



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
ДЕПАРТАМЕНТ ЗА МАТЕМАТИКУ И  
ИНФОРМАТИКУ



Владимир Ђорђић

# Кинетички модели непрекидног типа за вишеатомске гасове

Мастер рад

Ментор:  
др Милана Чолић

Нови Сад, 2020.

## Предговор

Док ово читате Ви дишете. Струјање ваздуха кроз Ваше ноздрве може се описати Ојлеровим и Навије-Стоксовим једначинама кретања флуида. У екстремнијим условима, као што је рецимо улазак свемирског брода у атмосферу или код микро и нано уређаја приступ моделима са макроскопског станичишта не даје задовољавајуће резултате. Са друге стране кинетички модели који полазе од самог молекула и који разматрајући интеракције међу њима покушавају да објасне макроскопско стање гаса у оба наведена примера дају коректне резултате.

У овом раду разматрамо кинетичке моделе вишеатомских гасова. Главна идеја кинетичког приступа је да кренемо од самог молекула гаса и величина које описују његово стање - микроскопске брзине и микроскопске унутрашње енергије. Уводи се функција расподеле која мери вероватноћу да у одређеном тренутку и положају у простору нађе молекул гаса одређене микроскопске брзине и микроскопске унутрашње енергије. Еволуција функције расподеле описана је Болцмановом једначином.

Најпре моделирамо процес судара два молекула вишеатомског гаса. Полазећи од претпоставки кинетичке теорије и закона одржања који важе приликом судара два молекула гради се структура колизионог оператора који мери промену функције расподеле у Болцмановој једначини. Такође, структура колизионог оператора зависи и од функционалног простора у коме функција расподеле припада: простору са тежином или простору без тежине.

У раду се бавимо анализом три модела. У простору са тежином разматрамо модел дат у [8], док је модел у простору без тежине дат у [4] а његовим уопштавањем у овом раду креирајмо трећи модел.

Полазећи од Болцманове једначине реконструишимо неке од закона проширене термодинамике. Да би се ово постигло потребно је дефинисати макроскопске (мерљиве) величине преко функције расподеле као њене моменте у одговарајућем простору. Такође, за сва три модела доказујемо Х-теорему, која у кинетичкој теорији представља еквивалентно тврђење другом закону термодинамике.

Како сва три модела имају сличну структуру, даље се бавимо анализом сваког од њих и испитујемо услове под којим важи њихова еквиваленција. Кључну улогу приликом поређења има функција колизионог пресека, као део колизионог оператора. Наиме, показано је да се за специјалан избор тежинске функције, нормализацијом функције расподеле и преформулацијом колизионог пресека може прећи из модела са тежином [8] у модел без тежине [4] и обратно [10]. Такође, уопштавањем модела [4] истим поступком добија се

еквивалентност са моделом са тежином [8, 9].

Рад је подељен у седам поглавља. У поглављу 1 кратко се бавимо претпоставкама кинетичке теорије као и Болцмановом једначином за једноатомске гасове. У поглављу 2 дато је моделирање процеса судара молекула вишеатомског гаса, као и извођењем макроскопске унутрашње енергије. Поглавље 3 је посвећено функционалним просторима са којим радимо, док се у поглављу 4 бавимо моделом у простору са тежином. У поглављу 5 обрађен је модел без тежине као и његово уопштење. Поређење модела дато је у поглављу 6, а у финалном поглављу 7 изводимо закључак.

\*\*\*

У овом часу желео бих да се захвалим менторки др Милани Чолић на великој енергији, стрпљењу, подршици и саветима како током израде овог рада тако и приликом заједничког рада и у току студија. Такође захвалност дугујем члановима комисије проф. др Марку Недељкову и проф. др Србољубу Симићу на саветима и пренетом знању током занимљивих предавања. Такође хвала и проф. др Наташи Крејић, проф. др Данијели Рајтер-Бирић, др Ивани Вojновић на подршици током учешћа на ”ECMI Mathematical Modelling Week” као и свим осталим професорима и асистентима од којих сам много научио током школовања и студирања. Велику захвалност дугујем мојој породици: оцу Петру, мајци Милеви и брату Драгану на неизмерној љубави и подршици коју ми непрестано пружају. Хвала и свима који су ми на било који начин помогли током студија. Хвала и свим мојим пријатељима на разумевању, искреном и лепом пријатељству. Допринели сте лепоти ових студија. Овде сам захваљујући свима Вама и за све Вас.

Хвала!

Нови Сад, јул 2020. године

Владимир Ђорђић

# Садржај

<b>Предговор</b>	i
<b>1 Увод</b>	1
1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове . . . . .	2
<b>2 Моделирање вишеатомских гасова</b>	10
2.1 Увођење додатног параметра - микроскопске унутрашње енергије; Болцманова једначина . . . . .	10
2.2 Макроскопска унутрашња енергија . . . . .	11
2.3 Моделирање процеса судара . . . . .	12
2.4 Колизиона трансформација и инваријантне мере . . . . .	14
<b>3 Функционални простори</b>	21
<b>4 Кинетички модел у простору са тежином</b>	22
4.1 Колизиони оператор у простору са тежином . . . . .	22
4.2 Макроскопске величине као моменти . . . . .	23
4.3 Слаба формулатија колизионог интеграла у простору са тежином . . . . .	25
4.4 Макроскопски закони одржања . . . . .	29
4.5 X-теорема . . . . .	31
4.6 Равнотежна расподела као решење варијационог проблема . . . . .	35
4.7 Општи облик нетранслаторног дела унутрашње енергије . . . . .	35
4.8 Одређивање тежинске функције . . . . .	37
4.8.1 Тежинска функција за политропске гасове . . . . .	37
<b>5 Кинетички модел у простору без тежине</b>	39
5.1 Колизиони оператор у простору без тежине . . . . .	39
5.1.1 Слаба форма колизионог оператора $Q^{nw}$ . . . . .	40
5.1.2 X-Теорема . . . . .	41
5.2 Макроскопске величине у простору без тежине . . . . .	43
5.3 Макроскопски закони одржања . . . . .	45
5.4 Уопштење Болцмановог оператора у простору без тежине . . . . .	46
5.4.1 Слаба форма колизионог оператора $Q^{nwg}$ . . . . .	47
5.4.2 X-Теорема . . . . .	48

<b>6 Поређење модела</b>	<b>50</b>
6.1 Поређење модела за општи избор тежинске функције . . . . .	52
<b>7 Закључак</b>	<b>55</b>
<b>Литература</b>	<b>55</b>
<b>Биографија</b>	<b>58</b>
<b>Кључна документацијска информација</b>	<b>59</b>
<b>Key word documentation</b>	<b>62</b>

# 1 Увод

Да бисмо описали основне идеје кинетичких модела које посматрамо у овом раду, најпре ћемо размотрити једноатомски гас који се налази у простору запремине  $Z$  са укупним бројем атома  $z$ . Физичке величине које описују његово стање на макроскопском нивоу су, на пример, густина, притисак, брзина или температура гаса. Ове величине су мерљиве па ћемо их надаље називати макроскопским величинама, јер оне описују стање гаса на макроскопском нивоу.

Са друге стране, гас се може описати и на микроскопском нивоу, уколико кренемо од самих атома, када је стање гаса у тренутку  $t$  одређено векторима  $\mathbf{x}^\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_N^\alpha)$  и  $\mathbf{v}^\alpha = (v_1^\alpha, \dots, v_N^\alpha)$ , где је  $\mathbf{x}^\alpha$  вектор положаја честице  $\alpha$ , а  $\mathbf{v}^\alpha$  вектор њене брзине, за сваку честицу гаса  $\alpha = 1, \dots, z$ . Овде  $N$  представља димензију простора у коме се проблем посматра: на пример, уколико  $N$  узме вредност 1 претпостављамо да се све честице крећу само по једној правој, за  $N = 2$  ради се о равни док  $N = 3$  допушта кретање у простору. Дакле, честице гаса можемо посматрати као елементе фазног простора димензије  $2N$ , прецизније простора  $Z \times \mathbb{R}^N$ , где је  $Z \subset \mathbb{R}^N$  запремина простора коју заузима гас.

На основу закона класичне механике, прецизније другог Њутновог закона, кретање честице гаса  $\alpha$  је дато системом диференцијалних једначина:

$$\dot{\mathbf{x}}^\alpha = \mathbf{v}^\alpha, \quad m\dot{\mathbf{v}}^\alpha = \mathbf{F}^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, z, \quad (1.1)$$

или

$$m\ddot{\mathbf{x}}^\alpha = \mathbf{F}^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, z,$$

где  $\mathbf{x}^\alpha$  представља вектор положаја честице  $\alpha$ ,  $\mathbf{v}^\alpha$  вектор њене брзине, а  $\mathbf{F}^\alpha$  вектор резултујуће сile која делује на честицу, док са  $m$  обележавамо масу честице.  $\mathbf{F}^\alpha$  представља збир свих сила које делују на честицу као што су, на пример, центрифугална и гравитациона сила, као и сила којом остale честице гаса делују на посматрану честицу  $\alpha$ , те у општем случају  $\mathbf{F}^\alpha$  зависи од положаја свих осталих честица у гасу.

Да бисмо одредили динамику гаса потребно је решити систем (1.1)  $2Nz$  диференцијалних једначина првог реда. Један од проблема код оваквог приступа је велики број атома, који износи  $z \sim 2,68 \cdot 10^{25}$  за само  $m^3$  гаса при температури од  $273,15\text{ K}$  и притиску од  $102325\text{ Pa}$ , што и поред убрзаног развоја рачунара представља велики задатак [12]. Други проблем представља одређивање почетних услова:

$$\mathbf{x}^\alpha(0) = \mathbf{x}_0^\alpha, \quad \mathbf{v}^\alpha(0) = \mathbf{v}_0^\alpha,$$

## 1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове

---

где су  $\mathbf{x}_0^\alpha, \mathbf{v}_0^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, z$  додатних  $2Nz$  услова који описује почетно стање система.

Да би се превазишли описани проблеми код моделирања, један од могућих приступа је тзв. статистички, на којем почива кинетичка теорија, а генерално и статистичка механика. Уместо детерминистичког одређивања стања честице проблему приступамо тако што посматрамо вероватноћу да у одређеном тренутку  $t$  и положају  $\mathbf{x}$  се нађе честица брзине  $\mathbf{v}$ . Уводи се појам функције расподеле  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  која је у општем случају функција времена  $t$ , положаја  $\mathbf{x}$  и брзине  $\mathbf{v}$  атома.

Приступом са становишта статистичке механике смо изгубили информације о свакој честици понаособ или различитим усредњавањима можемо обезбедити везу са макроскопским величинама о чиму ћемо говорити у наставку.

Једначина која описује еволуцију функције расподеле за разређене гасове се назива **Болцманова једначина**. Лудвиг Болцман<sup>1</sup> је извео ову једначину у свом раду из 1872. године [7]. Ова једначина представља основу кинетичких модела, како за једноатомске, тако и за вишеатомске гасове, као и њихове мешавине.

### 1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове

У овом делу изводимо Болцманову једначину за једноатомске гасове. Овде ћемо изложити основне принципе које ћемо даље наводити и проширавати и на вишеатомске гасове.

Основни алат кинетичке теорије је функција расподеле  $f(t, \mathbf{x}, \xi)$ , која зависи од уобичајених макроскопских променљивих, времена  $t$ , положаја у физичком простору  $\mathbf{x}$ , али и од променљиве  $\xi$  која описује микроскопско стање гаса, тако да  $f(t, \mathbf{x}, \xi)d\mathbf{x}d\xi$  представља број атома у тренутку  $t$  у елементарној запремини  $d\mathbf{x}d\xi$  центрираној у тачки  $(\mathbf{x}, \xi)$ . Физичка интерпретација функције расподеле се постиже усредњавањем по микроскопском стању  $\xi$  тј. кад дефинишемо моменте расподеле функције расподеле. У случају једноатомских гасова микроскопска промењива  $\xi$  је брзина атома  $\mathbf{v}$  тј.  $\xi = \mathbf{v}$ . На пример, бројна густина једноатомског гаса дефинише се као

$$n(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

где је  $f$  функција расподеле.

---

<sup>1</sup>Лудвиг Болцман (1844-1906) Аустријски физичар и математичар

## 1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове

---

**Напомена.** Брзина честица се мења услед судара са другим честицама. Ако претпоставимо да судари имају случајан карактер, онда брзину атома можемо да посматрамо као случајну промењиву у фазном простору  $Z \times \mathbb{R}^N$ ,  $Z \in \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ . У фазном простору брзину честице посматрамо као стохастички процес  $\{\mathbf{V}(t), t \geq 0\}$ . За фиксирани тренутак  $t$ ,  $\mathbf{V}(t)$  је случајна промењива која представља брзину атома у запремини  $d\mathbf{x}$ . Вероватноћа да честица има брзину из интервала  $[a, b]$  је

$$P\{\mathbf{V} \in [a, b]\} = \frac{\int_a^b f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}}{n(t, \mathbf{x})},$$

те је

$$\varphi_V(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{n(t, \mathbf{x})},$$

функција густине случајне промењиве  $\mathbf{V}$  у тренутку  $t$ . Функција  $f$  се назива функцијом расподеле из традиционалних разлога те се на њу не односи истоимени појам из теорије вероватноће.

Уколико сада претпоставимо да се честице не сударају међусобно тада је функција расподеле константа дуж трајекторије честице па је

$$\frac{df}{dt} = 0.$$

Како је  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ , рачунајући totalни диференцијал добијамо једнакост

$$\frac{df}{dt} = \partial_t f + \nabla_x f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \nabla_v f \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0. \quad (1.2)$$

Из другог Њутновог закона, уз препоставку да је систем изолован тј. да је суме спољашњих сила  $\mathbf{F}_{ext}$  једнака 0, важи

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{ext}}{m} = 0. \quad (1.3)$$

Како је веза између брзине честице и положаја дата са  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$ , заједно са (1.3) релација (1.2) постаје

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = 0,$$

што је транспортна једначина за функцију расподеле  $f$ . Решење ове једначине је константна функција дуж карактеристике система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0,$$

## 1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове

---

која је права линија. На основу овога вредност функције  $f$  у тренутку  $t$  можемо израчунати на основу вредности у почетном тренутку,

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(0, x - t\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Такође, атом који у тренутку  $t$  има положај  $\mathbf{x}$  и брзину  $\mathbf{v}$  ће у тренутку  $t + s$  имати положај  $\mathbf{x} + s\mathbf{v}$  и исту брзину  $\mathbf{v}$ .

Да би се прецизније описала динамика гаса потребно је у обзир узети интеракцију међу честицама. Кинетичка теорија претпоставља да су судари једнине и основна интеракција међу честицама. Дакле, као последица судара међу честицама мењају се њихове брзине па се и функција расподеле  $f$  мења. Њена еволуција описана је **Болцмановом једначином**,

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = Q(f). \quad (1.4)$$

Десна страна Болцманове једначине (1.4) се назива колизиони оператор и он мери брзину промене  $f$ . Приликом судара између атома може се дрогодити да неки од атома након судара има брзину  $\mathbf{v}$  и тада функција  $f$  која мери број оваквих атома у елементарној запремини расте. У случају да пре судара неки од атома има брзину  $\mathbf{v}$  и после судара та брзина се промени у неку  $\mathbf{v}'$  тада функција  $f$  опада. На основу динамике промене функције расподеле  $f$  колизиони оператор раздвајамо на два дела,

$$Q(f) = Q(f)^+ - Q(f)^-.$$

Члан  $Q^+(f)$  назива се апсорpcionи (на енглеском "gain") и он описује раст функције расподеле  $f$ , док се члан  $Q^-(f)$  назива емисиони (на енглеском "loss") и он описује опадање функције расподеле  $f$ .

