Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Desanka Margetić

Bimatrične igre

Master rad

Mentor: Prof. dr Sanja Rapajić

Novi Sad, 2020.

Sadržaj

Predgovor

Tema rada pripada oblasti teorije igara. Teorija igara predstavlja matematičku teoriju i metodologiju koja se koristi za analizu i rešavanje konfliktnih situacija u kojima učesnici imaju suprotstavljene interese. Osnovni cilj ove teorije je pronalaženje optimalne strategije učesnika pod pretpostavkom da su racionalni i da razmišljaju strateški. Teorija igara ima veliku primenu u ekonomskim, pravnim, vojnim i političkim naukama, kao i u svakodnevnom životu.
Ovaj rad se bavi bimatričnim igrama. To su vrste igara kod kojih suma nije konstantna, odnosno dobitak jednog igrača, nije jednak gubitku drugog igrača. Bimatrične igre mogu biti predstavljene u normalnoj ili ekstenzivnoj formi, a mogu se i prebacivati iz jednog oblika u drugi. Bimatrične igre se dele na nekooperativne i kooperativne.
Nekooperativne igre su igre u kojima igrači ne mogu da se sporazumevaju o izboru najbolje strategije, ili i kada to mogu, njihov sporazum nema obavezujuću snagu. Rešenje bimatričnih igara se traži u tačkama strateškog ekvilibrijuma. Osnovna karakteristika strateškog ekvilibrijuma je da odstupanjem igrača od njega, igrač može da ostvari lošiji rezultat. Bimatrične igre mogu imati više tačaka strateškog ekvilibrijuma. Sve tačke se mogu pronaći, proširenjem metode za pronalaženje sedlaste tačke igre nulte sume. Nalaženje tačaka strateškog ekvilibrijuma bimatričnih igara može se svesti na problem linearne komplementarnosti. Postupak eliminacije striktno dominiranih strategija je koristan, jer omogućava svođenje složenih igara na jednostavnije oblike, koji su lakši za rešavanje. Igrači su racionalni i nijedan igrač neće odigrati strategiju koja mu je striktno dominirana, jer postoji strategija koja mu donosi veću dobit, bez obzira koju strategiju bira njegov protivnik. Igrač očekuje da je i njegov protivnik racionalan i veruje da ni on neće odigrati dominiranu strategiju. Na osnovu ove pretpostavke, igrač može obrisati dominiranu strategiju iz skupa raspoloživih strategija njegovog protivnika.
Duopol je tržište na kojem dve firme proizvode isti ili sličan proizvod i predstavlja primer igara sa jedinstvenom tačkom ravnoteže. Razmatrana su tri modela duopola: Kurnoov, Bertranov i Štakelbergov.
Kooperativne igre su igre u kojima igrači imaju mogućnost da se međusobno dogovaraju i da na osnovu toga odluče o strategiji koju će odigrati. Ako jedna strana prekrši dogovor, ona snosi određene posledice zbog toga. Kooperativne igre se dele na igre sa transferom dobiti i igre bez transfera dobiti. U igrama sa transferom dobiti ne postoje ograničenja o raspodeli koalicionog dobitka. Igrači se mogu dogovoriti da podele dobit kako bi došlo do sporazuma. U igrama bez transfera dobiti igrač ne može dati deo dobiti drugom igraču, kako bi se postigao sporazum između njih.

1 Teorija igara

"Od igranja šaha do raspoređivanja vojnih baza po svetu, od razmišljanja kojoj devojci u baru prići do analiziranja isplativosti ulaska na novo tržište, od odlučivanja na koju stranu šutirati prilikom izvođenja penala u fudbalu do razmatranja koncepata preživljavanja i produžetka vrste u evolutivnoj biologiji i ekologiji. Oblast primenjene matematike koja se koristi u društvenim naukama, uglavnom ekonomiji, ali i biologiji, informatici i filozofiji, nazvana teorija igara, nas uči kako da pristupamo rešavanju svih ovih (a i mnogih drugih) problema"[10].

1.1 Osnovni pojmovi u teoriji igara

Fon Nojman i Morgenštern definišu igru na sledeći način:

"Prvo, potrebno je napraviti razliku između apstraktnog koncepta igre (game) i individualnih igara (plays) te igre. Igra je prosto ukupnost pravila koja je opisuju. Svaka posebna prilika u kojoj se igra ova igra -na poseban način - od početka do kraja jeste jedno igranje. Drugu odgovarajuću razliku trebalo bi napraviti i za poteze koji su komponente igre. Potez predstavlja priliku izbora između različitih alternativa, koji bi trebalo da učini bilo koji od igrača ili pak neki mehanizam podložan slučaju, pod uslovima koji su tačno opisani pravilima igre"[2].

Teorija igara predstavlja matematičku formalizaciju i analizu procesa racionalnog odlučivanja u uslovima gde interesi učesnika u igri mogu biti usaglašeni, delimično u konfliktu, ili u konfliktu, kao i u okolnostima rizika i neizvesnosti. Sve one situacije u procesu odlučivanja, kada konačno rešenje ne zavisi samo od učesnika (igrača) koji odluku donosi, nego i od odluka svih ostalih učesnika, analizira teorija igara. Često su interesi učesnika direktno sukobljeni. Konfliktne su sve one situacije kada igrači međusobno imaju potpuno ili delimično suprotstavljene interese u odlučivanju i svaki igrač želi da zauzme poziciju koja je u suprotnosti sa željama i namerama drugih (ostalih) igrača. Igrač može biti korporacija, tim, država, koalicija stranaka, ne mora uvek biti pojedinac. Igri se mogu dodati odgovarajuća pravila, kojim se definiše igra. Pravilima je određen početak igre, broj učesnika u igri, koje su strategije igračima na raspolaganju i krajnji rezultat koji će igrač postići igrajući odgovarajuće strategije. U jednoj igri mogu učestvovati najmanje dva igrača (igra dva igrača). Ako u igri učestvuje više od dva igrača, onda se radi o igrama više igrača. Igre mogu biti predstavljene u normalnoj (matričnoj, strateškoj) formi ili u ekstenzivnoj formi. Normalna forma se koristi za igre dva igrača, gde igrači povlače poteze istovremeno. Mogući rezultati igre su

predstavljeni u obliku matrice. Za igre u kojima igrači naizmenično povlače poteze koristi se ekstenzivna forma. Ekstenzivna forma je graf tipa stablo.
Cilj teorije igara je da se odrede optimalne strategije za svakog igrača. Pomoću matematičkog algoritma vrši se analiza konfliktnih situacija i određuje se razumno ponašanje učesnika u toku konflikta. Strategija predstavlja skup instrukcija o tome koje racionalne poteze treba da odigra igrač u svakom zamislivom stanju te igre, uključujući pri tome i ona stanja koja u konkretnim realizacijama neće biti dostignuta. Treba razlikovati pojam strategija od pojma pravila igre. Svaki igrač može da bira strategiju koju će odigrati, dok su pravila igre striktno nametnuta i njih se igrač mora striktno pridržavati.
Postoje proste i mešovite strategije. Prosta strategija je ako se igrač tokom igre pridržava samo jedne strategije, verovatnoća izbora te strategije je jedan. Ako igrač ima mogućnost izbora strategije na skupu od n raspoloživih strategija sa verovatnoćama p_1, p_2, ...,p_n, tada je reč o mešovitoj strategiji i mora da važi sledeće

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Prosta strategija je specijalan slučaj mešovite strategije.
Rešenje igre predviđa šta će svaki igrač u igri učiniti ukoliko se pridržava nekog kriterijuma izbora. Rezultat racionalnog izbora pojedinačnih strategija svih igrača je uspostavljanje rešenja igre. Termin ravnoteža predstavlja neku vrstu stabilnosti. Ravnoteža igre je stabilna ako se svaki igrač pridržava vlastite strategije ravnoteže i nije mu u interesu da od nje odstupi. Neka je $u_i(s)$ dobitak i-tog igrača u situaciji s. s^* je prihvatljiva situacija za i-tog igrača ako važi

$$u_i(s) \leq u_i(s^*)$$

gde je s bilo koja situacija. Situacija s^* je prihvatljiva za igrača, jer ako se igrač odluči za bilo koju drugu situaciju, to će mu doneti jednaku ili manju dobit. Stanje ravnoteže je situacija koje je prihvatljiva za sve igrače. Optimalna strategija je strategija koja dovodi igru do stanja ravnoteže. Ravnoteža u teoriji nekooperativnih igara je stanje, u kojem nijedan igrač ne može da poveća svoj dobitak u igri, ukoliko se ostali učesnici striktno pridržavaju svojih ravnotežnih strategija.
Ako je dobitak jednog igrača jednak gubitku drugog igrača u igri dva igrača, onda se radi o igri nulte sume. Igra nulte sume je specijalan slučaj igara sa konstantnom sumom, kod kojih je zbir rezultata oba igrača konstantan. Bimatrične igre su igre kod kojih suma nije konstantna, odnosno dobitak jednog igrača, nije jednak gubitku drugog igrača. Bimatrica plaćanja u bimatričnim igrama, može se dekomponovati na dve matrice. Elementi prve

matrice predstavljaju dobitak prvog igrača, a elementi druge matrice predstavljaju dobitak drugog igrača. U bimatričnim igrama rešenje se traži u tačkama strateškog ekvilibrijuma. Ako igrači odstupaju od strateškog ekvilibrijuma, oni će ostvariti lošiji rezultat. Bimatrične igre mogu imati više tačaka strateškog ekvilibrijuma. Za svaku igru nenulte sume postoji tačka strateškog ekvilibrijuma.

Teorema 1. *(Nešova teorema) Svaka igra sa n igrača i sa konačnim brojem strategija ima najmanje jednu ravnotežnu tačku.*

Ta tačka se često naziva Nešova ravnoteža.

1.2 Istorija teorije igara

Analitičari na osnovu svojih saznanja različito lociraju "prapočetke"teorije igara. Auman i Mašler (Aumann & Maschler, 1985) su izneli tezu, da su neki prapočeci teorije igara bili prisutni u Talmudu. Postoji jedno mesto u Talmudu gde se spominje bračni ugovor. Čovek ima tri žene i sa njima sklapa bračni ugovor. Bračnim ugovorom se preciziraju iznosi koje će svaka žena dobiti posle njegove smrti. U načinu raspodele njegove imovine prepoznaju se neki kriterijumi, koji se koriste u modernoj teoriji kooperativnih igara.
Neki smatraju da se magloviti početak razvoja teorije igara može videti u Paskalovom pismu (Blaise Pascal, 1632-1662) velikom matematičaru Fermau (Pierre de Fermat, 1601-1665) iz 29. jula 1654. godine. Jedan deo teksta je posvećen rešavanju problema iz teorije verovatnoće. Paskal i Fermao smatraju se osnivačima teorije verovatnoće, koju je kasnije uobličio Bernuli.
Veliki filozof Lajbnic (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) bavio se problemima hazardnih igara. Dva igrača bacaju dve kocke. Prvi pobeđuje ako dobije ukupno 9 poena, a drugi pobeđuje ako dobije ukupno 7 poena. Prvi igrač može da ostvari 9 poena samo na dva načina: 3 i 6, 4 i 5. Drugi igrač može sa dve kocke da dobije 7 poena na tri načina: 1 i 6, 2 i 5, te 3 i 4. Izgledi prvog igrača da pobedi drugog predstavljaju samo dve trećine šanse drugog igrača. Morgenštern (Morgenstern, 1956) tvrdi da je Lajbnic bio prvi koji je pravio razliku između igara na sreću i strategijskih igara.
Jedan od važnijih ranijih radova za razvoj teorije igara je pismo Džejmsa Voldgrejva (James Waldegrave, 1684-1741), koje je napisano 13. novembra 1713. godine. On ovo pismo šalje markizu Montmortu (Pierre-Remond de Montmort, 1678-1719) inače matematičaru, koji o tome obaveštava Nikolasa Bernulija (Nicolaus Bernoulli, 1695-1740). U pismu je izloženo rešenje igre sa kartama, koju igraju dva igrača, tj. minimax rešenje u mešovitim strategijama.

U 19. veku pojavljuje se nekoliko značajnih radova koji su zasnovani na logici teorije igara. Prve studije teorije igara u ekonomiji predstavljaju radovi: Kurnoa (Antoine-Augustin Cournot, 1801-1877) iz 1838. godine, Bertranda (Joseph Bertrand, 1822-1900) iz 1883. godine i poznatog engleskog ekonomiste Edžvorta (Francis Ysirdo Edgewort, 1845-1926) iz 1881. i 1897. godine. Svi ovi radovi su posvećeni analizi uspostavljanja ravnoteže na tržištu dva preduzeća koja međusobno konkurišu, tj. duopola. Preduzeće u duopolu mora pažljivo da uzima u obzir racionalno ponašanje svoga protivnika. To je klasična situacija kada se primenjuje teorija igara.
Svoje tragove u razvoju teorije igara u prvim decenijama 20. veka ostavila je nekolicina vrsnih analitičara. Emanuel Lasker (Emmanuel Lasker, 1868-1941) nemački matematičar, filozof i veliki šahista, 27 godina je držao šampionsku titulu u šahu u svojim rukama. Nakon prelaska u SAD 1937. godine intezivno se bavi proučavanjem šahovske igre. On koristi termin "borba"(der Kampf) umesto termina "igra", kako bi naglasio konfliktnost ciljeva igrača kao suštinu problema koji analizira. Borba predstavlja interakciju u kojoj učestvuju najmanje dva igrača, pri čemu jedan ometa drugog. Cilj borbe je uvek isti, pobediti protivnika. Lasker je analizirao koje taktike igrači koriste da bi u jednoj apstraktno posmatranoj borbi, pobedili svoga protivnika. Tadeuš Kotarbinjski (Kotarbinjski, 1964) navodi neke od strategija koje mogu biti korisne u borbi:
-obezbediti slobodu kretanja vlastitih snaga i oruđa
-ometati što je moguće više slobodu kretanja protivnika
-nastojati paralisati podsisteme u protivničkom sistemu od kojih najviše zavise svi ostali, ali istovremeno omogućiti brzu zamenu vlastitog vitalnog podsistema, u slučaju da dođe do njegovog paralisanja
-odbrana ne sme, dobrovoljno i bez nužde, ni po koju cenu da slabi svoju poziciju .
Nemački matematičar Cermelo (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871-1951) na Petom međunarodnom kongresu matematičara održanom 1912. godine analizira šahovske igre. Dobitnička pozicija (winning position) je ključna tačka analize. Ukoliko se jedna strana nalazi u pobedničkoj poziciji, ona pobeđuje bez obzira kakvu će strategiju odigrati protivnička strana. Da bi došao do rešenja Cermelo je koristio postupak unazad. To je postupak u kome se polazi od kraja igre i onda se ona rešava unazad. Ovaj njegov rezultat se smatra prvom teoremom koja je dokazana u teoriji igara.
Francuski matematičar Emil Borel (Emile Borel, 1871-1956) je prvi upotrebio prikaz raspodele dobitaka za konačnu antagonističnu igru dva igrača u matričnom obliku. Bavio se traženjem metoda koji bi bio bolji od svih ostalih(optimalna strategija). Naslutio je minimax teoremu, ali je nije dokazao.
Džon fon Nojmanov (John von Neumann, 1903-1957) članak, objavljen 1928.

godine je fundamentalan rad za razvoj teorije igara. Njegovim objavljivanjem prethodilo je čuveno predavanje 7. decembra 1926. godine, koje je Fon Nojman održao. Predavanje se održalo na zasedanju elitnog i u to vreme svetski uticajnog getingenskog udruženja matematičara. U ovom radu izložen je koncept konačne igre (igrač ima na raspolaganju konačan broj strategija) dva igrača sa nultom sumom (dobitak jednog igrača jednak je gubitku drugog igrača) i potpunim informacijama (igrači raspolažu informacijama o svim parametrima igre). Dokazao je minimax teoremu. Pomenuti rad predstavlja prvo izlaganje u kojem se igra u potpunosti predstavlja u matričnoj (normalnoj) formi. Pojam strategije je definisan u ovom članku kao skup instrukcija za svakog igrača u svakoj situaciji, u kojoj igra može da dospe u zavisnosti od informacija, koje igrač ima na raspologanju u trenutku odlučivanja.
Oskar Morgenštern(Oskar Morgenstern, 1902-1977) pokazao je da pretpostavke o savršenom predviđanju ekonomskih učesnika predstavljaju ozbiljan problem za ekonomsku teoriju i analizu. Savršeno predviđanje je pretpostavka da svaki učesnik može da predvidi svaki potez drugih učesnika. Ovo nije problem koji se javlja samo u ekonomskoj nauci, nego i u drugim društvenim naukama. Godine 1972. je osnovao časopis "International Journal of Game Theory", koji je visoko specijalizovani matematički časopis u kojem se isključivo objavljuju radovi koji doprinose razvoju teorije igara.
Zajednička knjiga Fon Nojmana i Morgenšterna, objavljena 1944. godine, predstavlja prekretnicu u razvoju teorije igara. Sredinom 1941. godine Morgenštern piše kraći tekst u kojem pokušava da objasni zašto je teorija igara bitna za analizu ekonomskih problema. Kada je Fon Nojman pročitao ovaj tekst nije bio zadovaljan, jer je smatrao da nije dovoljno razumljiv onima koji se nisu bavili proučavanjem teorije igara. Sugeriše da se tekst proširi i da bude jasniji. Nije bio zadovoljan ni sa proširenom verzijom. U jesen 1941. godine Fon Nojman predlaže da oni zajedno napišu tekst. Na ovu ponudu Oskar Morgenštern sa oduševljenjem pristaje. Napisali su jednu ogromnu knjigu (rukopis je imao 1200 kucanih stranica), tako da se priča o saradnji nije završila na članku, kao što su na početku planirali. Knjiga je dobila naziv "Teorija igara i ekonomsko ponašanje", objavljena je 1944. godine. Fon Nojman i Morgeštern su dali preciznu matematičku definiciju igre nulte sume sa dva igrača. Pokazali su da u mešovitim strategijama ovakve igre uvek imaju jedinstveno ravnotežno rešenje. Međutim to je samo jedna klasa nekooperativnih igara. Pretpostavili su i jedan način rešavanja kooperativnih igara, ali je trebalo dokazati postojanje rešenja u opštem slučaju.
Tokom 50-tih i 60-tih godina, počinje široka primena modela teorije igara u ekonomiji. Teorija igara počinje da se primenjuje i u psihologiji. Psiholozi počinju da proučavaju ponašanje ljudi u eksperimentalnim igrama. Ranih 70-tih, teorija igara pronalazi svoju primenu u evolucionoj biologiji i skoro svim

društvenim naukama. Nobelova nagrada za ekonomiju za 1994-tu godinu dodeljena je Džonu Nešu (John Nash), Džonu Harsaniju (John C. Harsanyi) i Rajnhard Zeltenu (Reinhard Selten) zbog njihovog doprinosa unapređenju teorije igara i njene primene u ekonomskoj nauci. Džonu Nešu osnovni podsticaj za proučavanje problematike teorije igara je knjiga "Teorija igara i ekonomsko ponašanje". Neša je zanimalo da li postoji ravnožena i u igrama sa nenultom sumom (dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog igrača), kada u igri učestvuje više od dva igrača i kada se igrači ponašaju nekooperativno (igrači nemaju mogućnost da se dogovaraju). Džon Neš u novembru 1949. godine šalje kratak tekst Nacionalnoj akademiji nauka (National Academy of Sciences) u kojem daje opštu definiciju ravnoteže za igru u normalnoj (matričnoj) formi. Dokazao je da svaka igra sa n igrača i sa konačnim brojem strategija ima najmanje jednu ravnotežnu tačku (equilibrium point). U tekstu koji je objavljen 1953. godine, Neš obrazlaže postupak svođenja kooperativnih igara na nekooperativne igre. Na osnovu svega ovoga dolazi do kompletiranja opšte metodologije teorije igara.

1.3 Podela igara

Postoje mnogobrojne podele igara i one će biti navedene u ovom odeljku.
• Podela prema broju igrača:
1. Igra sa jednim igračem - ovo je najjednostavniji tip igre. U ovakvim igrama kada u igri učestvuje samo jedan igrač, ne postoji sukob interesa među igračima. Fon Nojman i Morgenštern smatraju da je rigidno komunističko društvo primer igre sa jednim igračem. Država određuje strukturu raspodele u takvom društvu i ona ne podleže bilo kakvoj raspavi. Pojedinci se u ovom društvu ne mogu posmatrati kao igrači, jer su konfliktni interesi između njih i buduće koalicije unapred isključeni.
2. Igra sa dva igrača - najviše se koristi u teoriji igara i u svakodnevnom životu. Šah je igra sa dva igrača, kao i neke igre kartama, kao i brojni sportovi sa dva tima (svaki od timova predstavlja jednu koaliciju). Često se mnoge igre svode na igre sa dva igrača radi lakšeg računanja.
3. Igra sa više igrača - predstavlja igru u kojoj učestvuje više od dva igrača. Ove igre se često sreću u ekonomiji.

• Podela prema prisustvu ili odsustvu elemenata slučajnosti:
1. Igre na sreću – igrač ne može uticati na ishod igre
2. Strateške igre – ishod igre zavisi od sposobnosti igrača

• Podela u odnosu na broj raspoloživih strategija:
1. Konačne igre – igra ima konačan broj poteza. Svaki igrač na početku igre

procenjuje koju strategiju će odigrati njegov protivnik i na osnovu toga donosi odluku koji potez da povuče.
2. Beskonačne igre – svaka strategija ima beskonačan broj poteza. Ne postoji strategija koja dovodi do pobede.

• Podela prema informacijama o potezima koje povlači protivnik:
1. Igra sa potpunim informacijama – igrač ima sve informacije o potezima koje povlači njegov protivnik. Šah je tip igre sa potpunim informacijama.
2. Igra sa nepotpunim informacijama – igraču su nepoznati potezi njegovog protivnika. Poker je tip igre u kojoj se ne zna koje karte u ruci ima protivnik. Najveći broj igara koje opisuju realne konfliktne situacije u ekonomiji jesu igre sa nepotpunim informacijama, pošto su tajnost i neočekivane aktivnosti protivnika često najvažniji elementi konfliktne situacije.

• Podela prema odnosu između igrača:
1. Kooperativne igre – igrači imaju mogućnost da se međusobno dogovaraju i da na osnovu toga odluče o strategiji koju će odigrati. Ukoliko jedna strana prekrši dogovor, ona snosi određene posledice zbog toga.
2. Nekooperativne igre - igrači ne mogu da se sporazumevaju o izboru najbolje strategije, ili i kada to mogu, njihov sporazum nema obavezujuću snagu da se moraju pridržavati toga dogovora.

• Podela prema rezultatu igre:
1. Igre nulte sume – rezultat igre je takav da je dobitak jednog igrača jednak gubitku drugog igrača.
2. Igra nenulte sume – dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog igrača. U igrama nenulte sume može se desiti da svi igrači budu dobitnici, ali ponekad i gubitnici. U kooperativnim igrama, igrači mogu da se dogovaraju oko strategija, tako da u tim igrama svi igrači mogu biti dobitnici.

• Podela prema načinu predstavljanja:
1. Ekstenzivna forma je graf tipa stablo i koristi se u igrama gde protivnici naizmenično povlače poteze. Igrači mogu da imaju nepotpune, ili potpune informacije o prethodnom potezu protivnika. Stablo je aciklični graf. U njemu su svi čvorovi i grane povezani na odogvarajući način. Koren stabla je čvor kome ne prethodi nijedan drugi čvor i on je jedinstven. Jedan ili više čvorova, koje ne sledi nijedan drugi čvor se nazivaju listovi. Postoji jedinstven put od korena do bilo kog lista kroz stablo. Roditelj je naziv čvora koji prethodi jednom broju čvorova, a deca je naziv za čvorove koji ga slede. Stablo igre predstavlja moguće opcije koje igrač ima na raspolaganju. U svakom čvoru stabla igrač donosi odluku koji će potez da povuče. Dolazak u terminalni čvor

predstavlja kraj igre. Igra se završava dolaskom u terminalni(krajnji) čvor. U terminalnom čvoru može se videti rezultat igre, koji nastaje kao posledica izabranih poteza.
2. Normalna (matrična) forma – igre dve strane. U igrama u matričnoj formi igrači u istom trenutku povlače poteze i u tom trenutku nemaju informacije o potezima koje povlači njihov protivnik. Ishod igre se predstavlja u obliku matrice. Vrste matrice predstavljaju raspoložive strategije prvog igrača, a kolone raspoložive strategije drugog igrača. Igra u normalnom obliku može biti predstavljena i u bimatričnoj formi. Igre nenulte sume se predstavljaju u obliku bimatrične forme. Elementi bimatrice su uređeni parovi.
3. Forma karakteristične funkcije - kooperativne igre se predstavljaju u ovoj formi. Karakteristična funkcija igre svakoj koaliciji pridružuje jednu vrednost. Ako imamo igru od n igrača, koalicija predstavlja svaki podskup ovog skupa. Ako u koaliciji ne učestvuje nijedan igrač, karakteristična funkcija pridružuje igri vrednost nula. Karakteristična funkcija pridružuje koaliciji ukupnu moguću vrednost igre, ako se u koaliciji nalaze svi igrači.

