Matematički se ovo prikazuje u obliku

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \frac{\mu^T x - r_f}{\sqrt{x^T Q x}} \\ & Ax = b, \\ & Cx \geq d. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Rešavanje ovog problema nije jednostavno zbog oblika funkcije cilja. Međutim, uz neke dodatne uslove ovaj problem se može svesti na problem konveksnog programiranja. Prvo ograničenje je $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, što znači da je celo bogatstvo uloženo. Drugi uslov je pretpostavka da postoji vektor $\hat{x}$ tako da važi

$$\mu^T \hat{x} \geq r_f.$$

Ova pretpostavka je potrebna. Ako ne bi važila, optimizacija portfolija ne bi imala smisla: tada bi optimalni portfolio bio taj koji se sastoji od samo jedne aktive koja je bezrizična i ima striktno veći prinos od svake druge kolekcije investicija koje se mogu generisati na tržištu.

Sledeća teorema olakšava rešavanje problema (4.7).

Teorema 4.1. [1] Neka je $\mathcal{S}$ skup dopustivih portfolija koji zadovoljavaju ograničenja $e^T x = 1$ i $\forall x \in \mathcal{S}$ i $\exists \hat{x} \in \mathcal{S}$ za koji je $\mu^T \hat{x} > r_f$. Ako je (y, κ) rešenje problema

$$\begin{aligned} \min_y \quad & y^T Q y \\ & (y, \kappa) \in \mathcal{S}^+, \\ & (\mu - r_f e)^T y = 1, \end{aligned}$$

gde je

$$\mathcal{S}^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \kappa \in \mathbb{R} \middle| \kappa > 0, \frac{x}{\kappa} \in \mathcal{S} \right\} \cup (0, 0),$$

tada je $x^* = \frac{y}{\kappa}$, i x^* je portfolio sa maksimalnim Šarpovim količnikom.

Dokaz. Ako uvedemo oznake $\kappa = \dfrac{1}{(\mu - r_f e)^T x}$ i $y = \kappa x$, jednostavnim računom se može doći do $\sqrt{y^T Q y} = \kappa\sqrt{x^T Q x}$, odnosno $\sqrt{x^T Q x} = \frac{1}{\kappa}\sqrt{y^T Q y}$. Dalje, pošto važi $x^T e = 1$, sledi $\mu^T x - r_f e^T x = \mu^T x - r_f$ i $\mu^T x - r_f = \frac{1}{\kappa}$.
Na osnovu ovoga, funkcija cilja problema (4.7) se može zapisati kao $\dfrac{1}{\sqrt{y^T Q y}}$.
Drugi uslov garantuje da važi $(\mu - r_f e)^T x > 0$, tj. $\kappa > 0$, a $x \in \mathcal{S}$ je ekvivalentno sa $\frac{y}{\kappa} \in \mathcal{S}$. Iz $\kappa = \dfrac{1}{(\mu - r_f e)^T x}$ sledi i $(\mu - r_f e)^T y = 1$.
Pošto zbog prethodne jednačine $(0, 0)$ ne može biti rešenje, uslove $\kappa > 0$ i $(y, \kappa) \in \mathcal{S}$ treba zameniti uslovom $(y, \kappa) \in \mathcal{S}^+$ i tako se rešenje problema ne menja, samo dopustiv skup postaje zatvoren.
Na kraju je još potrebno napomenuti da minimiziranje funkcije $\dfrac{1}{\sqrt{y^T Q y}}$ odgovara maksimiziranju funkcije $y^T Q y$, pa je time pokazano da su problemi (4.5) i (4.7) ekvivalentni. ■

5 Zaključak

Kvadratno programiranje spada u oblast nelinearnog programiranja čiji je zadatak minimizacija (maksimizacija) kvadratne funkcije cilja nad skupom linearnih ograničenja.

Specijalan oblik problema kvadratnog programiranja je problem u kome je funkcija cilja konveksna i to je problem konveksnog programiranja. U tom slučaju je dobijeno rešenje globalni optimum, što se u ostalim slučajevima ne može tvrditi.

Problemi KP se rešavaju na više načina. U ovoj tezi su pored komplementarnog algoritma izložene metode unutrašnje tačke i njene modifikacije za rešavanje problema KP. Praktično rešavanje problema KP se svodi na korišćenje programskih paketa koji su bazirani na ovim metodama. Na primer, komanda **quadprog** u MATLAB-u bazira se na metodi unutrašnje tačke. Primeri koje se nalaze u radu su rešeni softverima MATLAB, LINDO i Solver.