Приликом стварања модела кључну улогу игра моделирање интеракције међу честицама (атомима у овом случају). Да бисмо ближе одредили структуру колизионог оператора уводе се следеће претпоставке кинетичке теорије:

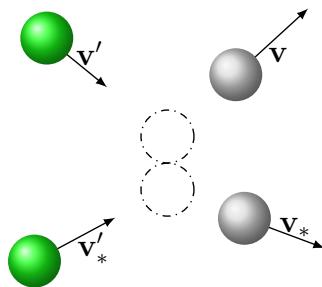
**П.1** Однос дужине слободног пута молекула  $\lambda$  и карактеристичне дужине проблема  $L$  је реда 1,

$$\frac{\lambda}{L} \approx 1.$$

Величина  $\lambda$  представља дужину пута коју пређе честица пре него што се судари са другом честицом, док  $L$  представља карактеристичну дужину. Рецимо приликом струјања флуида око сфере карактеристична дужина била би пречник сфере. Овај услов нам заправо говори о разређености гаса.

## 1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове

- П.2** Претпостављамо само бинарне интеракције, односно истовремене сударе три и више честица не посматрамо.
- П.3** Судари су локализовани у времену и простору, што значи да су краткотрајни догађаји у тачно одређеном времену и простору.
- П.4** Судари су микрореверзibilни у времену, што значи да уколико променимо ток времена честице ће проћи кроз иста стања кроз која су већ прошла.
- П.5** Важи молекуларни хаос. Ово за последицу има да се судари дешавају између честица које се нису сударале у прошлости.



Слика 1.1: Судар две честице са брзинама  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}'_*$  пре судара и  $\mathbf{v}_*$ ,  $\mathbf{v}$  после судара.

Одредимо сада колизиони оператор на основу претпоставки П.1-П.5. Претпоставка П.3 имплицира да је колизиони оператор функција брзине честице  $\mathbf{v}$  док су  $t$  и  $\mathbf{x}$  параметри,

$$\frac{df}{dt}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = Q(f(t, \mathbf{x}, \cdot))(\mathbf{v}).$$

На основу претпоставке П.2 може се увести функција расподеле за две честице  $f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_*)$  тако да  $f_2 d\mathbf{x} d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*$  представља број атома у тренутку  $t$  у запремини  $d\mathbf{x}$  где је брзина једне честице  $\mathbf{v}$  а друге  $\mathbf{v}_*$ .

Такође, уводимо функцију вероватноће прелаза

$$p((\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{v}_*)), \quad (1.5)$$

као мере да после судара атома са брзинама  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}'_*$  добијемо атоме са брзинама  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_*$ .

Апсорpcionи члан  $Q^+(f)(\mathbf{v})$  је повезан са растом броја атома са брзином  $\mathbf{v}$ . Они настају као последица судара атома са брзинама  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}'_*$ . Функција

## 1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове

---

расподеле ових молекула је  $f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'_*)$ . Узимајући у обзир вероватноћу прелаза  $p((\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{v}_*))$  и све могуће атоме са брзинама  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}'_*$  који после судара имају брзине  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_*$ , што се постиже интеграцијом по свим могућим брзинама  $\mathbf{v}_*, \mathbf{v}'_*, \mathbf{v}'$ , одређујемо апсорпциони члан  $Q^+(f)(\mathbf{v})$ . Аналогним разматрањем долазимо и до емисионог члана  $Q^-(f)(\mathbf{v})$  који мери смањење броја честица са брзином  $\mathbf{v}$ . Дакле, колизиони оператор је дат са

$$Q(f)(\mathbf{v}) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{3N}} f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_*) p((\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{v}_*)) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'_* d\mathbf{v}_*}_{Q^+(f)(\mathbf{v})} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{3N}} f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_*) p((\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \rightarrow (\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*)) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'_* d\mathbf{v}_*}_{Q^-(f)(\mathbf{v})}.$$

Због молекуларног хаоса (П.5) важи да је заједничка функција расподеле  $f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_*)$  производ маргиналних, тј.

$$f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_*) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_*),$$

где  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  и  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_*)$  представљају функције расподеле атома са брзинама  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_*$ . Штавише, ради једноставности уводимо ознаке:

$$\begin{aligned} f' &:= f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'), f'_* &:= f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_*), \\ f &:= f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), f_* &:= f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_*). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Као последица претпоставке о микрореверзибилности П.4 важи

$$p((\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{v}_*)) = p((\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \rightarrow (\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*)).$$

Да бисмо нагласили бинарну структуру колизионог оператора уместо  $Q(f)(\mathbf{v})$  пишемо  $Q(f, f)(f)$ . Дакле, на основу претходно уведених аргумента колизиони оператор постаје:

$$Q(f, f)(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^N} (f' f'_* - f f_*) p((\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{v}_*)) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'_* d\mathbf{v}_*. \tag{1.7}$$

Из једначине (1.7) јасно је да је колизиони оператор интегрални оператор по  $3N$  променљивих. Циљ даљег излагања је да смањимо област интеграције, што се постиже законима механике који важе за судар две честице.

Посматрајмо еластичан судар две честице гаса. Нека су брзине атома пре судара  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}'_*$  а брзине атома после судара  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_*$  (слика 1.1). Тада важи закон одржавања количине кретања и закон одржавања укупне енергије честица:

## 1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове

---

$$m\mathbf{v}' + m\mathbf{v}'_* = m\mathbf{v} + m\mathbf{v}_*, \quad (1.8)$$

$$\frac{m}{2}|\mathbf{v}'|^2 + \frac{m}{2}|\mathbf{v}'_*|^2 = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{m}{2}|\mathbf{v}_*|^2. \quad (1.9)$$

Вероватноћа прелаза је различита од нуле само када важе ова два закона, дакле

$$p((\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{v}_*)) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{v}', \mathbf{v}'_*) \cdot \delta_{\{m\mathbf{v}' + m\mathbf{v}'_* = m\mathbf{v} + m\mathbf{v}_*\}} \\ \cdot \delta_{\left\{\frac{m}{2}|\mathbf{v}'|^2 + \frac{m}{2}|\mathbf{v}'_*|^2 = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{m}{2}|\mathbf{v}_*|^2\right\}},$$

где је  $\delta$  ознака за

$$\delta_{\{\mathbf{a}=\mathbf{b}\}} = \begin{cases} 1, & \mathbf{a} = \mathbf{b}, \\ 0, & \mathbf{a} \neq \mathbf{b}. \end{cases}$$

за  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ . Функција  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{v}', \mathbf{v}'_*)$  назива се колизиони пресек и у случају једноатомских гасова Галилејева инваријантност намеће услов да је она функција интензитета релативне брзине  $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|$  и угла између вектора  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_*$  и  $\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_*$ .

Даље се уводи брзина центра масе  $\mathbf{V}$  и релативна брзина  $\mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{V} := \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_*}{2}, \quad \mathbf{u} := \mathbf{v} - \mathbf{v}_*. \quad (1.10)$$

Аналогно брзина центра масе и релативна брзина пре судара честица биле би

$$\mathbf{V}' = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_*}{2}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{v}'_*. \quad (1.11)$$

Увођењем система центра масе релације (1.8) и (1.9) своде се на

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}', \quad | \mathbf{u} | = | \mathbf{u}' |. \quad (1.12)$$

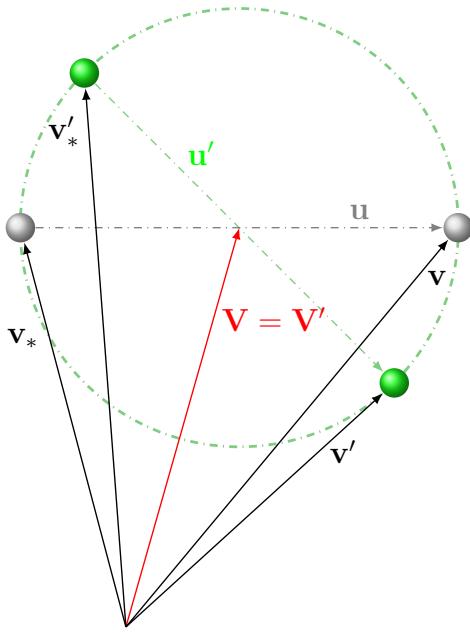
Ово значи да се брзина центра масе не мења после судара а интензитет релативне брзине остаје непромењен. На слици 1.2 видимо да сви вектори релативне брзине леже на сфере пречника  $|\mathbf{u}|$ .

Систем (1.8)-(1.9) чини  $N+1$  једначина из ког треба да изразимо  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{v}'_*$ , што је  $2N$  промењивих. Да би се то учинило потребно је увести  $N-1$  параметара. Дакле, уводи се нови параметар  $\boldsymbol{\sigma} \in S^{N-1}$ , где је  $S^{N-1}$  јединична сфера у  $\mathbb{R}^N$ , тако да је

$$\mathbf{u}' = |\mathbf{u}| \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.13)$$

## 1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове

---



Слика 1.2: Брзине пре судара и после судара два атома. Интензитети релативне брзине пре и после судара су једнаки  $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'|$  и брзина се не мења  $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$ .

Захваљујући овоме можемо изразити  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}'_*$  у функцији  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \boldsymbol{\sigma}$ . Из једначина (1.11) следи да је

$$\mathbf{v}' = \mathbf{V}' + \frac{\mathbf{u}'}{2}, \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{V}' - \frac{\mathbf{u}'}{2},$$

па користећи се релацијама (1.12) добија се

$$\mathbf{v}' = \mathbf{V} + \frac{\mathbf{u}'}{2}, \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{V} - \frac{\mathbf{u}'}{2}. \quad (1.14)$$

Из једначине (1.14) користећи се релацијама (1.13) и (1.10) коначно се добијају изрази за преколезоне величине  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}'_*$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_*}{2} + \frac{1}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_*| \boldsymbol{\sigma}, \\ \mathbf{v}'_* &= \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_*}{2} - \frac{1}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_*| \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

## 1.1 Болцманова једначина за једноатомске гасове

---

Коначно, колизиони оператор (1.7) постаје:

$$Q(f, f)(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} \{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_*) - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_*)\} \\ \times B\left(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|, \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_*}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) d\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{v}_*, \quad (1.16)$$

где су вектори  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}'_*$  дати са (1.15). Дакле, на основу (1.4) и (1.16) уводећи ознаке (1.6), Болцманова једначина за једноатомске гасове гласи

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} \{f' f'_* - f f_*\} B\left(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|, \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_*}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) d\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{v}_*,$$

где смо користили нотацију из (1.6) а  $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*$  као функције од  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_*$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  су дате у (1.15). Она се сврстава се у класу нелинеарних интегрално-диференцијабилних једначина.

У даљем наставку рада прелазимо на моделе за вишеатомске гасове.

## 2 Моделирање вишеатомских гасова

У овом поглављу изложићемо основне особине вишеатомских гасова као и тврђења која се тичу микроскопске динамике молекула.

### 2.1 Увођење додатног параметра - микроскопске унутрашње енергије; Болцманова једначина

Као што смо већ видели код једноатомских гасова, срж моделирања динамике гаса у погледу кинетичке теорије лежи у разумевању интеракције међу честицама. У случају вишеатомских гасова ове интеракције се усложњавају због комплексније структуре вишеатомског молекула. Одраз ове структуре дат је кроз *број степени слободе* молекула у означи  $D$ . Степени слободе могу се интерпретирати као могућности за кретање молекула приликом судара и могу бити: трансляциони, ротациони и вибрациони. Зарад лакшег објашњења посматрајмо гас у простору  $\mathbb{R}^3$ . Трансляциони степени слободе односе се на могућности кретања центра масе молекула у правцу сваке од оса координатног система, док се ротациони степени слободе односе на ротацију молекула око оса нормалних на правац молекулске везе. Вибрациони степени слободе односе се на кретање атома у молекулу приликом одржавања везе. У случају вишеатомских гасова поред трансляционих јављају се ротациони и вибрациони степени слободе којих нема код једноатомских гасова. У следећој табели дат је број степени слободе у зависности од структуре молекула.

	Трансляциони и ротациони		Трансляциони, ротациони и вибрациони
	Линеарни молекули	Нелинеарни молекули	
Број степени слободе $D$	5	6	$3N$

Табела 2.1: Развличите вредности броја степени слободе у зависности од структуре молекула где је  $N \geq 2$  број атома у молекулу вишеатомског гаса. Линеарни молекули су такви да је угао између два атома у молекулу 180 степени.

Да би се описао утицај додатних степени слободе у вишеатомском гасу на кинетичком нивоу уводи се додатан непрекидан параметар - макроскопска унутрашња енергија  $I$ . Сада је стање молекула гаса на микроскопском

## 2.2 Макроскопска унутрашња енергија

---

нивоу одређено вектором  $\xi = (\mathbf{v}, I)$ , где је  $\mathbf{v}$  брзина молекула а  $I$  његова микроскопска унутрашња енергија. Параметар  $I$  сада постаје додатни аргумент функције расподеле  $f$ , тако да  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) d\mathbf{x}d\mathbf{v}dI$  представља број молекула гаса у запремини  $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dI$  центрираној у тачки  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, I)$ .

Еволуција функције расподеле  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I)$  дата је Болцмановом једначином за вишесистемске гасове

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = Q(f, f)(\mathbf{v}, I), \quad (2.1)$$

при чему је  $Q(f, f)(\mathbf{v}, I)$  колизиони оператор.

Структуру колизионог оператора код вишесистемских гасова дајемо у наставку рада кроз неколико модела. Главна идеја је да задовољимо основне претпоставке на кинетичком нивоу, као и да постигнемо законе који важе за вишесистемске гасове на макроскопском нивоу, те ће сама структура оператора зависити од тога.

## 2.2 Макроскопска унутрашња енергија

Један од задатака кинетичке теорије гасова јесте и репродукција калоричке једначине стања на макроскопском нивоу. Као последица додатних степени слободе јавља се комплекснија зависност унутрашње енергије  $e$  од температуре гаса  $T$ ,

$$e = e(T).$$

Та зависност одређује се специфичним топлотним капацитетом при константној запремини  $c_v$  који се дефинише као

$$c_v = \frac{d e(T)}{dT}. \quad (2.2)$$

Интеграцијом једначине (2.2) по температури  $T$  следи

$$e(T) = \int_{T_0}^T \hat{c}_v(T') dT', \quad (2.3)$$

где  $T_0$  представља референтну температуру,  $\hat{c}_v = (m/k)c_v$  димензионисану специфичну топлоту [2],  $k$  Болцманову константу,  $m$  масу молекула. Гасови код којих је унутрашња енергија пропорционална температури називају се *политропски* док они код којих је то нелинеарна функција називају се *неполитропски*.

У општем случају, специфични топлотни капацитет није константна функција температуре, но ипак на температурама блиским собној може се узети

## 2.3 Моделирање процеса судара

---

да је он константан. На основу овога макроскопска унутрашња енергија може се сматрати линеарном функцијом температуре

$$e = \frac{D}{2} \frac{k}{m} T,$$

где је  $D$  број степен слободе молекула дат у табели 2.1. Дакле, на ниским температурама вишеатомски гас можемо сматрати политропским. На вишим температурама долази до утицаја ротационих и вибрационих степени слободе те само енергија која потиче од транслаторног кретања молекула је линеарна функција температуре

$$e_K = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T.$$

Да би се кинетички модел био коректан он мора репродуковати описано понашање макроскопске унутрашње енергије, дато једначином (2.3) а у наставку ће бити говорено о начину на који је то постигнуто.

### 2.3 Моделирање процеса судара

Да бисмо описали структуру колизионог оператора најпре излажемо моделирање процеса судара два молекула вишеатомског гаса.