1.4 Matrične igre nulte sume

Matrična igra nulte sume predstavlja igru dva igrača, u kojoj je dobitak jednog igrača jednak gubitku drugog igrača. Igra dva igrača sa nultom sumom je najjednostavniji tip strateške igre. Igrač I je izabrao strategiju a_i, $i = 1, 2, ..., m$ iz skupa svojih raspoloživih strategija, u isto vreme igrač II odgovara jednom od svojih strategija b_j, $j = 1, 2, ...n$. Ishod ove igre predstavlja dobitak za igrača I $c_I(a_i,b_j)$, a gubitak $c_{II}(a_i,b_j)$ za igrača II. Uslov nulte sume kaže da je zbir dobitka prvog igrača i gubitka drugog igrača jednak nuli, tako da važi

$$c_I(a_i,b_j)+c_{II}(a_i,b_j) =0.$$

Uvodi se nova oznaka za dobitak igrača I

$$c_I(a_i,b_j)= C(a_i, b_j)$$

pa sledi

$$c_{II}(a_i,b_j)= - C(a_i, b_j).$$

Cilj igrača I je maksimizacija funkcije $C(a_i, b_j)$, odnosno njegovog dobitka, a igrača II minimizacija te iste funkcije, tj. njegovog gubitka. Svaki igrač bira po jednu promenljivu od koje zavisi funkcija $C(a_i, b_j)$, tj. igrač I bira strategiju a_i, a igrač II strategiju b_j. Ako se poznaje samo jedna od strategija, ne može se pretpostaviti rezultat igre. Tek kada budu poznate strategije oba igrača, rezultat igre više neće biti neizvestan. Neprazan skup X=$\{a_1, a_2, ...a_m\}$ predstavlja strategije igrača I, a neprazan skup $Y = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ predstavlja strategije igrača II. Matrica plaćanja Z je funkcija definisana na Dekartovom proizvodu $X \times Y$,

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & ... & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & ... & z_{2n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ z_{m1} & z_{m2} & ... & z_{mn} \end{bmatrix}$$

gde je $z_{ij} = C(a_i, b_j)$, pri čemu $C(a_i, b_j)$ predstavlja dobitak igrača, ako igrač I bira i-tu strategiju a_i, a igrač II j-tu strategiju b_j. Ako je z_{ij} pozitivan broj, onda on predstavlja dobitak igrača I, a gubitak igrača II, pošto se radi o igri nulte sume. Ako je z_{ij} negativan broj, onda je igrač I na gubitku, a igrač II na dobitku. Ukoliko igrač I izabere i-tu strategiju a_i, njegov sigurni dobitak je

$$\alpha_i = \min_j z_{ij}.$$

Njegova isplata ne može biti manja od α_i, bez obzira koju strategiju bira igrač II. Igrač I želi da maksimizira isplatu, zbog toga bira strategiju koja će maksimizirati njegov siguran dobitak

$$\alpha = \max_i \min_j z_{ij}.$$

Nivo bezbednosti igrača I predstavlja α. Ako igrač II izabere j-tu strategiju b_j, njegov maksimalan gubitak će biti

$$\beta_j = \max_i z_{ij},$$

bez obzira koju strategiju bira igrač I. Igrač II želi da minimizira taj gubitak. Nivo bezbednosti igrača II predstavlja β

$$\beta = \min_j \max_i z_{ij}.$$

Uvek važi da je $\alpha \leq \beta$.

1.4.1 Proste matrične igre

Proste matrične igre su matrične igre nulte sume sa sedlastom tačkom. Sedlasta tačka je minimalan elemenat i-tog reda i maksimalan elemenat j-te kolone matrice plaćanja Z.

Definicija 1. *Par (i^*, j^*) je sedlasta tačka matrice plaćanja Z, ako važi $\forall i = 1, 2, ..., m$ i $\forall j = 1, 2, ..., n$*

$$z_{ij^*} \leq z_{i^*j^*} \leq z_{i^*j}.$$

Sedlasta tačka predstavlja optimalno rešenje igre

$$\max_i \min_j z_{ij} = \min_j \max_i z_{ij} = z_{i^*j^*}.$$

Ako igrači odstupaju od ove strategije, igrač I može imati manji dobitak, a igrač II veći gubitak.

1.4.2 Mešovite matrične igre

Mnoge matrične igre ne poseduju sedlastu tačku. Teorema minimaksa daje optimalno rešenje igre, koja ne poseduje sedlastu tačku.

Teorema 2. *(Teorema minimaksa) Za svaku konačnu igru dva igrača nulte sume važi:*
-realan broj v predstavlja vrednost igre
-postoji mešovita strategija koja igraču I osigurava najveći očekivani minimalni dobitak, koji je jednak vrednosti igre v bez obzira za koju će se mešovitu strategiju odlučiti igrač II
-postoji mešovita strategija koja igraču II osigurava najmanji očekivani maksimalni gubitak, koji je jednak vrednosti igre v, bez obzira koju će mešovitu strategiju odigrati igrač I
-bilo koja matrična igra sa matricom plaćanja Z ima sedlastu tačku u prostoru mešovitih strategija, drugim rečima postoje vektori verovatnoća p i q takvi da važi

$$\max_p \min_q p^T Zq = \min_q \max_p p^T Zq = v.$$

Ako je v pozitivan broj, onda on predstavlja dobitak igrača I, a ako je negativan onda predstavlja dobitak igrača II. Ako je v nula, onda se radi o fer igri. Vektor verovatnoća $p = (p_1, p_2, ..., p_m)^T$ predstavlja vektor mešovitih strategija igrača I, pri čemu je p_i verovatnoća da će igrač I odigrati i-tu strategiju a_i i treba da važi $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$. Vektor verovatnoća $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^T$ predstavlja mešovitu strategiju igrača II, gde q_j predstavlja verovatnoću da igrač II odigra j-tu strategiju b_j, pri čemu važi $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.
Matrične igre većih dimenzija se često mogu svesti na igre manjih dimenzija korišćenjem postupka dominacije strategije. Ovaj postupak u teoriji igara omogućava da se matrice velikih dimenzija svedu na jednostavniji oblik.

Definicija 2. *Strategija u i-tom redu matrice plaćanja $Z = (z_{ij})$ (striktno dominira) dominira nad strategijom u k-tom redu, ako je $(z_{ij} > z_{kj})$, $z_{ij} \geq z_{kj}$ za svako j.*

Dominirajuća strategija je strategija u i-tom redu, a dominirana strategija je strategija u k-tom redu. Igraču I nije u interesu da odigra dominiranu strategiju, jer mu to donosi manji dobitak, tako da se dominirana strategija može izbrisati iz skupa raspoloživih strategija.

Definicija 3. *Strategija u j-toj koloni matrice plaćanja $Z = (z_{ij})$ (striktno dominira) dominira nad strategijom u k-toj koloni, ako je $(z_{ij} < z_{ik})$, $z_{ij} \leq z_{ik}$ za svako i.*

Strategija u j-toj koloni je dominirajuća, a u k-toj koloni je dominirana, tako da se k-ta kolona može izbrisati iz skupa raspoloživih strategija i na taj način se dimenzija matrice plaćanja smanjuje.

1.5 Primena teorije igara

Teorija igara ima veliku primenu u ekonomiji, pravu, vojnim naukama, politici, biologiji, sociologiji, medicini, socijalnoj psihologiji kao i u mnogim drugim oblastima.

1.5.1 Primena u vojnim naukama

U oblasti vojnih nauka, teorija igara je imala veliku primenu. Neke od igara koje su pronašle primene u vojnoj nauci su: "Bitka u Bizmarkovom moru", "Igra zastrašivanja", "Kubanska kriza"i "Eliminisanje odstupnice".

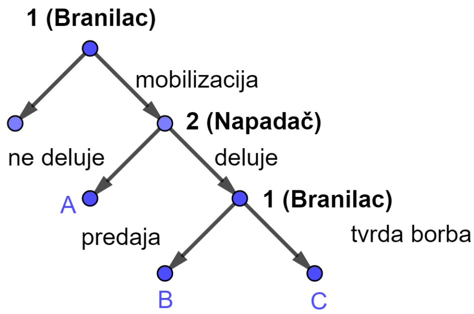
Bitka u Bizmarkovom moru
Bitka u Bizmarkovom arhipelagu koja je vođena od prvog do četvrtog marta 1943. godine je primer primene igara nulte sume u oblasti vojnih nauka. Bitku su vodili Amerikanci, uz pomoć vazduhoplovnih snaga Australije, protiv Japanaca. Do Amerikanaca stižu obaveštajni podaci da Japanci nameravaju da premeste svoje trupe iz luke na krajnjem istoku Nove Britanije u novu luku u Novoj Gvineji. Postoje dva načina da se pređe ovaj put: jedan je uz severni deo Nove Britanije koji je kraći, ali su smanjeni uslovi vidljivosti na ovom putu, a drugi je duži uz južni deo Nove Britanije i tu su klimatski uslovi takvi da obezbeđuju bolju vidljivost. Put traje tri dana, bez obzira koji način prelaska puta izaberu. Američka komanda je razmatrala da li izviđače i ostale vazduhoplovne snage da smesti na severnoj ili južnoj ruti. Ako konvoj bude otkriven, on će biti bombardovan, sve dok ne stigne do nove luke. Ukoliko su američki avioni i japanski konvoj smešteni na različitim rutama, konvoj neće biti odmah otkriven. Amerikancima će biti potrebno neko vreme da otkriju konvoj i angažuju avione. Podaci u matrici predstavljaju dane bombardovanja.

	Severna putanja	Južna putanja
Severna putanja	(2, -2)	(2, -2)
Južna putanja	(1, -1)	(3, -3)

Igrač I predstavlja američke snage i njegove strategije date su horizontalno, a igrač II predstavlja japanske komande i njegove strategije date su vertikalno. Radi se o igri nulte sume, dobitak jednog igrača jednak je gubitku drugog igrača i igrači svoje odluke donose istovremeno. Ako se konvoj bude kretao severnom linijom i američke trupe su smeštene na ovoj liniji. Američke trupe će za jedan dan otkriti konvoj i bombardovaće ga u uslovima smanjene vidljivosti. Japanska komanda će dva dana biti teško bombardovana. Ako su trupe smeštene na različitim putanjama, američke trupe na severnoj putanji, a konvoj na južnoj, biće potrebno više vreme da se konvoj otkrije. Kada otkriju konvoj, preusmeriće snage i nakon toga sledi bombardovanje uz odličnu vidljivost. Japanski konvoj očekuje bombardovanje u trajanju od dva dana uz velike gubitke. Najbolja situacija za japanski konvoj je da se kreću severnom putanjom, a da su Amerikanci na južnoj putanji, tada bi došlo do kratkog bombardovanja u trajanju od jednog dana uz najmanje gubitke, zbog uslova slabe vidljivosti. Najlošiji rezultat za Japance je da krenu južnom putanjom i da su Amerikanci na toj putanji. Amerikanci će brzo otkriti konvoj i tada dolazi do bombardovanja u trajanju od tri dana u uslovima odlične vidljivosti. Konvoj će tada imati najveće gubitke. Ako posmatramo situaciju iz ugla američke komande, vidimo da za nju ne postoji dominirajuća strategija, odnosno ne postoji strategija koja dovodi do boljeg rezultata, bez obzira na to koju strategiju bira japanska strana. Ako posmatramo iz ugla japanske komande vidimo da je južna putanja slabo dominirana strategijom severne putanje. Pošto su igrači racionalni, oni neće odigrati strategiju koja je slabo dominirana nekom drugom strategijom. Ravnotežna tačka ove igre je severna putanja - severna putanja. Iz istorije znamo, da se ova bitka ovako i odigrala. Konvoj je krenuo severnom putanjom, na toj putanji su bile i američke trupe. Otkriven je odmah prvog dana i žestoko bombardovan. Japanci su imali velike gubitke, ali odluku njihovog komandanta opravdava teorija igara.[2]

Igra zastrašivanja
U igri zastrašivanja učestvuju dva igrača. Igrač I je država branilac, a igrač II država napadač. Predstavljamo igru u ekstenzivnoj formi i ona se odvija u tri etape. Država branilac na osnovu političkih dešavanja i različitih nagoveštaja može da uoči da li joj preti opasnost. Država napadač može da preti na različite načine državi braniocu. U početku igrač II samo preti i ne povlači nijedan konkretan potez protiv igrača I . Tek nakon uočavanja pretnje, igra počinje i prva je na potezu država branilac. Država branilac ima na raspolaganju dve strategije: ništa da ne poduzme, ili može da započne mobilizaciju vojne snage. Ako se država branilac odluči za mobilizaciju, onda država napadač može na mobilizaciju da reaguje, ili da ne uradi ništa. Ukoliko država napadač ne reaguje na mobilizaciju, onda se igra završava sa rezultatom A. Mobilizacija odvraća potencijalnog napadača od napada. Ako država napadač odluči da napadne državu branioca, tada branilac ima na raspolaganju dve strategije, ili da se preda (tada igra završava rezultatom B), ili da napadne napadača svim raspoloživim sredstvima (tada igra završava rezultatom C).

Igra je sekvencijalna, igrači ne donose poteze u isto vreme. Ovaj model je testiran na istorijskim primerima od 1885. godine i došlo se do sledećih rezultata: 58 slučajeva je završeno sa rezultatom A, rezultatom B 10 slučajeva, a 14 slučajeva rezultatom C . Najveći broj slučajeva je završio tako da, kada je država branilac pokazala otpor, napadači su odustajali od rata. Iz svega ovoga dolazi se do zaključka da što se branilac snažnije sprema za otpor, manja mogućnost je da će do rata doći. Uvek postoje izuzeci. Ako napadač ima posebno izražene interese da dođe do sukoba, ili ako je velika razlika u vojnoj snazi, može doći do sukoba.[2]



Slika 1: Igra zastrašivanja

Kubanska kriza

Do kubanske krize je došlo u oktobru 1962. godine. Američka obaveštajna služba je na Kubi otkrila instalacije za rakete koje su imale nuklearno punjenje. Nakon ovog otkrića Kenedijeva administracija donosi odluku o pomorskoj blokadi sovjetskih ratnih brodova, koji su nosili delove za ovaj sistem. Ova situacija je predstavljena u obliku igre sa dva igrača: SAD i Sovjetski Savez. SAD predstavlja igrača I i njegove strategije date su horizontalno. Sovjetski savez predstavlja igrača II i njegove raspoložive strategije date su vertikalno. SAD ima na raspolaganju dve strategije: pomorsku blokadu, ili da avionski napadne raketna postrojenja na Kubi. Sovjetski Savez može da obustavi plovidbu ka Kubi i povuče se, ili da nastavi plovidbu po ceni sukoba.

Kubanska kriza opisno

	Povlačenje	Nastavak plovidbe
Pomorska blokada	Kompromis	Sovjeti pobeđuju
Avionski napadi	SAD pobeđuje	Nuklearni rat

Kubanska kriza numerički

	Povlačenje	Nastavak plovidbe
Pomorska blokada	(3, 3)	(2, 4)
Avionski napadi	(4, 2)	(1, 1)

Ova igra ima dve tačke Nešove ravnoteže (4, 2) i (2, 4). Struktura isplate igre pokazuje da se isplati napasti, samo ukoliko protivnik odluči da se povuče. Kubanska kriza je završila kompromisnim rezultatom, iako je teorija igara ovakav ishod smatrala malo verovatnim. Oba igrača u sukobu treba da budu svesni i spremni na rizik nuklearnog rata, da bi kompromisno rešenje bilo stabilno. Ako je jedan igrač spreman da se nosi sa rizikom da dođe do nuklearnog rata, a drugi nije, tada prvi igrač pobeđuje. Ukoliko nijedan igrač nije spreman da se nosi sa ovim rizikom, nije moguće uspostaviti stabilno rešenje igre. Stabilno rešenje igre se može uspostaviti pomoću politike zastrašivanja. Ako oba igrača prate politiku pretnje odmazdom, tada će doći do kompromisnog rešenja kao posledica ravnoteže straha.[2]

1.5.2 Primena u političkim naukama

Teorija igara ima veliku primenu i u političkim naukama. Primer koji nam to pokazuje je Samarićaninova dilema. Džejms Bjukenen (James M. Buchanan, 1919-2013) je 1975. godine objavio članak Samarićaninova dilema, u kojem ukazuje da veliki broj građana neke zemlje živi od socijalne pomoći i da taj broj raste. Ovaj problem ukazuje na to da nešto nije u redu sa sistemom podsticaja. Igra se sastoji od dva igrača. Igrač 1 je Samarićanin koji ima na raspolaganju dve strategije: strategija L da ne pomogne igraču 2 i druga strategija R je da pomogne igraču 2. Igrač 2 je osoba koja očekuje pomoć. On ima na raspolaganju takođe dve strategije: prva je l da radi i druga je r da ne radi ništa i čeka pomoć. Matrica plaćanja izgleda ovako:

	l	r
L	(2, 2)	(1, 1)
R	(4, 3)	(3, 4)

Vrednost 1 u matrici označava najnižu korisnost koju to stanje donosi igraču, a vrednost 4 označava najveću korisnost igraču. (1,1) predstavlja situaciju, koja nije povoljna ni za za prvog ni za drugog igrača. Tačka (R, r) je tačka strateškog ekvilibrijuma u ovoj igri. Igrač 1 se ponaša kao Samarićanin, a igrač 2 ne radi ništa. Strategija R je dominantna za igrača 1, jer je 4>2 i 3>1. Strategija L je dominirana strategijom R. Ako su igrači racionalni, igrač 2 će eliminisati strategiju L iz skupa dopustivih strategija igrača 1. Igrač 2 je svestan toga i odgovara strategijom r. Zašto neko da radi, kada unapred zna da će dobiti pomoć. Dolazi do dileme, kao posledica toga, da pomoć nekada može imati negativan uticaj na osobu, kojoj se pomaže. U ljudskoj prirodi je da pomogne onome, kome je pomoć neophodna. Može se uočiti veličina ovog problema, ako ga predstavimo u sledećem kontekstu. Pretpostavimo da je pomoć koju prvi igrač daje drugom igraču obrnuto proporcijalna dohotku koji igrač 2 zarađuje (što igrač 2 manje zarađuje veću pomoć dobija). U ovom slučaju igrač 2 nema motivaciju da radi. Ova situacija ima negativan efekat i na društvo, jer se povećava broj onih koji očekuju pomoć. Ovaj tip igre se naziva aktivna samarićanska dilema. Postoji i pasivna samarićanska dilema, čija matrica plaćanja ima sledeći oblik:

	l	r
L	(4,2)	(1,1)
R	(2,3)	(3,4)

U ovoj igri ni za igrača 1 ni za igrača 2 nema dominirajuće strategije. Igra ima dve tačke Nešovog ekvilibrijuma (L,l) i (R,r). Ukoliko igrač 1 očekuje da će igrač 2 raditi, spreman je da mu pomogne. Postoje različiti načini da se prevaziđe ova dilema. Jedna od ideja je bila da država interveniše. Država može da uvede posrednika, koji će pratiti ponašanje igrača 2.[2]

1.5.3 Primena u pravu

Posmatramo situaciju u kojoj pojedinac razmišlja da li da se upusti u krađu, koja može da mu donese zaradu od milion dolara. Ako odluči da se upusti u krađu, postoji mogućnost da ne bude uhvaćen i u ovom slučaju mu se krađa čini kao racionalna mogućnost da na brz način dođe do novca. Međutim ova opcija je previše optimistična i na nju se racionalan kradljivac neće previše oslanjati. Kradljivac je svestan toga da će biti tražen i verovatno uhvaćen od strane policije. Posle toga sledi sud gde mora da odgovara za svoja dela, kao i zatvorska kazna. Kradljivac postavlja sebi pitanje: da li postoji mogućnost potkupljivanja policije. Ako je policija korumpirana, u slučaju da ga uhvate daće im jedan deo novca, oni će ga pustiti i neće odgovarati za krivično delo koje je počinio. U ovoj situaciji dolazi do pregovoranja, koliko novca od ukradene sume treba dati policiji, da ga ne prijave. Tada dolazi do pojave igre pregovaranja. Postoji i druga opcija za policajca, ako nije korumpiran. On može da privede kradljivca i da ne uzme određenu sumu ukradenog novca. Policajac će u ovom slučaju ostvari nulti dobitak. Zatvorske kazne za utvrđenu krađu su različitog stepena u zavisnosti od težine krivičnog dela. Da li visina zatvorske kazne može imati uticaj na visinu iznosa mita, koju treba lopov da da policiji? Ako je kazna velika, policajac može tražiti veći iznos mita. Ovakvo ponašanje nije realistično, zato što je kradljivac svestan, da ukoliko ga policajac prijavi, policajac neće dobiti mito i njegov dobitak će biti nula, što znači da takvo ponašanje nije u njegovom interesu. Pretnja kaznom je nerealna, bez obzira kolika je predviđena zatvorska kazna. Visina iznosa mita nema veze sa dužinom zatvorske kazne. Kradljivac će se ipak odlučiti za krađu, ako je siguran da će policajac uzeti mito. Ovim primerom se pokazuje da nivo predviđene zatvorske kazne neće sprečiti kriminalno ponašanje, ako je policija sklona uzimanju mita. Do efikasnog rešenja se mora doći na drugi način.[2]

1.5.4 Primena u ekonomiji

Teorija igara je našla veliku primenu i u ekonomiji. Nešova ravnoteža se koristi za analizu raznih ekonomskih situacija: opis ponašanja monopola, opis ponašanja duopola, aukcije, problemi javnih dobara, osiguranje i dr.
Prvi primer primene teorije igara u ekonomiji je borba za tržište. Postoje dve radio-stanice u gradu i one treba da donesu odluku koju će muziku puštati. Obe radio-stanice imaju isti cilj da ostvare što veće tržišno učešće. One mogu da emituju rok, džez ili bluz muziku. Ovo je igra sa konstantnom sumom. Matrica igre ima sledeći oblik:

	Rok	Džez	Bluz
Rok	(55, 45)	(30, 70)	(50, 50)
Džez	(75, 25)	(50, 50)	(70, 30)
Bluz	(50, 50)	(25, 75)	(45, 55)

Igra se može rešiti pomoću već poznatih metoda i rešenje igre je džez-džez, obe radio-stanice će emitovati džez muziku. To je strategija koja će rezultirati podelom tržišta. Zbir isplate prve i druge radio-stanice je 100. Kako je ovo igra konstantne sume, ona se može transformisati u igru nulte sume, radi lakšeg rešavanja. To se postiže tako što se pronađe aritmetička sredina isplate igrača. Matricu igre transformišemo u sledeću matricu u kojoj vrednosti predstavljaju dobitke (odnosno gubitke) igrača 1, koji su iznad (odnosno ispod) vrednosti aritmetičke sredine. Ako se prvi igrač odlučio da emituje džez muziku, a drugi rok, njihova dobit iznosi (75, 25), aritmetička sredina je 50. U transformisanoj matrici, dobitak prvog igrača će iznositi 25, jer je 75-50=25.