U radu su predstavljene neke primene KP u optimizaciji portfolija. Pošto investitori pored ostvarenog prinosa i rizika ulaganja često zadaju još nekoliko ograničenja, njihovi problemi se često mogu matematički zapisati u obliku KP. Konstruisanje optimalnog portfolija je moguće sa ciljem minimizacije rizika ili maksimizacije prinosa, ali i maksimizacijom Šarpovog količnika što predstavlja višak prinosa koji investitor ostvaruje kao kompenzaciju koju dobija pošto je spreman da rizikuje. Sve ovo su problemi KP i pomenuti softveri nude mogućnost za njihovo jako brzo rešavanje. Kod optimizacije portfolija nisu uzeti u obzir troškovi transakcije ili kratka pozicija, već su opisani samo najjednostavniji problemi. Radi pojednostavljenja nije posmatran problem diverzifikacije, uzete su prvih 5 akcija (u trenutku pisanja ovog master rada) iz liste $S\&P$ 500 indeksa, od kojih su neke iz istog sektora.

Klasični Markovicov model je tako predstavljen na primeru sa 5 akcija sa kojima se svakodnevno trguje na Njujorškoj berzi. Ovaj model je bio prvi koji je pokušavao da uspostavi vezu između pojedinačnih elemenata na tržištu. Velika mana ovog modela jeste da su podaci isključivo bazirani na istorijskim informacijama. Blek-Litermanov model je malo napredniji jer je u ograničenjima uključeno i mišljenje investitora o nekim parametrima u budućnosti. To je urađeno samo modifikacijom prvog ograničenja. Prema tome, ovaj model nije složeniji, a svakako može da rezultira boljim rešenjem ukoliko su predviđenja o budućnosti tačna. Blek-Litermanov model je predstavljen na primeru nad istim skupom akcija. U oba slučaja su dati skupovi efikasnih portfolija koji su ilustrovani u $\sigma - r-$ravni, pri čemu se i vidi razlika kod prinosa i standardne devijacije.

Dodatak - MATLAB kodovi

Primer 1 - Konstruisanje optimalnog portfolija pomoću Markovicovog modela u obliku KP

Određivanje efikasnog portfolija za prinos $\geq$ 5 %

```
% Unos podataka
Q = [ 0.0083,  0.0045,  0.0015, -0.0013,  0.0033;
      0.0045,  0.0148,  0.0011, -0.0041,  0.0004;
      0.0015,  0.0011,  0.014,   0.0062,  0.0064;
     -0.0013, -0.0041,  0.0062,  0.0177,  0.0059;
      0.0033,  0.0004,  0.0064,  0.0059,  0.0082 ];
c = [0; 0; 0; 0; 0];
A = [ -0.0515, -0.065, -0.0714, -0.0772, -0.0417 ];
b = [-0.05];
Aeq = [ 1, 1, 1, 1, 1 ];
beq = [1];
lb = zeros(5,1);
[x, fval] = quadprog(Q, c, A, b, Aeq, beq, lb)
prinos = [0.0515,0.065,0.0714,0.0772,0.0417]*x
rizik = fval*2
```

Crtanje skupa efikasnih portfolija

```
% Unos podataka koji su potrebni za funkciju quadprog
Q = [ 0.0083,  0.0045,  0.0015, -0.0013,  0.0033;
      0.0045,  0.0148,  0.0011, -0.0041,  0.0004;
      0.0015,  0.0011,  0.014,   0.0062,  0.0064;
     -0.0013, -0.0041,  0.0062,  0.0177,  0.0059;
      0.0033,  0.0004,  0.0064,  0.0059,  0.0082 ];
c = [0; 0; 0; 0; 0];
Aeq = [ 0.0515, 0.065, 0.0714, 0.0772, 0.0417;
             1,     1,      1,      1,      1 ];
R = 0.06;
```

```
lb = zeros(5,1);
% definicija standardne devijacije, varijanse i prinosa koji su
% potrebni za crtanje grafika i tabele
xstdev = [];
xvar = [];
prinos = [];
% Optimizacija na intervalu (6%,7.7%) sa korakom 0.001 i crtanje grafika
for i = 0:17,
    beq = [R + 0.001*i; 1];
    [x, fval] = quadprog(Q, c, [], [], Aeq, beq, lb);
    var = fval*2;
    stdev = var^(1/2);
    xstdev = [xstdev, stdev];
    xvar = [xvar, var];
    prinos = [prinos, R + 0.001*i];
    disp(prinos)
    disp(xstdev)
    disp(xvar)
    disp(x)
    plot(xstdev, prinos)
end
```