Посматрамо судар два молекула вишеатомског гаса. Нека је стање ова два молекула одређено са векторима  $\xi' = (\mathbf{v}', I')$ ,  $\xi'_* = (\mathbf{v}'_*, I'_*)$ , где су  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{v}'_*$  брзине молекула а  $I'$ ,  $I'_*$  одговарајуће микроскопске унутрашње енергије пре судара. После судара брзине молекула постају  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_*$  а унутрашње микроскопске енергије  $I$ ,  $I_*$  тако да је стање молекула после судара  $\xi = (\mathbf{v}, I)$ ,  $\xi_* = (\mathbf{v}_*, I_*)$ . Дакле, судар два молекула можемо посматрати као трансформацију:

$$(\xi', \xi'_*) \rightarrow (\xi, \xi_*).$$

Овде разматрамо еластичне сударе што значи да је укупна енергија (кинетичка и макроскопска унутрашња) као и количина кретања паре молекула очувана:

$$m\mathbf{v}' + m\mathbf{v}'_* = m\mathbf{v} + m\mathbf{v}_*, \quad (2.4)$$

$$\frac{m}{2}|\mathbf{v}'|^2 + I' + \frac{m}{2}|\mathbf{v}'_*|^2 + I'_* = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I + \frac{m}{2}|\mathbf{v}_*|^2 + I_*. \quad (2.5)$$

Уводимо брзину центра масе  $\mathbf{V}$  и релативну брзину  $\mathbf{u}$  са

$$\mathbf{V} := \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_*}{2}, \quad \mathbf{u} := \mathbf{v} - \mathbf{v}_*, \quad (2.6)$$

што је еквивалентно са

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \frac{\mathbf{u}}{2}, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{V} - \frac{\mathbf{u}}{2}. \quad (2.7)$$

### 2.3 Моделирање процеса судара

---

Уврштавањем (2.7) у (2.4) добија се еквивалентан облик закона количине кретања

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}'. \quad (2.8)$$

Такође, уврштавањем (2.7) у једнакост (2.5) добијамо

$$\frac{m}{2} \left| \mathbf{V}' + \frac{\mathbf{u}'}{2} \right|^2 + I' + \frac{m}{2} \left| \mathbf{V}' - \frac{\mathbf{u}'}{2} \right|^2 + I'_* = \frac{m}{2} \left| \mathbf{V} + \frac{\mathbf{u}}{2} \right|^2 + I + \frac{m}{2} \left| \mathbf{V} - \frac{\mathbf{u}}{2} \right|^2 + I_*,$$

или у еквивалентном облику,

$$E = \frac{m}{4} |\mathbf{u}'|^2 + I + I_* = \frac{m}{4} |\mathbf{u}'|^2 + I' + I'_*. \quad (2.9)$$

Желимо да одредимо  $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*, I', I'_*$  преко брзине и енергије после судара узимајући у обзир законе одржања (2.4) и (2.5). Вектори  $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*$ , су димензије  $N$  а  $I', I'_*$  су скаларне величине, па укупно имамо  $2N + 2$  промењивих. Систем (2.4) и (2.5) чини  $N + 1$  једначина те нам је потребно  $N + 1$  параметар. Као и раније уводи се параметар  $\sigma \in S^{N-1}$ , где  $S^{N-1}$  јединична сфера у  $\mathbb{R}^N$ , а преостала два параметра се уводе на основу процедуре описане у наставку - такозване Борнаке-Ларсен процедуре.

Борнаке-Ларсен процедура се заснива на томе да се укупна енергија молекула подели на два дела, један који се интерпретира као кинетичка енергија кретања молекула и други, који се интерпретира као унутрашња енергија која се може схватити као последица вибрационих и ротационих степени слободе молекула [3, 4, 9].

Овим се уводи додатни параметар  $R \in [0, 1]$ , тако да је

$$RE = \frac{m}{4} |\mathbf{u}'|^2, \quad I' + I'_* = (1 - R)E. \quad (2.10)$$

Расподела енергије између чланова  $I'$  и  $I'_*$  одређена је новим параметром  $r \in [0, 1]$  тако да је

$$I' = r(1 - R)E, \quad I'_* = (1 - r)(1 - R)E. \quad (2.11)$$

Даље се уводи параметар  $\sigma \in S^{N-1}$  тако да је

$$\mathbf{u}' = |\mathbf{u}'| \sigma.$$

Како је  $RE = \frac{m}{4} |\mathbf{u}'|^2$  следи

$$|\mathbf{u}'|^2 = \frac{4RE}{m}, \quad |\mathbf{u}'| = \sqrt{\frac{4RE}{m}}, \quad \mathbf{u}' = 2\sqrt{\frac{RE}{m}} \sigma. \quad (2.12)$$

## 2.4 Колизиона трансформација и инваријантне мере

---

Коначно, из  $\mathbf{v}' = \mathbf{V}' + \frac{\mathbf{u}'}{2}$  и  $\mathbf{v}'_* = \mathbf{V}' - \frac{\mathbf{u}'}{2}$  је

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_*}{2} + \sqrt{\frac{RE}{m}} \boldsymbol{\sigma}, \\ \mathbf{v}'_* &= \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_*}{2} - \sqrt{\frac{RE}{m}} \boldsymbol{\sigma}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Прерасподелу енергије пре судара можемо написати у функцији пост-колизионих параметара,  $R'$ ,  $r'$  и енергије која је очувана  $E = E'$ . Сада је:

$$\begin{aligned}R'E &= \frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2, \quad I + I_* = (1 - R')E, \\ I &= r'(1 - R')E, \quad I_* = (1 - r')(1 - R')E,\end{aligned}\tag{2.14}$$

те је даље

$$r' = \frac{I}{(1 - R')E} = \frac{I}{I + I_*} = \frac{I}{E - \frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2}, \quad R' = \frac{m|\mathbf{u}|^2}{4E}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}.\tag{2.15}$$

У наставку ћемо се бавити пресликањем које величине пре судара преслика у њима одговарајућим после судара и обратно.

## 2.4 Колизиона трансформација и инваријантне мере

У поглављу 2.3, уводећи додатне параметре изразили смо микроскопске величине после судара преко величина пре судара и обрнуто. Од даљег интереса биће дефинисање мера инваријантних у односу на колизиону трансформацију. На сличан начин као у [9, 10] изводимо следећа тврђења.

**Лема 1.** *Нека је пресликање*

$$P : (\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow (\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*, I', I'_*, r', R', \boldsymbol{\sigma}')$$

*дефинисано са релацијама (2.10)-(2.15). Тада је пресликање  $P$  инволуција са Јакобијаном пресликања*

$$J_P = \frac{(1 - R)}{(1 - R')} \left( \frac{R}{R'} \right)^{\frac{N}{2} - 1}.$$

*Доказ.* Доказ је дат тако што је пресликање  $P$  разложено на низ пресликања. Прецизније,

$$P = A_9 \circ A_8 \circ A_7 \circ A_6 \circ A_5 \circ A_4 \circ A_3 \circ A_2 \circ A_1,$$

па је Јакобијан пресликања  $P$  производ Јакобијана  $J_{A_i}, i = 1,.., 9$ . Следе прецизне дефиниције горе наведених пресликања са одговарајућим Јакобијанима.

## 2.4 Колизиона трансформација и инваријантне мере

---

(1) Пресликање

$$A_1 : (\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{V}, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}),$$

представља промену координата у референтни систем центра масе према (2.6). Јакобијан овог пресликања је

$$J_{A_1} = 1,$$

што следи из дефиниције брзине центра масе и релативне брзине.

(2) Ca

$$A_2 : (\mathbf{u}, \mathbf{V}, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow (|\mathbf{u}|, \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \mathbf{V}, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}),$$

уводимо сферне координате за релативну брзину  $\mathbf{u}$ , па према томе је

$$J_{A_2} = |\mathbf{u}|^{-(N-1)}.$$

(3) Ради лакшег рачуна прелазимо на квадрат интензитета релативне брзине са пресликањем

$$A_3 : (|\mathbf{u}|, \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \mathbf{V}, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow (|\mathbf{u}|^2, \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \mathbf{V}, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}).$$

Јакобијан овог пресликања је

$$J_{A_3} = 2|\mathbf{u}|.$$

(4) Такође уместо  $I_*$  хоћемо  $E$ , а то постижемо са

$$A_4 : (|\mathbf{u}|^2, \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \mathbf{V}, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow (|\mathbf{u}|^2, \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \mathbf{V}, I, E, r, R, \boldsymbol{\sigma}).$$

Користимо (2.9) те је Јакобијан овог пресликања

$$J_{A_4} = \begin{vmatrix} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial |u|^2} & & & & & & & \\ & I_d & & & & & & \\ & & I_d & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \frac{\partial E}{\partial |u|^2} & \frac{\partial E}{\partial |\mathbf{u}|} & \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial E}{\partial I} & \frac{\partial E}{\partial I_*} & \frac{\partial E}{\partial r} & \frac{\partial E}{\partial R} & \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & I_d \end{vmatrix} = 1,$$

где су празна места нуле.

## 2.4 Колизионна трансформација и инваријантне мере

---

(5) Даље мењамо  $R$  са  $ER$  пресликавањем

$$A_5 : (|\mathbf{u}|^2, \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \mathbf{V}, I, E, r, R, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow (|\mathbf{u}|^2, \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \mathbf{V}, I, E, r, ER, \boldsymbol{\sigma}),$$

а његов Јакобијан је

$$J_{A_5} = E.$$

(6) Сада прелазимо на величине пре судара са

$$A_6 : (|\mathbf{u}|^2, \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \mathbf{V}, I, E, r, ER, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow (|\mathbf{u}'|^2, \frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|}, \mathbf{V}', I', I'_*, r', R', \boldsymbol{\sigma}').$$

Из (2.4) важи да је  $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$ . Такође вектори  $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \boldsymbol{\sigma}$  и  $\frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|} = \boldsymbol{\sigma}'$  су вектори јединичне сфере па се  $\boldsymbol{\sigma}'$  може добити ротацијом вектора  $\boldsymbol{\sigma}$ . На основу ова два аргумента доволјно је израчунати Јакобијан трансформације  $(|\mathbf{u}|^2, I, E, r, ER) \rightarrow (|\mathbf{u}'|^2, I', I'_*, r', R')$  те је

$$J_{A_6} = J_{(|\mathbf{u}|^2, I, E, r, ER) \rightarrow (|\mathbf{u}'|^2, I', I'_*, r', R')},$$

што је еквивалентно са

$$J_{A_6} = \begin{vmatrix} \frac{\partial |\mathbf{u}'|^2}{\partial |\mathbf{u}|^2} & \frac{\partial |\mathbf{u}'|^2}{\partial I} & \frac{\partial |\mathbf{u}'|^2}{\partial E} & \frac{\partial |\mathbf{u}'|^2}{\partial r} & \frac{\partial |\mathbf{u}'|^2}{\partial ER} \\ \frac{\partial I'}{\partial |\mathbf{u}|^2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial I'}{\partial ER} \\ \frac{\partial I'_*}{\partial |\mathbf{u}|^2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial I'_*}{\partial ER} \\ \frac{\partial r'}{\partial |\mathbf{u}|^2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial r'}{\partial ER} \\ \frac{\partial R'}{\partial |\mathbf{u}|^2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial R'}{\partial ER} \end{vmatrix}.$$

Користећи се дефиницијама величина  $|\mathbf{u}'|^2, I', I'_*, r', R'$  датим са једнакостима (2.11), (2.12), (2.15) добија се следећи низ једнакости који води ка Јакобијану  $J_{A_6}$ :

$$J_{A_6} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{4R}{m} & 0 & \frac{4}{m} \\ 0 & 0 & r(1-R) & (1-R)E & -r \\ 0 & 0 & (1-r)(1-R) & (R-1)E & 1-r \\ \frac{mI}{4(E-\frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2)^2} & \frac{1}{E-\frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2} & -\frac{I}{(E-\frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2)^2} & 0 & 0 \\ \frac{m}{4E} & 0 & -\frac{m|\mathbf{u}|^2}{4E^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

## 2.4 Колизиона трансформација и инваријантне мере

---

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{4+2}}{E - \frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2} \frac{(-1)^{4+1}m}{4E} \begin{vmatrix} \frac{4R}{m} & 0 & \frac{4}{m} \\ r(1-R) & (1-R)E & -r \\ (1-r)(1-R) & (R-1)E & 1-r \end{vmatrix} \\
&= \frac{-m(1-R)E}{(E - \frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2)4E} \begin{vmatrix} \frac{4R}{m} & 0 & \frac{4}{m} \\ r(1-R) & 1 & -r \\ (1-r)(1-R) & -1 & 1-r \end{vmatrix} \\
&= \frac{-m(1-R)}{4(E - \frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2)} \begin{vmatrix} \frac{4R}{m} & 0 & \frac{4}{m} \\ 1-R & 0 & -1 \\ (1-r)(1-R) & -1 & 1-r \end{vmatrix} \\
&= \frac{-m(1-R)}{4(E - \frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2)} \left( \frac{-4R}{m} + \frac{4(R-1)}{m} \right).
\end{aligned}$$

Коначно, Јакобијан трансформације  $A_6$  постаје

$$J_{A_6} = \frac{1-R}{(E - \frac{m}{4}|\mathbf{u}|^2)} = \frac{1-R}{I + I_*} = \frac{1-R}{(1-R')E}.$$

(7) Сада склањамо квадрат релативне брзине  $\mathbf{u}'$ :

$$A_7 : (|\mathbf{u}'|^2, \frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|}, \mathbf{V}', I', I'_*, r', R', \boldsymbol{\sigma}') \rightarrow (|\mathbf{u}'|, \frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|}, \mathbf{V}', I', I'_*, r', R', \boldsymbol{\sigma}')$$

при чему је

$$J_{A_7} = \frac{1}{2|\mathbf{u}'|}.$$

(8) Трансформацијом

$$A_8 : (|\mathbf{u}'|, \frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|}, \mathbf{V}', I', I'_*, r', R', \boldsymbol{\sigma}') \rightarrow (\mathbf{u}', \mathbf{V}', I', I'_*, r', R', \boldsymbol{\sigma}')$$

прелазимо из сферних координата за вектор  $\mathbf{u}'$  па је Јакобијан

$$J_{A_8} = |\mathbf{u}'|^{N-1}.$$

(9) Ка

$$A_9 : (\mathbf{u}', \mathbf{V}', I', I'_*, r', R', \boldsymbol{\sigma}') \rightarrow (\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*, I', I'_*, r', R', \boldsymbol{\sigma}')$$

враћамо се из система центра масе па је

$$J_{A_9} = 1.$$

## 2.4 Колизиона трансформација и инваријантне мере

---

Дакле, финално добија се Јакобијан пресликања  $P$

$$J_P = \prod_{i=1}^9 J_{A_i} = |\mathbf{u}|^{-(N-1)} 2|\mathbf{u}| E \frac{1-R}{(1-R')E} \frac{1}{2|\mathbf{u}'|} |\mathbf{u}'|^{N-1} = \frac{(1-R)}{(1-R')} \left( \frac{|\mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}|} \right)^{N-2}.$$

Како је  $|\mathbf{u}'| = \sqrt{\frac{4RE}{m}}$  и  $|\mathbf{u}| = \sqrt{\frac{4R'E}{m}}$  следи

$$\frac{|\mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}|} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R'}},$$

што даље води коначном изразу

$$J_P = \frac{(1-R)}{(1-R')} \left( \frac{R}{R'} \right)^{\frac{N}{2}-1}.$$

□

У наставку се дефинишу три мере које су инваријантне у односу на следеће колизионе трансформације:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}) \leftrightarrow (\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*, I', I'_*, r', R', \boldsymbol{\sigma}'), \quad (2.16)$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, r, R, \boldsymbol{\sigma}) \leftrightarrow (\mathbf{v}_*, \mathbf{v}, I, I_*, 1-r, R, -\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.17)$$

Трансформација (2.16) се односи на замену величина пре и после судара, док се (2.17) односи на замену молекулама који се сударају. Инваријантност мера у односу на ове трансформације је од изузетне важности при преласку са кинетичког нивоа на макроскопски, односно приликом дефинисања слабе форме колизионог оператора.

**Лема 2.** *Мера*

$$dY = (1-R)R^{\frac{N}{2}-1} d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* dI dI_* dR dr d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.18)$$

је инваријантна у односу на трансформације (2.16) и (2.17).

*Доказ.* На основу леме 1 лако се види да је

$$(1-R)R^{\frac{N}{2}-1} d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* dI dI_* dR dr d\boldsymbol{\sigma} = (1-R')R'^{\frac{N}{2}-1} d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'_* dI' dI'_* dR' dr' d\boldsymbol{\sigma}',$$

што је еквивалентно са

$$dY = dY',$$

те је инваријантност у односу на (2.16) доказана, а инваријантност у односу на (2.17) је тривијална. □

## 2.4 Колизионна трансформација и инваријантне мере

---

**Лема 3.** Нека је  $\varphi(I) \geq 0$  и функција  $F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})$  таква да је

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})\varphi(I)\varphi(I_*) = F(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*, I', I'_*, R', r', \boldsymbol{\sigma}')\varphi(I')\varphi(I'_*), \quad (2.19)$$

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})\varphi(I)\varphi(I_*) = F(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}, I_*, I, R, 1 - r, -\boldsymbol{\sigma})\varphi(I)\varphi(I_*). \quad (2.20)$$

Тада је мера

$$dW = F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})\varphi(I)\varphi(I_*)(1 - R)R^{\frac{N}{2}-1}d\boldsymbol{\sigma}d\mathbf{v}_*dI_*dRdrd\mathbf{v}dI, \quad (2.21)$$

инваријантна у односу на трансформације (2.16) и (2.17).