	Rok	Džez	Bluz
Rok	5	-20	0
Džez	25	0	20
Bluz	0	-25	-5

Za rešenje ove igre koristi se maxmin kriterijum i opet se dobija da je rešenje džez-džez. Ponekad transformacija igre sa konstantnom sumom u igru nulte sume olakšava pronalazak rešenja.[2]

Primer kartela pokazuje jednu klasičnu ekonomsku situaciju. Karteli su oblik sporazumnog udruživanja istorodnih firmi konkurenata koji time (udruživanjem u kartel) postaju monopol. Članice kartela su potpuno samostalne i nezavisne u svom poslovanju, ali su obavezne poštovati odredbe sporazuma o kartelu sve vreme postojanja kartela. OPEC je kartel zemalja proizvođača nafte. Kartel se dogovorio o kvotama koje svaka zemlja članica OPEC-a treba da ispoštuje. Saudijska Arabija je članica ovog kartela. Ona ima ogromne rezerve nafte i niže troškove eksploatacije, što je čini najjačom članicom u ovoj igri. Igrači imaju dve mogućnosti: da se pridržavaju kvota, ili da ih otvoreno krše. Imamo sledeću matricu isplate:

	Kršenje kvote	Pridržavanje kvote
Kršenje kvote	(2, 2)	(6, 3)
Pridržavanje kvote	(1, 7)	(4, 4)

OPEC-a je igrač I i njegove strategije su date horizontalno, a igrač II je Saudijska Arabija i njene strategije su vertikalno. Prva komponenta uređenog para u matrici predstavlja vrednost dobitka igrača I, a druga komponenta vrednost igrača II. Ako i prvi i drugi igrač odluče da krše kvotu i povećavaju proizvodnju, to dovodi do pada cene i porasta ponude nafte na tržištu. U tom slučaju obe strane ostvaruju skroman profit (2, 2). Ukoliko se OPEC-a ne pridržava kvote, a Saudijska Arabija pridržava, tada OPEC-a ostvaruje veliki profit 6, a Saudijska Arabija umeren 3. Ako se Saudijska Arabija ne pridržava kvota, a OPEC-a da, tada Saudijska Arabija ima izuzetno visok profit 7, a OPEC-a veoma skroman profit 1. Ako se obe strane pridržavaju kvota, one ostvaruju prosečan profit (4, 4). Vidimo da je za OPEC-u dominantna strategija kršenje kvote, jer je 2>1 i 6>4. Strategija pridržavanje kvota je dominirana strategijom kršenje kvota i nju možemo eliminisati. Rešenje igre zavisi od odluke Saudijske Arabije. Ako Saudijska Arabija poznaje strukturu igre i može da predvidi odluku kartela, onda je za nju najpovoljnije da se pridržava kvota. Saudijska Arabija kao racionalan igrač, briše iz skupa raspoloživih strategija OPEC-a, strategiju pridržavanja kvota. Bira strategiju pridržavanje kvote, jer je 3>2. U ovom slučaju igra se završava ravnotežnim rezultatom (6, 3).[2]

2 Bimatrične igre

Bimatrične igre su igre dva igrača kod kojih suma nije konstantna, odnosno nije jednaka nuli, tj. dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog igrača. Ovo su igre nenulte sume ili igre opšte sume i one se mogu definisati u normalnoj (strateškoj formi) ili u ekstenzivnoj formi.
Osnovna podela bimatričnih igara je na: nekooperativne i kooperativne igre. Kod nekooperativnih igara, igrači ne mogu da se dogovaraju oko izbora najbolje strategije, ili ako se dogovore, nijedna strana nije obavezna da se pridržava sporazuma. Kod kooperativnih igara, igrači imaju mogućnost da se dogovaraju oko strategija i ako dođe do nekog sporazuma, obe strane su obavezne da ga se pridržavaju. Kooperativne igre se dele na one kod kojih je dozvoljen slobodan prenos (transfer) dobitka od jednog igrača do drugog i na one kod kojih taj prenos nije dozvoljen.

2.1 Normalna forma bimatričnih igara

Normalnu formu igre nenulte sume definišu dva konačna skupa čistih (prostih) strategija X i Y, $x \in X$ za igrača I, $y \in Y$ za igrača II i dve realne funkcije $u_1(x, y)$ i $u_2(x, y)$, koje su definisane na skupu $X \times Y$ i predstavljaju rezultate igre igrača I i igrača II. Ako prvi igrač izabere strategiju $x \in X$, a drugi igrač izabere strategiju $y \in Y$, tada rezultat prvog igrača iznosi $u_1(x, y)$, a drugog igrača $u_2(x, y)$. Igra nenulte sume se modelira pomoću bimatrice plaćanja C. Elementi bimatrice C su uređeni parovi $(u_1(x, y)$,$u_2(x, y))$. Broj redova matrice C je jednak broju strategija igrača I, a broj kolona predstavlja broj strategija igrača II.

$$C = \begin{bmatrix} (u_1(x_1, y_1), u_2(x_1, y_1)) & (u_1(x_1, y_2), u_2(x_1, y_2)) & ... & (u_1(x_1, y_n), u_2(x_1, y_n)) \\ (u_1(x_2, y_1), u_2(x_2, y_1)) & (u_1(x_2, y_2), u_2(x_2, y_2)) & ... & (u_1(x_2, y_n), u_2(x_2, y_n)) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ (u_1(x_m, y_1), u_2(x_m, y_1)) & (u_1(x_m, y_2), u_2(x_m, y_2)) & ... & (u_1(x_m, y_n), u_2(x_m, y_n)) \end{bmatrix}$$

Ukoliko se označi

$$a_{ij}{=}u_1(x_i{,}y_j)$$
$$\text{i}$$
$$b_{ij}{=}u_2(x_i{,}y_j)$$

tada se matrica C može predstaviti na sledeći način:

$$C = \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & ... & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & ... & (a_{2n}, b_{2n}) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & ... & (a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix}.$$

Matrica C se dekomponuje na dve matrice A i B formata $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ako igrač I bira i-ti red, a igrač II j-tu kolonu, onda igrač I osvaja a_{ij}, a igrač II osvaja b_{ij}, gde je a_{ij} elemenat i-te vrste i j-te kolone matrice A, a b_{ij} elemenat i-te vrste i j-te kolone matrice B.

Primer 1. *Dekompozicija matrice C na dve matrice.*

$$C = \begin{bmatrix} (7,8) & (2,2) & (-1,0) & (2,-5) \\ (6,7) & (0,0) & (6,5) & (-7,3) \\ (4,-3) & (9,1) & (6,9) & (-4,2) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & -7 \\ 4 & 9 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

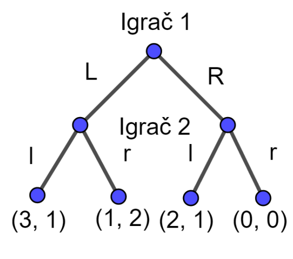
Ako prvi igrač bira strategiju u drugom redu, a drugi igrač strategiju u prvom redu, rezultat prvog igrača iznosi a_{21}=6, a drugog igrača je $b_{21} = 7$.

Rezulat se može čitati u bimatrici C u drugoj vrsti i prvoj koloni i iznosi (6,7), ili u matrici A za igrača I i u matrici B za igrača II. Igra je nulte sume ako i samo ako važi B=-A.

2.2 Bimatrične igre u ekstenzivnoj formi

U normalnoj formi igrači istovremeno povlače poteze i pri tome nemaju informacije o potezima suparnika. Ekstenzivna forma omogućava da igrači naizmenično povlače poteze. Prilikom povlačenja poteza mogu da imaju potpune ili nepotpune informacije o prethodnim potezima drugog igrača. Ekstenzivna forma je predstavljena kao graf strukture stabla. Stablo je uređeni par (T, F), pri čemu T čini skup čvorova, a F skup lukova. F je funkcija koja svakom čvoru $x \in T$ pridružuje podskup skupa T, $F(x) \subset T$ čvorova koji direktno slede čvor x. Postoji jedinstven put $(x_0, x_1, ..., x_n)$ od korena stabla x_0 do bilo kog čvora $x = x_n$. Ako postoji jedinstven put, to implicira da je stablo graf bez ciklusa i petlji.

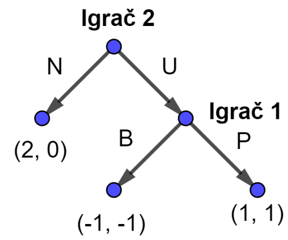
Primer 2. *[2] Igru igraju dva igrača i igra se odvija u dve etape. Igrač I započinje igru i ima na raspolaganju dve strategije: L i R. Igrač II igra posle poteza igrača I. Strategija koju će izabrati igrač II zavisi od poteza koji je odigrao igrač I. Igrač II ima na raspolaganju takođe dve strategije: l i r.*
Postoje četiri krajnja čvora u kojima se vide krajnji rezultati igre. Kao rezul-



Slika 2: Primer igre u ekstenzivnoj formi

tat biranja strategije L-l krajnji rezultat igre za prvog igrača je 3 i 1 za drugog *igrača. Ako prvi igrač odigra strategiju R, a drugi igrač strategiju l, tada je rezultat 2 za prvog igrača, a rezultat 1 za drugog igrača. Igra se sastoji od sedam čvorova. Koren stabla pripada prvom igraču, a sledeća dva čvora drugom igraču. Postoje četiri terminalna čvora, kojima su pridružene vrednosti isplate igre. Ova igra je sekvencijalna, drugi igrač donosi odluku i pri tome ima na raspolaganju informacije o potezima prvog igrača.*

Primer 3. *[2] Posmatra se tržište na kojem učestvuje firma monopolista (igrač I). Druga firma, koja u ovom primeru predstavlja igrača II, treba da donese odluku da li da uđe na tržište ili ne. Ulazak na monopolisano tržište može negativno uticati na igrača II, jer ga izlaže nesigurnom okruženju, konkurenciji i nepredvidivom tržištu. Ova poslovna odluka treba se dobro razmotriti. Greške su pogubne i skupe po subjekta koji donosi odluku.*
Postoje dve firme, jedna je već na tržištu, a druga razmišlja da li da uđe



Slika 3: Primer igre u ekstenzivnoj formi

na tržište. Igrač II ima na raspolaganju dve mogućnosti: U da uđe na tržište i N da ne uđe na tržište. Ukoliko igrač II izabere strategiju N kod igrača I se ništa ne menja. On ostaje sam na tržištu i ostvaruje isti profit, kao što je i do sada bilo. Ukoliko igrač II odigra strategiju U, tada igrač I može da izabere strategiju B da se bori i da istisne novu firmu sa tržišta, ili strategiju P da se prilagodi novoj situaciji. Ako se monopolista odluči za strategiju B, tada je rezultat igre (-1, -1), obe firme su na gubitku. Ako se igrač 1 odluči da se prilagodi, obe firme imaju jednak profit 1.

2.3 Prevođenje iz jedne forme u drugu

Ponekad se igre prebacuju iz jednog oblika u drugi, da bi se lakše došlo do rešenja. Svakoj igri u ekstenzivnoj formi, odgovara tačno jedna igra u normalnoj matričnoj formi, a za svaku igru u matričnoj formi postoji više odgovarajućih ekstenzivnih formi.

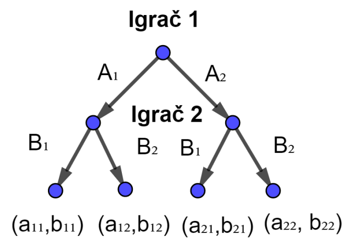
2.3.1 Prevođenje igre iz matrične u ekstenzivnu formu

Posmatra se igra u kojoj učestvuju dva igrača. Svaki igrač ima na raspolaganju po dve strategije. Igra je predstavljena u matričnoj formi. Elementi matrice su uređeni parovi koji predstavljaju isplatu igre, prvi broj označava dobitak prvog igrača, a drugi broj označava dobitak drugog igrača. Igrač I ima na raspolaganju dve strategije A_1 i A_2, a drugi igrač strategije B_1 i B_2. Igra je predstavljena sledećom matricom:

	B_1	B_2
A_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})
A_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})

Ako prvi igrač odigra strategiju A_1 i drugi igrač odigra strategiju B_2, onda a_{12} predstavlja dobitak prvog igrača, a b_{12} dobitak drugog igrača. Ova igra se može predstaviti u ekstenzivnoj formi uz pretpostavku da igrač I igra prvi. Igra u normalnoj formi može da rezultira u različite ekstenzivne forme u zavisnosti od pretpostavki. Neke od pretpostavki su: da li igrači odluke donose istovremeno, ili se igra odvija sekvencijalno.

Prvo igra igrač I, a zatim poteze povlači igrač II. U zavisnosti od njegovih



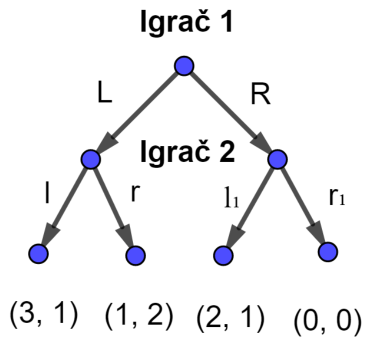
Slika 4: Primer prevođenja igre u ekstenzivnu formu

poteza, dolazi se do krajnjih čvorova u kojima se vidi isplata igre.

2.3.2 Prevođenje igre iz ekstenzivne u matričnu formu

Važno je da u igrama u ekstenzivnoj formi učestvuje konačan broj igrača i da svaki od njih ima na raspolaganju konačan broj strategija. Svakoj igri u ekstenzivnoj formi odgovara jedinstvena igra u matričnoj formi. Posmatramo sledeću igru datu u [2].

Igrač 1 ima na raspolaganju samo dve strategije L i R. Igrač 2 ima na



raspolaganju četiri strategije.

Ako igrač 1 odigra strategiju L, tada će igrač 2 odigrati l. Ako igrač 1 odigra strategiju R, onda će igrač 2 odigrati strategiju l_1. Oznaka za ovu strategiju je $(l,\, l_1)$.

Sledeća strategija ima sledeći plan igranja: ako igrač 1 odigra strategiju L, tada će igrač 2 odigrati l. Ako igrač 1 izabere strategiju R, onda će igrač 2 izabrati strategiju r_1. Druga strategija je označena sa $(l,\, r_1)$.

Treća strategija je označena kao $(r,\, l_1)$. Ako igrač 1 izabere strategiju L, tada će igrač 2 izabrati r. Ako igrač 1 odigra strategiju R, onda će igrač 2 odigrati strategiju l_1.

Poslednja strategija je označena sa $(r,\, r_1)$. Ako igrač 1 odigra strategiju L, tada će se igrač 2 odlučiti za strategiju r. Ako igrač 1 odigra strategiju R, onda će igrač 2 izabrati strategiju r_1.

U sledećoj matrici strategije igrača 1 date su horizontalno, a strategije igrača 2 vertikalno.

	(l, l_1)	(l, r_1)	(r, l_1)	(r, r_1)
L	(3, 1)	(3, 1)	(1, 2)	(1, 2)
R	(2, 1)	(0, 0)	(2, 1)	(0, 0)

Primer prevođenja igre u matričnu formu

Ovaj oblik igre u matričnoj formi odgovara igri u ekstenzivnoj formi koja je prethodno navedena. Igra u ekstenzivnoj formi ima četiri isplate, a igra u matričnoj formi ima osam isplata. Ovo je posledica toga da se utvrđuje plan igre za sve moguće situacije - i za aktuelna i za potencijalna stanja.

3 Nekooperativne bimatrične igre

Rešavanje igara nenulte tj. opšte sume je komplikovanije u odnosu na igre nulte sume. Kada dobitak jednog igrača nije jednak gubitku drugog igrača, maksimizacija dobitka jednog igrača nije jednaka minimizaciji gubitka drugog igrača. Teorema minimaksa se ne može primeniti na bimatrične igre, ali jedan koncept iz igara sa nultom sumom se preuzima i dobija važnu upotrebu u igrama sa nenultom sumom.
Moguće je definisati nivo bezbednosti za igrača I koji predstavlja najmanji zagarantovani očekivani rezultat V_I. U bimatričnoj igri sa matricama A i B formata $m \times n$, V_I nivo bezbednosti igrača I se definiše kao

$$V_I = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \ .$$

Strategija $p = (p_1, p_2, ..., p_m)^T$ je strategija sa kojom se ostvaruje gornja maksimalna vrednost i ona se naziva maksmin strategija.
Nivo bezbednosti za igrača II se definiše kao

$$V_{II} = \max_q \min_i \sum_{j=1}^{n} q_j b_{ij}.$$

Strategija $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^T$ pomoću koje se dostiže V_{II} se naziva maksmin strategija igrača II.

Primer 4. *[7] Posmatra se bimatrica C*

$$C = \begin{bmatrix} (2,0) & (1,3) \\ (0,1) & (3,2) \end{bmatrix}.$$

Bimatrica C se može dekomponovati na dve matrice A i B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Iz matrice A se vidi da je maksmin strategija za igrača I p=($\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$) pomoću koje ostvaruje nivo bezbednosti V_I=$\frac{3}{2}$. Za igrača II maksmin strategija se traži iz matrice B, pri čemu se vidi da druga kolona matrice B dominira nad prvom. Zbog toga igrač II bira drugu stategiju, te njegova strategija ima sledeći oblik $q = (0, 1)$, što mu garantuje nivo bezbednosti V_{II} =2. Ako oba igrača odigraju svoju maksmin strategiju, prvi igrač će ostvariti nivo bezbednosti V_I=$\frac{3}{2}$, a igrač II će ostvariti nivo bezbednosti 3$\frac{3}{4}$+2*$\frac{1}{4}$=$\frac{11}{4}$. Ako igrač*

I analizira matricu plaćanja B, može da uoči da je strategija u drugoj koloni striktno dominantna. Tada igrač I može da igra prostu strategiju (0, 1) i može da ostvari vrednost 3, što je bolji rezultat od V_I=$\frac{3}{2}$ koji dobije maksmin strategijom, a igrač II će dobiti rezultat 2. Tako da i igrač I i igrač II biraju prostu strategiju (0, 1), tj. igrač I bira drugu vrstu, a igrač II bira drugu kolonu i ostvaruju dobitak (3, 2) iz matrice C. Tačka (3, 2) se naziva tačka strateškog ekvilibrijuma.

Konačna igra sa n igrača u strateškoj formi je data sa n nepraznih konačnih skupova X_1, X_2, ..., X_n i n realnih funkcija u_1, u_2, ..., u_n definisanih na skupu $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Skup X_i predstavlja skup prostih strategija i-tog igrača, a funkcija $u_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ predstavlja dobitak i-tog igrača, kad svaki od preostalih igrača odabere prostu strategiju $x_j \in X_j$, $j = 1, 2, ..., n$.

Definicija 4. *Vektor prostih strategija* $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$*, gde* $x_i \in X_i$*,* $i = 1, 2, ..., n$ *je prost strateški ekvilibrijum ako za svako* $i = 1, 2, ..., n$ *i za svako* $x \in X_i$ *važi*

$$u_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \geq u_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Osnovna karakteristika strateškog ekvilibrijuma je da jednostranim odstupanjem bilo kog igrača od njega, on ostvaruje lošiji rezultat.

Primer 5. *[8] Posmatra se matrica A*

$$A = \begin{bmatrix} (3,\ 3) & (0,\ 0) \\ (0,\ 0) & (5,\ 5) \end{bmatrix}$$

Tačke (3, 3) i (5, 5) su tačke strateškog ekvilibrijuma. Igrači imaju iste dobitke. Pošto se radi o nekooperatinim igrama, nemaju mogućnost da se dogovaraju. Da imaju mogućnost da komuniciraju, mogli bi dobiti maksimalnu isplatu (5, 5).

Igrači mogu koristiti i mešovite strategije. Definisan je skup verovatnoća P_k kao P_k= { p=$(p_1, p_2, ..., p_k)^T$: $p_i \geq 0$ za $i = 1, 2, ..., k$ i $\sum_{i=1}^{k} p_i$ =1 }. Neka m_i predstavlja broj prostih strategija i-tog igrača tj. neka skup X_i ima m_i elemenata. Skup mešovitih strategija i-tog igrača je P_{m_i}, označimo P_{m_i} sa X_i^*.
Definisan je skup X_i=$\{1, 2, ..., m_i\}$ za svako $i = 1, 2, ..., n$. Pretpostavimo da igrač i koristi mešovitu strategiju p_i=$(p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{im_i})^T$. Tada je prosečni dobitak j-tog igrača dat kao

$$g_j(p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n)=\sum_{i_1=1}^{m_1}\ldots\sum_{i_n=1}^{m_n} p_{1i_1}\ldots p_{ni_n}\ u_j(i_1,\ldots,i_n).$$

Definicija 5. *Vektor mešovitih strategija* $(p_1, p_2, ..., p_n)^T$ *gde* $p_i \in X_i^*$, $i = 1, ..., n$ *je strateški ekvilibrijum, ako* $\forall i = 1, ..., n$ *i* $\forall p \in X_i^*$ *važi:*

$$g_i(p_1,\ldots,p_{i-1},p_i,p_{i+1}\ldots,p_n) \geq g_i(p_1,\ldots,p_{i-1},p,p_{i+1}\ldots,p_n).$$

Mešovita strategija p_i koja zadovoljava prethodnu nejednakost za svako $p \in X_i^*$ je najbolji odgovor i-tog igrača na izbor mešovitih strategija ostalih igrača. Odstupanje bilo kojeg igrača od strategije koja je sadržana u konceptu strateške ravnoteže, ne može da dovede do poboljšanja njegovog položaja, ako se ostali igrači pridržavaju svojih ravnotežnih strategija. Prost strateški ekvilibrijum je specijalan slučaj strateškog ekvilibrijuma. Ovo je primer čuvenog Bajesovskog pristupa odlučivanja. Igrač pokušava da proceni koju će strategiju odigrati njegov protivnik i na osnovu toga bira svoju strategiju. Bira najbolju strategiju kojom bi odgovorio na akcije svojih protivnika. U igri ovo može biti veoma opasno, zbog toga što protivnici mogu biti bolji u pogađanju strategija.
Bimatrična igra može da poseduje više tačaka strateškog ekvilibrijuma. Pojam optimalnog rešenja igre kakvo je definisano za slučaj matričnih igara, nema više smisla u bimatričnoj igri. Rešenje bimatričnih igara se traži u tačkama strateškog ekvilibrijuma.
Postavlja se pitanje da li uvek postoji tačka strateškog ekvilibrijuma u bimatričnim igrama. Odgovor na ovo pitanje dao je Džon Neš 1951. godine u sledećoj teoremi.

Teorema 3. *(Nešova teorema): Svaka igra sa* n *igrača i sa konačnim brojem strategija ima najmanje jedan strateški ekvilibrijum tj. najmanje jednu ravnotežnu tačku.*

U literaturi o teoriji igara ta tačka se često naziva Nešova ravnoteža.
U slučaju bimatričnih igara, par mešovitih strategija $(p^*,\ q^*)$ definiše tačku strateškog ekvilibrijuma u matrično-vektorskoj notaciji ako je

$$\begin{aligned} p^{*T}Aq^* &\geq p^TAq^* \text{ za svako } p \\ p^{*T}Bq^* &\geq p^{*T}Bq \text{ za svako } q, \end{aligned}$$

gde su A i B matrice nastale dekompozicijom polazne matrice. Nekada bimatrična igra može imati više tačaka strateške ravnoteže i onda se javlja problem koju tačku izabrati. Drugi problem koji se javlja je taj, što nekada Nešova ravnoteža i nije najbolje rešenje.

3.1 Nalaženje tačaka strateškog ekvilibrijuma

Nalaženje tačaka strateškog ekvilibrijuma bimatričnih igara može se svesti na problem linearne komplementarnosti. Taj problem se formuliše kao nalaženje rešenja $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ i $z = (z_1, z_2, ..., z_n)^T$ u sledećem sistemu:

$$\begin{gathered} w - Mz = q \\ w_i\ z_i{=}0,\ i = 1, 2, ...n \\ w \geq 0,\ z \geq 0, \end{gathered}$$

pri čemu je M kvadratna matrica dimenzije $n \times n$ i q vektor dimenzije n.

U bimatričnoj igri, matrica A predstavlja isplate igrača I, a matrica B isplate igrača II. Obe matrice su dimenzija $m \times n$. Mešovita strategija igrača I je vektor $p = (p_1, p_2, ..., p_m)^T$, a vektor $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^T$ označava mešovitu strategiju igrača II. Očekivani rezultat igrača I je $p^T Aq$, a igrača II je $p^T Bq$. Ako se pretpostavi suprotno, tj. da elementi matrice plaćanja predstavljaju gubitak igrača I, tačka $(p^*,\ q^*)$ je tačka strateškog ekvilibrijuma, onda za igrača I se zna da važi $p^{*T}\mathrm{A}q^* \leq p^T \mathrm{A}q^*$, a za igrača II važi sledeća nejednakost $p^{*T}Bq^* \leq p^{*T}Bq$.
Ako se j-ta kolona matrice A označi sa $A_{*j}{=}(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})^T$, a i-ta vrsta sa $A_{i*}{=}(a_{i1},\ a_{i2},...,a_{in})$, tada važi sledeća nejednakost za igrača I

$$p^{*T}Aq^* \leq A_{i*}\ q^*,\ i = 1, 2, ..., m.$$

Ako se sa I_m označi vektor dimenzije $m \times 1$ čiji su svi elementi jednaki jedinici, onda se gornji sistem nejednakosti u matrično-vektorskoj notaciji može zapisati kao

$$(p^{*T}Aq^*)I_m \leq Aq^*.$$

Na analogan način dobija se nejednakost za igrača II

$$(p^{*T}Bq^*)I_n \leq B^T\ p^*.$$

Tačka $(p^*,\ q^*)$ je tačka strateškog ekvilibrijuma, ako važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{gathered} (p^{*T}Aq^*)I_m \leq Aq^* \\ (p^{*T}Bq^*)I_n \leq B^T\ p^*. \end{gathered}$$

Kako su matrice A i B striktno pozitivne, jer nastaju dodavanjem svim elementima dovoljno velike pozitivne konstante, tada važi

$$\begin{gathered} p^{*T}Aq^*{>}0 \\ p^{*T}Bq^*{>}0. \end{gathered}$$

Uvodi se smena

$$\theta = \frac{p^*}{p^{*T} B q^*},\ \eta = \frac{q^*}{p^{*T} A q^*}.$$

Tada nejednakosti pomoću kojih se definišu uslovi koje mora da zadovoljava tačka strateškog ekvilibrijuma, mogu se pretvoriti u jednakosti dodavanjem izravnavajućih promenljivih u i v. Promenljiva u je vektor dimenzije $m \times 1$ $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$, a promenljiva $v = (v_1, v_2, ..., v_n)^T$ vektor dimenzije $n \times 1$.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_m \\ -I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq 0; \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix} \geq 0; \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix} = 0;$$

Veličine u, v, θ, η su rešenja gornjeg problema linearne komplementarnosti. Vektori p^* i q^* pomoću kojih se definiše tačka strateškog ekvilibrijuma mogu se izračunati kao:

$$p^* = \frac{\theta}{\sum\limits_{i=1}^{m} \theta_i}$$
$$q^* = \frac{\eta}{\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j}.$$

Američki naučnici Lemke (Carlton Edward Lemke, 1920-2004) i Hauson (J. T. Howson) su 1964. godine razvili algoritam za određivanje mešovitih Nešovih strategija. Ovaj algoritam je zasnovan na kvadratnom programiranju. Date su matrice plaćanja A za igrača I i B za igrača II, dimenzija $m \times n$. I_m i I_n su jedinični vektori dimenzije $m \times 1$ i $n \times 1$, a p i q su vektori mešovitih strategija, u i v su dva realna broja. Vektori p i q zadovoljavaju uslove:

$$pI_m = 1 \text{ i } qI_n = 1,\ p \geq 0,\ q \geq 0.$$

Očekivani rezultati za igrača I i igrača II su:

$$pAq^T \text{ i } pBq^T.$$

Tačku strateškog ekvilibrijuma definiše par mešovitih strategija (p^*, q^*) ako važi

$$pAq^{*T} \leq p^*Aq^{*T} \text{ i } p^*Bq^T \leq p^*Bq^{*T}.$$

Ukoliko se ove nejednakosti pomnože sa desne strane vektorom I_m odnosno I_n^T dobije se

$$Aq^{*T} \leq p^* A q^{*T} I_m \text{ i } p^* B \leq p^* B q^{*T} I_n^T.$$

Na osnovu ovoga se može dokazati teorema Lemke-Hauson.