Primer 2 - Konstruisanje optimalnog portfolija pomoću Blek-Litermanovog modela u obliku KP

Određivanje očekivanog prinosa koje se koristi u Blek-Litermanovom modelu

```
% Unos podataka
tau = 0.1;
Q = [ 0.0083,  0.0045,  0.0015, -0.0013,  0.0033;
      0.0045,  0.0148,  0.0011, -0.0041,  0.0004;
      0.0015,  0.0011,  0.014,   0.0062,  0.0064;
     -0.0013, -0.0041,  0.0062,  0.0177,  0.0059;
      0.0033,  0.0004,  0.0064,  0.0059,  0.0082 ];
P = [ 1, 0, 0, 0, 0;
      0, 0, 1, 0,-1 ];
OMEGA = [ 0.00001, 0;
          0,       0.0001 ];
q = [ 0.052; 0.03 ];
mut = 0.0273;          % Prinos SP 500 indeksa
rf = 0.0158;           % Bezrizicni tromesecni prinos
```

```
w = [  5.788177;
       5.194609;
       4.092266;
       2.096019;
       1.682539  ];              % Deo SP 500 indeksa koje cinu posmatrane aktive
sigmakvadrat = w.'*Q*w;
lambda = (mut - rf)/sigmakvadrat;
PI = lambda*Q*w;
prvideo = ((tau*Q)^(-1) + (P.')*((OMEGA)^(-1))*P)^(-1);     % Za lakse racunanje
drugideo = (tau*Q)^(-1)*PI + (P.')*((OMEGA)^(-1))*q;
BLprinos = prvideo*drugideo;
disp(BLprinos)
```

Crtanje skupa efikasnih portfolija

```
% Unos podataka koji su potrebni za funkciju quadprog
Q = [  0.0083,   0.0045,   0.0015,  -0.0013,   0.0033;
       0.0045,   0.0148,   0.0011,  -0.0041,   0.0004;
       0.0015,   0.0011,   0.014,    0.0062,   0.0064;
      -0.0013,  -0.0041,   0.0062,   0.0177,   0.0059;
       0.0033,   0.0004,   0.0064,   0.0059,   0.0082  ];
c = [0;  0;  0;  0;  0];
Aeq = [  0.0513,  0.0351,  0.0422,  -0.0076,  0.0163;
              1,       1,       1,        1,       1  ];
R = 0.034;
lb = zeros(5,1);
% definicija standardne devijacije , varijanse i prinosa koji su
% potrebni za crtanje grafika i tabele
xstdev = [];
xvar = [];
prinos = [];
% Optimizacija na intervalu (3.4%,5.1%) sa korakom 0.001 i crtanje grafika
for i = 0:17,
    beq = [R + 0.001*i;  1];
    [x,  fval] = quadprog(Q,  c,  [],  [],  Aeq,  beq,  lb);
    var = fval*2;
    stdev = var^(1/2);
    xstdev = [xstdev,  stdev];
    xvar = [xvar,  var];
    prinos = [prinos,  R + 0.001*i];
```

```
        disp(prinos)
        disp(xstdev)
        disp(xvar)
        disp(x)
        plot(xstdev, prinos)
end
```

Literatura

[1] G. Cornuejols, R. Tütüncü, *Optimization Methods in Finance*, Carnegie Mellon University Press, Pittsburgh, 2006.

[2] W. L. Winston, *Operations research: Applications and Algorithms*, 4th Edition, Duxbury Press, 2003.

[3] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 1999.

[4] S. Krčevinac, M. Cangalović, V. Kovačević-Vujčić, M. Martić, M. Vujošević, *Operaciona istraživanja 1*, FON, Beograd, 2004.

[5] K. Levišauskaité, *Investment Analysis and Portfolio Management*, Vytautas Magnus University, Kaunas, Lithuania, 2010.

[6] F. S. Hillier, G. J. Lieberman, *Introduction to operations research*, 7th Edition, McGraw-Hill Science, 2005.

[7] J. Petrić, S. Zlobec, *Nelinearno programiranje*, 1. izdanje, Štamparija BIGZ, Beograd, 1983.