*Доказ.* На основу леме 1 и особина функције  $F$  датих са (2.19) и (2.20) лако се види тражена особина.  $\square$

**Лема 4.** Нека су величине  $I, I_*, r, R, I', I'_*, r', R'$  дефинисане релацијама (2.10)-(2.15). Тада важи

$$II_*r(1 - r)(1 - R)^2 = I'I'_*r'(1 - r')(1 - R')^2 \quad (2.22)$$

*Доказ.* На основу дефиниција величина  $I$  и  $I_*$  датим са (2.14) следи да је

$$II_*r(1 - r)(1 - R)^2 = r'(1 - R')E(1 - r')(1 - R')Er(1 - R)(1 - r)(1 - R). \quad (2.23)$$

На основу дефиниција величина  $I'$  и  $I'_*$  датим са (2.11) једнакост (2.23) постаје

$$II_*r(1 - r)(1 - R)^2 = I'I'_*r'(1 - R')(1 - r')(1 - R'),$$

па је је овим лема доказана.  $\square$

Узмимо сада да је

$$\varphi(I) = I^\alpha, \quad \alpha > -1. \quad (2.24)$$

Тражимо  $F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})$  тако да важи (2.19) и (2.20). На основу леме 4 подизањем на степен  $\alpha$  једнакост (2.22) следи да

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma}) = (r(1 - r)(1 - R)^2)^\alpha, \quad (2.25)$$

задовољава једнакост (2.19), за  $\varphi(I) = I^\alpha$ . Такође, једнакост (2.20) важи на основу инваријантности  $r(1 - r)$  у односу на (2.17). Ради једноставности уводимо ознаке:

$$\eta_\alpha(r) = (r(1 - r))^\alpha, \quad \psi_\alpha(R) = (1 - R)^{2\alpha}, \quad \alpha > -1, \quad (2.26)$$

те је  $F$  заправо производ функција

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma}) = \eta_\alpha(r)\psi_\alpha(R). \quad (2.27)$$

На основу горе изложеног формира се следећа лема.

## 2.4 Колизиона трансформација и инваријантне мере

---

**Лема 5.** *Мера*

$$dM = (1 - R)R^{\frac{N}{2}-1} I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R) d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr d\mathbf{v} dI \quad (2.28)$$

је инваријантна у односу на трансформације (2.16)-(2.17), где су функције  $\eta_\alpha(r)$  и  $\psi_\alpha(R)$  дефинисане са (2.26).

*Доказ.* На основу особина функције  $F$  дате у (2.25), леме 2 и леме 3 следи тражена особина.  $\square$

### 3 Функционални простори

Да бисмо написали тачан облик Болцманове једначине (2.1) потребно је да опишемо колизиони оператор. Израз за колизиони оператор зависи од функционалног простора у ком радимо. Такође, макроскопске величине су заправо моменти функције расподеле те и физичко интерпретирање Болцманове једначине као кинетичког модела зависи од функционалног простора.

У овом раду су за нас интересантни  $L^1$  простори, јер они допуштају прелазак са кинетичког на макроскопски ниво. Прецизније, дефинишимо  $L^1$  простор са тежином и без тежине.

1. Простор без тежине ( $L^1, \|\cdot\|_{L^1}$ )

$$L^1 = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} |f| dI d\mathbf{v} < +\infty \right\}$$

са нормом

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} |f| dI d\mathbf{v},$$

2. Простор са тежином ( $L_\varphi^1, \|\cdot\|_{L_\varphi^1}$ )

$$L_\varphi^1 = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} |f| \varphi(I) dI d\mathbf{v} < \infty \right\}.$$

са нормом

$$\|f\|_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} |f| \varphi(I) dI d\mathbf{v},$$

где је  $\varphi(I) \geq 0$  тежинска функција.

## 4 Кинетички модел у простору са тежином

У овом поглављу описиваћемо кинетички модел у простору са тежином  $L_\varphi^1$  у литератури заступљен у [8, 9]. Такође, разматраћемо везу са макроскопским величинама као и неким од закона проширене термодинамике.

У овом простору Болцманова једначина гласи

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = Q^w(f, f)(\mathbf{v}, I), \quad (4.1)$$

где је  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \geq 0$  функција расподеле а  $Q^w(f, f)(\mathbf{v}, I)$  колизиони оператор чију структуру дајемо у наставку.

### 4.1 Колизиони оператор у простору са тежином

Израз за колизиони оператор у простору са тежином  $L_\varphi^1$ ,  $\varphi(I) \geq 0$  дат је као

$$Q^w(f, f)(\mathbf{v}, I) = \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} (f' f'_* - f f'_*) \times \mathcal{B}^w \cdot (1 - R) R^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{\varphi(I)} d\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{v}_* dI_* dR dr, \quad (4.2)$$

где је колизиони пресек  $\mathcal{B}^w := \mathcal{B}^w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})$  ненегативна функција,  $f \in L_\varphi^1$ , а где су коришћене ознаке  $f' := f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}', I')$ ,  $f'_* := f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_*, I'_*)$ ,  $f := f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I)$ ,  $f_* := f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_*, I_*)$  [8]. Такође,  $\mathcal{B}^w$  треба да задовољава претпоставке о микроревезибилности:

$$\mathcal{B}^w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{B}^w(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*, I', I'_*, R', r', \boldsymbol{\sigma}'), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{B}^w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{B}^w(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}, I_*, I, R, 1 - r, -\boldsymbol{\sigma}), \quad (4.4)$$

где су величине пре судара:  $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*, I', I'_*, R', r', \boldsymbol{\sigma}'$  дате релацијама (2.10)-(2.15). Дакле,  $\mathcal{B}^w$  треба да буде инваријантно у односу на трансформацију (2.16), која представља замену величина пре судара са оним после судара и обратно, и односу на трансформацију (2.17) која представља замену места молекулима. Члан  $(1 - R) R^{\frac{N}{2}-1}$  обезбеђује инваријантност мере у односу на колизионе трансформације дефинисане са (2.16) и (2.17) претходно доказане у леми 2 што игра кључну улогу приликом повезивања Болцманове једначине са макроскопским законима одржања о чему че бити речи у наставку. Функција колизионог пресека  $\mathcal{B}^w$  говори о начину интеракције међу честицама док тежинска функција  $\varphi$  има улогу да обезбеди коректну калоријску једначину стања гаса дату са (2.3).

## 4.2 Макроскопске величине као моменти

---

### 4.2 Макроскопске величине као моменти

Да би се повезало стање гаса на микроскопском нивоу са макроскопским величинама потребно је да се оне дефинишу преко различитих средина. Прецизније, макроскопске величине у простору са тежином  $L_\varphi^1$  се дефинишу као моменти функције расподеле  $f$  за одређену тест функцију  $\psi(\mathbf{v}, I)$  са

$$\mathcal{M}_{\psi(\mathbf{v}, I)} [f]_{L_\varphi^1} := \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f(t, x, \mathbf{v}, I) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v}.$$

У наставку ћемо изложити дефиниције величина у простору са тежином које ће нам у наставку бити неопходне.

Бројну густину вишетомског гаса означавамо са  $n$  и она се добија за избор јединице као тест функције,

$$n = \mathcal{M}_1 [f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v}.$$

Множењем ове величине са масом молекула  $m$  добијамо макроскопску густину масе  $\rho$ ,

$$\rho = \mathcal{M}_m [f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v}. \quad (4.5)$$

Количину кретања гаса по јединици запремине означавамо са  $\rho \mathbf{U}$ ,

$$\rho \mathbf{U} = \mathcal{M}_{m\mathbf{v}} [f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} m \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v}, \quad (4.6)$$

где је  $\mathbf{U}$  макроскопска средња брзина свих молекула.

Густина енергије гаса (енергија гаса по јединици запремине) дата је са

$$\mathcal{M}_{\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I} [f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v}, \quad (4.7)$$

коју уводећи релативну брзину

$$\mathbf{C} = \mathbf{v} - \mathbf{U}, \quad (4.8)$$

раздвајамо на кинетичку и унутрашњу (макроскопску) енергију. На основу дефиниција количине кретања гаса (4.6), густине гаса (4.5) и дефиниције релативне брзине (4.8) следи да је моменат

$$\mathcal{M}_{m\mathbf{C}} [f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} m(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v} = 0. \quad (4.9)$$

## 4.2 Макроскопске величине као моменти

---

На основу разлагања

$$\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I = \frac{m}{2}|\mathbf{U}|^2 + m\mathbf{C} \cdot \mathbf{U} + \frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2 + I,$$

следи да је

$$\mathcal{M}_{\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2+I}[f]_{L_\varphi^1} = \frac{1}{2}|\mathbf{U}|^2 \mathcal{M}_m[f]_{L_\varphi^1} + \mathbf{U} \cdot \mathcal{M}_{m\mathbf{C}}[f]_{L_\varphi^1} + \mathcal{M}_{\frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2+I}[f]_{L_\varphi^1}. \quad (4.10)$$

Из једначине (4.9) следи да се други сабирац у (4.10) анулира па је кинетичка енергија гаса једнака са

$$\frac{1}{2}\rho|\mathbf{U}|^2,$$

а укупна макроскопска унутрашња енергија  $\rho e$  добија се као момент

$$\rho e = \mathcal{M}_{\frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2+I}[f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \left( \frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2 + I \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v}.$$

Макроскопска унутрашња енергија се дели на део који потиче од транслаторних степени слободе  $\rho e_K$  и део који потиче од нетранслаторних степени слободе  $\rho e_I$ :

$$\rho e_K = \mathcal{M}_{\frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2}[f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v}, \quad (4.11)$$

$$\rho e_I = \mathcal{M}_I[f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} If(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v}. \quad (4.12)$$

Од даљег значаја ће нам бити и протоци (флуксеви) свих ових величина те их на даље дефинишемо.

Проток густине количине кретања у правцу  $x_j$  добијамо са

$$P_{ij} := \mathcal{M}_{mv_i v_j}[f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} mv_i v_j f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v} = \rho U_i U_j + p_{ij},$$

где је  $p_{ij}$  тензор притиска дефинисан са

$$p_{ij} := \mathcal{M}_{mC_i C_j}[f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} mC_i C_j f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v},$$

а  $\mathbf{C}$  релативна брзина уведена са (4.8). У случају вишесистемских гасова само је транслаторни део унутрашње енергије повезан са трагом тензора притиска:

$$\rho e_K = (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{NN}).$$

### 4.3 Слаба формулатија колизионог интеграла у простору са тежином

---

Даље дефинишемо проток густине енергије у правцу  $x_j$  као

$$\begin{aligned}
Q_j &:= \mathcal{M}_{v_j(\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2+I)} [f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} v_j \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} (C_j + U_j) \left( \frac{m}{2} |\mathbf{C} + \mathbf{U}|^2 + I \right) f \varphi(I) dId\mathbf{v} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} (C_j + U_j) \left( \frac{m}{2} (|\mathbf{C}|^2 + 2\mathbf{U} \cdot \mathbf{C} + |\mathbf{U}|^2) + I \right) f \varphi(I) dId\mathbf{v} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \left( \frac{m}{2} \left( C_j |\mathbf{C}|^2 + 2C_j \sum_{i=1}^N C_i U_i + C_j |\mathbf{U}|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + U_j |\mathbf{C}|^2 + U_j \sum_{i=1}^N C_i U_i + U_j |\mathbf{U}|^2 \right) + C_j I + U_j I \right) f \varphi(I) dId\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Груписањем у односу на компоненте вектора  $\mathbf{U}$  добија се

$$\begin{aligned}
Q_j &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} C_j \left( \frac{m}{2} |\mathbf{C}|^2 + I \right) f \varphi(I) dId\mathbf{v} + \sum_{i=1}^N U_i \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} m C_i C_j f \varphi(I) dId\mathbf{v} \\
&\quad + U_j \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{C}|^2 + I \right) f \varphi(I) dId\mathbf{v} + U_j \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} m f \varphi(I) dId\mathbf{v} \\
&= q_j + \sum_{i=1}^N U_i p_{ij} + U_j \left( \rho \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} + \rho e \right).
\end{aligned}$$

Овде је  $q_j$   $j$ -та компонента топлотног протока дата као

$$q_j := \mathcal{M}_{C_j(\frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2+I)} [f]_{L_\varphi^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} C_j \left( \frac{m}{2} |\mathbf{C}|^2 + I \right) f \varphi(I) dId\mathbf{v}.$$

### 4.3 Слаба формулатија колизионог интеграла у простору са тежином

У одељку 4.2 видели смо да се макроскопске величине дефинишу као моменти функције расподеле  $f$ . Поставља се питање шта би се десило ако бисмо посматрали и моменат колизионог оператора у простору са тежином  $L_\varphi^1$  за неку функцију  $\psi(\mathbf{v}, I)$ . Такав поступак даје *слабу форму* колизионог оператора о чему говори следећа теорема.

### 4.3 Слаба формулатија колизионог интеграла у простору са тежином

---

**Теорема 1.** *Накаје  $\psi(\mathbf{v}, I) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ , тако да*

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v}$$

*има смисла. Тада важи*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} [f' f'_* - f f_*] \\ & \quad \times [\psi(\mathbf{v}', I') + \psi(\mathbf{v}'_*, I'_*) - \psi(\mathbf{v}, I) - \psi(\mathbf{v}_*, I_*)] \mathcal{B}^w dY \quad (4.13) \end{aligned}$$

*зде је мера  $dY$  дефинисана са (2.18).*

*Доказ.* Доказ се ослања на особине колизионог пресека  $\mathcal{B}^w$  и Леме 2. Из (4.2) је

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} [f' f'_* - f f_*] \psi(\mathbf{v}, I) \mathcal{B}^w dY. \quad (4.14) \end{aligned}$$

На основу леме 2 и особине колизионог пресека  $\mathcal{B}^w$  датог са (4.3) следи да је мера  $\mathcal{B}^w dY$  инваријантна у односу на трансформацију (2.16). Дакле, можемо променити величине после судара са величинама пре судара па применом на једначину (4.14) следи да је

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) d\mathbf{v} dI \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} [f f_* - f' f'_*] \times \psi(\mathbf{v}', I') \mathcal{B}^w dY. \quad (4.15) \end{aligned}$$

Даље, из и леме 2 и особине (4.4) следи инваријантност према трансформацији (2.17), што примењено на (4.14) даје

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) d\mathbf{v} dI \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} [f' f'_* - f f_*] \times \psi(\mathbf{v}_*, I_*) \mathcal{B}^w dY. \quad (4.16) \end{aligned}$$

### 4.3 Слаба формулатија колизионог интеграла у простору са тежином

---

Такође, истом аргументацијом као код извођења једначине (4.15), може се применити трансформација (2.16) на једначину (4.15) те се заменом величине пре судара са оним после добијамо

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} [ff_* - f'f'_*] \times \psi(\mathbf{v}'_*, I'_*) \mathcal{B}^w dY. \quad (4.17) \end{aligned}$$

Сада сабирајући једнакости (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) добија се тражена особина (4.13).  $\square$

Да бисмо добили одговарајуће једначине одржања на макроскопском нивоу потребно је да дефинишемо колизионе инваријанте.

**Дефиниција 1.** Функцију  $\psi(\mathbf{v}, I)$  називамо колизионна инваријанта уколико важи:

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v} = 0.$$

Дакле из претходне теореме колизиону инваријанту  $\psi(\mathbf{v}, I)$  можемо дефинисати и као функцију која задовољава једнакост

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{v}', I') + \psi(\mathbf{v}'_*, I'_*) &= \psi(\mathbf{v}, I) + \psi(\mathbf{v}_*, I_*), \\ \forall (\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}_+^2 \times [0, 1]^2 \times S^{N-1}, \quad (4.18) \end{aligned}$$

Следећа теорема нам говори које функције су колизионе инваријанте.