Teorema 4. *[7] (Teorema Lemke - Hauson): Par mešovitih strazegija (p^*, q^*) je Nešova ravnotežna tačka, ako i samo ako su p^*, q^*, u^*, v^* rešenja sledećeg modela kvadratnog programiranja:*

$$\begin{gathered}
\max(pAq^T + pBq^T - u - v) \\
Aq^T \leq uI_m \\
B^T p^T \leq vI_n \\
p_i \geq 0,\ i = 1, 2, ...m \\
q_j \geq 0,\ j = 1, 2, ...n \\
\textstyle\sum_{i=1}^m p_i = 1 \\
\textstyle\sum_{j=1}^n q_j = 1.
\end{gathered}$$

3.2 Primeri nekooperativnih igara

Primer 6. *[8] Posmatramo bimatričnu igru sa matricom plaćanja*

$$C = \begin{bmatrix} (3,3) & (0,2) \\ (2,1) & (5,5) \end{bmatrix}$$

Matrica C se može dekomponovati na dve matrice. Na matricu A, koja predstavlja matricu plaćanja prvog igrača i na matricu B, koja predstavlja matricu plaćanja drugog igrača.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Maxmin strategija igrača I je $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sa kojom se ostvaruje nivo bezbednosti V_I=$\frac{5}{2}$. Maxmin strategija igrača II je $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ i nivo bezbednosti, koji se ostvaruje ovom strategijom za igrača II je V_{II}=$\frac{13}{5}$. Matrica C ima dve tačke strateškog ekvilibrijuma (3, 3) i (5, 5). Oba igrača preferiraju više drugu tačku strateškog ekvilibrijuma, zbog toga što bi tada imali veći dobitak. Ovo bi bio očekivani ishod igre, da igrači imaju mogućnost da se dogovaraju. Pošto se radi o nekooperativnim igrama, ne mogu se međusobno dogovarati. Ako oba igrača veruju da će drugi igrač birati prvu stratregiju, onda oba igrača biraju *prvu strategiju i ishod igre je (3, 3). Ne može se reći da je ovaj način razmišljanja iracionalan. Ako jedan od njih odluči da promeni strategiju, može biti samo lošiji ishod igre po njega. Ukoliko je igrač I izabrao prvu strategiju, a igrač II odluči da odigra drugu strategiju, onda je ishod ove igre (0, 2), što implicira da se dobitak igrača II smanjio sa 3 na 2.*

Svaki igrač traži najbolji odgovor na strategiju njegovog protivnika. Igrač se stavlja u poziciju svoga protivnika, razmatra strategije koje njegov protivnik može odigrati i razmišlja kojom strategijom bi najbolje odgovorio na strategiju svoga protivnika. Rešenje do kojeg se dolazi, ako se oba igrača ovako ponašaju je tačka strateškog ekvilibrijuma.

Primer 7. *[8] Borba polova je igra između momka i devojke, u kojoj treba da odluče kako da provedu veče. Prilikom donošenja odluke, nemaju mogućnost da se međusobno dogovaraju. Imaju dve mogućnosti: da gledaju fudbalsku utakmicu, ili da idu u pozorište. Oboje više žele da provedu veče zajedno, nego odvojeno. Momak želi da zajedno gledaju fudbalsku utakmicu, a devojka želi da idu zajedno u pozorište. Borba polova ima sledeću matricu plaćanja*

	Pozorište	*Fudbal*
Pozorište	*(2, 1)*	*(0, 0)*
Fudbal	*(0, 0)*	*(1, 2)*

Devojka predstavlja igrača I i njene strategije su date horizontalno, a momak predstavlja igrača II i njegove strategije su date vertikalno. Ako se oba igrača odluče za pozorište, devojka ima isplatu 2, pošto su obe njene želje ispunjene, zajedno su i idu u pozorište. Muškarcu je u ovom slučaju ispunjena samo jedna želja, da su zajedno, pa je njegova isplata 1. Ako oba igrača izaberu fudbalsku utakmicu, devojka u ovom slučaju ima isplatu 1, zato što će zajedno provesti veče, a momak ima isplatu 2, jer su obe njegove želje ispunjene. Ako se devojka odluči za fudbalsku utakmicu, a on za pozorište, njihove isplate su 0, jer nisu zajedno i ne gledaju šta žele. Ako se svako opredeli za ono što voli, opet im je isplata 0, jer nisu zajedno.
Ova igra ima dve tačke strateškog ekvilibrijuma (2, 1) i (1, 2). U ovom slučaju ne može da se predvidi jedinstveno rešenje. Ne postoji u ovoj igri ravnoteža, koja je dominantna u odnosu na drugu. Da bi se mogao predvideti konačan rezultat, potrebno je znati neke unapred poznate konvencije igre. Možda par ima dogovor da jedne sedmice idu u pozorište, a druge da gledaju fudbalsku utakmicu. Ako znamo da su prošle sedmice bili u pozorištu, onda možemo da predvidimo jedinstveno rešenje igre.

Zatvorenikova dilema je igra u kojoj svaki igrač sledi vlastite interese, ishod ovoga je rezultat koji nije najbolje rešenje ni za jednog igrača. Ovo je igra koja je najpoznatija i ima najveću primenu u drugim naukama u odnosu na druge igre u teoriji igara.

Primer 8. *[8] U igri zatvorenikove dileme posmatramo dva kriminalca, koji se nalaze u zatvoru. Optuženi su za krađu. Bez njihovog priznanja, ne može se dokazati da su oni to uradili. Matrica plaćanja za ovu igru ima sledeći oblik*

	Ne priznaje	*Priznaje*
Ne priznaje	*(3, 3)*	*(0, 4)*
Priznaje	*(4, 0)*	*(1, 1)*

Matrica predstavlja dobitke i za jednog i za drugog igrača. Veći broj predstavlja povoljniji rezultat za igrača, a ne broj godina zatvora. Ukoliko oba igrača ne priznaju, oni dobijaju minimalnu kaznu a to je jedna godina zatvora. Ako jedan prizna, a drugi ne, onaj koji je priznao dobija 8 godina zatvora, a ovaj što nije priznao dobija 3 meseca. Ako oba priznaju, svaki dobija po 6 godina zatvora. Zatvorenici se nalaze u dilemi, da li priznati, ili ipak ne. U ovoj igri najbolja strategija za svakog igrača je da prizna krivicu. Tačka (1, 1) je tačka strateškog ekvilibrijuma. Do ovog rešenja se dolazi eliminacijom strategija, koje su dominirane nekom drugom strategijom. Ako igrač I prizna, njegova dobit može biti 4 ili 1 u zavisnosti od izbora strategije igrača II. Ako igrač I ne prizna, njegov dobitak može iznositi 3 ili 0. Vidi se da strategija priznati striktno dominira nad strategijom ne priznati ($4>3$ i $1>0$). Vidimo da rešenje ove igre nije optimalno. Optimalno rešenje bi bilo, da nijedan ne prizna i da budu po godinu dana u zatvoru.

Nedostatak informacija i nemogućnost igrača da međusobno komuniciraju, dovode do rešenja koje nije optimalno, iako oba igrača igraju racionalno. Igra zatvorenikove dileme se često javlja u igrama gde ima više učesnika. Još jedan od primera gde možemo videti primenu zatvorenikove dileme je sledeći. Posmatra se grupa gledalaca u pozorištu. U pozorištu jedan gledalac ima nezgodno mesto i ne može da vidi dobro scenu. Da bi bolje video pozornicu, odlučio je da ustane i da se popne na stolicu. Ovim postupkom, onemogućio je i osobi iza njega da vidi scenu. Gledalac iza njega sledi njegov primer i on takođe ustaje, pa onaj iza njega i tako redom do kraja sale. Ovo dovodi do toga, da svi stoje, a niko ne vidi bolje, nego što je ranije video. Svi su sledili vlastite interese i ishod ovoga je rešenje, koje nije optimalno ni za jednog gledaoca.

Nekooperativne igre imaju veliku primenu u ekonomiji i često ilustruju pregovore između poslodavca i sindikata. Svaki sindikat tokom pregovora sa poslodavcem razmatra, da li treba da traži povećenje plate ili ne. Svaki sindikat smatra da je za njega najbolje da traži povećanje plate. Ako on to ne uradi, a ostali sindikati to zahtevaju, on dovodi svoje članove u nezgodnu poziciju. Svi razmišljaju na isti način, dolazi do kratkoročne dobiti, ali je krajnji ishod nepovoljan za sve. Svi dobijaju veću zaradu. Preduzeće mora isplaćivati veće plate, ukoliko nije došlo do povećanja produktivnosti povećava se trošak proizvodnje. Proizvodi postaju skuplji, zbog povećanja troškova robe i ovo dovodi do inflacije, novac gubi vrednost. Svaki sindikat je žrtva svoje racionalnosti.

3.3 Pronalazak svih tačaka strateškog ekvilibrijuma

Za matrice većeg formata nije teško pronaći sve tačke strateškog ekvilibrijuma. Sve tačke se mogu pronaći, tako što se prošire metode za pronalaženje sedlastih tačaka igara nulte sume. U igrama sa bimatricama većeg formata, tačke strateškog ekvilibrijuma se pronalaze na sledeći način. Po kolonama bimatrice traži se maksimalna dobit prvog igrača i iznad tog broja se stavlja zvezdica. Ako ima više isplata koje su maksimalne, iznad svake se stavi zvezdica. Zatim se traži maksimalna isplata drugog igrača po vrstama, opet se kod maksimalne isplate stavlja zvezdica. Svaki uređeni par u bimatrici, kod kojeg kod zarade i prvog i drugog igrača postoji zvezdica, predstavlja tačku strateškog ekvilibrijuma.

Primer 9. *[8] Posmatramo bimatricu plaćanja C.*

C=

	a	b	c	d	e	f
A	$(2, 1)$	$(4, 3)$	$(7^*, 2)$	$(7^*, 4)$	$(0, 5^*)$	$(3, 2)$
B	$(4^*, 0)$	$(5^*, 4)$	$(1, 6^*)$	$(0, 4)$	$(0, 3)$	$(5^*, 1)$
C	$(1, 3^*)$	$(5^*, 3^*)$	$(3, 2)$	$(4, 1)$	$(1^*, 0)$	$(4, 3^*)$
D	$(4^*, 3)$	$(2, 5^*)$	$(4, 0)$	$(1, 0)$	$(1^*, 5^*)$	$(2, 3)$

Prvi igrač ima na raspolaganju strategije A, B, C i D, a drugi igrač raspolaže strategijama a, b, c, d, e i f. Za prvog igrača maksimalna isplata u prvoj koloni je 4 i iznad 4 stavljamo zvezdicu. U drugoj, njegova maksimalna isplata je 5 i tu stavimo zvezdicu, u trećoj 7 i tako redom tražimo maksimalne vrednosti i iznad njih stavljamo zvezdice. Za igrača II maksimalna ispata u prvoj vrsti je 5, u drugoj vrsti je 6 i tako redom. Postupak analogno ponavljamo, sve dok ne prođemo kroz sve vrste i sve kolone. U bimatrici C, na osnovu ovog postupka, vidi se da postoje dve tačke strateškog ekvilibrijuma (5, 3) i (1, 5).

U igrama nulte sume sa dva igrača, sedlasta tačka je tačka strateškog ekvilibrijuma. Mnoge igre nulte sume nemaju sedlastu tačku. Međutim sedlastu tačku uvek imaju igre sa savršenim informacijama. Igre nenulte sume sa savršenim informacijama uvek imaju bar jednu tačku strateškog ekvilibrijuma, koja se može pronaći pomoću povratne indukcije.

3.4 Iterativni postupak elinimacije striktno dominiranih strategija

Postupak eliminacije striktno dominiranih prostih strategija je koristan, jer omogućava svođenje složenih igara na jednostavniji oblik, koji je lakši za rešavanje. Jedna od pretpostavki teorije igara je da su igrači racionalni. Racionalan igrač nikada neće odigrati striktno dominiranu strategiju, zato što postoji strategija koja mu omogućava veću isplatu, bez obzira koju će strategiju odigrati njegov protivnik. Igrač očekuje da je i njegov protivnik racionalan i veruje da ni on neće odigrati dominiranu strategiju takođe. Na osnovu ove pretpostavke, igrač može izbrisati dominiranu strategiju njegovog protivnika, pre nego što proveri da li kod njega postoji dominirana strategija, koju će da eliminiše. Ovaj postupak je iterativan. Ako su oba igrača racionalna, igrač I će eliminisati svoju dominiranu strategiju, zatim će eliminisati dominiranu strategiju svoga protivnika, ovaj postupak se analogno nastavlja, sve dok postoji dominiranih strategija.

Primer 10. *[2] Posmatramo matricu plaćanja C.*

	Levo	*Sredina*	*Desno*
Gore	*(1, 0)*	*(1, 2)*	*(0, 1)*
Dole	*(0, 3)*	*(0, 1)*	*(2, 0)*

Igrač I raspolaže strategijama gore i dole, a igrač II strategijama levo, sredina i desno. Matrica C se može dekomponovati na matricu A za igrača I i matricu B za igrača II.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Za igrača I strategija gore ne dominira nad strategijom dole 1>0, 1>0, ali nije 0>2. Takođe, ne važi ni obrnuto, strategija dole ne dominira nad strategijom gore. Ako igrač II igra strategiju levo, za igrača I je bolje da odigra strategiju gore, jer je 1>0. Isto važi, ako igrač II odigra strategiju sredina. Međutim ako igrač II igra strategiju desno, onda je za igrača I bolje da odigra strategiju dole 2>0.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Posmatramo matricu B. Kod igrača II vidi se da je strategija desno dominirana strategijom sredina, jer je 2>1 i 1>0. Tako da dominiranu strategiju desno možemo eliminisati. Ako je igrač II racionalan, on neće odigrati strategiju desno. Ako je igrač I takođe racionalan, on očekuje da igrač II neće odigrati strategiju desno. Eliminišemo strategiju desno iz skupa raspoloživih strategija igrača II. Bimatrica plaćanja C se svodi na matricu C^*.

$C^*=$

	Levo	*Sredina*
Gore	*(1, 0)*	*(1, 2)*
Dole	*(0, 3)*	*(0, 1)*

Za igrača I vidimo da je strategija dole dominirana strategijom gore, jer je 1>0 i 1>0. Ako je igrač I racionalan, on neće odigrati strategiju dole, shodno tome i igrač II je racionalan i on eliminiše strategiju dole iz skupa raspoloživih strategija igrača I.
Matrica C^* se redukuje na sledeću matricu C_*.

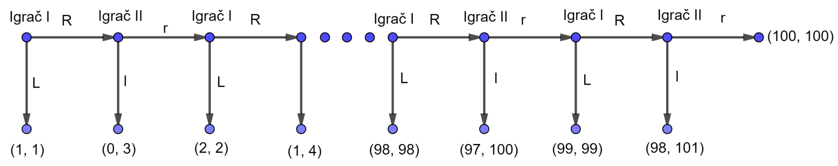
$C_*=$

	Levo	*Sredina*
Gore	*(1, 0)*	*(1, 2)*

Primenom istog postupka, vidimo da je za igrača II strategija levo dominirana strategijom sredina, jer je 0<2. Tako da se strategija levo eliminiše. Na kraju dolazimo do konačnog rešenja igre (1, 2), koje je tačka strateškog ekvilibrijuma. Eliminacijom strategija koje su dominirane, dolazi se do tačke strateškog ekvilibrijuma. Ova strategija se naziva striktno dominantna, odnosno ravnotežna strategija.

Primer 11. *[8]Igra cepidlake, igra stonoge, ili igra centipeda je igra koju je prvu predstavio Robert Rozental (Roberth Rosenthal, 1945-2002). Ovo je igra dva igrača koji se međusobno smenjuju, u kojoj se primenjuje eliminacija dominirane strategije. Igra je prikazana u ekstenzivnoj formi. Pošto se radi o igri sa savršenim informacijama, igra se rešava povratnom indukcijom.*

Igrač I ima na raspolaganju strategije R i L, a igrač II strategije r i l. U poslednjem čvoru, igrač II igra strategiju l, jer mu donosi veći dobitak 101>100. Igrač I dobija isplatu 98, umesto 100 koju bi dobio da je igrač II odigrao strategiju r. Vraćamo se korak unazad. Pošto igrači igraju naizmenično, sada je na redu igrač I. Igrač I bira strategiju L, zato što će ostvariti veću dobit 99, a da je odigrao strategiju R njegova dobit bi bila 98. Ponavljajući ovaj postupak, korak po korak, dolazimo do početnog stanja, gde igrač I bira strategiju L, jer na taj način ostvaruje veću dobit. Igrač I i igrač II imaju istu dobit, po jednu jedinicu dobitka. Tačka (1, 1) je jedinstvena tačka strateškog ekvilibrijuma, do ove tačke se dolazi primenom striktno dominiranih strategija. Ova igra nosi naziv cepidlaka, jer cepidlačenje, odnosno pridržavanje

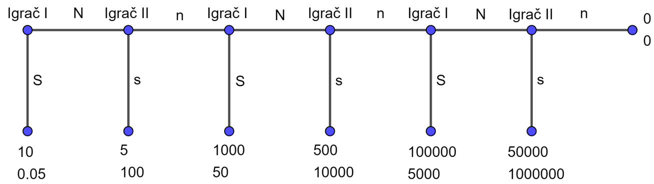


Slika 5: Igra cepidlake

zahteva za maksimiziranjem dobiti, dovodi igrače do toga da na kraju dobiju samo 1 jedinicu. Ovaj rezultat je teško očekivati u stvarnim igrama, jer su retke osobe koje bi igrale igru na ovaj način.

3.4.1 Igra cepidlake u MATLAB-u

MATLAB je programski jezik, koji je razvila firma MathWorks. U ovom programu lako je manipulisati matricama, prikazivati funkcije i implementirati algoritme. Pomoću MATLAB-a traži se tačka Nešovog ekvilibrijuma u igri centipeda. Rezultat koji se dobije pomoću ovog programskog jezika poredi se sa rezultatom koji daje teorija. Takođe će biti testirano, koliko je bitna pretpostavka da su igrači racionalni. Igrači imaju potpune informacije o potezima njihovih protivnika. U MATLAB-u se kreiraju matrice isplate za svakog igrača. Igrači pokušavaju da maksimiziraju svoju dobit. MATLAB precizno i efikasno računa koju strategiju treba da odigra igrač, kako bi odgovorio na strategiju njegovog protivnika i na taj način maksimizirao svoj dobitak. U igri cepidlake kod Rozentala isplate igrača rastu linearno. U modifikovanoj igri kod Aumanna (Robert John Aumann, 1930) iz 1988. godine isplate rastu eksponencijalno. Igrači imaju na raspolaganju dve strategije: nastavi igru i stopiraj igru. Igra se odvija u šest koraka. Ako igrač II izabere strategiju zaustavi igru, igrač I će ostvariti manji dobitak. Ako se igrač II odluči da nastavi igru, onda se igrač I u sledećem koraku nalazi u istoj situaciji kao igrač II, pošto igrači igraju naizmenično. Igrači se nalaze u obrnutim



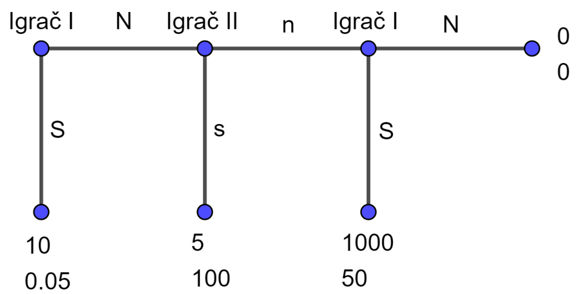
Slika 6: Igra cepidlake

ulogama i sa povećanim isplatama. Igra je konačna. Koristeći matematičku indukciju unazad dolazi se do jedinstvene tačke Nešovog ekvilibrijuma. Igrajući od desna ka levo brišu se dominirane strategije. Dominantna strategija za svakog igrača je zaustaviti igru.
U prvom eksperimentu posmatra se kraća verzija Aumannovog modela igre cepidlake, gde isplata raste eksponencijalno. Igrač I ima na raspolaganju strategiju nastavi igru N i strategiju zaustavi igru S. Igrač II ima na raspolaganju strategije stopiraj igru s i nastavi igru n. Igra je podeljena na tri podigre. Pošto se igra rešava matematičkom indukcijom unazad, kreće se iz poslednjeg čvora. Prvi korak je definisanje matrica plaćanja za svakog igrača. Elementi matrice predstavljaju isplate igrača u svakom čvoru podigre. Matrica P_1 predstavlja isplate igrača I, a P_2 igrača II.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1000 \\ 5 & 5 \\ 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 50 \\ 100 & 100 \\ 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Drugi korak je podela igre u dve podigre i definišu se sve moguće strategije i isplate za igrače u toj podigri. Treći korak je posmatranje podigri u kojima je igrač I igrao poslednji i traže se strategije, koje će mu doneti maksimalnu isplatu. Ovaj korak je u skladu sa pretpostavkom, da je svaki igrač racionalan i teži ka tome da maksimizira svoju dobit. Može se izračunati dobit igrača II u drugoj podigri, gde igrač II traži strategiju koja će biti najbolji odgovor na izbor strategije igrača I. U sledećem koraku postupak se ponavlja, samo igrači menjaju uloge. Definišu se isplate i strategije za igrača II i na ovaj način se stiže u prvi čvor, gde igrač I bira strategiju: zaustavi igru, koja mu donosi najveću dobit. Na ovaj način dolazi se do Nešove tačke strateškog ekvilibrijuma.



Slika 7: Eksponencijalni oblik kraće verzije Aumanove igre

Kôd u MATLAB-u za eksperiment 1 dat je u šestom poglavlju.

Rešenje zadatka je dato u sledećem obliku:

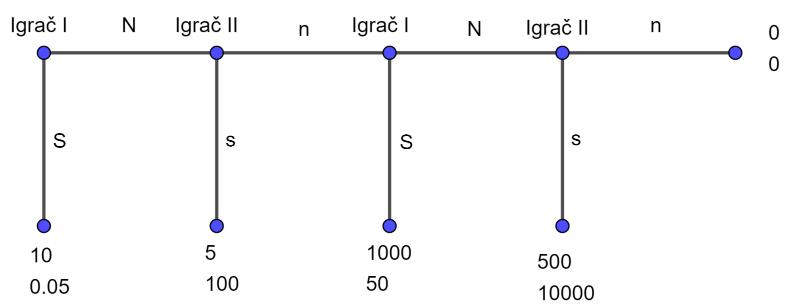
REŠENJE	
SPNE=[(bri11 sgbri11); sgbri21)]	SPNE=[(2 2); 2)]

U eksperimentu 2 posmatra se igra centipeda koja traje duže. Igra se može podeliti u četiri podigre, kako bi se proverilo postojanje tačke Nešovog ekvilibrijuma. Igra postaje komplikovanija dodavanjem novih čvorova. Koristi se isti postupak kao u prethodnom eksperimentu. Definišu se matrice plaćanja za igrača I i igrača II. Zatim se traže strategije koje donose najveću isplatu igračima.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 500 \\ 1000 & 1000 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 10 & 10 \\ 10 & 10 \\ 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10000 \\ 50 & 50 \\ 100 & 100 \\ 100 & 100 \\ 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Svaki igrač uzima u obzir koju strategiju je igrao njegov protivnik. U MATLAB-



Slika 8: Eksponencijalni oblik duže verzije Aumanove igre

u je moguće pronaći strategiju, koja predstavlja najbolji odgovor igrača na strategiju njegovog protivnika. MATLAB pokazuje da se stiže u tačku Nešove ravnoteže, ako prvi igrač u prvom čvoru bira strategiju zaustavi igru i u prvom i u drugom eksperimentu i dobit igrača iznosi (10, 0.05). Ovo rešenje se podudara sa teorijskim rešenjem igre centipeda. Kôd za eksperiment 2 u MATLAB-u dat je u šestom poglavlju. Rešenje eksperimenta 2 dato je u tabeli.