[8] A. Friedlander, N. Krejić, N. Krklec Jerinkić, *Lectures on Fundamentals of Numerical Optimization*, Novi Sad, 2018.

[9] R. M. Freund, *Duality Theory of Constrained Optimization*, Massachusetts Institute of Technology, 2004.

[10] S. Wright, *Primal-dual Interior-point methods*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[11] T. Coleman, M. A. Branch, A. Grace, *Optimization Toolbox For Use with MATLAB User's Guide*, Version 2, MathWorks Inc., 1999.

[12] LINDO, *LINDO User's Manual*, LINDO Systems Inc., 2003.

[13] K. Surla, Z. Lozanov-Crvenković, *Operaciona istraživanja*, Prirodno-matematički fakultet Novi Sad, 2002.

[14] M. Ivanović, *Nelinearno programiranje*, Beograd, 2013.

[15] D. Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, 3. izdanje, Štamparija Stojkov, Novi Sad, 2013.

[16] Z. Stojaković, I. Bošnjak, *Elementi linearne algebre*, Symbol, Novi Sad, 2010.

[17] `https://finance.yahoo.com`

[18] `https://www.solver.com`

Biografija

Friderika Vereš je rođena 24. oktobra 1995. godine u Senti. Osnovnu školu " Stevan Sremac " završila je 2010. godine kao nosilac Vukove diplome. Srednju školu " Senćanska gimnazija " završila je u Senti 2014. godine. Nakon završetka srednje škole upisala je osnovne studije Matematike, modul Primenjena matematika - Matematika finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Diplomirala je 2018. godine, kada je i upisala master studije smer Primenjena matematika, modul Matematika finansija. Položila je sve ispite predviđene planom zaključno sa junskim rokom 2020. godine. Od avgusta 2020. godine je zaposlena u IT sektoru u Vojvođanskoj banci u Novom Sadu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
BF
Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *master rad*
VR
Autor: *Friderika Vereš*
AU
Mentor: *Prof. dr Sanja Rapajić*
MN
Naslov rada: *Kvadratno programiranje i primena u finansijama*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *sle*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2020.*
GO
Izdavač: *autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada: *5 poglavlja, 1 dodatak, 71 strana, 12 slika, 12 tabela*
FO
Naučna oblast: *matematika*
NO
Naučna disciplina: *primenjena matematika*
ND
Ključne reči: *kvadratno programiranje, optimizacija portfolija, Markovicov model, linearni komplementarni problem, metode unutrašnje tačke*
PO
UDK

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U master radu je razmatran problem kvadratnog programiranja. Pored standardnog linearnog komplementarnog algoritma predstavljene su metode unutrašnje tačke za rešavanje problema. Osim toga su prikazani softveri koje služe za rešavanje ovakvih problema. Problem kvadratnog programiranja se često pojavljuje u finansijama. Naime, matematički modeli optimizacije portfolija su problemi KP.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *13.07.2020.*
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Nataša Spahić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*
Član: *dr Sanja Rapajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor*
Član: *dr Nataša Krklec Jerinkić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *monograph type*
DT
Type of record: *printed text*
TR
Contents code: *master thesis*
CC
Author: *Friderika Vereš*
AU
Mentor: *Prof. Dr. Sanja Rapajić*
MN
Title: *Quadratic Programming and its Applications in Finance*
XI
Language of text: *serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *s/e*
LA
Country of publication: *Republic of Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2020.*
PY
Publisher: *author's reprint*
PU
Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description: *5 sections, 71 pages, 1 appendix, 12 graphics, 12 tables*
PD
Scientific field: *mathematics*
SF
Scientific discipline: *applied mathematics*
SD
Key words: *quadratic programming, portfolio optimization, Markowitz model, linear complementary problem, interior-point methods*
UC
Holding data: *In the library of the Department of Mathematics and Informa-*

tics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: This master thesis deals with quadratic programming. Besides the standard linear complementary algorithm, the interior-point methods are presented as a possible way of solving these problems. In addition, some software packages for solving these kind of problems are also presented. Quadratic programming is widely used in finance. Mathematical models for portfolio optimization problems are in the form of quadratic programming problems.
AB
Accepted by the Scientific Board on: *13.07.2020.*
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: *Dr. Nataša Spahić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*
Member: *Dr. Sanja Rapajić, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, supervisor*
Member: *Dr. Nataša Krklec Jerinkić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*