**Теорема 2.** Колизионна инваријанта  $\psi(\mathbf{v}, I)$  је линеарна комбинација следећих  $N + 2$  промењивих

$$\psi(\mathbf{v}, I) = \begin{pmatrix} 1 \\ m\mathbf{v} \\ \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I \end{pmatrix}.$$

*Доказ.* Трагамо за функцијом  $\psi(\mathbf{v}, I)$  за коју важи једнакост (4.18). Показујемо случај када је  $\psi(\mathbf{v}, I) \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ . Из закона одржања који важе на микроскопском нивоу, датих са (2.4) и (2.5) следи да је

$$\psi(\mathbf{v}, I) + \psi(\mathbf{v}_*, I_*) = \phi \left( \mathbf{v} + \mathbf{v}_*, \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I + \frac{m}{2}|\mathbf{v}_*|^2 + I_* \right)$$

за неку функцију  $\phi$ . Даље на  $\phi$  примењујемо оператор дефинисан са

### 4.3 Слаба формулатија колизионог интеграла у простору са тежином

---

$$D_{kl} = (v_k - v_{*k})(\partial_{v_l} - \partial_{v_{*l}}) - (v_l - v_{*l})(\partial_{v_k} - \partial_{v_{*k}})$$

одакле следи

$$\begin{aligned} D_{kl}\phi &= (v_k - v_{*k})(\partial_l\phi + 2mv_l\partial_2\phi - \partial_l\phi - 2mv_{*l}\partial_2\phi) \\ &\quad - (v_l - v_{*l})(\partial_k\phi + 2mv_k\partial_2\phi - \partial_k\phi - 2mv_{*k}\partial_2\phi) \\ &= 2m\partial_2\phi((v_k - v_{*k})(v_l - v_{*l}) - (v_l - v_{*l})(v_k - v_{*k})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Из претходних једнакости је

$$D_{kl}(\psi(\mathbf{v}, I) + \psi(\mathbf{v}_*, I_*)) = 0.$$

Сада диференцирањем претходног израза по  $v_k$  следи

$$\begin{aligned} \partial_{v_k}(D_{kl}(\psi(\mathbf{v}, I) + \psi(\mathbf{v}_*, I_*))) &= [(\partial_{v_l} - \partial_{v_{*l}}) + (v_k - v_{*k})(\partial_{v_l v_k}^2 - \partial_{v_{*l} v_k}^2) \\ &\quad - (v_l - v_{*l})(\partial_{v_k}^2 - \partial_{v_{*k} v_k}^2)](\psi(\mathbf{v}, I) + \psi(\mathbf{v}_*, I_*)) \\ &= \partial_{v_l}\psi(\mathbf{v}, I) - \partial_{v_{*l}}\psi(\mathbf{v}_*, I_*) + (v_k - v_{*k})\partial_{v_l v_k}^2\psi(\mathbf{v}, I) \\ &\quad - (v_l - v_{*l})(\partial_{v_k}^2\psi(\mathbf{v}, I)) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Поновним диференцирањем претходног израза по  $v_{*l}$  важи

$$-\partial_{v_{*l}}^2\psi(\mathbf{v}_*, I_*) + \partial_{v_k}^2\psi(\mathbf{v}, I) = 0. \tag{4.20}$$

Диференцирањем једначине (4.19) по  $v_{*k}$  добијамо

$$-\partial_{v_{*k} v_{*l}}^2\psi(\mathbf{v}_*, I_*) - \partial_{v_k v_l}^2\psi(\mathbf{v}, I) = 0. \tag{4.21}$$

Да би једначина (4.20) важила неопходно је да је

$$\partial_{v_k}^2\psi(\mathbf{v}, I) = const, \forall k = 1, 2, \dots, N,$$

па је  $\psi(\mathbf{v}, I)$  полином највише другог степена те га можемо представити као квадратну форму

$$\psi(\mathbf{v}, I) = \mathbf{v}^T A \mathbf{v}.$$

Такође, из једначине (4.21) важи да су мешовити изводи једнаки константи а због знака минус

$$\partial_{v_k v_l}^2\psi(\mathbf{v}, I) = 0$$

#### 4.4 Макроскопски закони одржања

---

па су чланови ван дијагонале у матрици  $A$  нуле. Из горе наведеног следи да је

$$\psi(\mathbf{v}, I) = a(I) + \mathbf{b}(I) \cdot \mathbf{v} + c(I) \cdot \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2. \quad (4.22)$$

Да бисмо видели каква је зависност од  $I$  уводи се оператор

$$\partial_I - \partial_{I_*},$$

па применом на функцију  $\psi(\mathbf{v}, I) + \psi(\mathbf{v}_*, I_*)$  добија се

$$\partial_I \psi(\mathbf{v}, I) - \partial_{I_*} \psi(\mathbf{v}_*, I_*) = 0.$$

Уврштавањем (4.22) у претходну једнакост добијамо:

$$a'(I) + b'(I)\mathbf{v} + c'(I)\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 = a'(I_*) + b'(I_*)\mathbf{v}_* + c'(I_*)\frac{m}{2}|\mathbf{v}_*|^2. \quad (4.23)$$

Да би једнакост (4.23) важила потребно је да

$$a'(I) = a'(I_*) = \text{const}, \quad b'(I) = 0, \quad c'(I) = 0,$$

што даље имплицира да је  $a(I)$  линеарна функција, а  $b(I)$  и  $c(I)$  константе. Сада се једначина (4.22) може записати у форми

$$\psi(\mathbf{v}, I) = \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m\mathbf{v} \\ \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I \end{pmatrix}$$

где је константа  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{N+2}$  па је колизиона инваријанта линеарна комбинација ових  $N+2$  величина.

□

#### 4.4 Макроскопски закони одржања

У поглављу 4.3 смо дефинисали колизионе инваријанте и показали да су оне линеарне комбинације функција  $1, m\mathbf{v}, \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I$ . Множењем Болцманове једначине са овим функцијама појединачно и интеграцијом по брзини  $\mathbf{v}$  и микроскопској унутрашњој енергији  $I$  добијамо законе одржања на макроскопском нивоу.

У општем случају узимајући за тест функцију  $\psi(\mathbf{v}, I)$  спроводећи наведену процедуру добија се:

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} (\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v}. \quad (4.24)$$

#### 4.4 Макроскопски закони одржања

---

Изрази на левој страни претходне једнакости постају

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \partial_t f \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v} = \partial_t \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v},$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \mathbf{v} f \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v},$$

па се једнакост (4.24) може свести на

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \mathbf{v} f \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dId\mathbf{v},$$

при чему је десна страна једнака нули за колизионе инваријанте на основу теореме 2.

За колизиону инваријанту  $\psi(\mathbf{v}, I) = m$  користећи дефиниције макроскопских величина добијамо

$$\partial_t \rho + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} (\rho \mathbf{U}_j) = 0, \quad (4.25)$$

што је закон одржања масе.

Уколико за  $\psi(\mathbf{v}, I)$  узмемо  $m v_i$  добијамо

$$\underbrace{\partial_t \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} m v_i f \varphi(I) dId\mathbf{v}}_{\rho U_i} + \sum_{j=1}^N \underbrace{\partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} m v_i v_j f \varphi(I) dId\mathbf{v}}_{P_{ij}} = 0.$$

На основу дефиниција макроскопских величина следи

$$\partial_t \rho U_i + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} (\rho U_i U_j + p_{ij}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.26)$$

што је закон одржања количине кретања.

Узимајући за колизиону инваријанту  $\frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I$  добијамо

$$\underbrace{\partial_t \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I \right) f \varphi(I) dId\mathbf{v}}_{\frac{1}{2} \rho |\mathbf{U}|^2 + \rho e}$$

$$+ \sum_{j=1}^N \underbrace{\partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} v_j \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I \right) f \varphi(I) dId\mathbf{v}}_{Q_j} = 0.$$

## 4.5 X-теорема

---

Ово је даље на основу дефиниција макроскопских величина еквивалентно са

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho |U|^2 + \rho e \right) + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} \left( q_j + \sum_{k=1}^N U_k p_{k,j} + U_j \left( \rho \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} + \rho e \right) \right) = 0, \quad (4.27)$$

те добијамо закон одржања енергије. Ова три закона, (4.25)-(4.27) чине Ојлеров систем једначина гасне динамике.

Такође, могуће је извести општије законе на макроскопском нивоу који могу бити закони биланса (једначине са генеративним члановима). На пример, полазећи од Болцманове једначине могу се извести Навије-Стоксове једначине [1] или једначине шест и четрнаест момената [10].

### 4.5 X-теорема

У овом одељку повезујемо Болцманову једначину са важним концептом ентропије. Ентропију система можемо разумети као меру његове неуређености. Да би се повезала ова величина са функцијом расподеле  $f$  дефинише се физичка ентропија [2] као

$$h = -k \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f \log f \varphi(I) dI d\mathbf{v}, \quad (4.28)$$

где можемо видети да је то заправо момент функције расподеле за избор тест функције  $\log f$ . Аналогно продукција ентропије дефинише се као

$$D^w(f) := \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f)(\mathbf{v}, I) \log f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v}, \quad (4.29)$$

тако да интеграл на десној страни има смисла. Следећа теорема нам говори о особинама продукције ентропије.

**Теорема 3** (X<sup>1</sup>-Теорема). *Нека је колизиони пресек  $\mathcal{B}^w \geq 0$ ,  $f \geq 0$  и нека је продукција ентропије  $D^w(f)$  добро дефинисана. Тада*

1. *Продукција ентропије је непозитивна*

$$D^w(f) \leq 0.$$

2. *Штавиши, следећи услови су еквивалентни*

$$(a) \quad Q^w(f, f)(\mathbf{v}, I) = 0 \text{ за све } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, I \in \mathbb{R}_+,$$

---

<sup>1</sup>на енглеском "H-Theorem"

## 4.5 X-теорема

---

(6)  $D^w(f) = 0$ ,

(в) Постоји  $n > 0, T > 0, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$  тако да

$$f(\mathbf{v}, I) = \frac{n}{A(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{U}|^2 + I \right)}, \quad (4.30)$$

таде је

$$A(T) = \int_0^\infty \exp \left( -\frac{I}{kT} \right) \varphi(I) dI. \quad (4.31)$$

*Доказ.* Да бисмо показали прву тачку посматрамо слабу форму колизионог оператора  $Q^w(f, f)$  за избор тест функције  $\psi(\mathbf{v}, I) = \log f$ . Према теореми 1 следи да је:

$$\begin{aligned} D^w(f) &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \log f(\mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} [f' f'_* - f f_*] \\ &\quad \times [\log f' + \log f'_* - (\log f' + \log f_*)] \\ &\quad \times \mathcal{B}^w(1-R) R^{\frac{N}{2}-1} d\boldsymbol{\sigma} dR dr dI_* dI d\mathbf{v}_* d\mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} [f' f'_* - f f_*] [\log f' f'_* - \log f' f_*] \\ &\quad \times \mathcal{B}^w(1-R) R^{\frac{N}{2}-1} d\boldsymbol{\sigma} dR dr dI_* dI d\mathbf{v}_* d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Приметимо да је пресликавање

$$(x, y) \mapsto (x - y)(\log x - \log y), \quad x, y > 0$$

ненегативно јер:

- $x < y$  онда је  $\frac{x}{y} < 1$  па је  $(x - y) \log \frac{x}{y} > 0$ ,
- $x > y$  онда је  $\frac{x}{y} > 1$  па је  $(x - y) \log \frac{x}{y} > 0$ ,
- $x = y$  онда је  $\frac{x}{y} = 1$  па је  $(x - y) \log \frac{x}{y} = 0$ .

Из претпоставке да је  $\mathcal{B}^w$  ненегативно и ненегативности пресликавања  $(x - y)(\log x - \log y)$ ,  $x, y > 0$  следи да је подинтегрална функција у (4.32) ненегативна те је продукција ентропије  $D^w(f)$  непозитивна.

Сада показујемо еквиваленције из другог дела. Импликација  $(a) \Rightarrow (b)$  је очигледна.

## 4.5 X-теорема

---

Покажимо  $(b) \Rightarrow (c)$ . Како је  $D^w(f) = 0$ , теорема 2 имплицира да је  $\log f$  линеарна комбинација  $N+2$  функција:

$$\log f = \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m\mathbf{v} \\ \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I \end{pmatrix},$$

где је  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{N+2}$  константа. Последња једнакост води до

$$f(\mathbf{v}, I) = \exp \left\{ c_0 + mc_1 v_1 + \cdots + c_N v_N + c_{N+1} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I \right) \right\}.$$

Овде бирали смо да је

$$\begin{aligned} c_0 &= \ln \left( \frac{n}{A(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{N}{2}} \right) - \frac{1}{2kT} |\mathbf{U}|^2, \\ c_i &= \frac{1}{kT} U_i, \quad 1 \leq i \leq N, \\ c_{N+1} &= -\frac{1}{kT}, \end{aligned}$$

па се лако види да се добија форма (4.30).

Покажимо  $(c) \Rightarrow (a)$ . Прво приметимо да је за  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I)$  датим са (4.30) важи

$$\begin{aligned} f' f'_* - f f' &= \frac{n^2}{A^2(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{N/2} e^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}' - \mathbf{U}|^2 + I' + \frac{m}{2} |\mathbf{v}'_* - \mathbf{U}|^2 + I'_* \right)} \\ &\quad - \frac{n^2}{A^2(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{N/2} e^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{U}|^2 + I + \frac{m}{2} |\mathbf{v}_* - \mathbf{U}|^2 + I_* \right)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

јер је из закона одржања енергије (2.4) и закона одржања количине кретања (2.5) следи

$$\begin{aligned} &\frac{m}{2} |\mathbf{v}' - \mathbf{U}|^2 + I' + \frac{m}{2} |\mathbf{v}'_* - \mathbf{U}|^2 + I'_* \\ &= \frac{m}{2} |\mathbf{v}'|^2 + I' + \frac{m}{2} |\mathbf{v}'_*|^2 + I'_* + m |\mathbf{U}|^2 - \mathbf{U} \cdot (m\mathbf{v}' + m\mathbf{v}'_*) \\ &= \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I + \frac{m}{2} |\mathbf{v}_*|^2 + I_* + m |\mathbf{U}|^2 - \mathbf{U} \cdot (m\mathbf{v} + m\mathbf{v}_*) \\ &= \frac{m}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{U}|^2 + I + \frac{m}{2} |\mathbf{v}_* - \mathbf{U}|^2 + I_*. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Из овога је и  $Q^w(f, f) = 0$  па смо доказали еквивалентност.  $\square$

## 4.5 X-теорема

---

Вратимо се сада ентропији  $h$  дефинисаној са (4.28). Промена ентропије кроз време је

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= -k \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \left( \frac{df}{dt} \log f + f \frac{1}{f} \frac{df}{dt} \right) \varphi(I) dI d\mathbf{v} \\ &= -k \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \frac{df}{dt} (\log f + 1) \varphi(I) dI d\mathbf{v}. \quad (4.34)\end{aligned}$$

Из претходне једнакости можемо видети да множењем Болцманове једначине са функцијом  $-k(\log f + 1)$  и интеграцијом по  $\mathbf{v}$  и  $I$  лева страна израза постаје диференцијал ентропије  $h$ . На основу теореме 2 прва колизиона инваријанта је један па можемо доћи до ентропијске неједнакости. Наиме, тада једнакост (4.34) постаје

$$\begin{aligned}-k\partial_t \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f \log f \varphi(I) dI d\mathbf{v} - k\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \mathbf{v} f \log f \varphi(I) dI d\mathbf{v} \\ = -k \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^w(f, f) \log f \varphi(I) dI d\mathbf{v}. \quad (4.35)\end{aligned}$$

Величина,

$$h_j = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} v_j \log f \varphi(I) dI d\mathbf{v}$$

може се разумети као проток физичке ентропије у правцу  $x_j$  те једнакост (4.35) постаје

$$\frac{dh}{dt} = \partial_t h + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} h_j = -k D^w(f).$$

Из X-теореме је  $D^w(f)$  непозитивно па важи

$$\frac{dh}{dt} \geq 0,$$

те је ентропија система неопадајућа функција што је заправо други закон термодинамике.