REŠENJE	
SPNE=[(bri1 sgbri11);(sgbri1 sgbri111)]	SPNE=[(2 2);(2 2)]

Mnogi teoretičari postavljaju pitanje da li igrači u stvarnom životu igraju igru centipeda na ovaj način. Britanski matematičar i ekonomista Binmore (Kenneth George Binmore, 1940) smatra da način na koji igrači igraju igru zavisi od okruženja u kojem se igra igra. Aumann smatra da od racionalnosti igrača zavisi na koji način će se igra igrati u stvarnom životu. McKelvey (Richard D. McKelvey, 1944-2002) i Palfrey (Thomas R. Palfrey, 1953) su 1992. godine iskoristili Aumannovu igru centipeda za njihov eksperiment. Svaki eksperiment se sastojao iz više sesija. U eksperimentu dva studenta igraju igru centipeda. Nijedan od njih nije ranije igrao ovu igru. Podelili su 50 centi na veliku sumu od 40 centi i malu sumu od 10 centi. Svaki put kada igrači odluče da nastave igru, suma se udvostruči i zameni između igrača. Svaka eksperimentalna sesija uključivala je od 18 do 20 učesnika, koji su bili podeljeni u dve grupe. Jedna grupa je predstavljala igrača I, a druga grupa igrača II. Uloge igrača se nisu menjale tokom sesije. Nijedan učesnik nije bio u igri više puta sa istim igračem, kako bi se eliminisala mogućnost saradnje među igračima. Posmatraju se dve igre centipeda: jedna sa četiri čvora i jedna sa šest čvorova. Ove dve igre su kreirane, kako bi se videlo kako igrači postupaju u realnosti. Prema Nešovom rešenju, sve igre bi trebalo da završe u prvom čvoru. Sa druge strane, ako dva igrača sarađuju i uvek biraju strategiju da nastave igru, igra će završiti u krajnjem čvoru. Rezultat eksperimenta nije se podudarao ni sa jednom od ovih pretpostavki. McKelvey i Palfrey su otkrili da je 37 igri od 662 igre završilo tako što je prvi igrač u prvom čvoru uzeo veću sumu. Dok 23 igre od 662 je završeno u krajnjem čvoru, tako što su igrači birali strategiju nastavi igru do kraja. Eksperiment je otkrio tri obrasca u ponašanju studenata:
I Verovatnoća da će igrači izabrati strategiju zaustavi igru se povećava, kako se igrači približavaju krajnjem čvoru.
II Kako igrači dok igraju stiču više iskustva, tako njihova igra postaje racionalnija.
III Verovatnoća zaustavljanja je veća u igri sa četiri čvora, nego u igri sa šest čvorova, iako je isplata ista.
Eksperiment je dao još jedan zanimljiv rezultat, a to je da je bilo pojedinaca

koji su uvek igrali dalje. Oko 5% igrača je uvek biralo strategiju nastavi dalje.

Eksperiment 3 prikazuje kraću igru centipeda, ali sada je igrač II iracionalan. Koristi se najekstremnija forma iracionalnosti, igrač II teži ka tome da minimizira svoju isplatu. Osim promene racionalanosti igrača II, sve pretpostavke su iste kao u eksperimentu 1. Kada igrač II želi da minimizira svoju isplatu, igrač I ima potpune informacije i on želi da maksimizira svoju dobit. Igrač I će završiti igru u trećem čvoru i dobiće isplatu 1000. Ovo se dešava, jer igrač I zna da će iracionalni igrač II birati strategiju nastavi u drugom čvoru i onda će igrač I birati strategiju zaustavi igru u prvom čvoru, što mu donosi znatno manju isplatu od 1000. Zato se igra zaustavlja u trećem čvoru i dobit igrača iznosi (1000, 50).
Kôd za eksperiment 3 je isti kao kôd za eksperiment 1 samo se promeni korak 9 u kôdu. Kôd za eksperiment 3 nalazi se u šestom poglavlju. Rešenje eksperimenta 3 dato je u tabeli.

REŠENJE	
SPNE=[(bri11 sgbri11); sgbri21)]	SPNE=[(1 2); 1]

Eksperiment 4 koristi dužu igru centipeda kao u eksperimentu 2. Pretpostavlja se da je igrač II iracionalan i teži ka tome da njegov dobitak bude što manji. Rezultat eksperimenta pokazuje da je dobitak igrača (1000,50) i da igrač I bira strategiju zaustavi igru u četvrtom čvoru. Igrač II u krajnjem čvoru bira strategiju nastavi igru, jer na taj način osvaja manju dobit (50<1000). Igrač I bira u trećem čvoru strategiju zaustavi igru, jer je svestan da će igrač II u drugom čvoru birati strategiju nastavi igru, kako bi minimizirao dobit (0.05<100). Igrač I bi u prvom čvoru birao strategiju zaustavi igru i na taj način osvojio znatno manju dobit (10<1000). Kôd u MATLAB-u za eksperiment 4 koji se nalazi u šestom poglavlju je isti kao kôd za eksperiment 2, kada se promeni korak 4 i korak 14. Rešenje eksperimetna 4 je dato u tabeli.

REŠENJE	
SPNE=[(bri1 sgbri11);(sgbri1 sgbri111)]	SPNE=[(1 2);(1 1)]

Eksperiment 5 koristi dužu igru centipeda, ali se pretpostavlja da je igrač I iracionalan. Rezultat eksperimenta pokazuje da kada igrač I teži da minimizira svoju dobit, rešenje igre predstavlja Nešovu ravnotežu (10,0.05). Igrač I bira strategiju zaustavi igru u prvom čvoru, jer je svestan da ako nastavi igru, igrač II je racionalan i biraće strategiju zaustavi igru u četvrtom čvoru, što će igraču I doneti veću isplatu. Igrač I je iracionalan i on želi što manju dobit. Rezultat ovog poslednjeg eksperimenta pokazuje da je racionalnost bitan faktor u određivanju Nešove ravnoteže, ali nije neophodan da bi se postigao isti ishod kao u Nešovoj ravnoteži (10, 0.05). Kôd u MATLAB-u za eksperiment 5 je dat u šestom poglavlju i isti je kao kôd za eksperiment 2, ali se mora promeniti korak 9 i korak 17. Rešenje eksperimenta 5 je dato u narednoj tabeli.

REŠENJE	
SPNE=[(bri1 sgbri11);(sgbri1 sgbri111)]	SPNE=[(2 1);(1 2)]

4 Modeli duopola

Primena Nešovog ekvilibrijuma pri rešavanju nekooperativnih matričnih igara obično ima slabu moć predviđanja. Često postoji više rešenja tj. ravnotežnih tačaka, pa se ne zna koje odabrati, ili je pak dobijeno rešenje jedinstveno, ali loše (kao u primeru centipeda). Međutim, postoje primeri igara sa jedinstvenim rešenjem, kod kojih je strateški ekvilibrijum sasvim dobar indikator predviđanja. Takav primer je model duopola. Duopol je tržište na kojem dve firme proizvode isti ili sličan proizvod. Kada je na tržištu samo jedna firma, onda se radi o monopolu. Oligopol je tržište na kome se nalazi više firmi, koje proizvode iste ili slične proizvode i koje su međusobno konkurentne. Duopol je, dakle, specijalan slučaj oligopola.
Sledeći primer pokazuje primenu Nešovog ekvilibrijuma prilikom analize duopola. Coca Cola i Pepsi predstavljaju duopol na tržištu gaziranih pića. Ova dva proizvođača razmišljaju o promeni cene. Pretpostavka igre je da proizvodi imaju sve karakteristike iste, osim cene. Igrača I predstavlja Coca Cola i čije strategije su date horizontalno. Igrača II predstavlja Pepsi, čije strategije su date vertikalno. Oba igrača imaju na raspolaganju dve strategije: povećati cenu i smanjiti cenu. Matrica plaćanja C ima sledeći oblik

C=

	Povećati cenu	Smanjiti cenu
Povećati cenu	(12, 12)	(8, 15)
Smanjiti cenu	(15, 8)	(10, 10)

Brojevi u matrici predstavljaju profit igrača. Ukoliko jedan igrač odluči da poveća cenu, a drugi da smanji cenu, tada dolazi do pada tražnje za proizvodom kojem se cena povećala, i igrač ima manji profit. Ako Coca Cola odluči da poveća cenu, a Pepsi odluči da smanji cenu, tada Pepsi ima veći profit od Coca Cole. Povećava se tražnja za Pepsijem, povećava se njegov profit, kao i tržišno učešće. Coca Coli se smanji profit zbog gubitka dela tržišta. Ako se obe firme odluče da prodaju po nižoj ceni, njihov profit se smanjuje. Smanjenje profita je posledica toga, što prodaju istu količinu proizvoda samo po nižoj ceni. Za obe firme najbolja opcija bi bila, da obe povećaju cene. Ako firme nemaju mogućnost da se dogovaraju, ravnotežna tačka ove igre je (10, 10). Za igrača I strategija povećati cenu je dominirana strategijom smanjiti cenu (15>12 i 10>8). Prema tome za igrača I je najbolje da bira strategiju smanjenje cene. Igrač II je racionalan i svestan je da igrač I neće birati strategiju povećanja cene i briše je iz skupa dopustivih strategija igrača I. Za igrača II strategija povećanje cene je dominirana strategijom smanjenje cene (15>12 i 10>8). Prema tome za igrača II je najbolja opcija da bira strategiju smanjenja cene. Ravnoteža tržišta se uspostavlja, ako oba igrača biraju strategiju da smanje cene. Ukoliko igrači igraju kooperativno, mogu da se dogovore oko zajedničke strategije, biraju strategiju da povećaju cene i tada će ostvariti najveći profit. Antimonopolski zakon ne dozvoljava dogovore oko cene. [2]

4.1 Kurnoov model duopola

Ogist Kurno (Antonio Augustin Cournot, 1801-1877) je bio francuski filozof i matematičar. Njegov model duopola iz 1838. godine je našao veliku primenu u ekonomiji. U Kurnoovom modelu se posmatraju dve firme na tržištu koje proizvode homogen proizvod. Firme moraju da donesu odluku koliki će biti obim njihove proizvodnje. Obe firme u isto vreme donose odluku koliku količinu proizvoda će proizvoditi. U Kurnoovom modelu duopola, kada preduzeće donosi odluku koliko će proizvoditi, uzima u obzir koliko će proizvoditi preduzeće koje mu predstavlja konkurenciju na tržištu.
Konstanta c predstavlja trošak proizvodnje jedne jedinice proizvoda. Ova konstanta ima istu vrednost za obe firme. q_i predstavlja broj proizvoda koji proizvodi i-ta firma $i = 1, 2$. Ako i-ta firma proizvodi q_i jedinica proizvoda, onda je trošak proizvodnje i-te firme cq_i, $i = 1, 2$. Cena proizvoda i količina proizvodnje su u negativnoj korelaciji. Što se više proizvodi jedinica nekog proizvoda, njegova cena je manja. Ako firma I proizvodi q_1 jedinica proizvoda, a firma II q_2, tada je cena ukupne količine proizvodnje $Q = q_1 + q_2$ definisana na sledeći način

$$P(Q) = P(q_1 + q_2) = \begin{cases} a - (q_1 + q_2) & ,0 \leq q_1 + q_2 \leq a \\ 0 & ,q_1 + q_2 > a \end{cases}$$

$$= max\,\{0, a - (q_1 + q_2)\}$$

$$= max\,\{0, a - Q\}$$

za neku konstantu a. Tržišna cena $P(Q)$ zavisi od obima proizvodnje i firme I i firme II. Prilikom definisanja cene, ispred Q se nalazi -, jer su cena i količina negativno korelisane. Skupovi $X = Y = [0, \infty)$ predstavljaju skupove prostih strategija igrača. Pošto se radi o igrama koje nisu konačne, ovi skupovi strategija su beskonačni. Skup prostih strategija prve firme je X, a druge firme Y. Vrši se restrikcija ovih skupova na skup $[0, a]$. Nijednom igraču nije u interesu da proizvodi više od a jedinica proizvoda, jer bi tada cena tog proizvoda bila jednaka nuli. Profit koji ostvaruje i-ta firma prilikom proizvodnje Q jedinica nekog proizvoda po ceni $P(Q)$ iznosi

$$u_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1 + q_2) - cq_i,\ i = 1, 2.$$

Profit firme I je

$$u_1(q_1, q_2) = q_1 P(q_1 + q_2) - cq_1 = q_1 max\,\{0, a - (q_1 + q_2)\} - cq_1.$$

Profit firme II je

$$u_2(q_1, q_2) = q_2 P(q_1 + q_2) - cq_2 = q_2 max\,\{0, a - (q_1 + q_2)\} - cq_2.$$

Pretpostavimo da je $c < a$. U suprotnom bi troškovi proizvodnje bili veći od prihoda proizvodnje.
Analiziramo slučaj da se na tržištu nalazi samo jedna firma, odnosno da se radi o monopolu. Pretpostavimo da je $q_2 = 0$. Firma I proizvodi q_1 jedinica proizvoda, trošak proizvodnje iznosi cq_1, cena proizvodnje $P(q_1) = max\,\{0, a - q_1\}$, a profit

$$u(q_1) = q_1 P(q_1) - cq_1 = q_1 max\,\{0, a - q_1)\} - cq_1 =$$

$$\begin{cases} q_1(a - q_1) - cq_1 & , 0 < q_1 \leq a \\ 0 - cq_1 & , q_1 > a \end{cases}.$$

Firma želi da maksimizira svoj profit, zbog toga bira q_1 iz intervala $(0, a)$, jer tako izabrano q_1 maksimizira profit.

$$u(q_1) = q_1(a - q_1) - cq_1 = q_1(a - c) - q_1^2.$$

Maksimalan profit se dobija tako, što se parcijalni izvod u po q_1 izjednači sa nulom.

$$\frac{\partial u(q_1)}{\partial q_1} = a - c - 2q_1 = 0$$

$$a - c = 2q_1$$

$$q_1^* = \tfrac{a-c}{2},$$

gde je q_1^* optimalna količina proizvodnje sa kojom firma dostiže maksimalan profit.
$u(q_1^*) = q_1^*(a - q_1^*) - cq_1^* = \frac{a-c}{2}(a - \frac{a-c}{2}) - c\frac{a-c}{2} = \frac{a-c}{2}\frac{a+c}{2} - \frac{ac-c^2}{2} = \frac{(a-c)^2}{4}$ predstavlja maksimalan profit monopola.
Da bi se pronašla tačka strateškog ekvilibrijuma za duopol, potrebno je pronaći strategiju za firmu koja će joj doneti najveći profit, bez obzira koju strategiju bira protivnička firma.
Profit za firmu I je

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - q_1 - q_2) - cq_1 = (a - c)q_1 - q_1q_2 - q_1^2,$$

a profit za firmu II je

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - q_1 - q_2) - cq_2 = (a - c)q_2 - q_1q_2 - q_2^2.$$

Rešenje sledećeg sistema jednačina predstavlja tačku strateškog ekvilibrijuma duopola.

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial u_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left[(a - c)q_1 - q_1q_2 - q_1^2\right] = a - c - q_2 - 2q_1 = 0$$

$$\frac{\partial u_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left[(a - c)q_2 - q_1q_2 - q_2^2\right] = a - c - q_1 - 2q_2 = 0.$$

Rešavanjem ovog sistema dobija se $q_1^* = \frac{a-c}{3}$ i $q_2^* = \frac{a-c}{3}$. Tačka (q_1^*, q_2^*) predstavlja tačku strateške ravnoteže. $Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{2(a-c)}{3}$ predstavlja količinu koju firma treba da proizvede da bi maksimizirala svoj profit. Maksimalan profit firme I iznosi

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = (a - c)q_1^* - q_1^*q_2^* - q_1^{*2} = \frac{(a-c)^2}{9}.$$

Maksimalan profit firme II iznosi

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = (a - c)q_2^* - q_1^*q_2^* - q_2^{*2} = \frac{(a-c)^2}{9}.$$

Ukupan profit duopola iznosi $u_d(q_1^*, q_2^*) = u_1(q_1^*, q_2^*) + u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{2(a-c)^2}{9}$.
Optimalna cena duopola iznosi $P^* = P(q_1^* + q_2^*) = a - (q_1^* + q_2^*) = \frac{a+2c}{3}$.
U duopolu pojedinačno firme proizvode manje nego u monopolu($\frac{a-c}{3} < \frac{a-c}{2}$), ali zbirno proizvode više ($\frac{2(a-c)}{3}) > \frac{a-c}{2}$). Profit firme u monopolu je veći od profita firme duopola $\frac{(a-c)^2}{4} > \frac{2(a-c)^2}{9}$. Cena u monopolu je veća nego cena firme u duopolu $\frac{a+c}{2} > \frac{a+2c}{3}$. Ako bi firme odlučile da sarađuju, tada bi mogle

da zarađuju više, odnosno da imaju veći profit, a da proizvode manje. Svaka firma bi proizvodila polovinu količine koju proizvodi monopol $\frac{a-c}{4}$, a njihov profit bi iznosio $\frac{(a-c)^2}{8}$. Da firme mogu da sarađuju, proizvodile bi manje nego u duopolu $\frac{a-c}{4} < \frac{a-c}{3}$, a imale bi veći profit od duopola gde firme ne mogu da sarađuju $\frac{(a-c)^2}{8} > \frac{(a-c)^2}{9}$. Ovaj slučaj podseća na igru zatvorenikove dileme, oba igrača bi imala veći dobitak, da mogu da sarađuju.

4.2 Bertranov model duopola

1883. godine Bertran (Joseph Louis François Bertrand, 1822-1900) je predstavio model duopola u kojem proizvođači ne odlučuju o tome koliku količinu proizvoda će proizvoditi, nego biraju cenu po kojoj će prodavati proizvode. Najpre se pretpostavlja da proizvođači proizvode identične proizvode i u isto vreme odlučuju kolika će biti cena proizvoda. Ako jedan proizvođač prodaje po nižoj ceni, tražnja za njegovim proizvodom će biti veća, pa će imati i veći profit. Ako oba proizvođača prodaju po istoj ceni, svaki od njih će snabdevati polovinu tržišta. Da bi privukli kupce, počeće da smanjuju cenu naizmenično. U Kurnoovom modelu, cena P je bila funkcija koja je zavisila od količine proizvodnje Q. U Bertranovom modelu duopola je obrnuto, količina Q je funkcija koja zavisi od P i definisana je na sledeći način

$$Q(P) = \begin{cases} a - P & , 0 \leq P \leq a \\ 0 & , P > a \end{cases}$$

$$= max\left\{0, a - P\right\},$$

gde a predstavlja konstantu koja označava maksimalnu tražnju na tržištu. Neka p_1 predstavlja cenu proizvoda firme I, a firma II prodaje proizvode po ceni p_2. Trošak proizvodnje jedne jedinice proizvoda je c i isti je za obe firme. Tada $p_i - c$ predstavlja profit i-te firme, koji se dobija prodajom jedne jedinice proizvoda. Ukupan profit firme I predstavlja predstavlja proizvod profita $p_1 - c$ i prodate količine i definisan je na sledeći način

$$u_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)Q(P) = \begin{cases} (p_1 - c)\max\left\{0, a - p_1\right\} & , p_1 < p_2 \\ (p_1 - c)\frac{\max\{0, a - p_1\}}{2} & , p_1 = p_2 \\ 0 & , p_1 > p_2. \end{cases}$$

Na ovaj način se definiše profit firme I uz pretpostavku da je cena firme II fiksirana. Ako je cena firme I veća od cene firme II, tada će profit firme I biti jednak nuli. Niko neće kupovati njene proizvode, jer može kupiti identičan

proizvod po nižoj ceni. Ako firma I i firma II imaju iste cene, tada je tržište podjednako podeljeno, tražnja za proizvodima je ista. Ako je $p_1 < p_2$, tada će proizvođači više kupovati proizvode firme I, jer su jeftiniji.
Profit koji ostvaruje firma II je

$$u_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)Q(P) = \begin{cases} (p_2 - c)max\{0, a - p_2\} & , p_2 < p_1 \\ (p_2 - c)\frac{max\{0,a-p_2\}}{2} & , p_1 = p_2 \\ 0 & , p_2 > p_1. \end{cases}$$

Tačka strateškog ekvilibrijuma je $p_1^* = p_2^* = c$ i u ovoj tački profit oba igrača je jednak nuli $u_1(p_1^*, p_2^*) = u_2(p_1^*, p_2^*) = 0$. U bilo kom drugom slučaju jedna firma može da smanji cenu i osvoji celo tržište u slučaju da su proizvodi identični. Ova pretpostavka da su proizvodi identični nije realna. Kupci često preferiraju jedan proizvod više u odnosu na isti taj proizvod samo drugog proizvođača, bez obzira kolika je cena tog proizvoda. Neko voli više da pije Coca-Colu nego Pepsi, bez obzira kolika je cena.
Uzimajući ovu pretpostavku u obzir definiše se Bertranov model za različite proizvode. Trošak proizvodnje jedne jedinice proizvoda za obe firme je c>0. p_1 predstavlja cenu po kojoj se prodaju proizvodi firme I, a p_2 cenu za firmu II. Profit koji ostvari firma I prodajom jedne jedinice proizvoda je $p_1 - c$, a profit firme II je $p_2 - c$. Firme će proizvoditi sve dok je $p_i \leq c$, i=1, 2. Količina proizvoda koju prodaje firma I je definisana na sledeći način

$$q_1(p_1, p_2) = max\{0, a - p_1 + bp_2\},$$

a količina proizvoda koju proizvede firma II definisana je kao

$$q_2(p_1, p_2) = max\{0, a - p_2 + bp_1\}.$$

Koeficijent supstitucije $b \in [0, 1]$ pokazuje da li jedan proizvod može da se zameni drugim proizvodom. Ako je $b = 0$ ne postoji mogućnost zamene. Ako je $b = 1$ proizvodi su identični. $X = [0, \infty)$ predstavlja skup strategija firme I, a $Y = [0, \infty)$ skup strategija firme II. Oba skupa su beskonačna, jer igra nije konačna. Ukupan profit i-te firme jednak je proizvodu količine proizvedenih jedinica i profita koji ostvari i-ta firma za jedan proizvedeni proizvod $p_i - c$.
Profit firme I iznosi

$$u_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) = max\{0, a - p_1 + bp_2\}(p_1 - c),$$

a profit firme II iznosi

$$u_2(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2)(p_2 - c) = max\{0, a - p_2 + bp_1\}(p_2 - c).$$

Tačka strateškog ekvilibrijuma (p_1^*, p_2^*) predstavlja ravnotežnu cenu na tržištu. To je ona cena koja izjednačava ponudu i tražnju na tržištu. Pretpostavke su da je $a - p_1 + bp_2 > 0$ i $a - p_2 + bp_1 > 0$, pa je $q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + bp_2$ i $q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + bp_1$. Potrebno je rešiti sledeći sistem jednačina, kako bi se izračunala ravnotežna cena.

$$\frac{\partial u_1(p_1,p_2)}{\partial p_1} = 0$$

$$\frac{\partial u_2(p_1,p_2)}{\partial p_2} = 0$$

$$\frac{\partial u_1(p_1,p_2)}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}((a - p_1 + bp_2)(p_1 - c)) = a + c + bp_2 - 2p_1 = 0$$

$$\frac{\partial u_1(p_1,p_2)}{\partial p_2} = \frac{\partial}{\partial p_2}((a - p_2 + bp_1)(p_2 - c)) = a + c + bp_1 - 2p_2 = 0.$$

Rešenje ovog sistema

$$a + c + bp_2 - 2p_1 = 0$$

$$a + c + bp_1 - 2p_2 = 0$$

je $p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b}$ i to je ravnotežna cena na tržištu. Optimalna količina koju proizvodi firma I je $q_1(p_1^*, p_2^*) = a - \frac{a+c}{2-b} + b\frac{a+c}{2-b} = \frac{a-c+bc}{2-b}$, a firma II $q_2(p_1^*, p_2^*) = a - \frac{a+c}{2-b} + b\frac{a+c}{2-b} = \frac{a-c+bc}{2-b}$. Optimalan profit za obe firme iznosi $u_1(p_1^*, p_2^*) = u_2(p_1^*, p_2^*) = \frac{(a-c+bc)^2}{(2-b)^2}$.