За систем кажемо да је у стању локалне равнотеже уколико је десна страна Болцманове једначине једнака нули. X-теорема говори да је у стању равнотеже продукција ентропије нула те је ова величина тада константна. Функција расподеле у коме се достиже ово стање локалне равнотеже је (4.30) која се још назива и Маквелова расподела.

## 4.6 Равнотежна расподела као решење варијационог проблема

---

### 4.6 Равнотежна расподела као решење варијационог проблема

Један од начина да одредимо равнотежну расподелу је да користимо принцип максимума ентропије са интегралним ограничењима која су дефинисана преко момената функције расподеле  $f$  датим у поглављу 4.2, а која одговарају колизионим инваријантама из теореме 2.

**Теорема 4.** *Максимум функције ентропије дате са*

$$h = -k \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f \log f \varphi(I) dI d\mathbf{v},$$

са условима

$$\begin{pmatrix} \rho \\ 0_i \\ \frac{3}{2}nkT + \rho e_I \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \begin{pmatrix} m \\ mc_i \\ \frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2 + I \end{pmatrix} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{C}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v},$$

има форму:

$$f_E = \frac{\rho}{mA(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{kT} \left( \frac{1}{2}m|\mathbf{C}|^2 + I \right) \right\}, \quad (4.36)$$

која се назива локална равнотешка функција. Овде је

$$A(T) = \int_0^\infty \exp \left( -\frac{I}{kT} \right) \varphi(I) dI. \quad (4.37)$$

Штавише, унутрашња енергија  $\rho e_I$  је дата са

$$\rho e_I = n \frac{A_1(T)}{A(T)}, \quad A_1(T) = \int_0^\infty I \exp \left( -\frac{I}{kT} \right) \varphi(I) dI.$$

За детаље доказа погледати у [13].

### 4.7 Општи облик нетранслаторног дела унутрашње енергије

У овом одељку дата је веза између дела унутрашње енергије који потиче од вибрационих и ротационих степени слободе (4.12) и функције  $A(T)$  дефинисане у (4.31) у којој фигурира тежинска функција  $\varphi(I)$ . Наредно тврђење се у сажетијој форми може наћи у [2].

## 4.7 Општи облик нетрансляторног дела унутрашње енергије

---

**Лема 6.** За нетрансляторни део унутрашње енергије дефинисане као

$$\rho e_I = \mathcal{M}_I [f]_{L_\varphi^1},$$

важи

$$e_I(T) = \frac{k}{m} T^2 \frac{d \log A(T)}{dT}. \quad (4.38)$$

*Доказ.* Уврштавањем равнотежне расподеле (4.36) у једначину (4.12) следи да је:

$$\begin{aligned} \rho e_I &= \int_{\mathbb{R}^N \times [0, \infty)} I \frac{\rho}{mA(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{kT} \left( \frac{1}{2} m |\mathbf{C}|^2 + I \right) \right\} \varphi(I) dI d\mathbf{C} \\ &= \frac{\rho}{mA(T)} \int_0^\infty \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{kT} \frac{m}{2} \mathbf{C}^2 \right\} d\mathbf{C}}_{=1 \text{ због особина нормалне расподеле}} \exp \left\{ -\frac{1}{kT} I \right\} I \varphi(I) dI \\ &= \frac{\rho}{mA(T)} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{kT} I \right\} I \varphi(I) dI. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Нека је

$$\Phi(s) = \mathcal{L} [\varphi(I)] (s) = \int_0^\infty e^{-sI} \varphi(I) dI,$$

где је  $\mathcal{L}$  Лапласова трансформација. Тада за специјално,  $s = \frac{1}{kT}$  важи  $A(T) = \Phi(s)$  па је:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(T)}{\partial T} &= \frac{\partial \Phi(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial T} \\ &= -\frac{1}{kT^2} \Phi'(s), \end{aligned}$$

односно

$$\Phi'(s) = -kT^2 A'(T). \quad (4.40)$$

Узимајући у обзир (4.40) и особину Лапласове трансформације  $\mathcal{L} [I \varphi(I)] (s) = \Phi'(s)$  за специјално  $s = \frac{1}{kT}$  важи

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [I \varphi(I)] (s) &= \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{kT} I \right\} I \varphi(I) dI \\ &= kT^2 A'(T). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Коначно, из једнакости (4.39) и (4.41) следи

$$e_I(T) = \frac{k}{m} T^2 \frac{A'(T)}{A(T)} = \frac{k}{m} T^2 \frac{d \log A(T)}{dT},$$

што је и требало показати.  $\square$

## 4.8 Одређивање тежинске функције

---

Део унутрашње енергије на макроскопском нивоу који потиче од трансlatorног кретања је дат са

$$e_K = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T, \quad (4.42)$$

па ако нам је позната калоричка једначина стања дата са (2.3) можемо одредити нетранслаторни део унутрашње енергије из

$$e_I = e - e_K. \quad (4.43)$$

Уврштавањем (4.43) у решење једначине (4.38),

$$A(T) = A_0 \exp \left( \frac{m}{k} \int_{T_0}^T \frac{e_I(T')}{T'^2} dT' \right), \quad (4.44)$$

може се одредити  $A(T)$ , где су  $A_0$  и  $T_0$  константе [2]. Дакле, у општем случају може се приметити да из једначине (4.37) следи да

$$A(T) = \mathcal{L} [\varphi(I)] (s), \quad s = \frac{1}{kT}, \quad (4.45)$$

где је  $\mathcal{L}$  Лапласова трансформација. Из једначине (4.45) је

$$\varphi(I) = \mathcal{L}^{-1} [A(T)] (I), \quad T = \frac{1}{ks}, \quad (4.46)$$

па функцију  $\varphi(I)$  можемо одредити као инверзну Лапласову трансформацију  $A(T)$ .

## 4.8 Одређивање тежинске функције

Претходна теорија је развијена за било коју тежинску функцију  $\varphi(I)$ , односно у општем случају за неполитропски гас са општим калоријском једначином (2.3). Тежинска функција постаје изузетно значајна приликом преласка са кинетичког модела на макроскопски. Прецизније, она се одређује тако да доведе до коректне макроскопске дефиниције унутрашње енергије, јер управо у овој дефиницији долази до изражaja комплекснија структура вишеатомских молекула.

У случају политропских гасова могуће је експлицитно одредити тежинску функцију што је дато у наредном одељку.

### 4.8.1 Тежинска функција за политропске гасове

Како за политропске гасове важи да је  $e = \frac{D}{2} \frac{k}{m} T$ , а  $e_K = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T$  тада нетранслаторни део унутрашње енергије  $e_I$  постаје

$$e_I = \frac{D - 3}{2} \frac{k}{m} T,$$

## 4.8 Одређивање тежинске функције

---

где је  $D$  број степени слободе молекула,  $m$  маса гаса а  $k$  Болцманова константа. Уврштавањем у (4.44) следи да је

$$A(T) = A_0 T_0^{-1-\alpha} T^{1+\alpha}, \quad (4.47)$$

где је  $\alpha > -1$  повезано са бројем степени молекула  $D$  са

$$\alpha = \frac{D-5}{2}. \quad (4.48)$$

Узимамо да је  $A_0 T_0^{-1-\alpha} = \Gamma(1+\alpha) k^{1+\alpha}$  где је  $\Gamma$  гама функција дата са

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt, \quad 0 < \beta < \infty. \quad (4.49)$$

Овим једнакост (4.47) постаје

$$A(T) = (kT)^{1+\alpha} \Gamma(1+\alpha), \quad \alpha = \frac{D-5}{2}, \quad \alpha > -1, \quad (4.50)$$

па се на основу (4.46) добија да је

$$\varphi(I) = I^\alpha.$$

Овде напомињемо да је параметар  $\alpha$  повезан са степенима слободе молекула  $D$  који су дати у табели 2.1 и то релацијом (4.48), и као такав представља један од параметара моделу који следи у наставку.

## 5 Кинетички модел у простору без тежине

У овом поглављу разматраћемо модел у простору без тежине  $L^1$  који се у литератури може наћи у [4] у случају политропских гасова. Овај модел ће касније бити уопштен и за случај неполитропских гасова.

За функцију расподеле  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \geq 0$  у простору без тежине Болцманова једначина гласи:

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = Q^{nw}(f, f)(\mathbf{v}, I), \quad (5.1)$$

где је  $Q^{nw}(f, f)(\mathbf{v}, I)$  колизиони оператор у овом простору. Циљ овог модела је да без увођења додатне функције тежине, повезивањем са степенима слободе молекула обезбеди слагање са понашањем макроскопских величина.

### 5.1 Колизиони оператор у простору без тежине

У простору без тежине уводи се колизиони оператор  $Q^{nw}$  на следећи начин:

$$Q^{nw}(f, f)(\mathbf{v}, I) = \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \left[ f' f'_* \left( \frac{II_*}{I'I'_*} \right)^\alpha - f f_* \right] \times \mathcal{B}^{nw}(1-R) R^{\frac{N}{2}-1} \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R) d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr, \quad (5.2)$$

где је

$$\eta_\alpha(r) = (r(1-r))^\alpha, \quad \psi_\alpha(R) = (1-R)^{2\alpha}, \quad \alpha > -1, \quad (5.3)$$

и колизиони пресек  $\mathcal{B}^{nw}$  задовољава услове микроревезибилности дате са

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{nw} := \mathcal{B}^{nw}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \sigma) &= \mathcal{B}^{nw}(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*, I', I'_*, R', r', \sigma') \\ &= \mathcal{B}^{nw}(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}, I_*, I, R, 1-r, -\sigma). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Преколезионе величине дефинисане су као и раније са (2.10)-(2.15), и нотација  $f' := f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}', I')$ ,  $f'_* := f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_*, I'_*)$ ,  $f := f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I)$ ,  $f_* := f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_*, I_*)$  је такође иста. Члан  $(1-R)R^{\frac{N}{2}-1}$ , заједно са функцијама  $\eta_\alpha(r)$  и  $\psi_\alpha(R)$  осигуруја инваријантност мере према колизионим трансформацијама датим у леми 5, док нормализација функције расподеле са  $I^\alpha$  дозвољава коректну репродукцију калоричке једначине стања. Напомињемо да је параметар  $\alpha > -1$  повезан са бројем степени слободе  $D$  са (4.48). Извлачењем члана  $I^\alpha I_*^\alpha$  колизиони

## 5.1 Колизиони оператор у простору без тежине

---

оператор (5.2) можемо записати као

$$Q^{nw}(f, f)(\mathbf{v}, I) = \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) \times \mathcal{B}^{nw}(1 - R) R^{\frac{N}{2} - 1} (I I_*)^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R) d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr \quad (5.5)$$

где се јасно види процес нормализације функције расподеле  $f$ .

### 5.1.1 Слаба форма колизионог оператора $Q^{nw}$

Слаба форма колизионог оператора постаје изузетно важна код преласка на макроскопски ниво, тачније приликом повезивања Болцманове једначине са системом ПДЈ. Да бисмо даље радили са овим моделом неопходно је формулисати слабу форму. У случају колизионог оператора  $Q^{nw}$  такође важи слична теорема о слабој форми.

**Теорема 5.** *Нака је  $\psi(\mathbf{v}, I) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  тако да*

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nw}(f, f)\psi(\mathbf{v}, I)dId\mathbf{v}$$

*има смисла. Тада важи да је*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nw}(f, f)\psi(\mathbf{v}, I)dId\mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) \\ & \quad \times [\psi(\mathbf{v}', I') + \psi(\mathbf{v}'_*, I'_*) - \psi(\mathbf{v}, I) - \psi(\mathbf{v}_*, I_*)] \mathcal{B}^{nw} dM, \end{aligned} \quad (5.6)$$

зде је мера  $dM$  дефинисана са (2.28).

*Доказ.* На основу леме 5 и особина  $\mathcal{B}^{nw}$  (5.4) користећи инваријантност мере  $\mathcal{B}^{nw} dM$  према (2.16) следи да је

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nw}(f, f)\psi(\mathbf{v}, I)dId\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) \psi(\mathbf{v}, I) \mathcal{B}^{nw} dM \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) \psi(\mathbf{v}', I') \mathcal{B}^{nw} dM. \end{aligned} \quad (5.7)$$

## 5.1 Колизиони оператор у простору без тежине

---

Затим користећи инваријантност према (2.17) и применом на (5.7) следи

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nw}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) \psi(\mathbf{v}_*, I_*) \mathcal{B}^{nw} dM, \quad (5.8) \end{aligned}$$

а поновном применом инваријантности према (2.16) на једнакост (5.8) је

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nw}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) \psi(\mathbf{v}'_*, I'_*) \mathcal{B}^{nw} dM. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Коначно сабирањем (5.7), (5.8), (5.9) добијамо тражено.  $\square$

У простору без тежине важи теорема слична теореми 2 која нам говори о колизионим инваријантама у овом простору.

**Теорема 6.** *Функцију  $\psi(\mathbf{v}, I)$  називамо колизиониа инваријанта уколико*

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nw}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} = 0$$

*и она је линеарна комбинација следећих  $N + 2$  промењивих*

$$\psi(\mathbf{v}, I) = \begin{pmatrix} 1 \\ m\mathbf{v} \\ \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

### 5.1.2 X-Теорема

Да бисмо формулисали X-теорему која је кинетичкој теорији еквивалентно тврђење другом закону термодинамике прво дефинишемо продукцију ентропије као

$$D^{nw}(f) = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nw}(f, f) \log(f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) I^{-\alpha}) dI d\mathbf{v}. \quad (5.11)$$

**Теорема 7** (X-Теорема). *Нека је колизиони пресек  $\mathcal{B}^{nw}$  позитиван скоро свуда,  $f \geq 0$  и нека је продукција ентропије  $D^{nw}(f)$  добро дефинисана. Тада*

1. *Продукција ентропије је непозитивна*

$$D^{nw} \leq 0.$$

## 5.1 Колизиони оператор у простору без тежине

---

2. Следећи услови су еквивалентни

$$(a) Q^{nw}(f, f)(\mathbf{v}, I) = 0 \text{ за све } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, I \in \mathbb{R}_+,$$

$$(b) D^{nw}(f) = 0,$$

(c) Постоји  $n > 0, T > 0, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$  тако да

$$f(\mathbf{v}, I) = \frac{n}{Z(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{N}{2}} I^\alpha e^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{U}|^2 + I \right)}, \quad (5.12)$$

где је

$$Z(T) = \int_0^\infty \exp \left( -\frac{I}{kT} \right) I^\alpha dI = (kT)^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1),$$

а  $\Gamma$  означава гама функцију дефинисану са (4.49).

*Доказ.* За избор тест функције  $\psi(\mathbf{v}, I) = \log(f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) I^{-\alpha})$  на основу теореме 5 је

$$\begin{aligned} D^{nw}(f) &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nw}(f, f) \log(f(\mathbf{v}, I) I^{-\alpha}) dId\mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \log f' I'^{-\alpha} + \log f'_* I_*'^{-\alpha} - (\log f I^{-\alpha} + \log f_* I_*^{-\alpha}) \right] \mathcal{B}^{nw} dM \right. \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) \\ &\quad \times \left( \log \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \log \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) \mathcal{B}^{nw} dM. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Као и у теореми 3 користимо аргумент ненегативности пресликања

$$(x, y) \mapsto (x - y)(\log x - \log y), \quad x, y > 0$$

и  $\mathcal{B}^{nw}$  на основу кога је доказан први део те је продукција ентропије непозитивна.

Сада показујемо еквиваленције из другог дела. Импликација (a)  $\Rightarrow$  (b) је очигледна.

Покажимо (b)  $\Rightarrow$  (c). На основу теореме 6  $\log(f I^{-\alpha})$  је линеарна комбинација

$$\log(f I^{-\alpha}) = \mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m\mathbf{v} \\ \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I \end{pmatrix},$$

## 5.2 Макроскопске величине у простору без тежине

---

где је  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{N+2}$  константа. Последња једнакост води до

$$f(\mathbf{v}, I) = I^\alpha \exp \left\{ c_0 + mc_1 v_1 + \cdots + c_N v_N + c_{N+1} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I \right) \right\}.$$

Овде бирамо да је

$$\begin{aligned} c_0 &= \ln \left( \frac{n}{Z(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{N}{2}} \right) - \frac{1}{2kT} |\mathbf{U}|^2 \\ c_i &= \frac{1}{kT} U_i, \quad 1 \leq i \leq N \\ c_{N+1} &= -\frac{1}{kT} \end{aligned}$$

па се лако види да се добија форма (5.12).

Остаје да се покаже  $(c) \Rightarrow (a)$ . Ова импликација следи из једнакости:

$$\begin{aligned} \left( \frac{f' f'_*}{(I' I'_*)^\alpha} - \frac{f f_*}{(I I_*)^\alpha} \right) &= \frac{n^2}{Z^2(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{N/2} e^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}' - \mathbf{U}|^2 + I' + \frac{m}{2} |\mathbf{v}'_* - \mathbf{U}|^2 + I'_* \right)} \\ &- \frac{n^2}{Z^2(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{N/2} e^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{U}|^2 + I + \frac{m}{2} |\mathbf{v}_* - \mathbf{U}|^2 + I_* \right)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

користећи аргумент (4.33) из доказа теореме 3. Из овога је и  $Q^{nw}(f, f) = 0$  па смо доказали еквивалентност.  $\square$

У простору без тежине физичка ентропија дефинише се као

$$h = -k \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f \log(f I^{-\alpha}) dI d\mathbf{v}. \quad (5.14)$$

Промена ове величине у времену је

$$\frac{dh}{dt} = -k D^{nw} \geq 0. \quad (5.15)$$

те је ентропија неопадајућа функција, што је тврђење другог закона термодинамике.

## 5.2 Макроскопске величине у простору без тежине

И у случају функционалног простора без тежине  $L^1$  макроскопске величине дефинишемо као моменте функције расподеле  $f$ . Слично као у поглављу 4.2

## 5.2 Макроскопске величине у простору без тежине

---

дефинишемо момент функције расподеле  $f$  у овом простору за избор тест функције  $\psi(\mathbf{v}, I)$  као

$$\mathcal{M}_{\psi(\mathbf{v}, I)} [f]_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}. \quad (5.16)$$

У наставку се дефинишу макроскопске величине у простору  $L^1$ . Бројну густину молекула гаса, у означи  $n$  дефинишемо као

$$n = \mathcal{M}_1 [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}.$$

Множењем ове величине са масом молекула  $m$  добијамо макроскопску густину  $\rho$ :

$$\rho = \mathcal{M}_m [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}.$$

Количину кретања гаса по јединици запремине  $\rho \mathbf{U}$ , где је  $\mathbf{U}$  макроскопска средња брзина свих молекула, добијамо са

$$\rho \mathbf{U} = \mathcal{M}_{m\mathbf{v}} [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} m \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}.$$

Густина енергије гаса (енергија гаса по јединици запремине) дата је са

$$\mathcal{M}_{\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I} [f]_{L^1} = \frac{m}{2} |\mathbf{U}|^2 + \rho e = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + I \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}.$$

Укупну енергију делимо на кинетичку која је једнака са  $\frac{m}{2} |\mathbf{U}|^2$  и унутрашњу (макроскопску) енергију означену  $\rho e$ :

$$\rho e = \mathcal{M}_{\frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2 + I} [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{C}|^2 + I \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) \varphi(I) dI d\mathbf{v},$$

где су  $\mathbf{C}, \mathbf{U}$  релативна брзина и средња макроскопска брзина повезане са

$$\mathbf{C} = \mathbf{v} - \mathbf{U}.$$

Унутрашњу макроскопску енергију делимо на део који потиче од транслаторних степени слободе  $\rho e_K$  и нетранслаторних  $\rho e_I$ :

$$\begin{aligned} \rho e_K &= \mathcal{M}_{\frac{m}{2}|\mathbf{C}|^2} [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{C}|^2 \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}, \\ \rho e_I &= \mathcal{M}_I [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} I f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

### 5.3 Макроскопски закони одржања

---

Даље дефинишемо флуксеве ових величина.

Проток густине количине кретања у правцу  $x_j$  добијамо са

$$P_{ij} := \mathcal{M}_{mv_i v_j} [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} mv_i v_j f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} = \rho U_i U_j + p_{ij},$$

где је  $p_{ij}$  тензор притиска дефинисан са

$$p_{ij} := \mathcal{M}_{mC_i C_j} [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} mC_i C_j f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}.$$

Даље дефинишемо проток густине енергије у правцу  $x_j$  као

$$\begin{aligned} Q_j &:= \mathcal{M}_{v_j \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + \right)} [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} v_j \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 + \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} \\ &= q_j + \sum_{i=1}^N U_i p_{i,j} + U_j \left( \rho \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} + \rho e \right). \end{aligned}$$

Овде је  $q_j$   $j$ -та компонента топлотног протока

$$q_j := \mathcal{M}_{C_j \left( \frac{m}{2} |\mathbf{C}|^2 + I \right)} [f]_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} C_j \left( \frac{m}{2} |\mathbf{C}|^2 + I \right) f d\mathbf{v} dI.$$

### 5.3 Макроскопски закони одржања

Полазећи од Болцманове једначине (5.1) у простору без тежине можемо доћи до Ојлерових једначина. Множењем Болцманове једначине (5.1) тест функцијом  $\psi(\mathbf{v}, I)$  и интеграцијом по  $\mathbf{v}$  и  $I$  у простору без тежине добијамо

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \mathbf{v} f \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} = \\ \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nw}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Уколико за избор тест функције бирамо колизионе инваријантне тада по теореми 6 десна страна претходне једнакости се анулира. Дакле, за прву колизиону инваријантну добијамо закон одржања масе

$$\partial_t \rho + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} (\rho U_j) = 0. \quad (5.17)$$

## 5.4 Уопштење Болцмановог оператора у простору без тежине

---

Даље за збор функције  $\psi(\mathbf{v}, I) = mv_i, i = 1, 2..N$  добијамо

$$\partial_t \rho U_i + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} (\rho U_i U_j + p_{ij}) = 0, \quad (5.18)$$

што је закон одржања количине кретања.

Финално ако за тест функцију бирамо величину  $\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I$  добијамо се закон одржања количине кретања дат са

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho |U|^2 + \rho e \right) + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} \left( q_j + \sum_{k=1}^N U_k p_{k,j} + U_j \left( \rho \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} + \rho e \right) \right) = 0, \quad (5.19)$$

где су макроскопске величине дефинисане као у поглављу 5.2.

Једначине (5.17)-(5.19) заједно чине Ојлеров систем једначина.

## 5.4 Уопштење Болцмановог оператора у простору без тежине

У досадашњем делу рада изложена су два модела у сваком од функционалних простора. Поставља се питање: да ли би се могле комбиновати досадашње идеје да добијемо опис неполитропског гаса у простору без тежине? У наредном моделу уместо функције  $I^\alpha$  у колизионом оператору (5.5) стављена је уопштена функција  $\varphi(I) \geq 0$  која доводи до коректног слагања са законима на макроскопском нивоу, задржавајући се на функцијама расподеле  $f$  у простору  $L_1$ . Дакле, дефинишемо колизиони оператор као

$$Q^{nwg}(f, f)(\mathbf{v}, I) = \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \left[ f' f'_* \left( \frac{\varphi(I)\varphi(I_*)}{\varphi(I')\varphi(I'_*)} \right) - f f'_* \right] \times \mathcal{B}^{nw} F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma}) (1-R) R^{\frac{N}{2}-1} d\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{v}_* dI_* dR dr, \quad (5.20)$$

где тражимо да  $\mathcal{B}^{nw}$  задовољава услове микрореверзилности

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{nw} := \mathcal{B}^{nw}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma}) &= \mathcal{B}^{nw}(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*, I', I'_*, R', r', \boldsymbol{\sigma}') \\ &= \mathcal{B}^{nw}(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}, I_*, I, R, 1-r, -\boldsymbol{\sigma}), \end{aligned} \quad (5.21)$$

а преколизионе величине су дефинисане са (2.10)-(2.14). Уводимо нову функцију  $F$  која зависи од величина  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})$  такву да

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma}) \varphi(I) \varphi(I_*) \quad (5.22)$$

буде инваријантно у односу на трансформације (2.16) и (2.17) о чему говоре услови (2.19) и (2.20). Као што се може и наслутити члан  $F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})$ , заједно са  $(1-R)R^{\frac{N}{2}-1}$  има улогу у обезбеђивању инваријантности мере о чему говори лема 3.

### 5.4.1 Слаба форма колизионог оператора $Q^{nwg}$

Као и раније за даљи рад са овим моделом биће нам неопходна слаба форма оператора  $Q^{nwg}$ .

**Теорема 8.** *Нека је  $\psi(\mathbf{v}, I) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  тако да*

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nwg}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v}$$

има смисла. Тада важи да је

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nwg}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{\varphi(I') \varphi(I'_*)} - \frac{f f_*}{\varphi(I) \varphi(I_*)} \right) \\ & \quad \times [\psi(\mathbf{v}', I') + \psi(\mathbf{v}'_*, I'_*) - \psi(\mathbf{v}, I) - \psi(\mathbf{v}_*, I_*)] \mathcal{B}^{nw} dW. \end{aligned} \quad (5.23)$$

зде је мера  $dW$  дефинисана у (2.21).

*Доказ.* Запишимо слабу форму оператора  $Q^{nwg}$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nwg}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{\varphi(I') \varphi(I'_*)} - \frac{f f_*}{\varphi(I) \varphi(I_*)} \right) \psi(\mathbf{v}, I) dW. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Затим, користећи инваријантност мере  $\mathcal{B}^{nw} dW$  према (2.16) следи да је

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nwg}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{\varphi(I') \varphi(I'_*)} - \frac{f f_*}{\varphi(I) \varphi(I_*)} \right) \psi(\mathbf{v}', I') \mathcal{B}^{nw} dW. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Заменом промењивих (2.17) у једнакости (5.24) следи

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nwg}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{\varphi(I') \varphi(I'_*)} - \frac{f f_*}{\varphi(I) \varphi(I_*)} \right) \psi(\mathbf{v}_*, I_*) \mathcal{B}^{nw} dW, \end{aligned} \quad (5.26)$$

## 5.4 Уопштење Болцмановог оператора у простору без тежине

---

а затим применом пресликавања (2.16) на (5.26) добија се

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nwg}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{2N} \times (\mathbb{R}_+)^2 \times [0,1]^2 \times S^{N-1}} \left( \frac{f' f'_*}{\varphi(I') \varphi(I'_*)} - \frac{f f_*}{\varphi(I) \varphi(I_*)} \right) \psi(\mathbf{v}'_*, I'_*) \mathcal{B}^{nw} dW. \quad (5.27) \end{aligned}$$

Сада сабирањем једнакости (5.24)-(5.27) добија се тражено.  $\square$

Даље следи добро позната дефиниција колизионих инваријанти за овај модел.

**Теорема 9.** *Функцију  $\psi(\mathbf{v}, I)$  називамо колизионна инваријанта уколико важи*

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nwg}(f, f) \psi(\mathbf{v}, I) dI d\mathbf{v} = 0$$

и она је линеарна комбинација следећих  $N + 2$  променљивих

$$\psi(\mathbf{v}, I) = \begin{pmatrix} 1 \\ m\mathbf{v} \\ \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 + I \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

### 5.4.2 X-Теорема

За колизиони оператор  $Q^{nwg}$  дефинишемо продукције ентропије  $D^{nwg}$  са

$$D^{nwg}(f) = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} Q^{nwg}(f, f) \log \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I)}{\varphi(I)} dI d\mathbf{v}. \quad (5.29)$$

**Теорема 10** (X-Теорема). *Нека је колизиони пресек  $\mathcal{B}^{nw}$  позитиван скоро свуда,  $f \geq 0$  и нека је продукција ентропије  $D^{nwg}(f)$  добро дефинисана. Тада*

1. *Продукција ентропије је непозитивна*

$$D^{nwg} \leq 0.$$

2. *Следећи услови су еквивалентни*

- (a)  $Q^{nwg}(f, f)(\mathbf{v}, I) = 0$  за све  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, I \in \mathbb{R}_+$ ,
- (b)  $D^{nwg}(f) = 0$ ,

## 5.4 Уопштење Болцмановог оператора у простору без тежине

---

(в) Постоји  $n > 0, T > 0$   $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$  тако да

$$f(\mathbf{v}, I) = \frac{n}{A(T)} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{N}{2}} \varphi(I) e^{-\frac{1}{kT} \left( \frac{m}{2} |\mathbf{v} - \mathbf{U}|^2 + I \right)}, \quad (5.30)$$

где је

$$A(T) = \int_0^\infty \exp \left( -\frac{I}{kT} \right) \varphi(I) dI.$$

*Доказ.* Пратећи идеју доказа теореме 7 уопштавањем  $I^\alpha$  у  $\varphi(I)$  долазимо до траженог.  $\square$

## 6 Поређење модела

У досадашњем излагању могло се наслутити да сва три модела имају доста сличности. Наиме, сва три модела дају коректне резултате у погледу моделирања политропских гасова, док је модел у простору са тежином креиран да буде сагласан са калоријском једначином и за случај неполитропских гасова, али проблем проналаска тежинске функције која би то постигла остаје и даље актуелан. Са друге стране, за модел без тежине додатним претпоставкама на функцију колизионог пресека може се доказати егзистенција и јединственост Кошијевог проблема за просторно хомогену Болцманову једначину [11].

Дакле, модели у простору са тежином као и у простору без тежине имају својих предности па ће циљ овог поглавља бити да се већ изложени модели упореде и уоче разлике и везе међу њима, што је недавно учињено у [10].

Полазећи од модела без тежине можемо доћи до модела са тежином за избор тежинске функције  $\varphi(I) = I^\alpha$ . Дакле, посматрајмо модел без тежине а за који Болцманова једначина (5.1) има облик,

$$\begin{aligned} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f &= \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \left[ \frac{f' f'_*}{I'^\alpha I_*'^\alpha} - \frac{f f_*}{I^\alpha I_*^\alpha} \right] I^\alpha I_*'^\alpha \\ &\quad \times \mathcal{B}^{nw}(1-R) R^{\frac{N}{2}-1} \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R) d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где су функције  $\eta_\alpha(r)$  и  $\psi_\alpha(R)$  дефинисане са (5.3). Узимамо смену

$$g(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) = \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I)}{I^\alpha}, \quad (6.2)$$

која Болцманову једначину (6.1) своди на

$$\begin{aligned} I^\alpha (\partial_t g + \mathbf{v} \cdot \nabla_x g) &= I^\alpha \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} [g' g'_* - g g_*] \\ &\quad \times \mathcal{B}^{nw}(1-R) R^{\frac{N}{2}-1} \frac{I^\alpha}{I_*^\alpha} I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R) d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr. \end{aligned}$$

Претходна једначина је еквивалентна са

$$\begin{aligned} \partial_t g + \mathbf{v} \cdot \nabla_x g &= \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} [g' g'_* - g g_*] \\ &\quad \times \mathcal{B}^{nw}(1-R) R^{\frac{N}{2}-1} I^\alpha I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R) \frac{1}{I^\alpha} d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr, \end{aligned} \quad (6.3)$$

---

па упоређујући са Болцмановом једначином (4.1) за простор са тежином где је  $\varphi(I) = I^\alpha$

$$\begin{aligned} \partial_t g + \mathbf{v} \cdot \nabla_x g &= \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} (g' g'_* - gg_*) \\ &\quad \times \mathcal{B}^w (1-R) R^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{\varphi(I)} d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr, \end{aligned} \quad (6.4)$$

појављује се додатни део

$$I^\alpha I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R) = I^\alpha I_*^\alpha (r(1-r))^\alpha (1-R)^{2\alpha}. \quad (6.5)$$

На основу леме 4, степеновањем израза (2.22) на степен  $\alpha$  следи да је додатни члан (6.5) инваријантан у односу на колизионе трансформације (2.16) и (2.17). Подсетимо се да смо колизиони пресек модела са тежином означавали са  $\mathcal{B}^w$  а без тежине са  $\mathcal{B}^{nw}$ . Због своје инваријантности члан  $I^\alpha I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R)$  се може сматрати делом колизионог пресека. Дакле добијамо везу између  $\mathcal{B}^w$  и  $\mathcal{B}^{nw}$

$$\mathcal{B}^w = \mathcal{B}^{nw} I^\alpha I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R), \quad (6.6)$$

тако да се из модела без тежине може прећи у модел са тежином једноставно преформулацијом колизионог пресека према (6.6) и нормализацијом функције расподеле  $g$  са (6.2).