4.3 Štakelbergov model duopola

Hajnrih fon Štakelberg (Heinrich von Stackelberg, 1905 - 1946) je bio nemački ekonomista, koji je 1934. razvio Štakelbergov model. U Štakelbergovom modelu na tržištu se nalaze dve firme, koje prodaju homogene proizvode i trošak proizvodnje jedne jedinice proizvoda je c i isti je za obe firme. Za razliku od Kurnoovog i Bertranovog modela duopola, gde obe firme donose odluku u isto vreme, u Štakelbergovom modelu firme ne donose odluku istovremeno. Firma I je lider i ona prva donosi odluku i javno je objavljuje, a zatim firma II bira svoju strategiju.
Analizira se Kurnoov model uz pretpostavku da je firma I dominantna i ona prva bira koliku količinu će da proizvede. Količina koju proizvede firma I je q_1. Nakon što je firma I donela odluku, ova odluka se objavi javno. Tada firma II donosi dvoju odluku o količini proizvodnje, uzimajući u obzir odluku firme I. Količina koju proizvede firma II je q_2. Cena P u Kurnoovom modelu je definisana kao $P = max\{0, a - q_1 - q_2\}$. Profit firme I u Kurnoovom modelu je definisan na sledeći način

$$u_1(q_1,q_2) = q_1P(q_1+q_2) - cq_1 = q_1 max\{0, a-(q_1+q_2)\} - cq_1,$$

a profit firme II u Kurnoovom modelu iznosi

$$u_2(q_1,q_2) = q_2P(q_1+q_2) - cq_2 = q_2 max\{0, a-(q_1+q_2)\} - cq_2.$$

Jedina razlika između Kurnoovog i Štakelbergovog modela je ta, da firma I prva donosi odluku o količini proizvodnje q_1, a količina proizvodnje firme II q_2 je funkcija koja zavisi od q_1. $X = [0,\infty)$ je skup raspoloživih strategija igrača I , dok strategija igrača II zavisi od izbora strategije igrača I. Ovo je igra sa potpunim informacijama koja se rešava indukcijom unazad. Rešavanjem jednačine $\frac{\partial u_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = 0$ dobija se q_2, kao funkcija koja zavisi od q_1.

$$\frac{\partial u_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = (a-c) - q_1 - 2q_2 = 0$$

$$q_2 = \frac{a-c-q_1}{2}.$$

Firma II je racionalan igrač i bira svoju najbolju strategiju. Firma I je svesna toga i bira q_1 koje maksimizira njen profit. Profit firme I u Štakelbergovom modelu je

$$u_1(q_1,q_2(q_1)) = (a-c)q_1 - q_1q_2(q_1) - q_1^2 = (a-c)q_1 - q_1\frac{a-c-q_1}{2} - q_1^2 = \frac{(a-c)q_1-q_1^2}{2}.$$

Da bi se pronašao maksimalan profit potrebno je pronaći rešenje sledeće jednačine

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2(q_1))}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial u_1(q_1,q_2(q_1))}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{a-c}{2}q_1 - \frac{q_1^2}{2}\right) = 0,$$

a to je

$$q_1^* = \frac{a-c}{2}.$$

Količina q_1^* je količina sa kojom firma I ostvaruje maksimalan profit. Količina sa kojom firma II ostvaruje maksimalan profit je $q_2(q_1^*) = \frac{a-c-q_1^*}{2} = \frac{a-c}{4}$. Maksimalan profit firme I iznosi $u_1(q_1^*,q_2(q_1^*)) = \frac{(a-c)q_1^*-q_1^{*2}}{2} = \frac{(a-c)^2}{8}$. Maksimalan profit firme II iznosi $u_2(q_1^*,q_2(q_1^*)) = \frac{(a-c)^2}{16}$.

	Štakelbergov	Kurnoov
q_1^*	$\frac{a-c}{2}$	$\frac{a-c}{3}$
q_2^*	$\frac{a-c}{4}$	$\frac{a-c}{3}$
$u_1(q_1^*,q_2^*)$	$\frac{(a-c)^2}{8}$	$\frac{(a-c)^2}{9}$
$u_2(q_1^*,q_2^*)$	$\frac{(a-c)^2}{16}$	$\frac{(a-c)^2}{9}$
$q_1^*+q_2^*$	$\frac{3(a-c)}{4}$	$\frac{2(a-c)}{3}$
P^*	$\frac{a+3c}{4}$	$\frac{a+2c}{3}$

U Štakelbergovom modelu firma I proizvodi više, nego što proizvodi firma I u Kurnoovom modelu. Za razliku od toga firma II proizvodi manje u Štakelbergovom modelu, nego u Kurnoovom modelu. Profit firme I je veći u Štakelbergovom modelu, dok firma II ima veći profit u Kurnoovom modelu. Ukupna količina proizvodnje je veća u Štakelbergovom modelu. Cena proizvodnje je manja u Štakelbergovom modelu i ovaj model više odgovara potrošačima, jer kupuju po nižoj ceni. Ovaj model pokazuje da iako je firma II imala sve informacije na raspolaganju, njen profit je manji u Štakelbergovom modelu, nego u Kurnoovom modelu. Dakle, poznavanje svih informacija ne obezbeđuje nužno veći profit.

5 Kooperativne bimatrične igre

Kooperativne igre su igre u kojima se igrači sporazumevaju, ukoliko postoji zajednički interes koji ih podstiče da sarađuju. U kooperativnim igrama sporazum igrača ima obavezujuću snagu. U igrama nulte sume je nemoguće uspostaviti saradnju između igrača, jer su njihovi interesi sukobljeni. Dobitak jednog igrača mora biti jednak gubitku drugog igrača. U igrama nenulte sume postizanje sporazuma između igrača značajno utiče na konačan ishod igre i može igračima omogućiti bolji rezultat. Kooperativne igre se mogu podeliti u dve grupe:
-igre u kojima je dopušten transfer dobiti
-igre gde transfer dobiti nije dopušten.
U igrama gde je dopušten transfer dobiti, ne postoje ograničenja o raspodeli koalicionog dobitka. Igrači pre igre pregovaraju o raspodeli dobitka. Ukoliko dođe do postizanja sporazuma o zajedničkoj strategiji, oni se te strategije moraju pridržavati. U nekim slučajevima je transfer dobiti zakonom zabranjen. Glavna karakteristika kooperativnih igara je mogućnost izbora zajedničke strategije.
U igri bitka polova, koju igraju momak i devojka, koji treba da odluče kako će provesti veče, imaju dve mogućnosti: da idu u pozorište, ili da gledaju fudbalsku utakmicu. Mogu se dogovoriti da bacaju novčić. Ako padne glava idu u pozorište, a ako padne pismo gledaju utakmicu. Ovakav dogovor je moguće postići i u nekooperativnim igrama, ali ne postoji garancija da će se svi pridržavati ovog dogovora.
Skup dobitaka koje igrači mogu postići ukoliko sarađuju, naziva se dopustiv skup. U kooperativnim igrama sa matricom plaćanja A za igrača I i matricom B za igrača II, igrači se mogu odlučiti da dobitak bude bilo koja isplata (a_{ij}, b_{ij}) $i = 1, ..., m$ $j = 1, ..., n$ od mn isplata. Igrači mogu izabrati bilo koju mešovitu strategiju.

Definicija 6. *Dopustiv skup kooperativnih igara bez transfera dobiti je konveksna obvojnica tačaka* (a_{ij}, b_{ij}) *za* $i = 1, ..., m$ *i* $j = 1, ..., n$.

Konveksna obvojnica u ravni predstavlja najmanji konveksni poliedar koji obuhvata date tačke. Odnosno konveksna obvojnica je konveksni poliedar sa najmanjim obimom, ili sa najmanjom površinom. Ako dođe do transfera dobiti, vektor isplate (a_{ij}, b_{ij}) za $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ može se transformisati u vektor $(a_{ij} + s, b_{ij} - s)$ $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Realan broj s predstavlja kooperativni višak koji igrači dele u slučaju sporazuma. Ako je s pozitivan broj, onda on predstavlja višak koji igrač II plaća igraču I, a ako je s negativan broj, onda on predstavlja višak koji igrač I isplaćuje igraču II.

Definicija 7. *Dopustiv skup kooperativnih igara sa transferom dobiti je konveksna obvojnica tačaka oblika* $(a_{ij} + s, b_{ij} - s)$ $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ *za proizvoljan realan broj* s.

Primer 12. *[8] Za bimatricu plaćanja C na Slici 9 i Slici 10 prikazani su dopustivi skupovi kooperativnih igara bez transfera dobiti i sa transferom dobiti, respektivno*

$$C = \begin{bmatrix} (4,3) & (0,0) \\ (2,2) & (1,4) \end{bmatrix}.$$

Ukoliko je postignut sporazum između igrača u kooperativnim igrama, nijedan igrač ne može postići veću dobit, a da pri tome ne ošteti drugog igrača. Ne postoji mogućnost ostvarivanja bolje pozicije, ako se oba igrača ne pridržavaju sporazuma.

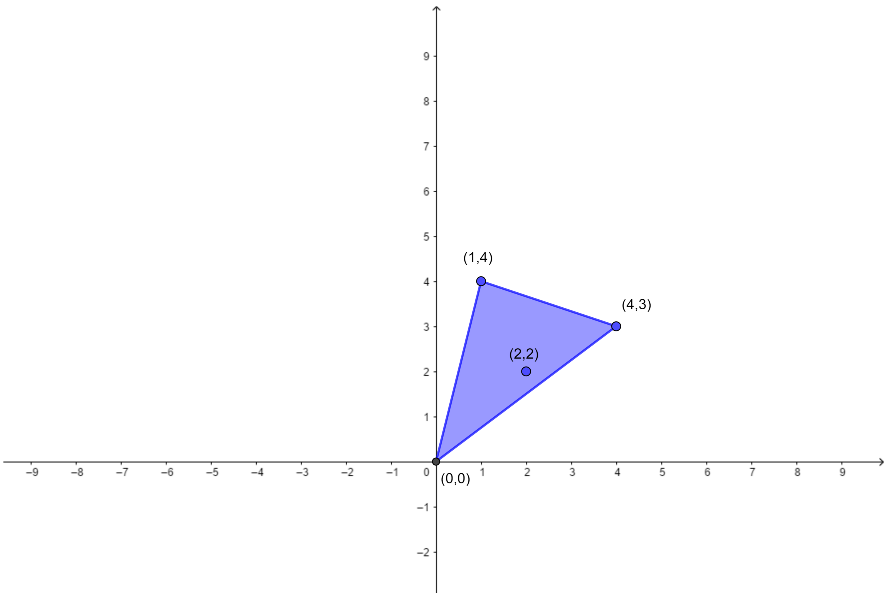
Definicija 8. *Dopustiv vektor dobiti* (v_1', v_2') *je Pareto optimalan, ako važi*

$$v_1' \geq v_1$$

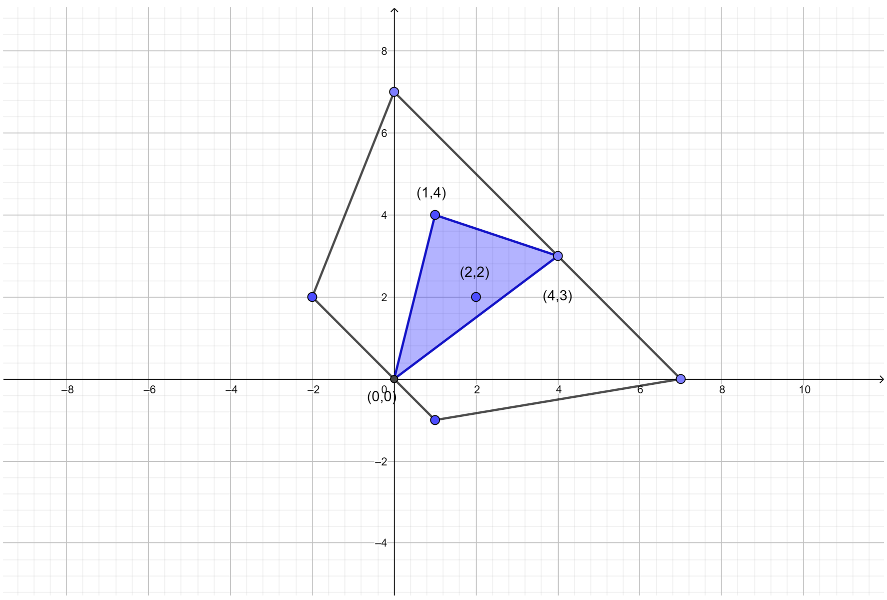
$$v_2' \geq v_2,$$

za svaki dopustivi vektor dobiti (v_1, v_2).

U Primeru 12, Pareto optimalni vektori igre bez transfera dobiti su vektori koji pripadaju duži čije su krajnje tačke (1,4) i (4,3). Pareto optimalni vektori igre sa transferom dobiti su vektori koji pripadaju duži sa koeficijentom pravca -1 koja sadrži tačku (4,3).



Slika 9: Dopustiv skup kooperativne igre bez transfera dobiti



Slika 10: Dopustiv skup kooperativne igre sa transferom dobiti

5.1 Kooperativne igre sa transferom dobiti

Jedna od pretpostavki jeste da su oba igrača racionalna. Svaki igrač teži ka tome da ostvari što veću dobit. Pre igre, igrači pregovaraju o izboru zajedničke strategije koja će im doneti obostranu korist i o tome šta će se dogoditi ukoliko ne dođe do sporazuma. Ovi razgovori se zovu preliminarni pregovori. Ako ne dođe do sporazuma, svaki igrač može pretiti protivniku da će odigrati strategiju koja će mu doneti manji dobitak. Ukoliko dođe do sporazuma, vektor isplate će biti Pareto optimalan. Ovo je posledica racionalnosti igrača. Ako isplata v' donosi veću dobit igraču I, a pri tome ugrožava dobitak igrača II, drugi igrač neće pristati na isplatu koja mu donosi manju dobit. Igrač I može predložiti igraču II da mu da deo dobiti v'. Na ovu ponudu igrač II pristaje, jer će ostvariti veću dobit od početne. Na ovaj način oba igrača su na dobitku.

Primer 13. *[8] Bimatrica plaćanja C ima sledeće vrednosti*

$C =$

	Levo	*Desno*
Gore	*(5, 3)*	*(0, -4)*
Dole	*(0, 0)*	*(3, 6)*

Igrač I ima na raspolaganju dve strategije: gore i dole. Levo i desno su raspoložive strategije igrača II. Najpovoljniji rezultat za igrača I je (5,3), a za igrača II (3,6). Najveća ukupna vrednost igre je 9. Da bi se postigla ova isplata, potrebno je da igrač I bira strategiju dole, a igrač II strategiju desno. Postavlja se pitanje, kako stimulisati igrače da izaberu ovu strategiju. Izbor ove strategije zavisi od načina raspodele dobiti između igrača. Igrač II može tražiti podelu dobiti na dva jednaka dela. Prvi igrač može da se ne složi sa ovakvom podelom. On može tražiti da vrednost njegove dobiti bude najmanje pet. Ako se igrač II ne složi sa ovim, prvi igrač mu može zapretiti da će odigrati strategiju gore. Ova pretnja igrača I je ubedljiva. U ovom slučaju igrač II ima na raspolaganju dve opcije. Ako izabere strategiju desno, kazniće igrača I. Njegov dobitak će biti 0, ali će kazniti i sebe, ostvariće gubitak od 4 jedinice. Ako izabere strategiju levo, dobitak igrača II će iznositi 3. Igrač II je racionalan i pristaće na predlog igrača I da dobit od 9 jedinica podele tako, da 5 jedinica dobije igrač I, a 4 igrač II. Tako će igrač II imati veću dobit, nego da nije pristao na dogovor i izabrao strategiju levo.

Ako se igrači pridržavaju sporazuma, tada pretpostavka o racionalnosti podrazumeva da oni igraju sa ciljem da postignu najveći mogući ukupni dobitak σ

$$\sigma = \max_i \max_j (a_{ij} + b_{ij}),$$

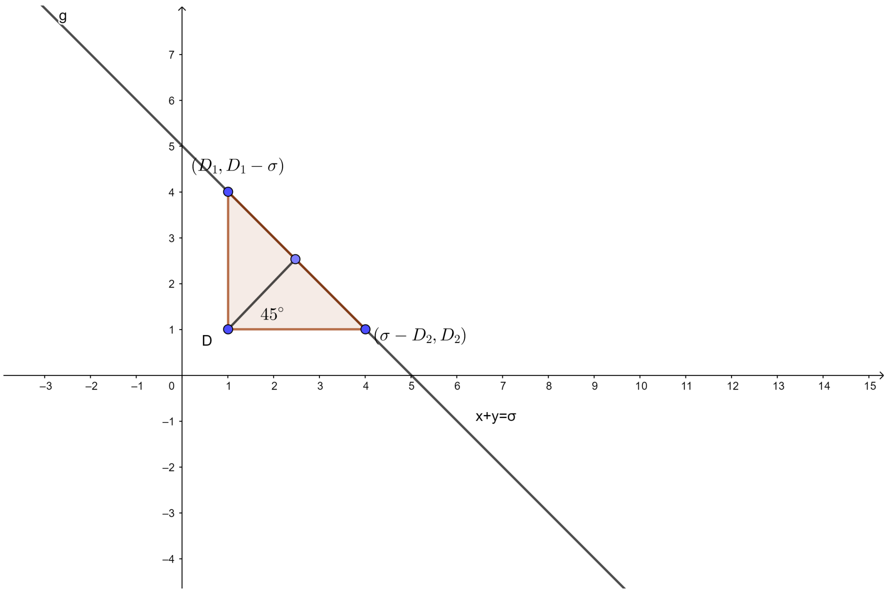
koji će podeliti međusobno. Strategija $< i_0, j_0 >$ u kojoj se postiže maksimalan ukupan dobitak $\sigma = a_{i_0j_0} + b_{i_0j_0}$, naziva se kooperativna strategija. Igrači se mogu dogovoriti oko podele maksimalne ukupne dobiti, tako da važi $x^* + y^* = \sigma$, gde x^* predstavlja dobitak igrača I, a y^* je dobitak igrača II. Ukoliko je $x^* > a_{i_0j_0}$, tada igrač I dobija kooperativni višak u iznosu razlike $x^* - a_{i_0j_0}$. U slučaju da je $x^* < a_{i_0j_0}$, tada igrač II dobija dodatan iznos razlike $a_{i_0j_0} - x^*$ od igrača I.
Neka vektor p predstavlja preteću strategiju igrača I, a vektor q igrača II. Ukoliko ne dođe do sporazuma dobitak igrača I iznosi p^TAq, a dobitak igrača II p^TBq. Ako ne dođe do sporazuma između igrača, oni se nalaze u statusquo poziciji. Tačka nesporazuma ili preteća tačka D ima sledeće koordinate $D(p,q) = (D_1, D_2) = (p^TAq, p^TBq)$. Svaki igrač osvaja onoliko, koliko bi ostvario da igra samostalno. Igrač I nikada neće pristati na sporazum koji mu donosi manju dobit od D_1, isto važi i za igrača II. On neće pristati na manju dobit od D_2. Kada se odredi tačka nesporazuma, igra postaje simetrična. Raspravlja se o izboru tačke, koja se nalazi na duži koja spaja tačke $(D_1, \sigma - D_1)$ i $(\sigma - D_2, D_2)$, koja će predstavljati kooperativno rešenje igre. To je tačka sporazuma ϕ, koja predstavlja središte date duži

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) = (\frac{D_1 + \sigma - D_2}{2}, \frac{\sigma - D_1 + D_2}{2}) = (\frac{\sigma + D_1 - D_2}{2}, \frac{\sigma - (D_1 - D_2)}{2}).$$

Oba igrača snose posledice, ukoliko dođe do narušavanja sporazuma. Igrač I teži ka tome da maksimizira razliku $D_1 - D_2$, a igrač II želi da je minimizira. Ovo je igra nulte sume sa matricom $A - B$.

$$D_1 - D_2 = p^TAq - p^TBq = p^T(A - B)q.$$

Neka je u ovoj igri p^* optimalna strategija igrača I, a q^* optimalna strategija igrača II, $\delta = p^{*T}(A - B)q^*$ predstavlja optimalan dobitak igrača. Ako igrač I bira strategiju p^*, onda je za igrača II najbolje da bira strategiju q^* i obratno. Ukoliko su igrači odigrali strategije (p^*, q^*), tačka $D^* = D(p^*, q^*) = (D_1^*, D_2^*)$ je tačka nesporazuma. Kako je $\delta = p^{*T}Aq^* - p^{*T}Bq^* = D_1^* - D_2^*$, rešenje igre sa transferom dobiti ima sledeću formu $\phi^* = (\phi_1^*, \phi_2^*) = (\frac{\sigma + \delta}{2}, \frac{\sigma - \delta}{2})$. Ako igrači biraju kooperativnu strategiju $< i_0, j_0 >$, pri čemu je $a_{i_0j_0} + b_{i_0j_0} = \sigma$, da bi se postiglo rešenje igre ϕ^*, višak dobiti $\frac{\sigma+\delta}{2} - a_{i_0j_0}$ ide igraču I, ukoliko je ova razlika pozitivna. Ako je razlika negativna, onda višak dobiti $a_{i_0j_0} - \frac{\sigma + \delta}{2}$ ide igraču II.



Slika 11:

Primer 14. *[8] Data je bimatrica plaćanja C,*

$$C = \begin{bmatrix} (0,0) & (6,2) & (-1,2) \\ (4,-1) & (3,6) & (5,5) \end{bmatrix}$$

koja se dekomponuje na dve matrice A i B.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Igrač I ima na raspolaganju dve strategije, a igrač II tri strategije. Tačka (6,2) predstavlja tačku strateškog ekvilibrijuma. Najveća ukupna dobit u igri se postiže u tački (5,5) i iznosi 10. Ova dobit se postiže, kada igrač I bira drugu vrstu, a igrač II treću kolonu i kooperativna strategija je $< 2, 3 >$. Posmatra se igra nulte sume sa matricom A-B.

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Prva kolona je striktno dominirana trećom kolonom $(0 > -3, 5 > 0)$, *pa se prva kolona može eliminisati iz skupa raspoloživih strategija igrača II. Preteća strategija za igrača I je* $p^* = (0.3, 0.7)^T$, *a za igrača II je* $q^* = (0, 0.3, 0.7)^T$. *Za izabrane strategije vrednost parametra je* $\sigma = -0.9$ *jer*

$$\sigma = p^{*T}(A - B)q^* = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.5 & -0.9 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix} = -0.9.$$

Vrednost ϕ^* *iznosi* $\phi^* = (\phi_1^*, \phi_2^*) = (\dfrac{\sigma + \delta}{2}, \dfrac{\sigma - \delta}{2}) = (\dfrac{10 - 0.9}{2}, \dfrac{10 + 0.9}{2}) = (4.55, 5.45)$. *Višak dobiti iznosi 0.45, jer je 5.45-5=0.45 i ide igraču II. Tačka nesporazuma u ovom primeru ima sledeće koordinate* $D^* = (D_1^*, D_2^*) = (3.41, 4.31)$ *jer*

$$D_1^* = p^{*T} A q^* = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.8 & 3.9 & 3.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix} = 3.41,$$

$$D_2^* = p^{*T} B q^* = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.7 & 4.8 & 4.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix} = 4.31.$$

Koeficijent nagiba duži koja sadrži tačke $D^* = (D_1^*, D_2^*) = (3.41, 4.31)$ *i* $\phi^*(\phi_1^*, \phi_{2^*}) = (4.55, 5.45)$ *i seče pravu* $x + y = \sigma$ *je jedan.*

$$k = \frac{5.45 - 4.31}{4.55 - 3.41} = \frac{1.14}{1.14} = 1$$

$$k = \tan\alpha = 1$$

$$\alpha = \arctan(1) = 45^o.$$

Dakle, ugao koji duž zaklapa sa x-osom iznosi 45^o.

U nekim igrama postoji više od jedne kooperativne strategije, koje donose maksimalnu ukupnu dobit σ. Od izbora kooperativne strategije zavisi koji će igrač dobiti višak isplate. Može postojati i više tačaka nesporazuma, zbog toga što matrica $A - B$ može imati više od jednog para optimalnih strategija. Tačke nesporazuma moraju biti na istoj pravoj.