У супротном смеру, полазећи од модела са тежином и Болцманове једначине (4.1) у оваквом простору

$$\begin{aligned} \partial_t g + \mathbf{v} \cdot \nabla_x g &= \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} (g' g'_* - gg_*) \\ &\quad \times \mathcal{B}^w (1-R) R^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{\varphi(I)} d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr, \end{aligned} \quad (6.7)$$

са избором  $\varphi(I) = I^\alpha$  и сменом

$$g(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) = \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I)}{I^\alpha} \quad (6.8)$$

долазимо до једначине у простору без тежине. Дакле следи да је

$$\begin{aligned} \frac{1}{I^\alpha} (\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f) &= \frac{1}{I^\alpha} \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \left[ \frac{f' f'_*}{I'^\alpha I_*'^\alpha} - \frac{ff_*}{I^\alpha I_*^\alpha} \right] \\ &\quad \times \mathcal{B}^w \frac{I^\alpha I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R)}{I^\alpha I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R)} (1-R) R^{\frac{N}{2}-1} d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr. \end{aligned} \quad (6.9)$$

## 6.1 Поређење модела за општи избор тежинске функције

---

У овом случају за додатни члан

$$\frac{1}{I^\alpha I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R)},$$

важи инваријантност због инваријантности (6.5), те следи

$$\mathcal{B}^{nw} = \frac{\mathcal{B}^w}{I^\alpha I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R)}. \quad (6.10)$$

**Теорема 11.** *Нека је функција расподеле  $f$  у простору без тежине  $L^1$  са Болцмановом једначином (6.1) и  $g$  функција расподеле у простору са тежином  $L_\varphi^1$  са Болцмановом једначином (6.7). За избор тежинске функције  $\varphi(I) = I^\alpha$  модели Болцманове једначине у простору са тежином (6.7) и простору без тежине (6.1) су еквивалентни ако важи веза између функција расподела два модела (6.8) и*

$$\mathcal{B}^w = \mathcal{B}^{nw} I^\alpha I_*^\alpha \eta_\alpha(r) \psi_\alpha(R).$$

Дакле, претходна теорема нам говори да за прелазак модела без у модел са тежином и обрнуто није доволно само нормализовати функцију расподеле већ је и потребно преформулисати колизиони пресек.

За избор  $\varphi(I) = I^\alpha$  модел у простору са тежином има сингуларитет у тачки  $I = 0$  док у случају модела у простору без тежине то није случај. Разлог овога лежи у чињеници да модели не деле исте колизионе пресеке. Наиме, по формули (6.10) је колизиони пресек модела са тежином помножен је са чланом који отклања сингуларитет.

### 6.1 Поређење модела за општи избор тежинске функције

Сада испитујемо однос модела са тежином и уопштења модела без тежине. Полазимо од Болцманове једначине за простор са тежином  $\varphi(I)$

$$\begin{aligned} \partial_t g + \mathbf{v} \cdot \nabla_x g &= \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} (g' g'_* - gg_*) \\ &\quad \times \mathcal{B}^w (1-R) R^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{\varphi(I)} d\sigma d\mathbf{v}_* dI_* dR dr. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Сменом

$$g(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I) = \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, I)}{\varphi(I)}$$

## 6.1 Поређење модела за општи избор тежинске функције

---

добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(I)} (\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f) &= \frac{1}{\varphi(I)} \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \left[ f' f'_* \left( \frac{\varphi(I)\varphi(I_*)}{\varphi(I')\varphi(I'_*)} \right) - f f_* \right] \\ &\quad \times \mathcal{B}^w (1-R) R^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{\varphi(I)\varphi(I_*)} d\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{v}_* dI_* dR dr. \end{aligned}$$

Множењем и дељењем подинтегралне функције са функцијом  $F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})$

$$\begin{aligned} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f &= \int_{[0,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \left[ f' f'_* \left( \frac{\varphi(I)\varphi(I_*)}{\varphi(I')\varphi(I'_*)} \right) - f f_* \right] \\ &\quad \times \frac{\mathcal{B}^w}{F\varphi(I)\varphi(I_*)} F \cdot (1-R) R^{\frac{N}{2}-1} d\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{v}_* dI_* dR dr. \quad (6.12) \end{aligned}$$

Како се од функције  $F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})$  захтева инваријантност према (2.16) и (2.17) закључујемо да се члан

$$\frac{1}{F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})\varphi(I)\varphi(I_*)},$$

може сматрати делом колизионог пресека  $\mathcal{B}^{nw}$ . Прецизније, следи да је

$$\mathcal{B}^{nw} = \frac{\mathcal{B}^w}{F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})\varphi(I)\varphi(I_*)}, \quad (6.13)$$

те формулишемо следеће тврђење.

**Теорема 12.** *Модели Болцманове једначине у простору са тежином (6.7) и уопштени модел у простору без тежине (6.12) су еквивалентни ако важи*

$$\mathcal{B}^w = \mathcal{B}^{nw} F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, I, I_*, R, r, \boldsymbol{\sigma})\varphi(I)\varphi(I_*), \quad g = \frac{f}{\varphi(I)}.$$

Приметимо да је за избор тежинске функције  $\varphi(I) = I^\alpha$  и избором  $F = \eta_\alpha(r)\psi_\alpha(R)$  добијамо једнакост (6.10).

Модел са тежином, описан у поглављу 4, се користи као основа за извођење макроскопских закона проширене термодинамике. Као последица теореме 11 овај модел са тежином се доводи у везу са моделом без тежине, те уколико се функција расподеле нормализује а колизиони пресеци доведу у везу релацијом (6.10) уклања се сингуларност колизионог оператора што омогућава стриктну математичку анализу. Ова веза мотивише повезивање модела у простору без тежине, који је дат у поглављу 5 са моделима проширене термодинамике што је недавно учињено у [10].

## **6.1 Поређење модела за општи избор тежинске функције**

---

За модел без тежине датог са Болцмановом једначином за (5.1), избор колизионог пресека модела 3 из [11], добија се потпуно слагање са теоријом проширене термодинамике у случају једначина шест момената као и слагање са експерименталним подацима кинематског вискозитета и теоријском временошћу Прандтловог броја у случају четрнаест момената [10].

Такође, избор оваквог колизионог пресека из [11] обезбеђује егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема за просторно хомогену Болцманову једначину.

## 7 Закључак

Кинетичка теорија гасова као део статистичке физике захтева разнолик математички апарат. Ова грана науке повезује не само математику и физику већ и области инжењерства и социологије. Највећу примену ипак налази у области моделирања термодинамичких процеса који су изразито неравнотежни, као што су рецимо улазак свемирског брода у атмосферу или код микро или нано уређаја.

У овом раду разматрали смо кинетичке моделе вишеватомских гасова. Како за вишеватомске гасове не постоји јединствен модел у раду је изложена анализа постојећих модела из литературе, притом се задржавајући на моделима непрекидног типа. У раду су изложена три модела. Као што смо видели сва три модела репродукују коректно понашање макроскопских величина као и законе одржања који важе на макроскопском нивоу.

Сваки од ових модела има своје предности као што су на пример веза са једначинама момената проширене термодинамике у случају модела са тежином или новије резултате у погледу егзистенције и јединствености решења почетног проблема за модел без тежине у просторно хомогеном случају. Поређење ових модела и њихова условна еквивалентност доводи до тога да се њихове предности могу комбиновати што би могло довести до креирања јединственог модела који би се користио, као и његово проширивање на мешавине вишеватомских гасова који су далеко комплекснији. Такође услови егзистенције и јединствености решења почетног проблема у случају просторне хомогености за случај мешавина вишеватомских гасова остају непознаница.

Сва ова отворена питања остављају доста простора за рад, а судећи по досадашњим резултатима ова област математике је у замаху.

## Литература

- [1] Baranger C., Bisi M., Brull S., Desvillettes L., On the Chapman-Enskog asymptotics for a mixture of monoatomic and polyatomic rarefied gases, *Kinet. Relat. Models*, **11**(4): 821 -858, 2018.
- [2] Bisi M., Ruggeri T., Spiga G., Dynamical pressure in a polyatomic gas: interplay between kinetic theory and extended thermodynamics, *Kinetic & Related Models*, **11**(1), 2017.
- [3] Borgnakke C., Larsen P.S., Statistical collision model for Monte Carlo simulation of polyatomic gas mixture, *Journal of computational Physics*, **18**(4): 405-420, 1975.
- [4] Bourgat J.F., Desvillettes L., Le Tallec, P., Perthame B., Microreversible collisions for polyatomic gases and Boltzmann's theorem, *European journal of mechanics. B, Fluids*, **13**(2): 237-254, 1994.
- [5] Cercignani C., *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, Plenum Press, New York, 1969.
- [6] Cercignani C., *The Boltzmann equation and its applications*, Springer, 1988.
- [7] Cercignani C., *Ludwig Boltzmann: the man who trusted atoms*, Oxford University Press, 1998.
- [8] Desvillettes L., Sur un modèle de type Borgnakke-Larsen conduisant à des lois d'énergie non linéaires en température pour les gaz parfaits polyatomiques, *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, **6**(2): 257-262, 1997.
- [9] Desvillettes L., Monaco R., Salvarani F., A kinetic model allowing to obtain the energy law of polytropic gases in the presence of chemical reactions, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, **24**(2): 219-236, 2005.
- [10] Đordić V., Pavić-Čolić M., Spasojević N., Kinetic and Macroscopic Modelling of a Rarefied Polyatomic Gas, ArXiv:2004.12225, 2020.
- [11] Gamba I. M., Pavić-Čolić M., On the Cauchy problem for Boltzmann equation modelling a polyatomic gas, arXiv:2005.01017
- [12] Kremer G. M, *An introduction to the Boltzmann equation and transport processes in gases*, Springer Science & Business Media, 2010.

## ЛИТЕРАТУРА

---

- [13] Pavić M., Ruggeri T., Simić S., Maximum entropy principle for rarefied polyatomic gases, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **392**(6): 1302-1317, 2013.

## Биографија



Владимир Ђорђић рођен је 7.11.1996. године у Љубовији. Основну школу "Петар Враголић" у Узовници завршава 2011. након чега уписује гимназију "Вук Караджић" у Љубовији. Основне студије Примењене математике- модул Техноматематика на Природно-математичком факултету у Новом Саду уписује 2015. године које завршава 2018. са просеком 9,35. Исте године уписује мастер студије Примењене математике на истом факултету где полаже све испите са модула Техноматематика, закључно са јунским роком 2020. са просеком 10,00. Учествовао је на " 33rd ECMI Mathematical Modelling Week " у Дамштарту на пројекту "Optical excitation of metallic nanoparticles by light" 2019. године.

Две године је био стипендиста Фонда за стипендирање даровитих студената и младих научних радника и уметника Универзитета у Новом Саду као и штићеник фондације "Привредник". Коаутор је једног научног рада.

Нови Сад, јул 2020. године

Владимир Ђорђић

**УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА**

**Редни број:  
РБР**

**Идентификациони број:  
ИБР**

**Тип документације:** монографска документација  
**БФ**

**Тип записа:** текстуални штампани материјал  
**ТЗ**

**Врста рада:** Мастер рад  
**ВР**

**Аутор:** Владимира Ђорђић  
**АУ**

**Ментор:** др Милана Чолић  
**МН**

**Наслов** рада: Кинетички модели непрекидног типа за вишесистемске гасове  
**НР**

**Језик публикације:** српски  
**ЈП**

**Језик извода:** српски/енглески  
**ЈИ**

**Земља публиковања:** Република Србија  
**ЗП**

**Уже географско подручје:** Војводина  
**УГП**

**Година:** 2020.  
**ГО**

**Издавач:** ауторски репримт  
**ИЗ**

**Место и адреса:** Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 4  
**МА**

**Физички опис рада:** 7/68/13/1/2/0/  
(број поглавља/број страна /лит. цитата/табела/слика/графикона/прилога)

**ФО**

**Научна област:** математика  
**НО**

**Научна дисциплина:** примењена математика  
**НД**

**Предметна одредница/Кључне речи:** Вишетомски гасови, Болцманова једначина, кинетички модел

**ПО**

**УДК:**

**Чува се:** у библиотеци Департмана за математику и информатику, Природно-математичког факултета, у Новом Саду

**ЧУ**

**Важна напомена:**

**ВН**

**Извод:** У овом мастер раду разматрамо кинетичке моделе вишетомских гасова непрекидног типа. Идеја кинетичке теорије је да све додатне појаве које се јављају у случају вишетомских гасова објасни увођењем додатног непрекидног параметра - микроскопске унутрашње енергије поред уобичајених промењивих у случају једнотомских гасова, времена, положаја у физичком простору и брзине молекула. Како у литератури не постоји јединствен модел у раду су изложена три модела: модел у простору са тежином [8], модел у простору без тежине [4] а његовим уопштавањем добија се трећи модел. За сваки од ова три модела изложена је X - теорема као и веза са проширеном термодинамиком. У овом раду описана три модела се пореде. Показујемо да уколико се функција расподеле нормализује и колизиони пресек преформулише модел у простору са тежином и модел у простору без тежине у политропском и неполитропском случају су еквивалентни.

**ИЗ**

**Датум прихватања теме од стране НН већа:** 19. мај 2020.

**ДП**

**Датум одбране:**

**ДО**

**Чланови комисије:**

**КО**

Председник: проф. др Србољуб Симић, редовни професор, Природно-математички факултет, Нови Сад

Члан: проф. др Марко Недељков, редовни професор, Природно-математички факултет, Нови Сад

Члан: др Милана Чолић, доцент, Природно-математички факултет, Нови Сад

**UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCES  
KEY WORD DOCUMENTATION**

**Accession number:**

**ANO**

**Identification number:**

**INO**

**Document type:** monograph type

**DT**

**Type of record:** printed text

**TR**

**Contents code:** Master thesis

**CC**

**Author:** Vladimir Đordić

**AU**

**Mentor:** Milana Čolić, PhD

**MN**

**Title:** Kinetic models of continuous type for polyatomic gases

**TI**

**Language of text:** Serbian

**LT**

**Language of abstract:** Serbian/English

**LA**

**Country of publication:** Republic of Serbia

**CP**

**Locality of publication:** Vojvodina

**LP**

**Publication year:** 2020.

**PY**

**Publisher:** author's reprint

**PU**

**Publ. place:** Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

**PP**

**Physical description:** 7/68/13/1/2/0/0

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

**PD**

**Scientific field:** mathematics

**SF**

**Scientific discipline:** Applied mathematics

**SD**

**Subject / Key words:** Poliatomic gases, Boltzmann equation, kinetic models

**SKW**

**UC:**

**Holding data:** Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad

**HD**

**Note:**

**N**

**Abstract:** In this master thesis, we consider kinetic models of polyatomic gases of continuous type. The idea of kinetic theory is to explain all the additional phenomena related to polyatomic gases by introducing an additional continuous parameter - microscopic internal energy besides usual variables in the case of monoatomic gases, time, position in physical space and molecular velocity. As there is no unique model in the literature, we present three models in thesis: a model in space with weight [8], a model in space without weight [4] and its generalization gives a third model. For each of these three models H - theorem is presented as well as connection with extended thermodynamic. In this manuscript, we compare these three models. We show the equivalence between weighted and non-weighted models in the polytropic and nonpolytropic case, after renormalization of the distribution function and reformulation of the cross-section.

**AB**

**Accepted by the Scientific Board on:** May 19, 2020

**ASB**

**Defended:**

**DE**

**Thesis defend board:**

**DB**

President: Prof. Srboljub Simić, PhD, full professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Prof. Marko Nedeljkov, PhD, full professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Milana Čolić, PhD, assistant professor, Faculty of Science, Novi Sad