Primer 15. *[8] Data je bimatrica C*

$$C = \begin{bmatrix} (1,5) & (2,2) & (0,1) \\ (4,2) & (1,0) & (2,1) \\ (5,0) & (2,3) & (0,0) \end{bmatrix}$$

Maksimalna ukupna dobit igre je $\sigma = 6$. *Postoje dve kooperativne strategije* $< 1, 1 >$ *i* $< 2, 1 >$, *koje dovode do maksimalne ukupne dobiti.*

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-5 & 2-2 & 0-1 \\ 4-2 & 1-0 & 2-1 \\ 5-0 & 2-3 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vrednost 1 u drugoj vrsti i trećoj koloni, predstavlja sedlastu tačku matrice $A - B$. *Preteća strategija igrača I je* $p^* = (0, 1, 0)^T$, *a igrača II* $q^* = (0, 0, 1)^T$.

$$D_1^* = p^{*T} A q^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$D_2^* = p^{*T} B q^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Tačka nesporazuma je $D^* = (D_1^*, D_2^*) = (2, 1)$.

$$\delta = p^{*T}(A - B)q^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,$$

$$\phi = (\frac{\sigma + \delta}{2}, \frac{\sigma - \delta}{2}) = (\frac{6+1}{2}, \frac{6-1}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}) = (3.5, 2.5).$$

Postoji još jedna sedlasta tačka na poziciji $< 2, 2 >$ *i za nju važi* $\delta = 1$. *Druga tačka nesporazuma je* $D^* = (1, 0)$. *Sve ove tačke moraju biti na istoj pravoj. Ako igrači izaberu kooperativnu strategiju* $< 2, 1 >$, *rešenje igre je (3.5,2.5), višak dobiti od 0.5 dobija igrač II. U slučaju da izaberu kooperativnu strategiju* $< 1, 1 >$, *tada višak dobiti iznosi 2.5 i dobija ga igrač I.*

5.2 Kooperativne igre bez transfera dobiti

U kooperativnim igrama bez transfera dobiti igrači mogu pregovarati, mogu pretiti da će odigrati strategiju koja će protivniku doneti manju dobit, ali ne postoji transfer dobiti. Ne može jedan igrač dati deo dobiti drugom igraču, kako bi se postigao sporazum između njih. Tri elementa bitno utiču na razvoj igre i na njen konačni rezultat: priroda igre (da li je kooperativna, ili nekooperativna), odnos igrača prema vremenu i da li su informacije potpune, ili nepotpune. Postoje dva pristupa pregovaranja: strategijski i aksiomatski. U strategijskom pristupu pretpostavlja se koju strategiju treba da igraju igrači kada su racionalni, da bi postigli ravnotežni rezultat. U aksiomatskom pristupu pretpostavljaju se poželjne osobine koje rezultat procesa pregovaranja treba da ima i onda se definišu pravila koja osiguravaju takav rezultat.

5.2.1 Nešov model pregovaranja

Kooperativne igre bez transfera se analiziraju preko Nešovog modela pregovaranja. Nešov model pregovaranja ima aksiomatski pristup. Ovaj model je Neš razvio, još dok je bio student. Kada je prešao na Priston, on je svoj rezultat dokazao. Neš smatra da pregovaračka situacija dva igrača znači da postoji više od jednog načina da oba igrača postignu obostranu korist, ako međusobno sarađuju. Postavlja se pitanje kako podeliti obostranu dobit. Neš uvodi pretpostavke, koje dovode do jedinstvenog rešenja procesa pregovaranja. Pretpostavke su sledeće:
-igrači su racionalni
-znaju da procene da li im je jedna stvar bitnija od druge
-igrači imaju potpune informacije o preferencijama njihovih protivnika
-pregovaračke sposobnosti su im na istom nivou.
U Nešovom modelu pregovaranja učestvuju dva igrača: igrač I i igrač II. Postoje dva elementa u ovom modelu za koje se pretpostavlja da su dati i poznati igračima. Jedan elemenat je skup S, koji je kompaktan (zatvoren i ograničen) u ravni. Skup S bi trebalo da predstavlja skup svih mogućih raspodela dobiti između igrača, ako su kooperativni, ali je on opštiji tj. on ne mora biti u obliku poliedra, već može biti u obliku elipse, kruga itd. Dakle skup S je dopustiv skup. Drugi elemenat, koji je poznat, je tačka $(u^*, v^*) \in S$ koja predstavlja preteću tačku tj. tačku statusa-quo, ukoliko ne dođe do sporazuma. Traži se jedinstveno rešenje $(u^{`}, v^{`})$ pregovaračke situacije, koje će biti fer rezultat za oba igrača. Pregovaračka situacija je određena uređenom trojkom (S, u^*, v^*). Definisane su pretpostavke, koje ovaj problem mora da zadovoljava, kako bi imao jedinstveno rešenje. Dakle, za dati dopustiv skup S i preteću tačku $(u^*, v^*) \in S$, treba odrediti optimalno rešenje igre, tj. treba odrediti $(u^{`}, v^{`})$ tako da važi

$$(u^{`}, v^{`}) = g(S, u^*, v^*).$$

Nešove aksiome koje slede obezbeđuju fer rešenje, kao i jedinstveno rešenje $g(S, u^*, v^*)$.
Nešove aksiome
Aksioma 1 (Dopustivost) Rešenje treba da pripada dopustivom skupu S, tj. $(u^{`}, v^{`}) \in S$.
Aksioma 2 (Pareto optimalnost) Ne postoji tačka (u^-, v^-) takva da $u^- \geq u^{`}$ i $v^- \geq v^{`}$, osim same tačke $(u^{`}, v^{`})$.
Aksioma 3 (Simetričnost) Neka je S simetričan skup oko prave $u = v$. Ako je $u^* = v^*$ i $g(S, u^*, v^*) = (u^{`}, v^{`})$, onda važi da je $u^{`} = v^{`}$.

Aksioma 4 (Nezavisnost od irelevantnih transformacija) Neka je T zatvoren, konveksan podskup skupa S. Ako važi $(u^*, v^*) \in T$ i $(u^{`}, v^{`}) \in T$, onda je $g(T, u^*, v^*) = (u^{`}, v^{`})$.
Aksioma 5 (Inavarijantnost u odnosu na linearnu transformaciju funkcije g) Ako je

$$T = \{(u^o, v^o) : u^o = \alpha_1 u + \beta_1, v^o = \alpha_2 v + \beta_2, \forall (u, v) \in S\}$$

gde su $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ onda važi

$$g(T, \alpha_1 u^* + \beta_1, \alpha_2 v^* + \beta_2) = (\alpha_1 u^{`} + \beta_1, \alpha_2 v^{`} + \beta_2).$$

Analiza aksioma Nešovog modela
Aksioma 1 pokazuje da rešenje problema treba da pripada dopustivom skupu. Igrači ne mogu međusobno podeliti nešto što nemaju na raspolaganju. Aksioma 2 pokazuje racionalnost igrača. Igrači neće da pristanu ni na jedan dobitak koji je manji od (u^*, v^*). Dobitak (u^*, v^*) mogu postići i da ne sarađuju. Dobitak $(u^{`}, v^{`})$, koji žele postići, treba da ispunjava sledeći uslov: $u^{`} > u^*$ i $v^{`} > v^*$. Optimalnost u Paretovom smislu pokazuje da je nemoguće da oba igrača ukoliko napuste ravnotežnu tačku postignu bolji rezultat. Ako jedan igrač ostvari veću dobit, smanjiće se dobit drugog igrača. Aksioma 3 pokazuje da ako su koordinate tačke statusa-quo jednake i ako su isplate simetrične, onda ne može jedan igrač imati veću dobit od drugog igrača. Igrači su anonimni, ne može se jedan igrač tretirati bolje u odnosu na drugog igrača. Aksioma 4 pokazuje da se eliminisanjem elemenata skupa S ne utiče na krajnji rezultat pregovaranja. Skup T je definisan tako da su iz skupa S izbačene neke tačke, pri čemu tačka statusa-quo ostaje u skupu T. Aksioma 5 pokazuje da linearne transformacije isplate ne utiču na rešenje.

Teorema 5. *[8] Postoji jedinstvena funkcija g, koje zadovoljava sve Nešove aksiome. Osim toga za rešenje igre važi*

$$(u^{`}, v^{`}) = g(S, u^*, v^*) = \max_{(u^*, v^*) \leq (u,v) \in S} (u - u^*)(v - v^*).$$

Dokaz. Prvo treba proveriti da li tačka $(u^{`}, v^{`})$ koja pripada skupu $S^+ = \{(u, v) \in S, u \geq u^*, v \geq v^*\}$ zadovoljava Nešove aksiome. Jednostavno je pokazati da zadovoljava prve četiri aksiome. U nastavku ćemo pokazati da zadovoljava Aksiomu 5. Tačka $(u^{`}, v^{`})$ predstavlja maksimum funkcije $(u - u^*)(v - v^*)$ na skupu $S^+ = \{(u, v) \in S, u \geq u^*, v \geq v^*\}$, pa onda i funkcija

$(\alpha_1 u - \alpha_1 u^*)(\alpha_2 v - \alpha_2 v^*)$ dostiže takođe maksimum u tački $(u^{`}, v^{`})$ na skupu S^+. Stoga, funkcija $(\alpha_1 u + \beta_1 - \alpha_1 u^* - \beta_1)(\alpha_2 v + \beta_2 - \alpha_2 v^* - \beta_2)$ dostiže maksimum u tački $(u^{`}, v^{`})$ na skupu S^+. Funkcija $(u^{\sim} - \alpha_1 u^* - \beta_1)(v^{\sim} - \alpha_2 v^* - \beta_2)$ dostiže maksimum u tački $(\alpha_1 u^{`} + \beta_1, \alpha_2 v^{`} + \beta_2)$ na skupu T^+ koji je definisan na sledeći način $T^+ = \{(u^{\sim}, v^{\sim}) \in S^+ : u^{\sim} = \alpha_1 u + \beta_1, v^{\sim} = \alpha_2 v + \beta_2\}$.
Tačka $(u^{`}, v^{`})$ zadovoljava sve Nešove aksiome, treba još pokazati da je jedinstvena na skupu S. Ako je skup S simetričan u odnosu na pravu $u = v$ i tačka $(0, 0) \in S$, tada Aksioma 1, Aksioma 2 i Aksioma 3 impliciraju da važi

$$g(S, 0, 0) = (z, z) \in S.$$

Tačka (z, z) se nalazi na najvećoj udaljenosti od prave $u = v$. Aksioma 4 implicira, ako je T zatvoren, ograničen i konveksan podskup poluravni $H_z = \{(u, v) : u + v \leq 2z\}$, gde je $z > 0$ i ako $(z, z) \in T$ i $(0, 0) \in T$, onda $g(T, 0, 0) = (z, z)$, pošto je skup T podskup simetričnog skupa sa istim osobinama. Sada sledi dokaz za proizvoljan, zatvoren, konveksan skup S i tačku $(u^*, v^*) \in S$. Neka je tačka (u^o, v^o) tačka maksimuma funkcije $(u - u^*)(v - v^*)$ na S^+. Definišu se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tako da važi

$$\alpha_1 u^* + \beta_1 = 0,$$

$$\alpha_2 v^* + \beta_2 = 0,$$

$$\alpha_1 u^o + \beta_1 = 1,$$

$$\alpha_2 v^o + \beta_2 = 1.$$

Neka je skup T definisan kao u Aksiomi 5. Izvršene su linearne transformacije tačke (u^o, v^o), tačka $(1, 1) = (\alpha_1 u^o + \beta_1, \alpha_2 v^o + \beta_2)$. Na osnovu Aksiome 5 tačka $(1, 1)$ je maksimum funkcije uv. Nagib krive $uv = 1$ u tački $(1, 1)$ je -1. Skup T je konveksan podskup poluravni $H_1 = \{(u, v) : x + y \leq 2\}$ i važi

$$g(T, 0, 0) = (1, 1).$$

Aksioma 5 implicira

$$g(T, 0, 0) = (\alpha_1 u^- + \beta_1, \alpha_2 v^- + \beta_2)$$

gde je

$$g(S, u^*, v^*) = (u^{`}, v^{`}).$$

Kako je

$$(\alpha_1 u^{`} + \beta_1, \alpha_2 v^{`} + \beta_2) = (1, 1) = (\alpha_1 u^o + \beta_1, \alpha_2 v^o + \beta_2)$$

i važi

$$\alpha_1 u^{`} + \beta_1 = \alpha_1 u^o + \beta_1,$$

$$\alpha_2 v^{`} + \beta_2 = \alpha_2 v^o + \beta_2,$$

sledi

$$u^{`} = u^o$$

i

$$v^{`} = v^o,$$

pa je $(u^{`}, v^{`}) = g(S, u^*, v^*)$ što je i trebalo dokazati.■

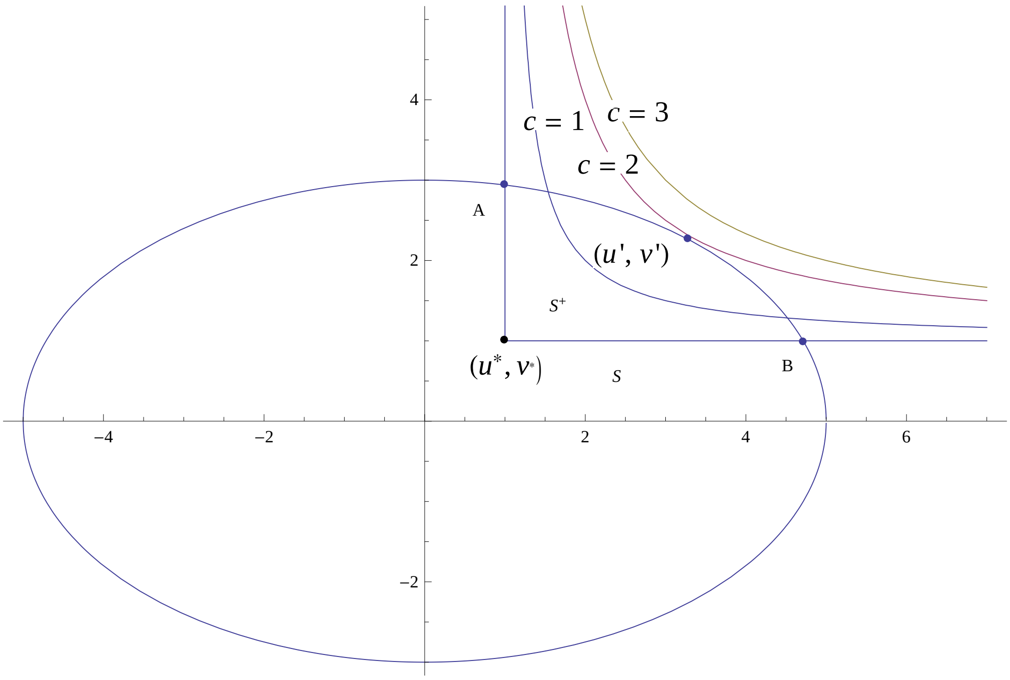
Proizvod $(u - u^*)(v - v^*)$ naziva se Nešov proizvod, a uređeni par $(u^{`}, v^{`})$ je rešenje Nešove igre pregovaranja. Jedna od pretpostavki je bila da igrači imaju jednaku sposobnost pregovaranja. Ukoliko igrači nemaju istu moć pregovaranja, Nešov proizvod dobija sledeći oblik $(u-u^*)^{\gamma}(v-v^*)^{1-\gamma}$, $\gamma \in [0, 1]$, gde γ pokazuje kolika je pregovaračka moć igrača I, a $(1 - \gamma)$ igrača II. U ovom slučaju, rešenje problema više nije simetrično. Veća verovatnoća je da će pobediti onaj igrač, koji ima veću moć pregovaranja. Ovo je asimetrični Nešov model pregovaranja.

5.2.2 Geometrijska interpretacija Nešovog problema pregovaranja

Skup S predstavlja dopustivi skup dobitaka koji igrači dele, ukoliko dođe do sporazuma. S je konveksan i kompaktan skup, koji može biti različitog oblika. $S^+ \subseteq S$ je definisan kao $S^+ = \{(u,v) \in S, u \geq u^*, v \geq v^*\}$. Često se ne posmatra ceo skup S, nego njegov podskup S^+. Igrači neće pristati na dogovor, ako im taj dogovor donosi manju dobit, nego kada igraju samostalno. Ovo se naziva individualnom racionalnošću. Tačka (u^*, v^*) predstavlja tačku statusa-quo, ili preteću tačku. Igrači ovoliko osvoje, ukoliko ne dođe do (dogovora) sporazuma. Ukoliko dođe do sporazuma, oba igrača teže da postignu što veći dobitak. Tačka $(u^{'}, v^{'})$ predstavlja rešenje Nešovog modela pregovaranja i predstavlja maksimalnu dobit za oba igrača, jer

$$(u^{'}, v^{'}) = \max_{(u^*,v^*)\leq(u,v)\in S}(u-u^*)(v-v^*).$$

Funkcija $(u-u^*)(v-v^*) = c$, $c = const$ je hiperbola. Rešenje $(u^{'}, v^{'})$ se nalazi u tački dodira hiperbole i skupa S. Za dovoljno veliko c, može desiti da hiperbola ne seče skup S. Ako dođe do sporazuma, igrač I teži ka tome da njegovo rešenje bude što bliže tački B, a igrač II teži da rešenje bude što bliže tački A. Tačke koje se nalaze na delu krive S koja spaja tačke A i B predstavljaju moguća rešenja pregovaranja. Pomeranjem od tačke A ka tački B, smanjuje se dobit igrača II i povećava dobit igrača I. Nije racionalno, ako igrači očekuju da postignu rešenje u tački A, ili u tački B, jer su to tačke u kojima jedan igrač dobija sve, a drugi ništa. Nijedan racionalan igrač neće pristati na ovo, tako da neće ostvariti sporazum. Igrači će se naći u tački statusa-quo i oba će biti na gubitku. Koeficijent nagiba duži koja spaja tačke (u^*, v^*) i $(u^{'}, v^{'})$ jednak je negativnom koeficijentu nagiba krive.



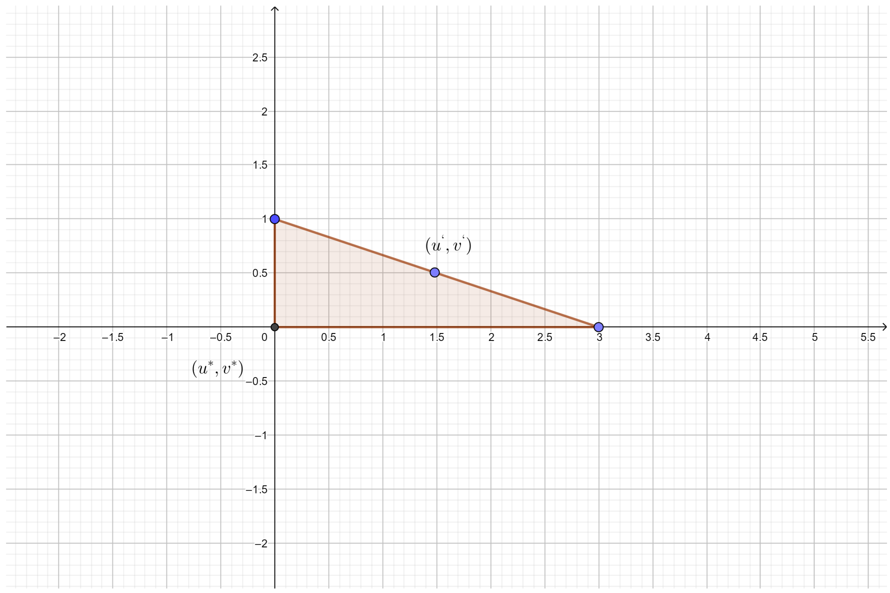
Primer 16. *[8] Neka je skup S trougao sa temenima u tačkama $(0,0)$, $(0,1)$ i $(3,0)$. Tačka statusa-quo ima koordinate $(0,0)$. Pareto optimalnu granicu čini duž koja prolazi kroz tačke $(0,1)$ i $(3,0)$. Koeficijent nagiba duži je $-\dfrac{1}{3}$ jer je*

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{3-0} = -\frac{1}{3}.$$

Kriva oblika $(u-0)(v-0) = c$ koja dodiruje datu duž u tački $(u^{`}, v^{`})$, mora imati koeficijent nagiba $-\dfrac{1}{3}$. Tako da koeficijent nagiba duži koja spaja tačke $(0,0)$ i $(u^{`}, v^{`})$ mora biti jednak $\dfrac{1}{3}$

$$k = \frac{u^{`} - 0}{v^{`} - 0} = \frac{1}{3}.$$

Ova duž seče skup S u tački $(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2})$, pa je ta tačka rešenje kooperativne igre bez transfera dobiti.



Slika 12: Skup S je trougao.

5.2.3 Lambda pristup

Jedan od načina traženja rešenja kooperativnih igara bez transfera dobiti uveo je Lojd Šepli. Ovaj pristup rešavanja ima nekoliko prednosti u odnosu na Nešov pregovarački model. Prva prednost je ta što povezuje rešenje kooperativnih igara bez transfera dobiti sa rešenjem kooperativnih igara sa transferom dobiti. Druga prednost je ta, što ne mora da se pokazuje da je zadovoljena Aksioma 4. Jedna od prednosti je i to, što preteća tačka zavisi od bimatrice, pa zato ne mora unapred biti zadata. Osim toga ovaj pristup je opštiji, ali ako se za preteću tačku izabere tačka $(0, 0)$, tada je rešenje lambda pristupa isto kao rešenje Nešovog modela pregovaranja.
Jedan od glavnih problema kooperativnih igara bez transfera dobiti je nemogućnost upoređivanja dobiti. Ako se pretpostavi da se isplate mere istim jedinicama i ako se primeni postupak za rešavanje kooperativnih igara sa transferom dobiti, može se desiti da se rešenje nalazi u dopustivom skupu kooperativnih igara bez transfera dobiti i tada ovo rešenje predstavlja rešenje kooperativnih igara bez transfera dobiti, jer je postignuto bez prenosa dobiti. Međutim, postavlja se pitanje šta se dešava, ako rešenje kooperativnih igara sa transferom dobiti nije u dopustivom skupu kooperativnih igara bez transfera dobiti. Jedna od pretpostavki može biti da je rast jedne jedinice dobiti igrača I jednak porastu dobiti igrača II za λ jedinica, gde je $\lambda > 0$. Tada se igra analizira na sledeći način. Umesto bimatrice plaćanja (A, B) posmatra se bimatrica $(\lambda A, B)$ i koristi se postupak za rešavanje koopera-

tivnih igara sa transferom dobiti. Krajnje rešenje za igrača I podeli se sa λ, kako bi bilo izraženo u prvobitnoj jedinici. Ova igra se zove λ-transfer igra. Rešenje igre sa bimatricom $(\lambda A, B)$ iznosi $(\frac{\sigma(\lambda)+\delta(\lambda)}{2}, \frac{\sigma(\lambda)-\delta(\lambda)}{2})$ pri čemu je $\sigma(\lambda) = \max_i \max_j \{\lambda a_{ij} + b_{ij}\}$ i predstavlja najveću ukupnu vrednost u matrici $\lambda A - B$, a $\delta(\lambda) = p^{*T}(\lambda A - B)q^*$. Rešenje λ-transfer igre se dobija kada se prva koordinata podeli sa λ

$$\phi(\lambda) = (\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)) = (\frac{\sigma(\lambda)+\delta(\lambda)}{2\lambda}, \frac{\sigma(\lambda)-\delta(\lambda)}{2}).$$

Ukoliko se tačka $\phi(\lambda)$ nalazi u dopustivom skupu igre bez transfera dobiti, onda $\phi(\lambda)$ predstavlja rešenje kooperativne igre bez transfera dobiti. Postoji jedinstveno λ^*, tako da se $\phi(\lambda^*)$ nalazi u dopustivom skupu igre bez transfera dobiti i predstavlja rešenje kooperativne igre bez prenosa dobiti. λ^* se naziva ravnotežna stopa razmene. Problem je kako odrediti λ^*, jer vrednost $p^{*T}(\lambda A - B)q^*$ nije lako izračunati. Međutim, ako matrice A i $-B$ imaju sedlaste tačke na istoj poziciji, tada problem pronalaska λ^* postaje jednostavniji.
Igre bez transfera dobiti sa bimatricom, gde matrice A i $-B$ na istoj poziciji imaju sedlastu tačku se nazivaju kooperativne igre sa fiksiranom pretećom tačkom. Kolika god da je vrednost λ, matrica $\lambda A - B$, koja se koristi kako bi se izračunala vrednost preteće tačke, uvek ima sedlastu tačku na istoj poziciji. Lako je izaračunati vrednosti pretećih strategija, jer one ne zavise od vrednosti parametra λ, pa je lako izračunati i preteću tačku. Rešenje igre sa fiksiranom pretećom tačkom jednako je rešenju Nešovog modela pregovaranja. U ovom slučaju za pronalazak rešenja λ-transfer igre mogu se koristiti iste metode, kao i za pronalazak rešenja Nešovog modela.

Primer 17. *[8] Data je bimatrica*

$$C = \begin{bmatrix} (-1,1) & (1,3) \\ (0,0) & (3,-1) \end{bmatrix}.$$

Sedlasta tačka matrice A se nalazi u drugoj vrsti i prvoj koloni i na istoj poziciji se nalazi i sedlasta tačka matrice $-B$. Matrica $\lambda A - B$ ima sedlastu tačku na istoj poziciji kao matrica A i matrica $-B$, bez obzira na vrednost parametra λ. Tačka $(0,0)$ je preteća tačka. Rešenje Nešovog problema je tačka $(u^{`}, v^{`})$ koja pripada dopustivom skupu S igre bez transfera dobiti. Koeficijent nagiba tangente na skup S u tački $(u^{`}, v^{`})$ jednak je koeficijentu nagiba *sa negativnim predznakom duži koja prolazi kroz tačke* $(u^{`}, v^{`})$ *i* $(0,0)$. *Neka je* $\lambda^* = \frac{v^{`}}{u^{`}}$, *tada tačka* $(u^{`}, v^{`})$ *ide u tačku* $(\lambda^* u^{`}, v^{`}) = (\frac{v^{`}}{u^{`}} u^{`}, v^{`}) = (v^{`}, v^{`})$. *Duž koja prolazi kroz tačke* $(0,0)$ *i* $(v^{`}, v^{`})$ *je dijagonala i koeficijent nagiba tangente u tački* $(v^{`}, v^{`})$ *je -1. Stoga je* $(v^{`}, v^{`})$ *rešenje kooperativne igre sa transferom dobiti, istovremeno je* $(u^{`}, v^{`})$ *rešenje* $\lambda - transfer$ *igre.* λ_* *je ravnotežna stopa razmene. Ako je* $\lambda_* = 2$, *onda je rešenje kooperativne igre bez transfera dobiti* $(1.25, 2.5)$. λ*-transfer rešenje je rešenje i Nešovog problema, a* λ_* *predstavlja koeficijent nagiba linije od preteće tačke do Nešovog rešenja. Ako preteća tačka nije fiksna, koristi se direktan metod za pronalazak* λ^*, *kada se tačka nalazi u dopustivom skupu igara bez transfera dobiti.*

6 Dodatak

Implementacija eksperimenta 1 u MATLAB-u. [5]

```
% Eksperiment 1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 1: Definisati matricu placanja za svakog igraca
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P1=[0 1000;
5 5;
10 10;
10 10];
P2=[0 50;
100 100;
0.05 0.05;
0.05 0.05];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 2: Podeliti igru na podigre.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Dato P1, P2 = {1,1}
SG11=[P1(1,:)' P2(1,:)'];
%Dato P1, P2 = {1,2}
SG12=[P1(2,:)' P2(2,:)'];
%Dato P1, P2 = {2,1}
SG13=[P1(3,:)' P2(3,:)'];
%Dato P1, P2 = {2,2}
SG14=[P1(4,:)' P2(4,:)'];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 3: Definisati vektore isplata za igraca I
%u podigrama
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Isplata igraca I za dato P1, P2 = {1,1}
SGIPV11=SG11(:,1);
%Isplata igraca I za dato P1, P2 = {1,2}
SGIPV12=SG12(:,1);
%Isplata igraca I za dato P1, P2 = {2,1}
SGIPV13=SG13(:,1);
%Isplata igraca I za dato P1, P2 = {2,2}
SGIPV14=SG14(:,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 4: Definisati najbolju strategiju za igraca I,
```

```
%pri cemu se uzimaju u obzir i prethodno odigrane
%strategije igraca I i igraca II.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Najbolja strategija igraca II, dato P1, P2 = {1,1}
[sgbr11 sgbri11]=max(SGIPV11);
%Najbolja strategija igraca II, dato P1, P2 = {1,2}
[sgbr12 sgbri12]=max(SGIPV12);
%Najbolja strategija igraca II, dato P1, P2 = {2,1}
[sgbr13 sgbri13]=max(SGIPV13);
%Najbolja strategija igraca II, dato P1, P2 = {2,2}
[sgbr14 sgbri14]=max(SGIPV14);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 5: Izracunati isplate za oba igra.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Isplata igraca I i igraca II za dato P1,P2 = {1,1}
Outcome11=[sgbr11 P2(1,sgbri11)];
%Isplata igraca I i igraca II za dato  P1,P2 = {1,2}
Outcome12=[sgbr12 P2(2,sgbri12)];
%Isplata igraca I i igraca II za dato  P1,P2 = {2,1}
Outcome13=[sgbr13 P2(3,sgbri13)];
%Isplata igraca I i igraca II za dato  P1,P2 = {2,2}
Outcome14=[sgbr14 P2(4,sgbri14)];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 6: Matrica isplate za prvu podigru
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
OM1=[Outcome11;
Outcome12;
Outcome13;
Outcome14];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 7: Racuna se za ostale podigre
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Za dato P1 igraju strategiju 1
SG21=OM1(1:2,:);
%Za dato P1 igraju strategiju 2
SG22=OM1(3:4,:);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 8: Definisu se isplate za igraca II u podigrama
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Igrac II igra strategiju 1
SGIPV21=SG21(:,2);
```

```
%Igrac II igra strategiju 2
SGIPV22=SG22(:,2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 9: Odrediti najbolju strategiju za igraca II,
%pri cemu se uzimaju u obzir prethodne stretegije
%igraca I.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Najbolja strategija igraca II za dato P1, ako igra strategiju 1.
[sgbr21 sgbri21]=max(SGIPV21);
%Najbolja strategija igraca II za dato P1, ako igra strategiju 1.
[sgbr22 sgbri22]=max(SGIPV22);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 10: Isplata za svakog igraca mora biti
%izracunata u svakoj podigri.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Isplate igraca I i igraca II za dato P1 igraju 1
Outcome21=[SG21(sgbri21,1) sgbr21];
%Isplate igraca I i igraca II za dato P1 igraju 2
Outcome22=[SG22(sgbri22,1) sgbr22];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 11: Druga matrica isplate je kreirana.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
OM2=[Outcome21;
Outcome22];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 12: Najbolja inicijalna strategija igraca I
%je definisana kao maksimalna vrednost u prvom redu
%matrice dobiti.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[br11 bri11]=max(OM2(:,1));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 13: Za dato P1 najbolja inicijalna strategija
%je bri11, sada se mogu izracunati strategije za P2.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=1:2;
if (bri11==k)
bri21=eval(sprintf('sgbri2%d',k));
end;
end;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 14: Za dato P1 najbolja inicijalna strategija
%je bri11, a za P2 je bri21, sada se moze izracunati
%najbolja strategija za P1.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if (bri11==1)
if (bri21==1)
bri12=sgbri11;
elseif (bri21==2)
bri12=sgbri12;
end;
elseif (bri11==2)
if (bri21==1)
bri12=sgbri13;
elseif (bri21==2)
bri12=sgbri14;
end;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 15: Konacni rezultat igre.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SPNE=[bri11 sgbri11 sgbri21];
SPNE;
```

Implementacija eksperimenta 2 u MATLAB-u. [5]

```
% Eksperiment 2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 1: Definisati isplate za svaku podigru
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P1=[0 500;
1000 1000;
5 5;
5 5;
10 10;
10 10;
10 10;
10 10];
P2=[0 10000;
50 50
100 100;
100 100;
```

```
0.05 0.05;
0.05 0.05;
0.05 0.05;
0.05 0.05];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 2: Podeliti igru u podigre
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Dato P1,P2,P1 = {1,1,1}
SGF111=[P1(1,:)' P2(1,:)'];
%Dato P1,P2,p1 = {1,1,2}
SGF112=[P1(2,:)' P2(2,:)'];
%Dato P1,P2,p1 = {1,2,1}
SGF121=[P1(3,:)' P2(3,:)'];
%Dato P1,P2,p1 = {1,2,2}
SGF122=[P1(4,:)' P2(4,:)'];
%Dato P1,P2,p1 = {2,1,1)
SGF211=[P1(5,:)' P2(5,:)'];
%Dato P1,P2,P1 = {2,1,1}
SGF212=[P1(6,:)' P2(6,:)'];
%Dato P1,P2,P1 = {2,2,1}
SGF221=[P1(7,:)' P2(7,:)'];
%Dato P1,P2,P1 = {2,1,1}
SGF222=[P1(8,:)' P2(8,:)'];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 3:Definisati vektor isplata za igraca II
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Isplata igraca II za dato P1,P2 = {(1,1),1}
SGIPV111=SGF111(:,2);
%Isplata igraca II za dato P1,P2 = {(1,1),2}
SGIPV112=SGF112(:,2);
%Isplata igraca II za dato P1,P2 = {1,2,1}
SGIPV121=SGF121(:,2);
%Isplata igraca II za dato P1,P2 = {1,2,2}
SGIPV122=SGF122(:,2);
%Isplata igraca II za dato P1,P2 = {2,1,1}
SGIPV211=SGF211(:,2);
%Isplata igraca II za dato P1,P2 = {2,1,2}
SGIPV212=SGF212(:,2);
%Isplata igraca II za dato P1,P2 = {2,2,1}
SGIPV221=SGF221(:,2);
%Isplata igraca II za dato P1,P2 = {2,2,2}
```

```
SGIPV222=SGF222(:,2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 4: Definisati najbolju strategiju za igraca II
%imajuci u vidu prethodno odigrane strateije igraca I
%i igraca II.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Najbolja strategija igraca II za dato P1,P2 = {(1,1),1}
[sgbr111 sgbri111]=max(SGIPV111);
%Najbolja strategija igraca II za dato P1,P2 = {(1,1),2}
[sgbr112 sgbri112]=max(SGIPV112);
%Najbolja strategija igraca II za dato P1,P2 = {(1,2),1}
[sgbr121 sgbri121]=max(SGIPV121);
%Najbolja strategija igraca II za dato P1,P2 = {(1,2),2}
[sgbr122 sgbri122]=max(SGIPV122);
%Najbolja strategija igraca II za dato P1,P2 = {(2,1),1}
[sgbr211 sgbri211]=max(SGIPV211);
%Najbolja strategija igraca II za dato P1,P2 = {(2,1},2}
[sgbr212 sgbri212]=max(SGIPV212);
%Najbolja strategija igraca II za dato P1,P2 = {(2,1),1}
[sgbr221 sgbri221]=max(SGIPV221);
%Najbolja strategija igraca II za dato P1,P2 = {(2,2),2}
[sgbr222 sgbri222]=max(SGIPV222);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 5: Izracunati isplate za oba igraca imajuci
%u vidu najbolju strategiju igraca II.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Ishodi igraca I i igraca II dato P1,P2 = {(1,1),1}
Outcome111=[P1(1,sgbri111) sgbr111];
%Ishodi igraca I i igraca II dato P1,P2 = {(1,1),2}
Outcome112=[P1(2,sgbri112) sgbr112];
%Ishodi igraca I i igraca II dato P1,P2 = {(1,2),1}
Outcome121=[P1(3,sgbri121) sgbr121];
%Ishodi igraca I i igraca II dato P1,P2 = {(1,2),2}
```

```
Outcome122=[P1(4,sgbri122) sgbr122 ];
%Ishodi igraca I i igraca II dato P1,P2 = {(2,1),1}
Outcome211=[P1(5,sgbri211) sgbr211];
%Ishodi igraca I i igraca II dato P1,P2 = {(2,1),2}
Outcome212=[P1(6,sgbri212) sgbr212];
%Ishodi igraca I i igraca II dato P1,P2 = {(2,2),1}
Outcome221=[P1(7,sgbri221) sgbr221];
%Ishodi igraca I i igraca II dato P1,P2 = {(2,2),2}
Outcome222=[P1(8,sgbri222) sgbr222 ];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 6: Formirana je prva matrica dobiti
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
OM1=[Outcome111;
Outcome112;
Outcome121;
Outcome122;
Outcome211;
Outcome212;
Outcome221;
Outcome222];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 7: Izracunajte drugi skup podigri
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%S obzirom na P1, P2 igra strategiju (1,1)
SGS11=OM1(1:2,:);
%S obzirom na P1, P2 igra strategiju (1,2)
SGS12=OM1(3:4,:);
%S obzirom na P1, P2 igra strategiju (2,1)
SGS21=OM1(5:6,:);
%S obzirom na P1, P2 igra strategiju (2,2)
SGS22=OM1(7:8,:);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 8: Definisati vektor isplate za igraca I
%u podigrama
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Isplata igra?a I dato P1,P2 = {1,1)
SGIPV11=SGS11(:,1);
%Isplata igra?a I dato P1,P2 = {1,2}
SGIPV12=SGS12(:,1);
%Isplata igra?a I dato P1,P2 = {2,1}
SGIPV21=SGS21(:,1);
```

```
% Isplata igra?a I datoP1,P2 = {2,2}
SGIPV22=SGS22(:,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 9: Treba pronaci najbolju strategiju za igraca I
%koja ce biti odgovor na strategiju igraca II.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Najbolja strategija igraca I dato P1,P2 = {1,1,1}
[sgbr11 sgbri11]=max(SGIPV11);
%Najbolja strategija igraca I dato P1,P2 = {1,2}
[sgbr12 sgbri12]=max(SGIPV12);
%Najbolja strategija igraca I dato P1,P2 = {2,1}
[sgbr21 sgbri21]=max(SGIPV21);
%Najbolja strategija igraca I dato P1,P2 = {2,2}
[sgbr22 sgbri22]=max(SGIPV22);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 10: Izracunati dobit za oba igraca, uzimajuci u
%obzir najbolju strategiju igraca I i strategiju
%igraca II.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Dobit igraca I i igraca II dato P1,P2 igraju (1,1)
Outcome11=[sgbr11 SGS11(sgbri11,2)];
%Dobit igraca I i igraca II dato P1,P2 igraju (1,2)
Outcome12=[sgbr12 SGS12(sgbri12,2)];
%Dobit igraca I i igraca II dato P1,P2 igraju (2,1)
Outcome21=[sgbr21 SGS21(sgbri21,2)];
%Dobit igraca I i igraca II dato P1,P2 igraju (2,2)
Outcome22=[sgbr22 SGS22(sgbri22,2)];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 11: Sa ovim vektorima dobiti definisana
%je druga matrica dobiti.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
OM2=[Outcome11;
Outcome12;
Outcome21;
Outcome22];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 12: Racuna se treci skup podigri.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Dato P1 igra strategiju 1
SGS1=OM2(1:2,:);
%Dato P1 igra strategiju 2
```

```
SGS2=OM2(3:4,:);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 13: Sledece, isplate igraca II u podigrama
%su izracunate.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Isplate igraca II dato P1 igra 1
SGIPV1=SGS1(:,2);
%Isplate igraca II dato P1 igra 2
SGIPV2=SGS2(:,2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 14: Treba odrediti najbolju strategiju
%igraca II, data je pocetna strategija igraca I.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Najbolja strategija igraca I dato P1 igra 1
[sgbr1 sgbri1]=max(SGIPV1);
%Najbolja strategija igraca I dato P1 igra 2
[sgbr2 sgbri2]=max(SGIPV2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 15: Za svakog igraca treba biti izracunat
%dobitak u svakoj podigri kao sto je bilo
%uradjeno sa prvobitnim skupom podigri.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Dobitak igraca I i igraca II dato P1 igra 1
%i igrac II igra najbolju strategiju.
Outcome1=[SGS1(sgbri1,1) sgbr1];
%Dobitak igraca I i igraca II dato P1 igra 2
%i igrac II igra najbolju strategiju.
Outcome2=[SGS2(sgbri2,1) sgbr2];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 16: Sa ovim vektorima dobiti definisana
%je treca matrica isplate.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
OM3=[Outcome1;
Outcome2];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 17: Najbolja akcija igraca I odredjena
%je pronalazenjem maksimalne vrednosti u prvom
%redu matrice ishoda.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[br1 bri1]=max(OM3(:,1));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Korak 18: Sada je utvrdjena odgovarajuca SPNE.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SPNE=[bri1 sgbri11 sgbri1 sgbri111];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 19: Vektor strategija koje dovode u
%ravnotezu je sada izracunat.
%Ovo je krajnji ishod igre.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SPNE;
```

Implementacija eksperimenta 3 u MATLAB-u. [5]

```
% Eksperiment 3
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 9: Odrediti najbolju strategiju za igraca II,
%pri cemu se uzimaju u obzir prethodne stretegije
%igraca I.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Najbolja strategija igraca II dato P1 igra 1
[sgbr21 sgbri21]=min(SGIPV21);
%Najbolja strategija igraca II dato P1 igra 2
[sgbr22 sgbri22]=min(SGIPV22);
```

Implementacija eksperimenta 4 u MATLAB-u. [5]

```
% Eksperiment 4

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Korak 4: Definisati najbolju strategiju za
%igraca II imajuci u vidu prethodno odigrane
%strateije igraca I i igraca II.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Najbolja strategija igraca II dato P1,P2 = {(1,1),1}
[sgbr111 sgbri111]=min(SGIPV111);
%Najbolja strategija igraca II dato P1,P2 = {(1,1),2}
[sgbr112 sgbri112]=min(SGIPV112);
%Najbolja strategija igraca II dato P1,P2 = {(1,2),1}
[sgbr121 sgbri121]=min(SGIPV121);
%Najbolja strategija igraca II dato P1,P2 = {(1,2),2}
[sgbr122 sgbri122]=min(SGIPV122);
%Najbolja strategija igraca II dato P1,P2 = {(2,1),1}
[sgbr211 sgbri211]=min(SGIPV211);
%Najbolja strategija igraca II dato P1,P2 = {(2,1},2}
```

```
[sgbr212 sgbri212]=min(SGIPV212);
%Najbolja strategija igraca II dato P1,P2 = {(2,1),1}
[sgbr221 sgbri221]=min(SGIPV221);
%Najbolja strategija igraca II dato P1,P2 = {(2,2),2}
[sgbr222 sgbri222]=min(SGIPV222);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Korak 14: Treba odrediti najbolju strategiju za
%igraca II, data je pocetna strategija igraca I.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Najbolja strategija igraca II dato P1 igra 1
[sgbr1 sgbri1]=min(SGIPV1);
%Najbolja strategija igraca II dato P1 igra 2
[sgbr2 sgbri2]=min(SGIPV2);
```

Implementacija eksperimenta 5 u MATLAB-u. [5]

```
% Eksperiment 5
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 9:Sada se mora odrediti neracionalna strategija
%igraca I, imajuci u vidu strategiju igraca II.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Najbolja strategija igraca I dato P1,P2 = {1,1,1}
[sgbr11 sgbri11]=min(SGIPV11);
%Najbolja strategija igraca I dato P1,P2 = {1,2}
[sgbr12 sgbri12]=min(SGIPV12);
%Najbolja strategija igraca I dato P1,P2 = {2,1}
[sgbr21 sgbri21]=min(SGIPV21);
%Najbolja strategija igraca I dato P1,P2 = {2,2}
[sgbr22 sgbri22]=min(SGIPV22);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Korak 17: Najbolja inicijativna strategija
%za igraca I je odredjena pronalaskom maksimalne
%vrednosti u prvom redu matrice dobiti.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[br1 bri1]=min(OM3(:,1));
```

7 Zaključak

Cilj teorije igara je da uz pomoć matematičkih alata odredi optimalnu strategiju za svakog igrača. Često su interesi igrača sukobljeni i dobitak koji će igrač ostvariti u igri ne zavisi samo od njega, već zavisi i od izbora strategije drugih igrača. Teorija igara ima veliku primenu. Ljudi svakodnevno igraju igre, ili se nalaze u situacijama koje teorija igara može opisati.
U ovom master radu navedeni su primeri primene teorije igara u vojnim, političkim, pravnim i ekonomskim naukama. Prema rezultatu, igre se mogu podeliti na igre nulte sume i igre nenulte sume. Traženje rešenja bimatričnih igara tj. igara opšte sume je komplikovanije, nego kod igara nulte sume. Pojam optimalnog rešenja definisanog za igre nulte sume nema smisla u bimatričnim igrama. Bimatrične igre se dele na nekooperativne i kooperativne igre. Nekooperativne igre su igre u kojima igrači ne mogu međusobno da se dogovaraju oko zajedničke strategije, ili ako dođe do sporazuma, ne moraju se pridržavati dogovora. Kod nekooperativnih igara primena Nešovog ekvilibrijuma često ima slabu moć predviđanja. Dešava se da postoji više ravnotežnih tačaka, pa se ne zna koju tačku odabrati, ili je pak rešenje jedinstveno, ali je loše. Model duopola je primer igara sa jedinstvenim rešenjem kod kojih je strateški ekvilibrijum dobar indikator predviđanja.
Kod kooperativnih igara, igrači mogu da se dogovaraju i ako dođe do sporazuma, moraju se njega pridržavati. Sporazum igračima može obezbediti bolji rezultat. U kooperativnim igrama sa transferom dobiti igrači se mogu dogovoriti da podele koalicionu dobit. U igrama bez transfera dobiti ova podela nije dozvoljena.
Nadam se da će moj master rad pomoći čitaocima da nauče neke osnove teorije igara, posebno bimatričnih igara i vide veliku primenu matematike u teoriji igara. Leonarno da Vinči je rekao: "Nema istine u onim naukama u kojima se matematika ne primenjuje."

Literatura

[1] A. Dixit, S. Skeath, *Games of Strategy*, Norton, New York, 2004.

[2] B. Stojanović, *Teorija igara: elementi i primena*, Službeni glasnik, Beograd, 2005.

[3] G. Owen, *Game theory*, Academic Press, New York, 1982.

[4] M. Kuzmanović, *Teorija Igara,* Beograd, 2017.

[5] Onosetale Okhiria, *The Centipede game: A MATLAB Approach,* April, 2012.

[6] R. Bronzei, D. Dimitrov, S. Tijs, *Models in Cooperative Game Theory: Crisp, Fuzzy and Multi-choice Games,* 2005.

[7] S. Krčevinac, M. Čangalović, V. Kovačević-Vujičić, M. Martić, M. Vujošević, *Operaciono istraživanje 1,* Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2006.

[8] Thomas S. Ferguson, *Game Theory*, Mathematics Department UCLA, Second Edition, 2014.

[9] Wayne L. Winston, *Operations Research: Applications and algorithms,* Boston, 1987.

[10] https://www.astronomija.org.rs/nauka/3671-male-ivotne-igre

Biografija

Desanka Margetić je rođena 9. marta 1996. godine u Beogradu. Završila je „Prvu osnovnu školu“ u Brčkom u Bosni i Hercegovini sa odličnim uspehom i upisala je gimnaziju „Vaso Pelagić“, opšti smer. Gimnaziju je završila 2014. godine takođe sa odličnim uspehom. Zatim je upisala visoko obrazovanje prvog stepena osnovnih akademskih studija u trajanju od 3 godine, na studijskom programu Matematika, Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu. Dana 16. jula 2018. godine završila je osnovne studije sa prosečnom ocenom 8.26. U oktobru 2018. godine upisala je master studije na studijskom programu Primenjena matematika. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i progranom u julu 2020. godine i stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: monografska dokumentacija
BF
Tip zapisa: tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Desanka Margetić
AU
Mentor: Prof. dr Sanja Rapajić
MN
Naslov rada: Bimatrične igre
NR
Jezik publikacije: srpski
JP
Jezik izvoda:s/e
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2020.
GO
Izdavač: autorski reprint
IZ Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (7/84/10/12)
(broj poglavlja/strana/referenci/slika)
FO
Naučna oblast: matematika
NO
Naučna disciplina: primenjena matematika
ND
Ključne reči: teorija igara, bimatrične igre, nekooperativne igre, kooperativne

igre, modeli duopola
PO
UDK
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Ovaj rad se bavi bimatričnim igrama. U prvom poglavlju definisani su osnovni pojmovi koji se koriste u teoriji igara, data je istorija teorije igara i njena primena u drugim naukama. U drugom poglavlju prikazane su bimatrične igre u normalnom i ekstenzivnom obliku i način kako se mogu prebacivati iz jednog oblika u drugi. U trećem poglavlju predstavljene su nekooperativne igre, definisana je tačka strateškog ekvilibrijuma, primeri nekooperativnih igara i postupak eliminacije striktno dominiranih strategija. U četvrtom poglavlju uvode se modeli duopola: Kurnoov, Bertranov i Štakelbergov. U petom poglavlju predstavljene su kooperatvine igre koje se dele na igre sa transferom dobiti i igre bez transfera dobiti. Zaključak je dat u poslednjem poglavlju.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 13. jula 2020. godine
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Zorana Lužanin, redovni profesor PMF-a
Član: dr Nenad Teofanov, redovni profesor PMF-a
Član: dr Sanja Rapajić, redovni profesor PMF-a, mentor.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: monograph type
DT
Type of record: printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Desanka Margetić
AU
Mentor: Sanja Rapajić, PhD
MN
Title: Bimatrix Games
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2020.
PY
Publisher: author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (7/84/10/12)
(chapters/pages/literature/pictures)
PD
Scientific field: mathematics
SF
Scientific discipline: applied mathematics
SD

Subject/Keywords: game theory, bimatrix games, non-cooperative games, cooperative games, models of duopoly
SKW
UC
Holding data: The library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: Bimatrix games are proposed in this thesis. The basic concept of game theory, its history and application are given in the first chapter. In the second chapter, the strategic and extensive forms of bimatrix games are presented, with the way of conversion from one form to another. The third chapter introduces basic concepts and examples of non-cooperative games. Strategic equilibria, the iterated elimination of strictly dominated strategies and the methodology of finding all PSE‘s are proposed in this chapter. The fourth chapter establishes duopoly models: the Cournot, the Bertrand and the Stackelberg model of Duopoly. The fifth chapter presents the cooperative games, which are divided into two classes; the cooperative games with transferable utility and the cooperative games with non-transferable utility. The conclusion is given in the last chapter.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 13^{th} July 2020
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: Zorana Lužanin, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Nenad Teofanov, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Sanja Rapajić, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor.