Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno Matematički Fakultet
Departman za Matematiku i Informatiku

Master Rad

Košijev problem za prostorno homogenu Bolcmanovu jednačinu

Student:
Nikola Spasojević

Mentor:
Dr Milana Čolić

5. avgust 2020.

Zahvalnica

The greatest reward for a student is not a good grade. It is willingness of his teacher to listen to him.
Nikolaj Konstantinov, ruski matematičar

Čudesno putovanje koje se naziva studijama, meni će ostati u pamćenju zbog prijatelja, koje sam upoznao tokom studija, i profesora kako s Departmana za Matematiku i Informatiku, tako i Departamana za Fiziku. Ovim putem želim da se zahvalim profesorima koji su najviše uticali na mene tokom mojih studija. Zahvalan sam

> Dr Ivani Vojnović, na prelijepim predavanjim iz Numeričkih metoda za PDJ i Naprednih poglavlja funkcionalne analize i na tome što ste mi pokazali koliko je moćan aparat funkcionalne analize;
>
> Prof. Dušanu Zorici, na svom prenesenom znanju i zanimljivim diskusijama;
>
> Prof. Srboljubu Simiću, na predivnim predavanjima iz Klasične mehanike i Mehanike neprekidnih sredina i na tome što ste mi pokazali koliko možemo biti matematički rigorozni u opisivanju fizičkih fenomena. Takođe zahvalan sam na svim sugestijama i savjetima vezanim za master rad;
>
> Prof. Marku Nedeljkovu, na najzanimljvijim predavanjima i na izrazito važnoj životnoj lekicji, da se moramo igrati i jedino tako možemo naučiti i otrkiti nešto novo. Kao članu komisije, zahvalan sam na svim savjetima i podršci tokom izrade master rada.
>
> Na kraju, najviše sam zahvalan Dr Milani Čolić, na energiji, strpljenju, neizmjernoj podršci tokom cijelih studija, svim savjetima, bezbrojnim satima diskusije i mogućnosti da surađujemo. Zahvalan sam na tome što ste mi dali najveći poklon koji student može dobiti od profesora.

Zahvalnost dugujem svojim najbližim, majci Ognjenki, bratu Stefanu i baki Bosiljki, na neizmjernoj ljubavi, razumjevanju i podržci tokom svih ovih godina. Takođe, zahvalan sam svojim prijateljima Marku, Mariji, Živani, Neli i Sandri, što su moje studiranja učinili magičnim. Uvijek uz mene i za mene, oni su ti koji svaki moj uspeh čine kompletnim. Hvala vam svima!

Novi Sad, jul 2020. godine Nikola Spasojević

Sadržaj

Predgovor

Nema jednakosti, čak ni u ljudskom životu.
Postoje samo nejednakosti!
Dragoslav Mitrinović, srpski matematičar

Ludvig Bolcman je sigurno jedna od najzanimljivih ličnosti matematike i fizike 19. vijeka. Otac kinetičke teorije gasova, koji je izrazito vjerovao u postojanje nevidljivih (tad nedjeljivih) čestica, je svojom teorijom promjenio kako gledamo na svijet i razvio oblast koja se i dan danas izučava. Njegov doprinos se ne može sažeti u par rečenica, zaintersovani čitalac o njegovom radu i djelu može procitati u [11]. Prvi je dao formulaciju jednačine koja opisuje kretanje mnogobrojnog sistema čestica (atoma) i koja se njemu u čast naziva Bolcmanova jednačina.

U ovom radu pokazaćemo egzistenciju i jedinstvenost rješenja Košijevog problema za prostorno homogenu Bolcmanovu jednačinu. Prvo ćemo predstaviti okvire teorije u kontekstu jednoatomskih gasova, a zatim ćemo uopštiti u smislu mješavina jednoatomskih gasova, te na kraju dati pregled dokaza za višeatomske gasove.

U glavi 1 iznijećemo osnovne osobine kinetičke teorije za jednoatomske gasove i neke od najznačajnih rezultata. Posle toga, u glavi 2, uvodimo funkcionalne prostore koji su prirodni za dati problem i u kojim dokazujemo fundamentalne leme, kao što su Energijski identitet i Povznerova lema. A zatim ćemo dati donje i gornje ograničenje za kolizioni presjek i a priori ocjene na polinomne momente funkcije raspodjele. U glavi 3, na osnovu teorije o egzistenciji i jedinstvenosti običnih diferencijalnih jednačina u Banahovim prostorima, predstavićemo dovoljne uslove za rješenje Košijevog problema prostorno homogene Bolcmanove jednačine. Zatim u glavi 4, predstavićemo osnovne osobine za mješavinu jednoatomskih gasova i u odnosu na već izloženu teoriju, uspostavićemo egzistenciju i jedinstvenost sistema prostorno homogenih Bolcmanovih jednačina. Glava 5 počeće osnovnom teorijom za višeatomske gasove, prvenstveno kako se modeluju sudari i koja je razlika u odnosu na jednoatomske gasove. Na kraju ćemo predstaviti tri modela za kolizioni presjek za koji je moguće rješiti Košijev problem.

Glava 1

Prostorno homogena Bolcmanova jednačina

1.1 Funkcija raspodjele i Bolcmanova jednačina

U kinetičkoj teoriji gasova osnovna nepoznata je funkcija raspodjele $f = f(t, x, v)$ koja u opštem slučaju zavisi od vremena, položaja i brzine čestice. U slučaju jednoatomskih gasova, fizička intepretacija funkcije raspodjele se ogleda u tome da je broj čestica u elementarnoj zapremini $\mathrm{d}x$ sa brzinom iz intervala $[v, v + \mathrm{d}v]$ u trenutku t jednaka $f(t, x, v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$. Jedan od fundamentalnih zadataka kinetičke teorije predstavlja izvođenje jednačine za evoluciju funkcije raspodjele u vremenu. Odgovor na ovo pitanje dat je Bolcmanovom jednačinom, koju ćemo uskoro predstaviti. Najprijem , posmatrajmo specijalan slučaj slobodnog kretanja čestice. Slobodno kretanje čestice po njenim trajektorijama podrazumjeva odustvo sudara s drugim česticama što ima za posljedicu konstantnost funkcije raspodjele duž trajektorije čestice, odnosno f zadovoljava

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f = 0.$$

Kako u klasičnoj mehanici položaj i brzina zavise od vremena, $x = x(t)$ i $v = v(t)$, prethodna jednačina predstavlja totalni diferencijal koji je jednak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f = \partial_t f + \nabla_x f \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \nabla_v f \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{1.1}$$

pri čemu ∇_x je gradijent po prostornim koordinatama, dok ∇_v je gradijent po prostoru brzina. Na osnovu drugog Njutnovog zakona, pod pretpostavkom da je sistem izlovan, tj. suma svih spoljašnjih sila F_{ext} jednaka je nuli, važi

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a = \frac{F_{ext}}{m} = 0. \tag{1.2}$$

Na osnovu definicije brzine, $v := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, i izraza za ubrzanje (1.2), relacija (1.1) postaje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f = \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0,$$

koja predstavlja transportnu jednačinu funkcije raspodjele.

Sa druge stranem, kako bi preciznije opisali dinamiku gasa potrebno je uzeti u obzir i interakciju između čestica. Koliziona kinetička teorija pretpostavlja da su sudari jedina interakcija među česticama, druge interakcije kao što su gravitacione ili elektromagnetne se zanemaruju, tj. njihov intenzitet je nekoliko redova veličine manji od same interakcije koja se dešava tokom sudara tako da je njihovo zanemarivanje opravdano. Na primjer, u slučaju plazme (jonizovanog gasa) ovakva pretpostavka nije opravdana jer su izrazito značajni efekti koji nastaju djelovanjem elektromagnetne interakcije, i u tom slučaju evolucija funkcije raspodjele se opisuje Landauovom jednačinom. Vratimo se na klasične gasove, dakle, kao posljedica sudara mjenjaju se njihove brzine, a samim tim i funkcija raspodjele se mijenja, i u tom slučaju njena evolucija je opisana Bolcmanovom jednačinom koja je data sa

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f)(v). \tag{1.3}$$

Član $Q(f, f)$ u jednačini (1.3) se naziva kolizioni operator ili kolizioni integral (zbog njegove integralne strukture). Kolizioni operator opisuje promjenu funkcije raspodjele usljed dinamike sudara. Tako, na primjer, ako je brzina čestice prije sudara v', njena funkcija raspodjele je data sa $f(v')$. Sa druge strane, posle sudara neka ta ista čestica ima brzinu v njena funkcija raspodjele će biti $f(v)$ tako da je došlo do promjene funkcije raspodjele (njena vrijednost se povećala ili smanjila). Zbog toga kolizioni operator se pod određenim pretpostavkama može razdvojiti na dva dijela

$$Q(f, f) = Q^+(f, f) - Q^-(f, f). \tag{1.4}$$

Član Q^+ se naziva apsorpcioni (*eng. Gain*) i on opisuje rast funkcije raspodjele, dok je Q^- emisioni član (*eng. Loss*) koji opisuje smanjenje funkcije raspodjele. Uskoro ćemo vidjeti da kolizioni operator dijeluje samo na brzinu čestice, dok su vrijeme i položaj smatraju parametrima. Zbog toga u slučaju prostorne homogenosti, tj. kada je $f = f(t, v)$ slijediće da je $\nabla_x f = 0$ te Bolcmanova jednačaina će glasiti

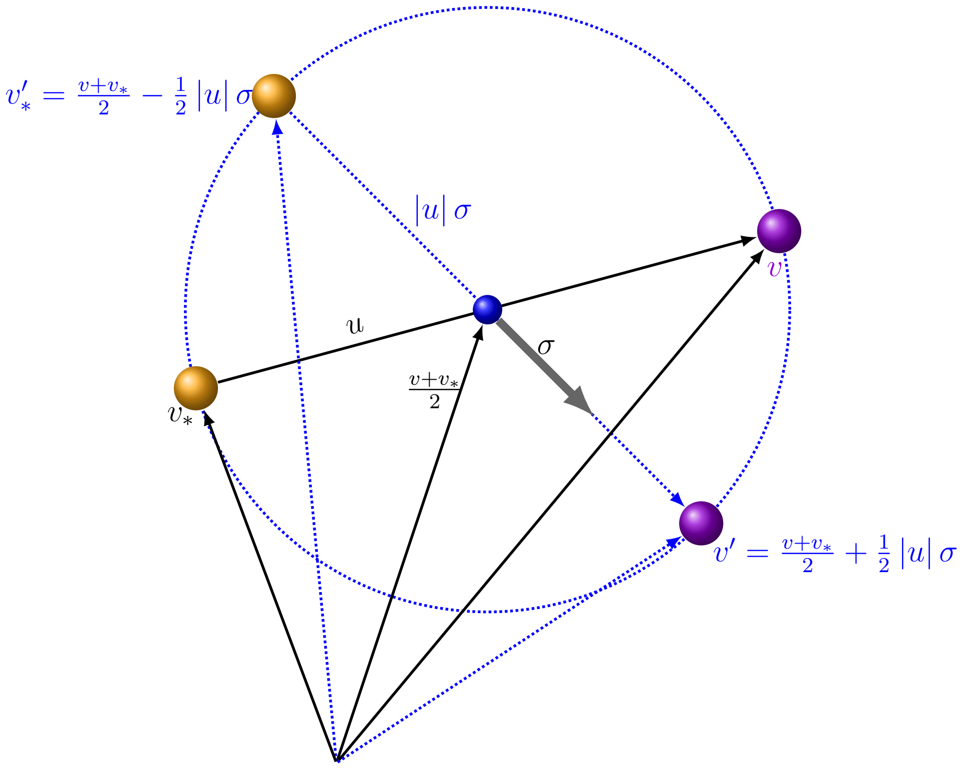
$$\partial_t f(t, v) = Q(f, f)(v). \tag{1.5}$$

Napomena 1. U narednim glavama pod Bolcmanovom jednačinom smatraćemo prostorno homogenu Bolcmanovu jednačinu datu sa (1.5).

1.2 Elastični sudari i struktura kolizionog operatora

Kako kolizioni operator opisuje promjenu funkcije raspodjele usljed sudara, te da bismo dobili njegovu strukturu potrebno je posmatrati sudare između čestica (u ovom slučaju atoma) i pri čemu mi ćemo se ograničiti na elastične sudare.

Pod elastičnim sudarom dvije čestice smatra se interakcija tih čestica pri kojoj važe zakoni odražanja količine kretanja i energije. U slučaju neelastičnih sudara konzervirana je samo količina kretanja. Neka su $(v', v'_*) \in \mathbb{R}^{2d}$ brzine čestica prije sudara, često nazivane pre-kolizione brzine, pri čemu d predstavlja njihovu dimenziju prostora, a $(v, v_*) \in \mathbb{R}^{2d}$ brzine čestica posle sudara , odnosno post-kolizione brzine kao što je prikazano na slici 1.1.



Slika 1.1: Ilustracija kolizionih transformacija pri elastičnim sudarima.

Tada su njihovu zakoni održanja dati sa

$$v + v_* = v' + v'_*, \tag{1.6}$$

$$|v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2, \tag{1.7}$$

pri čemu (1.6) predstavlja zakon održanja količine kretanja, a (1.7) zakon održanja kinetičke energije tokom sudara. U klasičnoj mehanici, problemi sudara čestica se rješavaju u sistemu centra mase, te je tako prirodno da pređemo u ovaj sistem, uvodeći nove promjenljive V i u koje su date sa

$$V = \frac{v + v_*}{2}, \qquad u = v - v_*. \tag{1.8}$$

Brzina V predstavlja brzinu centra mase, dok je u relativna brzina između čestica posle sudara. Uvođenjem novih promjenjivih sistem jednačina (1.6) i (1.7) se transformiše u

$$V = V', \qquad |u| = |u'| \, . \tag{1.9}$$

Poslednji sistem jednačina znači da se brzina centra mase ne mijenja posle sudara a intenzitet relativne brzine ostaje isti. Sistem jednčina (1.6) i (1.7) ima $d+1$ jednačina dok su nam nepoznate $2d$ parametara, zbog toga uvodimo $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$, gdje je $\mathbb{S}^{d-1}$ jedinična sfera u $\mathbb{R}^d$, tako da važi

$$u' = |u| \, \sigma. \tag{1.10}$$

Konačno, na osnovu (1.9) i (1.10), možemo zapisati pre-kolizione brzine pomoću post-kolizionih i paramatra σ, odnosno

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{1}{2}|v - v_*|\sigma, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{1}{2}|v - v_*|\sigma. \tag{1.11}$$

Pored pisivanja procesa sudara, da bismo opisali kolizioni operator neophodno je da uvedemo osnovne pretpostavke kolizione kinetičke teorije, koje se sve reflektuju na njegovu strukturu. Osnovne pretpostavke kolizione kinetičke teorije su:

P1. Srednji slobodni put čestice, u oznaci λ je istog reda veličine kao karakteristična dužina tog problema, u oznaci L

$$\frac{\lambda}{L} \approx 1.$$

Ovaj uslov nam govori o razređenosti gasa;

P2. Sudari su binarni, tj. sudari više od 2 čestice se zanemaraju;

P3. Sudari su lokalizovani u vremenu i prostoru, što znači da su kratkotrajni događaji;

P4. Sudari su mikroreverzibilni u vremenu ;

P5. Važi molekularni haos. Fizička intepretacija ovog uslova ogleda se u tome da se dvije čestice koje su se već sudarile neće ponovo sudariti.

Na osnovu iznijete teorije o elastičnim sudarima i gore navednih pretpostavki, kolizioni operator ima sledeću strukturu:

$$Q(f,f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (f' f'_* - f f_*)\, B(|v - v_*|, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}v_*. \tag{1.12}$$

gdje su v' i v'_* iz (1.11) i korišćena je standardna notacija $f' = f(t,x,v')$, $f'_* = f(t,x,v'_*)$, $f = f(t,x,v)$ i $f_* = f(t,x,v_*)$. Kao što možemo vidjeti kolizioni operator ima bilinearnu strukturu i ona je posljedica pretpostavki P2. i P5. Funkcija $B(|v - v_*|, \sigma)$ se naziva kolizioni presjek i neke njene osobine predstaviti ćemo u sledećem poglavlju.

Napomena 2. Kolizioni operator (1.12) se može razdvojiti na apsorpcioni i emisioni dio kao u (1.4), pod uslovom da je $B(|v - v_*|, \sigma)$ mjerljiva funkcija u odnosu na mjeru $\mathrm{d}\sigma$.

1.3 Kolizioni presjek

Kolizioni presjek $B = B(|v - v_*|\,, \sigma)$ je eksperimentalna veličina koja se u modernoj fizici najviše koristi u nuklearnoj i čestičnoj fizici. U fizici se češće koristi termin diferencijalnim presjekom ili ukupnim diferencijalnim presjeku umjesto kolizioni presjek. Njegova definicija je poprilično kompleksna sa stanovišta nuklearne fizike, ali najjednostavnije objašnjenje za ukupni diferencijalni (kolizioni) presjek jeste da je ova veličina broj čestica koji prođu kroz dS malu povš detektora, dok je sam diferencijalni presjek funkcija ugla pod kojoj su se čestice rasejale odnosno

$$B(|v - v_*|\,, \sigma) = B\left(|v - v_*|\,, \frac{(v - v_*)\cdot\sigma}{|v - v_*|}\right).$$

Vrijednost $\frac{(v-v_*)\cdot\sigma}{|v-v_*|}$ je zapravo $\cos\theta$ pri čemu je θ ugao rasejanja pri sudaru dvije čestice.

Sa stanovišta kinetičke teorije mi uvodimo određene pretpostavke o kolizionom presjeku a neke od njih su da je $B \geq 0$ i

$$B(|u|\,, \hat{u}\cdot\sigma) = B(|u|\,, \hat{u}'\cdot\sigma'), \tag{1.13}$$

gdje $\hat{u}$ predstavlja normirani vektor u. Ove dvije pretpostavke su fizički opravdane, jer su mjerene vrijednosti ukupnog kolizionog presjeka uvijek pozitivne (broj čestica), a druga slijedi iz same geometrije sudara. Jedna od čestih pretpostavki u kinetičkoj teorije jeste separabilnost funkcije koliziong presjeka i to na:

$$B(|u|, \cos\theta) = |u|^{\gamma}\, b(\cos\theta),$$

te zavisno od vrijednosti γ posmatramo različite modele

$$\begin{array}{ll} \gamma = 1 & \text{Čvrste sfere,} \\ 0 < \gamma < 1 & \text{Čvrsti potencijali,} \\ \gamma = 0 & \text{Maksvelovi molekuli,} \\ \gamma < 0 & \text{Meki potencijali.} \end{array}$$

Slučaj da je $\gamma = -3$, je poznat kao Kulonov potencijal i za njega važi da već postoji interakcija između čestica, pa Bolcmanova jednačina nije dobar model, te se koristi Landauova jednačina.

U nastavku, mi ćemo posmatrati slučajeve kada je $\gamma \in (0, 1]$, tj. u oblasti čvrstih potencijala, uključujući čvrste sfere.

1.4 Osnovne osobine kolizionog operatora

Vidjeli smo strukturu kolizionog operatora (1.12), i zbog njega je Bolcmanova jednačina (1.3) u opštem slučaju nelinearna integro-diferencijalna jednačina. Rješavanje ovakve jednačine nije nimalo jednostavno i zbog toga se posmatraju osobine kolizionog operatora. Jedna od osnovnih osobina je slaba formulacija koliziong operatora. Slaba formulacija kolizionog operatora, matematički daće nam prirodne prostore, u kojim ćemo tražiti rješenje Bolcmanove jednačine, dok sa fizičke tačke gledašta daće nam zakone održanja makroskopskih promjenjivih.

Teorema 1.1 (Slaba formulacija kolizionog operatora)**.** *Neka je $\varphi(v) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tako da*

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v)\, \mathrm{d}v \tag{1.14}$$

ima smisla. Tada važi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v)\, \mathrm{d}v = -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} (f'f'_* - ff_*) \\ \times [\varphi(v') + \varphi(v'_*) - \varphi(v) - \varphi(v_*)] B(|v - v_*|, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}v_*\, \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Dokaz. Prema definiciji kolizionog operatora (1.12), integracija po prostoru brzina v sa test funkcijom $\varphi(v)$ je

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v)\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} (f'f'_* - ff_*)\,\varphi(v)B(|v-v_*|,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}v_*\,\mathrm{d}v. \tag{1.16}$$

Drugo, pri promjeni $(v,v_*,\sigma)\to(v_*,v,-\sigma)$, s jediničnim Jakobijanom i na osnovu (1.13), dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v)\,\mathrm{d}v &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} (f'_*f' - f_*f)\,\varphi(v_*)B(|v-v_*|,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v_*\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v_*)\,\mathrm{d}v \end{aligned}\tag{1.17}$$

Treće, za $(v,v_*,\sigma)\to(v',v'_*,\sigma')$, pri cemu je Jakobijan ove transformacije $J_{(v,v_*)\to(v',v'_*)} = |-1| = 1$ i na osnovu (1.13), važi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v)\,\mathrm{d}v &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} (ff_* - f'f'_*)\,\varphi(v')B(|v-v_*|,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v_*\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v')\,\mathrm{d}v \end{aligned}\tag{1.18}$$

Četvrto, za promjena $(v,v_*,\sigma)\to(v'_*,v',\sigma')$ slijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v_*)\varphi(v_*)\,\mathrm{d}v_* &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} (f_*f - f'_*f')\,\varphi(v'_*)B(|v-v_*|,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v_*\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v'_*)\,\mathrm{d}v \end{aligned}\tag{1.19}$$

Konačno sumacijom jednačina (1.16), (1.17), (1.18) i (1.19) slijedi kraj dokaza. □

Posljedica 1.2. *Za slabu formulaciju (1.14) važi sledeća reprezentacija*

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(v)f(u-v)G(v,u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{1.20}$$

pri čemu je

$$G(v,u) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [\varphi(v') + \varphi(u'-v') - \varphi(v) - \varphi(u-v)]\,B(|u|,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{1.21}$$

Ova posljedica ukazuje da se slaba formulacija može posmatrati kao konvolucija i ne zaboravimo da je u definisano kao $u = v - v_*$, pa odakle slijedi da je $v_* = v - u$.

Definicija 1.3. Funkciju $\varphi(v)$ nazivamo kolizionom invarijantom ako zadovoljava

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v)\, \mathrm{d}v = 0.$$

Lema 1.4 (Ekvivaletni uslovi za kolizione invarijante)**.** *Funkcija $\varphi(v)$ je koliziona invarijanta ako i samo ako*

$$\varphi(v') + \varphi(v'_*) = \varphi(v) + \varphi(v_*).$$

Dokaz. Koristeći teoremu o slabom rješenju (1.15), dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v)\, \mathrm{d}v = -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} &(f'f'_* - ff_*) \\ \times [\varphi(v') + \varphi(v'_*) - \varphi(v) - \varphi(v_*)]&B(|v-v_*|,\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}v_*\, \mathrm{d}v = 0 \\ \iff \quad &\varphi(v') + \varphi(v'_*) - \varphi(v) - \varphi(v_*) = 0.\end{aligned}$$

□

Sledeću teoremu je dokazao sam Bolcman 1890 godine pod uslovima da je $\varphi(v) \in C^2(\mathbb{R}^d)$, slabije uslove je dao Čerčinjani 1970. za $\varphi(v) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, dok je Venberg 1992. pokazao za $\varphi(v)$ u distributivnom smislu.

Teorema 1.5 (Koliziona invarijanta)**.** *Koliziona invarijanta $\varphi(v) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ je linearna kombinacija $\{1, v, v^2\}$.*

Dokaz ove teoreme se može naći u [10] i ona će odigrati bitnu ulogu kasnije.

1.5 $\mathcal{H}$-teorema

Fon Nojman je rekao da nas je Klauzijus osudio na vječnu patnju pošto je uveo veličinu koju niko ne razumije. Pojam entropije je jako kompleksan, i sa stanovišta fizike pa čak i sa filozofije. Entropiju sistema možemo razumjeti kao mjeru njegove neuređenosti ili neodređenosti. Sa stanovišta kinetičke teorije, fižicku entropiju definišemo kao

$$\mathcal{H}(f) := -k_B \int_{\mathbb{R}^d} f \log(f)\, \mathrm{d}v, \tag{1.22}$$

pri čemu je k Bolcmanova konstanta, $k_B = 1.38\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$. Takođe definišemo i produkciju enetropije kao

$$\mathcal{D}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f) \log(f)\, \mathrm{d}v \tag{1.23}$$

pod pretpostavkom da je integral na desnoj strani konačan. Sledeća teorema govori nam o produkciji entropije.

Teorema 1.6 ($\mathcal{H}$-teorema)**.** *Neka je kolizioni presjek B pozitivan skoro svuda, i neka je $f \geq 0$ tako da su kolizioni operator $Q(f,f)$ iz (1.12) i produkcija entropije $\mathcal{D}(f)$ iz (1.23) dobro definisani. Tada važi*

(i) Produkcija entropije je nepozitivna

$$\mathcal{D}(f) \leq 0. \tag{1.24}$$

(ii) Sledeći uslovi su ekvivalentni

(1) $Q(f,f) = 0$ za sve $v \in \mathbb{R}^d$,

(2) $\mathcal{D}(f) = 0$,

(3) Postoje $n \geq 0$, $U \in \mathbb{R}^d$, $T > 0$ tako da je stanje ravnoteže opisano sa

$$f_{eq}(t,v) = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2k_B T}|v-U|^2}.$$

Napomena 3. $\mathcal{H}$-teorema je posledica osobina kolizionog operatora, te ona nije opšta osobina za Bolcmanovu jednačinu (1.3).

Dokaz. Krećemo od slabe formulacije kolizionog operatora (1.15) za izbor test funkcije $\varphi(v) = \log f$, odnosno

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f) &:= \int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\log(f)\,\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} (f'f'_* - ff_*) \\
&\times [\log f' + \log f'_* - \log f - \log f_*] B(|v-v_*|,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}v_*\,\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} (f'f'_* - ff_*) \\
&\times [\log f'f'_* - \log ff_*] B(|v-v_*|,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}v_*\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Na osnovu činjenice da je preslikavanje $(x,y) \mapsto (x-y)(\log x - \log y),\ \forall x,y > 0$ nenegativno i pretpostavke da je B nenegativno, slijedi da je produkcija entropije nepozitivna veličina.

Sada pokazujemo relacije iz drugog dijela teoreme. Dokaz će biti u smjeru $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$ Slijedi iz same definicije produkcije entropije (1.23).

(2) $\Rightarrow$ (3) Kako je $\mathcal{D}(f) = 0$ po teoremi o kolizionim invarijantama 1.5, slijedi da je $\log f$ linearna kombinacija $\{1, v, v^2\}$, što dalje implicira da je

$$f(v) = \exp\left\{a + \sum_{i=1}^{d} b_i v_i + c v^2\right\},$$

pri čemu su a, b, c konstante koje biramo na sledeći način:

$$\begin{aligned} a =& \log\left(n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{d}{2}}\right) - \frac{m}{2k_B T}|U|^2, \\ b_i =& \frac{m}{2k_B T} U_i, \quad 1 \le i \le d, \\ c =& \frac{m}{2k_B T}. \end{aligned}$$

čime je ovaj dio završen.

(3) $\Rightarrow$ (1) Dobija se direktnim uvrštavanjem funkcije raspodjele u stanju ravnoteže u kolizioni operator (1.12), te koristići zakone održanja u centru mase (1.8). $\square$

Vratimo se sada fizičkoj entropiji $\mathcal{H}$ definisanoj sa (1.22). Diferencijal entropije po vremenu je dat sa

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = -k_B \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \log f + f \frac{1}{f} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}v.$$

Množenjem Bolcmanove jednačine sa funkcijom $-k_B(\log f + 1)$ i integracijom po v, gdje na osnovu teoreme 1.5, član 1 možemo zanemariti, dobijamo

$$-k_B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^d} f \log f \mathrm{d}v = -k_B \int_{\mathbb{R}^d} Q(f, f) \log f \mathrm{d}v.$$

Na desnoj strani prethodne jednačine je baš definicija $\mathcal{D}(f)$, te dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H} = -k_B \mathcal{D}(f) \ge 0,$$

Poslednja nejednakost je posledjica $\mathcal{H}$-Teoreme i ona predstavlja ekvivalent drugom zakonu termodinamike.

Glava 2

Fundamentalne leme i a priori ocjene

2.1 Funkcionalni prostori

Prirodan prostor za rješavanje prostorno homogene Bolcmanove jednačine (1.5) je prostor sa Lebegovom težinom, odnosno prostor integrabilnih funkcija čiji momenti su ograničeni. Preciznije, definišemo za svako $k \geq 0$

$$L^1_k(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \text{ mjerljiva} : \|f\|_{L^1_k} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(v)| \langle v \rangle^k \, \mathrm{d}v < \infty \right\}, \tag{2.1}$$

pri čemu je korišćena standardna oznaka $\langle v \rangle = \sqrt{1 + |v|^2}$, koja se naziva Lebegova zagrada ili popularno japanska zagrada. Primjetimo da za svako $k_2 \geq k_1 \geq 0$ u prostorima (2.1), važi monotonost norme

$$\|f\|_{L^1_{k_1}} \leq \|f\|_{L^1_{k_2}}, \tag{2.2}$$

odakle slijedi kao posljedica da je $L^1_{k_2} \hookrightarrow L^1_{k_1}$.

Definicija 2.1. Polinomni momenat reda $k \geq 0$ pridružen integrabilnoj funkciji g je definisan na sledeći način

$$\mathfrak{m}_k[g](t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, v) \, \langle v \rangle^k \; \mathrm{d}v. \tag{2.3}$$

Primjetimo, ako je $f \geq 0$, onda je

$$\mathfrak{m}_k[f](t) = \|f\|_{L^1_k}(t).$$

Makroskopske promjenljive su definisane kao momenti funkcije raspodjele f, koji se dobijaju množenjem funkcije f sa odgovarajućom test funkcijom te integraljenjem po v. Tako ako su te funkcije kolizione invarijante, odnosno $m, mv, \frac{m}{2}|v|^2$, onda dobijamo gustinu gasa ρ, gustinu količine kretanja gasa ρU i gustinu energije gasa $\frac{\rho}{2}|U|^2 + \rho e$, respektivno

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^d} mf\mathrm{d}v, \quad \rho U = \int_{\mathbb{R}^d} mvf\mathrm{d}v, \quad \frac{\rho}{2}|U|^2 + \rho e = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{m}{2}|v|^2 f\mathrm{d}v. \tag{2.4}$$

Sa druge strane, polinomni momenti definisani sa (2.3) u specijalnom slučaju mogu se izjedanačiti sa makrosposke promjenljive (2.4). Tako na primjer, u slučaju da je momenat nultog reda, $k = 0$, pomnožen masom m dobijamo gustinu gasa, dok momenat drugog reda, $k = 2$, pomnožen sa masom predstavlja zbir gustine i totalne gustine energije,

$$m\mathfrak{m}_0(t) = \rho, \quad m\mathfrak{m}_2(t) = \rho + \frac{\rho}{2}|U|^2 + \rho e.$$

Pošto za (2.4) važe makroskopski zakoni održanja mase, količine kretanja i ukupne energije, zbog toga će $\mathfrak{m}_0$ i $\mathfrak{m}_2$ biti konstante vrijednosti za svako $t > 0$,

$$\mathfrak{m}_0[f](t) = \mathfrak{m}_0[f](0) = \mathfrak{m}_0, \qquad \mathfrak{m}_2[f](t) = \mathfrak{m}_2[f](0) = \mathfrak{m}_2,$$

gdje je f rješenje Bolcmanove jednačine (1.5).

2.2 Fundamentalne leme

Prije nego što pređemo na rješavanje Košijevog problema za Bolcmanovu jednačinu (1.5), prvo ćemo dokazati nekoliko lema koje će nam omogućiti da koristimo egzistenciju i jedinstvenost rješenja običnih diferencijalnih jednačina (ODJ) u Banahovim prostorima.

Počećemo sa dokazam sledećeg identiteta, koji se može naći u [3]. Energijski identitet daje vezu između mikroskopskih energija čestica koje se sudaraju u sistemu centra mase (1.8) i u sistemu relativnih brzina (1.11).

Definišemo energiju sistema u odnosu na Lebegove zagrade kao

$$E := \langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2 = \langle v'\rangle^2 + \langle v'_*\rangle^2, \tag{2.5}$$

pri čemu jednakost važi zbog mirkoskopskog zakona održanja mase i energije (1.7).

Lema 2.2 (Energijski identitet)**.** *Za svako* (v', v'_*) *i* (v, v_*) *koji zadovoljavaju* (1.11) *važe sledeći identiteti*

$$\langle v' \rangle^2 = E\left(\frac{1-\xi\hat{V}\cdot\sigma}{2}\right), \qquad \langle v'_* \rangle^2 = E\left(\frac{1+\xi\hat{V}\cdot\sigma}{2}\right), \tag{2.6}$$

gdje je $\xi = \frac{2|u||V|}{E} \in [0,1]$ *i* $\hat{V} = \frac{V}{|V|}$.

Dokaz. Primjetimo da iz definicije (1.8) važi

$$\begin{aligned} &|V|^2 + \frac{1}{4}|u|^2 = \left|\frac{v+v_*}{2}\right|^2 + \frac{1}{4}|v-v_*|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(|v|^2 + 2\, v\cdot v_* + |v_*|^2\right) + \frac{1}{4}\left(|v|^2 - 2\, v\cdot v_* + |v_*|^2\right) = \frac{1}{2}(|v|^2+|v_*|^2) = \frac{E}{2} - 1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

pri čemu smo iskoristili definiciju E iz (2.5). Koristeći relacije (1.11) i prethodnog izraza, lako se izračunavaju sledeće relacije

$$\begin{aligned} \langle v' \rangle^2 &= 1 + |v'|^2 = 1 + \left|V - \frac{1}{2}|u|\sigma\right|^2 \\ &= 1 + |V|^2 - |u|V\cdot\sigma + \frac{1}{4}|u|^2 = \frac{E}{2} - |u||V|\hat{V}\cdot\sigma, \\ \langle v'_* \rangle^2 &= 1 + |v'_*|^2 = 1 + \left|V + \frac{1}{2}|u|\sigma\right|^2 \\ &= 1 + |V|^2 + |u|V\cdot\sigma + \frac{1}{4}|u|^2 = \frac{E}{2} + |u||V|\hat{V}\cdot\sigma. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\langle v' \rangle^2 = E\left(\frac{1-\xi\hat{V}\cdot\sigma}{2}\right), \qquad \langle v'_* \rangle^2 = E\left(\frac{1+\xi\hat{V}\cdot\sigma}{2}\right),$$

pri čemu je $\xi := \frac{2|u||V|}{E}$. Sada pokžimo da ξ pripada intervalu $[0,1]$, odnosno korišćenjem Jangove nejednakosti (A.4) važi

$$0 \le \xi = \frac{2|u||V|}{E} \le \frac{|v|^2 + |v_*|^2}{E} \le 1. \tag{2.8}$$

□

Sledeća lema koju ćemo dokazati je Povznerova lema, odnosno Povznerova nejednakost pri angularnom usrednjavanju. Ona predstavlja jednu od najznačajnijih rezultata kinetičke teorije, jer daje uslove za globalnu stabilnost rješenja. Prvobitna ideja leme leži u radovima Povznera [27], Devileta [14], i Venberga [34], mi ćemo predstaviti dokaz od strane Bobiljeva, Gambe i Panferova [4].

Lema 2.3 (Povznerova Lema). *Neka je koliozoni presjek dat sa* $B(|u|, \hat{u}\cdot\sigma) = |u|^{\gamma} b(\hat{u}\cdot\sigma)$ *i neka je test funkcija* $\varphi_k(v) = \langle v\rangle^k$, *za* $k \geq 2$. *Tada je emisioni dio funkcije* $G(v, v_*)$ *iz* (1.21) *ograničen sa*

$$G^+(v, v_*) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\langle v'\rangle^k + \langle v'_*\rangle^k\right) B(|u|, \hat{u}\cdot\sigma)\mathrm{d}\sigma \leq \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} |u|^{\gamma} \left(\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2\right)^{\frac{k}{2}},$$

gdje je $\mathcal{C}_1 = 1$ *i* $\mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \searrow 0$, *za* $k > 2$. *Štaviše, ako je* $b \in L^p(\mathbb{S}^{d-1}; \mathrm{d}\sigma)$, *za* $p > 1$, *važi ocjena*

$$\mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \leq 2\, \|b\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} \left(\frac{2|\mathbb{S}^{d-2}|}{1 + q\frac{k}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

pri čemu p *i* q *zadovoljavaju* $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *U slučaju* $b \in L^{\infty}(\mathbb{S}^{d-1}; \mathrm{d}\sigma)$, *konstanta* $\mathcal{C}_{\frac{k}{2}}$ *se ponaša kao* $(1+k)^{-1}$.

Napomena 4. U slaboj formulaciji Bolcmanovog koliozionog operatora kada su test funkcije polinomi oblika $\langle v\rangle^k$, pojaviće se faktor $1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} > 0$. Glavna ideja Povznerove leme jeste da će faktor $1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} > 0$ ograničiti od dole momente emisionog dijela kolizionog operatora te tako će se dobiti globalne a priori ocjene. Može se reći da ovaj faktor igra ulogu konstante koja se dobija iz Poenkareove teoreme za eliptične i paraboličke jednačine.

Dokaz. Koristeći lemu 2.2, dobija se

$$\begin{aligned} G^+(v, v_*) &= |u|^{\gamma} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\langle v'\rangle^k + \langle v'_*\rangle^k\right) b(\hat{u}\cdot\sigma)\mathrm{d}\sigma \\ &= |u|^{\gamma} \left(\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2\right)^{\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\left|\frac{1 + \xi\hat{V}\cdot\sigma}{2}\right|^{\frac{k}{2}} + \left|\frac{1 - \xi\hat{V}\cdot\sigma}{2}\right|^{\frac{k}{2}}\right) b(\hat{u}\cdot\sigma)\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Primjetimo da je podintegralna funkcija neprekidna u odnosu na $\hat{V}\cdot\sigma$ i nenegativna za $k \geq 2$, pošto je faktor ξ ograničen sa 1, što je dokazano u (2.8) pomoću Jangove nejednakosti. Štaviše, podintegralna funkcija je monotono rastuća po ξ, a pošto $0 \leq \xi \leq 1$, slijedi da je

$$\left|\frac{1 + \xi\hat{V}\cdot\sigma}{2}\right|^{\frac{k}{2}} + \left|\frac{1 - \xi\hat{V}\cdot\sigma}{2}\right|^{\frac{k}{2}} \leq \left|\frac{1 + \hat{V}\cdot\sigma}{2}\right|^{\frac{k}{2}} + \left|\frac{1 - \hat{V}\cdot\sigma}{2}\right|^{\frac{k}{2}}. \tag{2.9}$$

Odavde se dobija

$$\begin{aligned} G^+(v, v_*) &\leq |u|^{\gamma} \left(\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2\right)^{\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\left|\frac{1 + \hat{V}\cdot\sigma}{2}\right|^{\frac{k}{2}} + \left|\frac{1 - \hat{V}\cdot\sigma}{2}\right|^{\frac{k}{2}}\right) b(\hat{u}\cdot\sigma)\mathrm{d}\sigma \\ &\leq \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} |u|^{\gamma} \left(\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2\right)^{\frac{k}{2}}, \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

pri čemu definišemo

$$\mathcal{C}_{\frac{k}{2}} = \sup_{\{\hat{V},\ \hat{u}\ \in \mathbb{S}^{d-1}\}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\left| \frac{1+\hat{V}\cdot\sigma}{2} \right|^{\frac{k}{2}} + \left| \frac{1-\hat{V}\cdot\sigma}{2} \right|^{\frac{k}{2}} \right) b(\hat{u}\cdot\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{2.10}$$

U slučaju kada je $k = 2$, dobija se

$$\mathcal{C}_1 = \sup_{\{\hat{V},\ \hat{u}\ \in \mathbb{S}^{d-1}\}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\left| \frac{1+\hat{V}\cdot\sigma}{2} \right| + \left| \frac{1-\hat{V}\cdot\sigma}{2} \right| \right) b(\hat{u}\cdot\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} b(\hat{u}\cdot\sigma)\mathrm{d}\sigma = 1.$$

Takođe, za svako $k \geq 2$, funkcija

$$\Gamma_{\frac{k}{2}} := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\left| \frac{1+\hat{V}\cdot\sigma}{2} \right|^{\frac{k}{2}} + \left| \frac{1-\hat{V}\cdot\sigma}{2} \right|^{\frac{k}{2}} \right) b(\hat{u}\cdot\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

je neprekidna u odnosu na vektore $\hat{V}$ i $\hat{u}$, što se može provjeriti ako ih zapišemo u polarnim koordinatama. Štaviše podintegralna funkcija (2.9) u odnosu na mjeru $(b(\hat{u}\cdot\sigma), \mathrm{d}\sigma)$ je strogo opadajuća do na skupu mjere nula (u tačakama $\sigma = \{\pm\hat{V}\}$), za svako $k \geq 2$. Kao posljedica slijedi da je $\Gamma_{k_1}(\hat{V}, \hat{u}) > \Gamma_{k_2}(\hat{V}, \hat{u})$, za svako $k_1 < k_2$, tako da zbog supremuma u odnosu na $\hat{V}$ i $\hat{u}$, zbog neprekidnosti, zaključujemo da je $\mathcal{C}_{k_1} > \mathcal{C}_{k_2}$. Finalno, zbog monotone neprekidnosti dobijamo da je $\mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \searrow 0$, za dovoljno veliko k.

U slučaju da je $b(\hat{u}\cdot\sigma)$ integrabilno u $L^p(\mathbb{S}^{d-1})$ za $p > 1$, na osnovu Helderove nejednakosti (A.5) dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left| \frac{1\pm\hat{V}\cdot\sigma}{2} \right|^{\frac{k}{2}} b(\hat{u}\cdot\sigma)\mathrm{d}\sigma &\leq \|b\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left| \frac{1\pm\hat{V}\cdot\sigma}{2} \mathrm{d}\sigma \right|^{q\frac{k}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|b\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \left(\frac{2|\mathbb{S}^{d-2}|}{1+q\frac{k}{2}} \right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

pri čemu p, q zadovoljavaju jednačinu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$\square$

Povznerova lema nam je ukazala na neka svojsta apsorpcionog dijela funkcije $G^+(v, v_*)$, sledeća lema nam daje ograničenje za cijelu funkciju $G(v, v_*)$.

Lema 2.4 (Angularno usrednjavanje)**.** *Neka je kolizioni presjek* $B(|u|, \hat{u}\cdot\sigma) = |u|^{\gamma} b(\hat{u}\cdot\sigma)$*, pri čemu je* $b(\hat{u}\cdot\sigma)$ *integrabilno u odnosu na mjeru* $\mathrm{d}\sigma$*. Tada za test funkcije* $\varphi_k(v) = \langle v\rangle^k$*, za svako* $k > 2$*,* $G(v, v_*)$ *iz* (1.21) *je ograničeno na sledeći način*

$$G(v,v_*) \le |u|^{\gamma}\left(\tilde{C}_k \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}\left(\langle v\rangle \langle v_*\rangle^{k-1} + \langle v\rangle^{k-1}\langle v_*\rangle\right) - \left(1-\mathcal{C}_{\frac{k}{2}}\right)\left(\langle v\rangle^{k} + \langle v_*\rangle^{k}\right)\right), \tag{2.11}$$

pri čemu je $\tilde{C}_k = 2^{\frac{k}{2}+1} - 1 > 0$*.*

Dokaz. Na izaraza $G(v, v_*)$ (1.21) primjenom Povznerove leme 2.3 dobija se

$$\begin{aligned} G(v,v_*) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\langle v'\rangle^k + \langle v'_*\rangle^k - \langle v\rangle^k - \langle v_*\rangle^k)\, B(|v-v_*|,\sigma)\mathrm{d}\sigma \\ &\le |u|^{\gamma}\left(\mathcal{C}_{\frac{k}{2}}(\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2)^{\frac{k}{2}} - \langle v\rangle^k - \langle v_*\rangle^k\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Korišćenjem binomne formule prvi član u zagradi možemo zapisati na sledeći način

$$\begin{aligned} (\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2)^{\frac{k}{2}} &\le (\langle v\rangle + \langle v_*\rangle)^k = \langle v\rangle^k + \langle v_*\rangle^k + \sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\langle v\rangle^l \langle v_*\rangle^{k-l} \\ &\le \langle v\rangle^k + \langle v_*\rangle^k + \sum_{l=1}^{l_k}\binom{k}{l}\left(\langle v\rangle^l\langle v_*\rangle^{k-l} + \langle v\rangle^{k-l}\langle v_*\rangle^l\right) \\ &\le \langle v\rangle^k + \langle v_*\rangle^k + \left(\langle v\rangle\langle v_*\rangle^{k-1} + \langle v\rangle^{k-1}\langle v_*\rangle\right)\sum_{l=1}^{l_k}\binom{k}{l} \end{aligned}$$

gdje smo prvu nejednakost dobili korištenjem (A.3), drugu pomoću (A.1) za $k > 2$ i $l_k = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$, a treću pomoću (A.2). Uvrštavanjem poslednjeg izraza u (2.12) dobijamo

$$G(v,v_*) \le |u|^{\gamma}\left(\mathcal{C}_{\frac{k}{2}}(\langle v\rangle\langle v_*\rangle^{(k-1)} + \langle v\rangle^{(k-1)}\langle v_*\rangle)\sum_{l=1}^{l_k}\binom{k}{l} - \left(1-\mathcal{C}_{\frac{k}{2}}\right)(\langle v\rangle^k + \langle v_*\rangle^k)\right)$$

i zbog toga što je $\sum_{l=1}^{l_k}\binom{k}{l} \le 2^{\frac{k}{2}+1} - 1$ slijedi kraj dokaza. □

2.3 Ograničenja za $|u|^{\gamma}$

Jako važne ocjene, koja će nam omogućiti kontrolu polinomnih momenata jesu donje i gornje ograničenje za $|u|^{\gamma}$. Za gornje ograničenje koristećemo lokalne ocjene u odnosu na Lebegovu mjeru, koju definišemo na sledeći način

$$\langle v\rangle^{\gamma} := (1 + |v|^2)^{\gamma}.$$

Lema 2.5 (Gornje ograničenje)**.** *Za svako* $\gamma \in [0,\infty)$ *zadovoljena je nejednakost*

$$|u|^\gamma \le c_g(\langle v\rangle^\gamma + \langle v_*\rangle^\gamma), \tag{2.13}$$

gdje je $c_g = c_g(\gamma) = \min\{2^{\frac{\gamma}{2}}, 2^{\frac{3}{2}\gamma-1}\}$.

Dokaz. Primjetimo da važi

$$|u|^\gamma = |v-v_*|^\gamma = 2^\gamma\left(\frac{1}{4}|v-v_*|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}},$$

i na osnovu (2.7) slijedi da je

$$\frac{1}{4}|v-v_*|^2 \le \frac{E}{2} = \frac{1}{2}\left(\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2\right).$$

Kako bi iskoristili (A.3), interval γ podijelićemo u dva slučaja:

$$\begin{aligned} \text{ako } \gamma \text{ pripada } [0,2] \text{ onda} \quad & |u|^\gamma \le 2^{\frac{\gamma}{2}}(\langle v\rangle^\gamma + \langle v_*\rangle^\gamma), \\ \text{ako } \gamma \text{ pripada } [2,\infty) \text{ onda} \quad & |u|^\gamma \le 2^{\frac{3}{2}\gamma-1}(\langle v\rangle^\gamma + \langle v_*\rangle^\gamma), \end{aligned}$$

pri čemu uzimamo minimum od ova dva ograničenja. □

Sledeća lema nam daje donje ograničenje za potencijal iz kolizionog presjeka, u vidu funkcionalne nejednakosti koja ne mora biti nužno da se odnosi na rješenje Bolcmanove jednačine. Za dokaz donjeg ograničenja pratićemo [1].

Lema 2.6 (Donje ograničenje)**.** *Neka je* $\gamma \in [0,2]$. *Za funkciju* $0 \le \{f(t)\}_{t\ge 0} \subset L^1_2$ *koja zadovoljava*

$$\mathcal{M}_d \le \int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\mathrm{d}v \le \mathcal{M}_g, \qquad \mathcal{E}_d \le \int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\,|v|^2\,\mathrm{d}v \le \mathcal{E}_g \tag{2.14}$$

za neke pozitivne konstante $\mathcal{M}_d, \mathcal{M}_g, \mathcal{E}_d, \mathcal{E}_g$ *i*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)v\mathrm{d}v = 0. \tag{2.15}$$

Dodatno pretpostavimo da postoji $\Delta > 0$ *za neko* $\delta > 0$ *da važi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\,|v|^{2+\delta}\,\mathrm{d}v \le \Delta. \tag{2.16}$$

Tada postoji konstanta $c_d > 0$, *takva da konvlucija* $f \in L^1_2$ *i polinomnog momenta stepena* γ *je ograničena s donje strane u odnosu na Lebegovu mjeru, odnosno*

$$f * |v|^\gamma := \int_{\mathbb{R}^d} f(t,\omega)\,|v-\omega|^\gamma\,\mathrm{d}\omega \ge c_d\,\langle v\rangle^\gamma, \tag{2.17}$$

preciznije c_d *je dato sa*

$$c_d = \frac{\min\{\mathcal{M}_d, \mathcal{E}_d\}}{2} \left(\frac{4}{\mathcal{E}_d} \max\{\mathcal{M}_g, \Delta\} \right)^{\frac{1}{\delta}} \left(1 + \left(8 \frac{\mathcal{M}_g + \mathcal{E}_g}{\mathcal{M}_d} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{\frac{2+\delta}{\delta} - \frac{\gamma}{2}}, \quad (2.18)$$

za $\gamma \in (0, 2]$, *a ako je* $\gamma = 0$ *onda je* $c_d = 2$.

Dokaz. Definišimo prvo otvorenu loptu s radiusom r u koordinatnom početku

$$\mathbb{B}_r(v) := \{\omega \in \mathbb{R}^d : |v - \omega|^2 \leq r^2\}. \quad (2.19)$$

Konstrukciju dokaza krećemo od ocjena na sferi $\mathbb{B}_S(v)$ za parametar S koji ćemo kasnije odrediti, a koji zavisi od $\mathcal{M}_g, \mathcal{E}_d, \Delta, \delta$ i r_* radiusa $\mathbb{B}_{r_*}(0)$. Takva ocjena nam omogućuje kontrolu integrala

$$\Lambda_\gamma := \int_{\mathbb{R}^d} f(t, \omega)\, |v - \omega|^\gamma \, \mathrm{d}\omega,$$

čiji domen ćemo razdvojiti na sferu $\mathbb{B}_{r_*}(0)$ i njen komplent $\mathbb{B}^c_{r_*}(0)$, pri čemu r_* će zavisiti od $\mathcal{M}_d, \mathcal{M}_g, \mathcal{E}_g$ i γ.

Pošto je slučaj $\gamma = 0$ trivijalan, posmatraćemo $\gamma \in (0, 2]$. Za v koje pripada $\mathbb{B}_S(v)$ važi

$$|v - \omega|^2 \leq S^2 \Rightarrow \left(|v - \omega|^2\right)^{\frac{\gamma - 2}{2}} \geq S^{\gamma - 2},$$

s druge strane Λ_γ je veće kada se integrali po cijelom domenu $\mathbb{R}^d$ nego samo po $\mathbb{B}_S(v)$, odnosno

$$\begin{aligned} \Lambda_\gamma = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, \omega)\, |v - \omega|^\gamma \, \mathrm{d}\omega &\geq S^{\gamma - 2} \int_{\mathbb{B}_S(v)} f(t, \omega)\, |v - \omega|^2 \, \mathrm{d}\omega \\ &\geq S^{\gamma - 2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t, \omega)\, |v - \omega|^2 \, \mathrm{d}\omega - \int_{\mathbb{B}^c_S(v)} f(t, \omega)\, |v - \omega|^2 \, \mathrm{d}\omega \right). \quad (2.20) \end{aligned}$$

Kada se integrali po cijelom $\mathbb{R}^d$ možemo dati sledeće donje ograničenje

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, \omega)\, |v - \omega|^2 \, \mathrm{d}\omega &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t, \omega)(|v|^2 - 2v \cdot \omega + |\omega|^2) \mathrm{d}\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t, \omega)\, |v|^2 \, \mathrm{d}\omega - 2 \int_{\mathbb{R}^d} f(t, \omega)(v \cdot \omega) \mathrm{d}\omega + \int_{\mathbb{R}^d} f(t, \omega)\, |\omega|^2 \, \mathrm{d}\omega \\ &\geq \mathcal{M}_d\, |v|^2 + \mathcal{E}_d \geq \mathcal{E}_d, \quad (2.21) \end{aligned}$$

gdje smo za prvi i treći iskoristili ograničenja data u (2.14), a drugi integral je jednak nuli zbog (2.15). Za drugi integral u (2.20), koristeći izraz koji se dobija pomoću (A.3)

$$|v-\omega|^{2+\delta} \leq 2^{1+\delta}\left(|v|^{2+\delta}+|\omega|^{2+\delta}\right),$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}^c_S(v)} f(t,\omega)\,|v-\omega|^2\,\mathrm{d}\omega &\leq \frac{1}{S^\delta}\int_{\mathbb{B}^c_S(v)} f(t,\omega)\,|v-\omega|^{2+\delta}\,\mathrm{d}\omega \\
&\leq \frac{2^{1+\delta}}{S^\delta}\int_{\mathbb{B}^c_S(v)} f(t,\omega)\left(|v|^{2+\delta}+|\omega|^{2+\delta}\right)\mathrm{d}\omega \\
&\leq \frac{2^{1+\delta}}{S^\delta}\left(\mathcal{M}_g\,|v|^{2+\delta}+\Delta\right) \\
&\leq \frac{2^{1+\delta}}{S^\delta}\max\{\mathcal{M}_g,\Delta\}\,\langle v\rangle^{2+\delta},
\end{aligned}$$

gdje je korišćeno ograničenje dato u formulaciji leme (2.14) i činjenica da važi

$$|v|^{2+\delta} = |v|^2\,|v|^\delta \leq (1+|v|^2)(1+|v|^2)^{\frac{\delta}{2}} \leq \langle v\rangle^{2+\delta}.$$

Tako smo Λ_γ iz (2.20) ograničili s

$$\Lambda_\gamma \geq S^{\gamma-2}\left(\mathcal{E}_d - \frac{2^{1+\delta}}{S^\delta}\max\{\mathcal{M}_g,\Delta\}\,\langle v\rangle^{2+\delta}\right), \tag{2.22}$$

sada treba da odredimo S i r_* tako da donje ograničenje iz (2.22) je strogo pozitivno. Na osnovu toga , dovoljno da izaberemo S tako da zadovoljava

$$\frac{2^{1+\delta}}{S^\delta}\max\{\mathcal{M}_g,\Delta\}\,\langle v\rangle^{2+\delta} \leq \frac{2^{1+\delta}}{S^\delta}\max\{\mathcal{M}_g,\Delta\}(1+r_*^2)^{2+\delta} < \frac{\mathcal{E}_d}{2},$$

za svako $v \in \mathbb{B}_{r_*}(0)$, odnosno S kao funkciju od r_* biramo tako da važi

$$S(r_*) > \left(2^{2+\delta}\frac{\max\{\mathcal{M}_g,\Delta\}}{\mathcal{E}_d}(1+r_*^2)^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}} > 1. \tag{2.23}$$

Tada je za svako $v \in \mathbb{B}_{r_*}(0)$

$$\Lambda_\gamma > S^{\gamma-2}\frac{\mathcal{E}_d}{2}. \tag{2.24}$$

Pošto S zavisi od r_*, kao što se vidi u (2.23), potrebno je odrediti uslov r_* tako da za svako $v \in \mathbb{B}_{r_*}(0)$ važi (2.23). Ispostavlja se da možemo dati donje ograničenje za Λ_γ u obliku

$$\begin{aligned}\Lambda_\gamma &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t,\omega)\left(|v-\omega|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \mathrm{d}\omega \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^d} f(t,\omega)\left(2^{\frac{\gamma}{2}-1}\left(|v|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} - 2\left(|\omega|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \mathrm{d}\omega\right) \\ &\geq 2^{\frac{\gamma}{2}-1}\mathcal{M}_d\,|v|^\gamma - 2\int_{\mathbb{R}^d} f(t,\omega)\left(|\omega|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

Integral iz poslednjeg izaraza se određuje ako podijelimo domen integracije na $\mathbb{R}^d = \mathbb{B}_1(0) \cup \mathbb{B}_1^c(0)$, odnosno

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} f(t,\omega)\left(|\omega|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \mathrm{d}\omega \\ &\qquad \leq \int_{\mathbb{B}_1(0)} f(t,\omega)\left(|\omega|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \mathrm{d}\omega + \int_{\mathbb{B}_1^c(0)} f(t,\omega)\left(|\omega|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \mathrm{d}\omega \leq \mathcal{M}_g + \mathcal{E}_g,\end{aligned}$$

pošto ω u prvom integralu pripada $\mathbb{B}_1(0)$, to znaci da je $|\omega|^2 \leq 1$, te njega možemo ograničiti sa $\mathcal{M}_g$, dok kod drugog integrala ω pripada komplentu ali pošto je $\gamma \in (0,2]$ slijedi da je $\left(|\omega|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \leq |\omega|^2$, te drugi integral ograničavamo sa $\mathcal{E}_g$. Cijelo Λ_γ tada možemo ograničiti sa

$$\Lambda_\gamma \geq \frac{1}{2}\mathcal{M}_d\,|v|^\gamma - 2\left(\mathcal{M}_g + \mathcal{E}_g\right).$$

Ako izaberemo r_* dovoljno veliko tako da zadovoljava

$$r_* > \left(\frac{8\left(\mathcal{M}_g + \mathcal{E}_g\right)}{\mathcal{M}_d}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geq 1, \tag{2.25}$$

tada će svako $v \in \mathbb{B}_{r_*}^c(0)$ zadovoljavati

$$\Lambda_\gamma \geq \frac{1}{4}\mathcal{M}_d\,|v|^\gamma. \tag{2.26}$$

Spajanjem (2.24) i (2.26) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\Lambda_\gamma &\geq \left(\frac{\mathcal{E}_d}{2}S^{\gamma-2}\mathbb{1}_{\mathbb{B}_{r_*}(0)}(v) + \frac{\mathcal{M}_d}{4}\,|v|^\gamma\,\mathbb{1}_{\mathbb{B}_{r_*}^c(0)}(v)\right) \\ &\geq \frac{\min\{\mathcal{M}_d, \mathcal{E}_d\}}{4}S^{\gamma-2}\left(1_{\mathbb{B}_{r_*}(0)}(v) + |v|^\gamma\,1_{\mathbb{B}_{r_*}^c(0)}(v)\right).\end{aligned} \tag{2.27}$$

Sada prvo za $v \in \mathbb{B}_{r_*}(0)$ važi

$$\langle v\rangle^2 = 1 + |v|^2 \leq 1 + r_*^2,$$

a za $v \in \mathbb{B}^c_{r_*}(0)$ i pošto je $r_* \geq 1$ kao što je pokazano u (2.25) slijedi

$$|v|^2 \geq r_*^2 \geq \frac{1}{r_*^2} \Rightarrow r_*^2 |v|^2 \geq 1,$$

odnosno

$$\langle v \rangle^\gamma = \left(1 + |v|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \leq \left(r_*^2 |v|^2 + |v|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \leq |v|^\gamma \left(1 + r_*^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Spajanjem ovih nejednakosti dobijamo

$$\langle v \rangle^\gamma = \langle v \rangle^\gamma \left(\mathbb{1}_{\mathbb{B}_{r_*}(0)}(v) + \mathbb{1}_{\mathbb{B}^c_{r_*}(0)}(v)\right) \leq \left(1 + r_*^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\mathbb{1}_{\mathbb{B}_{r_*}(0)}(v) + |v|^\gamma \, \mathbb{1}_{\mathbb{B}^c_{r_*}(0)}(v)\right).$$

Konačno dobijamo da je

$$\Lambda_\gamma \geq \frac{\mathcal{E}_d}{2} \frac{S^{\gamma-2}}{(1 + r_*^2)^{\frac{\gamma}{2}}} \langle v \rangle^\gamma,$$

te uvrštavajući (2.23) i (2.25) dobijamo donje ograničenje (2.18). □

Na kraju, uporedimo leme o gornjem i donjem ograničenju 2.5 i 2.6. Vidjeli smo da lema o gornjem ograničenju je čisto tačkasta (*eng. pointwise*). Dok lema o donjem ograničenju je predstavljena preko konvolucije funkcije f i polinomnog momenta stepena γ i njena ocjena je čisto funkcionalna, što će igrati veliku ulogu u izboru Banahovih prostora u kojim ćemo predstaviti rješenje Košijevog problema za Bolcmanovu jednačinu. U jednu ruku može se reći da lema o donjem ograničenju diktira put ka rješenju Košijevog problema.

2.4 L^1_k a priori ocjene za momenate

Sada ćemo iskoristiti sve prethodne leme kako bi dali ograničenje kolizionog operatora.

Lema 2.7 (Ograničenja kolizionog operatora). *Neka je $f \in L^1_2$, koja zadovoljava pretpostavke leme 2.6. Tada za svako $\gamma \in (0, 1]$, zadovoljena je nejednakost*

$$\mathfrak{m}_k[Q(f,f)] = \int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v) \langle v \rangle^k \, \mathrm{d}v \leq -A_* \|f\|_{L^1_k}^{1+\frac{\gamma}{k}} + B_k \|f\|_{L^1_k}, \tag{2.28}$$

gdje su A_* i B_k definisane pomoću konstanti iz lema 2.3, 2.4, 2.5 i 2.6 na sledeći način:

$$A_* := c_d(1 - \mathcal{C}_{\frac{k_*}{2}}) \|f\|_{L^1_0}^{-\frac{\gamma}{k_*}} > A_k = c_d(1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}) \|f\|_{L^1_0}^{-\frac{\gamma}{k}} > 0 \tag{2.29}$$

$$B_k := 2 c_g \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \tilde{C}_k \|f\|_{L^1_2} > 0, \tag{2.30}$$

za svako $k > 2$.

Napomena 5. Primjetimo, A_* i B_k ne zavise od vremena, jer $\mathfrak{m}_0$ i $\mathfrak{m}_2$ ne zavise od vremena (zbog zakona odražanja makroskopskih promjenjivih), i A_* ne zavisi od k.

Dokaz. Za test funkcije $\psi_k = \langle v \rangle^k$, slabo rješenje kolizionog operatora (1.20) je dato

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &:= \int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v) \langle v \rangle^{2k} \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f f_* (\langle v' \rangle^k + \langle v'_* \rangle^k - \langle v \rangle^k - \langle v_* \rangle^k) B(|u|, \hat{u} \cdot \sigma) \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Primjenom leme (2.4) o angularnom usrednjavanju, (2.31) je ograničeno sa

$$\begin{aligned}\mathcal{W} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* |u|^\gamma \Big(\tilde{C}_k \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \left(\langle v \rangle \langle v_* \rangle^{k-1} + \langle v \rangle^{k-1} \langle v_* \rangle \right) \\ - \left(1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}\right) \left(\langle v \rangle^k + \langle v_* \rangle^k \right) \Big) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v \end{aligned} \tag{2.32}$$

Zbog integrabilnost svih podintegrabilnih funkcija u (2.32), integral sa desne strane možemo razdvojiti na dijelove koje potiču od apsorpcionog i emisionog dijela koliziong operatora, u oznakama $\mathcal{W}^+$ i $\mathcal{W}^-$ respektivno

$$\mathcal{W}^+ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* |u|^\gamma \tilde{C}_k \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \left(\langle v \rangle \langle v_* \rangle^{k-1} + \langle v \rangle^{k-1} \langle v_* \rangle \right) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v, \tag{2.33}$$

$$\mathcal{W}^- = \frac{1}{2}(1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}) \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* |u|^\gamma \left(\langle v \rangle^k + \langle v_* \rangle^k \right) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v, \tag{2.34}$$

tako da

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^+ - \mathcal{W}^-. \tag{2.35}$$

Primjetimo da su svi članovi u (2.33) i (2.34) pozitivni, pa kako bi dobili najbolju a priori ocjenu koliziong operatora u slaboj formulaciji, $\mathcal{W}^+$ ćemo ograničiti s gornje strane, dok $\mathcal{W}^-$ s donje strane.

Za $|u|^\gamma$ u (2.33) iskoristićemo ograničenje dato u lemi (2.5), čime dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^+ &\leq \frac{1}{2} c_g \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \tilde{C}_k \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* (\langle v \rangle^\gamma + \langle v_* \rangle^\gamma) \left(\langle v \rangle \langle v_* \rangle^{k-1} + \langle v \rangle^{k-1} \langle v_* \rangle \right) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v, \\ &= \frac{1}{2} c_g \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \tilde{C}_k \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* \Big(\langle v \rangle^{1+\gamma} \langle v_* \rangle^{k-1} + \langle v \rangle \langle v_* \rangle^{k-1+\gamma} \\ &\qquad + \langle v \rangle^{k-1+\gamma} \langle v_* \rangle + \langle v \rangle^{k-1} \langle v_* \rangle^{1+\gamma} \Big) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Iskorištavanjem definicije momenta (2.3) i činjenice da su v i v_* nezavisne promjenljive pa možemo izvršiti integraciju po jednoj pa po drugoj, dobijamo da je

$$\mathcal{W}^+ \leq c_g \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \tilde{C}_k \left(\mathfrak{m}_{1+\gamma} \mathfrak{m}_{k-1} + \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_{k-1+\gamma} \right).$$

Zbog monotonosti norme (2.2) slijedi da je

$$\mathcal{W}^+ \leq 2 c_g \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \tilde{C}_k \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_k. \tag{2.36}$$

Sa druge strane za $|u|^\gamma$ u (2.34) iskoristićemo ograničenje dato u lemi 2.6, čime dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^- &= \frac{1}{2}\left(1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}\right) \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f f_* \, |u|^\gamma \left(\langle v \rangle^k + \langle v_* \rangle^k \right) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}\right) \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f \langle v \rangle^k \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_* \, |v - v_*|^\gamma \, \mathrm{d}v_* \right) \mathrm{d}v \right. \\
&\left. + \int_{\mathbb{R}^d} f_* \langle v_* \rangle^k \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \, |v_* - v|^\gamma \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}v_* \right\} \\
&\geq \frac{1}{2} c_d (1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \langle v \rangle^k \langle v \rangle^\gamma \, \mathrm{d}v + \int_{\mathbb{R}^d} f_* \langle v_* \rangle^k \langle v_* \rangle^\gamma \, \mathrm{d}v_* \right).
\end{aligned}$$

Nakon integracije prethodna jednačina zapisana koristeći (2.3) postoje

$$\mathcal{W}^- \geq c_d (1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}) \mathfrak{m}_{k+\gamma}.$$

Pošto je $\langle v \rangle^2$ konveksna funkcija, na definiciju momenta možemo primjeniti Jensenovu nejednakost (A.6) te dobiti

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v) \langle v \rangle^{k+\gamma} \, \mathrm{d}v \geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(v) \mathrm{d}v \right)^{-\frac{\gamma}{k}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(v) \langle v \rangle^k \, \mathrm{d}v \right)^{1+\frac{\gamma}{k}},$$

tako da slijedi

$$\mathcal{W}^- \geq c_d (1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}) \mathfrak{m}_0^{-\frac{\gamma}{k}} \mathfrak{m}_k^{1+\frac{\gamma}{k}}. \tag{2.37}$$

Uvrštavanjem izraza (2.36) i (2.37) u (2.35) dobijamo da je

$$\mathcal{W} \leq -c_d (1 - \mathcal{C}_{\frac{k}{2}}) \mathfrak{m}_0^{-\frac{\gamma}{k}} \mathfrak{m}_k^{1+\frac{\gamma}{k}} + 2 c_g \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \tilde{C}_k \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_k.$$

□

Kombinacijom Bolcmanove jednacine (1.5) i leme o ograničenju kolizionog operatora (2.7) dobijamo običnu diferencijalnu nejednakost za L^1 polinomne momente, definisane u (2.3).

Lema 2.8 (Obična diferencijalna nejednakost za polinomne momente)**.** *Ako je f rješenje Bolcmanove jednačine (1.5) i zadovolja uslove leme (2.7) tada za svako $\gamma \in (0,1]$ važi*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|f\|_{L^1_k}(t) \leq -A_* \|f\|_{L^1_k}^{1+\frac{\gamma}{k}} + B_k \|f\|_{L^1_k}, \tag{2.38}$$

gdje su koeficijenti A_* i B_k dati u (2.29),(2.30) respektivno.

Dokaz. Slijedi direktno iz (1.5) i leme (2.7). □

Primjetimo, da je član uz A_* superlinearan u odnosu na normu $\|f\|_{L^1_k}$, dok član uz B_k linearan što će kasnije biti od značaja.

Teorema 2.9 (Kreacija i propagacija polinomnih momenata)**.** *Neka je f rješenje Bolcmanove jednačine (1.5) i neka je $B(|u|, \hat{u}\cdot\sigma) = |u|^\gamma b(\hat{u}\cdot\sigma)$, pri čemu $\gamma \in (0,1]$ i $b(\hat{u}\cdot\sigma)$ je integrabilno na $\mathbb{S}^{d-1}$, tada sledeće osobine važe*

1. *(Kreacija) Neka je $f_0(v) \in L^1_k(\mathbb{R}^d)$, odnosno $\mathfrak{m}_0[f](0) < \infty$, tada postoji konstanta takva da važi*

$$\mathfrak{m}_k[f](t) \leq \left(\frac{B_k}{A_*}\right)^{\frac{k}{\gamma}} \left(1 - e^{-\frac{\gamma B_k}{k}t}\right)^{-\frac{k}{\gamma}}, \qquad \forall t > 0, \tag{2.39}$$

2. *(Propagacija) Ako je $\mathfrak{m}_k[f](0) < \infty$ onda je*

$$\mathfrak{m}_k[f](t) \leq \max\left\{\left(\frac{B_k}{A_k}\right)^{\frac{k}{\gamma}}, \mathfrak{m}_k[f](0)\right\}, \tag{2.40}$$

   za svako $t \geq 0$.

Dokaz. Posmatrajmo običnu diferencijalnu nejednačinu koja se javlja u (2.38) iz leme 2.8. U slučaju jednakosti ona je u stvari Bernulijeva ODJ. Ideja dokaza je da na osnovu rješenja Bernulijeve ODJ, saznamo više o samim momentima. Bernulijeva ODJ je data sa

$$y'(t) = -a\,y(t)^{1+c} + b\,y(t), \quad \text{sa početnim uslovom } y(0) = y_0 \tag{2.41}$$

i neka su parametri a, b, c dati kao

$$a := A_*,\ b := B_k,\ c := \frac{\gamma}{k}.$$

Rješenje Bernulijeve ODJ možemo dobiti množenjem faktorom $-cy^{-1-c}$ i uvođenjem smjene $v = y^{-c}$, i rješavanjem jednačine (2.41) dobijamo

$$y(t) = \left(\frac{a}{b}\left(1 - e^{-c\,b\,t}\right) + y_0^{-c} e^{-c\,b\,t}\right)^{-\frac{1}{c}}. \tag{2.42}$$

Pokažimo prvo da je rješenje (2.42) monotona funkcija. Funkcija f definisana na sledeći način

$$f(t) = t^{-\frac{1}{c}}, \text{ za } t > 0,$$

je monotono opadajuća jer je

$$f'(t) = -\frac{1}{c} t^{-\frac{1}{c}-1} < 0, \quad \forall t > 0.$$

Sa druge strane funkcija

$$g(t) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-c\,b\,t}\right) + y_0^{-c} e^{-c\,b\,t},$$

je rastuća ili opadajuća u zavisnosti od parametara, jer je

$$g'(t) = e^{-c\,b\,t}(-c\,b)\left(y_0^{-c} - \frac{a}{b}\right) \begin{cases} < 0 & \text{ako je} \quad y_0^{-c} - \frac{a}{b} > 0, \\ > 0 & \text{ako je} \quad y_0^{-c} - \frac{a}{b} < 0, \end{cases}$$

Odakle slijedi da

$$y(t) = f(g(t)) \begin{cases} y(t) \text{ raste} & \text{ako je} \quad y_0 > \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{c}}, \\ y(t) \text{ opada} & \text{ako je} \quad y_0 < \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{c}}. \end{cases}$$

Zbog monotonosti važi

$$\begin{cases} y(t) \to y_0, & x \to 0, \\ y(t) \to \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{c}}, & x \to \infty, \end{cases}$$

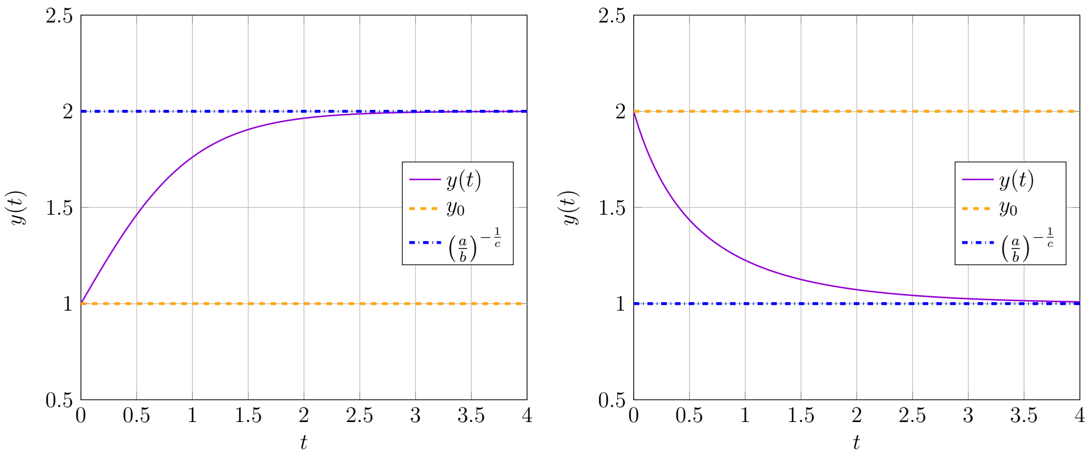
te je zadovoljeno

$$y(t) \leq \max\left\{y_0, \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{c}}\right\}, \tag{2.43}$$

što dokazuje (2.39). Na slici 2.1 je prikazano ponašanje rješenja Bernulije jednačine u zavisnosti koji parametar je veći. Dalje, da bismo pokazali (4.20) u (2.42) zanemarujemo početni uslov, te dobijamo

$$y(t) \leq \left(\frac{a}{b}\left(1 - e^{-c\,b\,t}\right)\right)^{-\frac{1}{c}}, \qquad \forall t > 0. \tag{2.44}$$

□



Slika 2.1: Grafički prikaz rješenja Bernulijeve ODJ, pod uslovom da je $y_0 < \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{c}}$ (lijevo) i $y_0 > \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{c}}$ (desno).

Glava 3

Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Do sada smo vidjeli a priori ocjene za Bolcmanovu jednačinu, koje ćemo iskoristiti da bi pokazali da Košijev problem za Bolcmanovu jednačinu

$$\begin{cases} \partial_t f(t,v) = Q(f,f)(v) \\ f(0,v) = f_0(v), \end{cases} \tag{3.1}$$

ima jedinstveno rješenje za svako $t > 0$. Dokaz će biti baziran na teoriji egizistencije i jedinstvenosti rješenja običnih diferencijalnih jednačina u Banahovim prostorima, čiju prvu ideju je dao Bresan u svojim bilješkama [7]. Alonso, Gamba i Tran su dokazali teoremu radi egzistencije i jedinstvenosti rješenja za kvantnu prostorno homogenu Bolcmanovu jednačinu [2], i njihov dokaz se bazira na osnovu teorema iz [23].

Teorema 3.1. *Neka je $\mathcal{E} := (\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ Banahov prstor, $\mathcal{S}$ je ograničen, konveksan i zatvoren podskup od $\mathcal{E}$, i neka operator $\mathcal{Q} : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ zadovoljava sljedeće osobine:*

(a) Helderovu neprekidnost (Hölder continuity)

$$\|\mathcal{Q}[u] - \mathcal{Q}[v]\| \leq C \|u - v\|^{\beta}, \ \beta \in (0,1), \ \forall u, v \in \mathcal{S};$$

(b) Pod-tangentni uslov (Sub-tangent condition)

$$\lim_{h \to 0+} \frac{dist(u + h\mathcal{Q}[u], \mathcal{S})}{h} = 0, \ \forall u \in \mathcal{S};$$

(c) Jednostrani Lipšicov uslov (One-sided Lipschitz condition)

$$[\mathcal{Q}[u] - \mathcal{Q}[v], u - v] \leq C \|u - v\|, \ \forall u, v \in \mathcal{S},$$

gdje

$$[\varphi, \phi] = \lim_{h \to 0^-} h^{-1} \left(\|\phi + h\varphi\| - \|\phi\| \right). \tag{3.2}$$

Onda jednačina

$$\partial_t u = \mathcal{Q}[u], \text{ za } t \in (0, \infty), \text{ sa početnim uslovom } u(0) = u_0 \text{ u } \mathcal{S},$$

ima jedinstveno rješenje u $C([0,\infty), \mathcal{S}) \cap C^1((0,\infty), \mathcal{E})$.

Dokaz ove teoreme se može pronaći u [2].

Rješenje Košijevog problema (5.41) biće u L^1_2 Banahovim prostorima, odnosno za $\mathcal{E}$ iz prethodne teoreme uzećemo baš L^1_2. Dalje, na osnovu a priori ocjena definišemo ograničen, konveksan i zatvoren podskup Ω od L^1_2 na sljedeći način

$$\Omega = \Big\{ f(v) \in L^1_2 : f \geq 0, \ \exists C_0, C_2, \text{takvi da } \forall t \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(t,v) v \mathrm{d}v = 0$$
$$\mathfrak{m}_0[f](t) = C_0, \ \mathfrak{m}_2[f](t) = C_2, \ \mathfrak{m}_{\hat{k}}[f](t) \leq C_{\hat{k}}, \Big\}. \tag{3.3}$$

pri čemu je $\hat{C}_k$ određeno u propoziciji 1 i $\hat{k} = \max\{2 + 2\gamma, 2 + \delta\}$.

Prvo treba da provjerimo da je kolizioni operator (1.12) preslikavanje $Q : \Omega \to L^1_2$. Za proizvoljno $f \in \Omega$, provjeramo da je $\|Q(f,f)\|_{L^1_2} < \infty$, odnosno

$$\|Q(f,f)\|_{L^1_2} = \int_{\mathbb{R}^d} |Q(f,f)(v)| \langle v \rangle^2 \mathrm{d}v < \infty. \tag{3.4}$$

Apsolutnu vrijednost kolizionog operatora iz jednačine (3.4), možemo zapisati preko funkcije znaka, $|\cdot| = \cdot \mathrm{sign}(\cdot)$, odnosno

$$\|Q(f,f)\|_{L^1_2} = \int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v) \mathrm{sign}\left(Q(f,f)(v)\right) \langle v \rangle^2 \mathrm{d}v. \tag{3.5}$$

Izraz $\mathrm{sign}\left(Q(f,f)(v)\right) \langle v \rangle^2$ se može posmatrati kao test funkcija za slabu formulaciju kolizionog operatora (1.20), pa jednačina (3.5) postaje

$$\|Q(f,f)\|_{L^1_2} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f f_* \left(\langle v' \rangle^2 + \langle v'_* \rangle^2 + \langle v \rangle^2 + \langle v_* \rangle^2 \right) B \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f f_* \left(\langle v \rangle^2 + \langle v_* \rangle^2 \right) B \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v,$$

u poslednjoj jednakosti iskoristili smo zakon održanja mikroskopske energije (1.7). Upotrebom leme 2.5, dobijamo

$$\begin{aligned}\|Q(f,f)\|_{L^1_2} &\leq c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f f_* \left(\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2\right)\left(\langle v\rangle^\gamma + \langle v_*\rangle^\gamma\right) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v \\ &\leq 2c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} \left(\|f\|_{L^1_{2+\gamma}} \|f\|_{L^1_0} + \|f\|_{L^1_\gamma} \|f\|_{L^1_2}\right) \\ &\leq 4c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} \|f\|_{L^1_{2+\gamma}} \|f\|_{L^1_\gamma},\end{aligned}$$

gdje smo iskorisliti monotonost norme (2.2) i čime smo pokazali da $Q(f,f) \in L^1_2$, pošto je $f \in \Omega$.

3.1 Helderova neprekidnost

U ovom dijelu pokazaćemo da važi prvi uslov iz teoreme 3.1, odnosno da je kolizioni operator (1.12) Helder neprekidan.

Lema 3.2 (Helderova neprekidnost)**.** *Za sve funkcije f i g koje pripadaju skupu Ω definisanom u* (3.3)*, sledeća nejednakost je ispunjena*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Q(f,f) - Q(g,g)| \langle v\rangle^2 \,\mathrm{d}v \leq \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} C_H \|f-g\|^{\frac{1}{2}}_{L^1_2} \tag{3.6}$$

gdje je konstanta $C_H = 8c_g C^{\frac{1}{2}}_{2+\gamma}(2C_{2+\gamma} + C_2)$.

Dokaz. Prvo zapišemo razliku dva koliziona operatora koji djeluju na funkcije raspodjele f i g kao zbir i razliku te dvije funkcije raspodjele,

$$Q(f,f) - Q(g,g) = \frac{1}{2}\left(Q(f+g, f-g) + Q(f-g, f+g)\right), \tag{3.7}$$

ovo je moguće zbog bilinearne strukture kolizionog operatora. Tražimo mu L^1_2 normu od poslednjeg izraza

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_H := \|Q(f,f) - Q(g,g)\|_{L^1_2} &= \int_{\mathbb{R}^d} |Q(f,f) - Q(g,g)| \langle v\rangle^2 \,\mathrm{d}v \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left(|Q(f+g, f-g)| + |Q(f-g, f+g)|\right) \langle v\rangle^2 \,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Apsolutnu vrijednost kolizionog operatora ćemo zapisati pomoću funkcije znaka, odnosno $|\cdot| = \cdot\,\mathrm{sign}(\cdot)$, koju možemo razumjeti kao test funkciju.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_H \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} & ((f+g)\,|f_*-g_*| + |f-g|\,(f_*+g_*)) \\ & \times (\langle v'\rangle^2 + \langle v'_*\rangle^2 + \langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2) B \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v \\ = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} & ((f+g)\,|f_*-g_*| + |f-g|\,(f_*+g_*)) \\ & \times (\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2) B \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v,\end{aligned}$$

gdje se poslednja jednakost dobija zbog zakona održanja energije na mikroskopskom nivu (1.7). Pošto je kolizioni prijesek dat sa $B = |u|^\gamma\, b(\hat{u}\cdot\sigma)$, iskoristićemo gornje ograničenje za $|u|^\gamma$ dato u lemi (2.5), te za integrabilno $b(\hat{u}\cdot\sigma)$ dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_H \leq c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} & ((f+g)\,|f_*-g_*| + |f-g|\,(f_*+g_*)) \\ & \times (\langle v\rangle^2 + \langle v_*\rangle^2)(\langle v\rangle^\gamma + \langle v_*\rangle^\gamma) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v \\ \leq 2c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} \Big(& \|f+g\|_{L^1_{2+\gamma}} \|f-g\|_{L^1_0} + \|f-g\|_{L^1_{2+\gamma}} \|f+g\|_{L^1_0} \\ & \|f+g\|_{L^1_\gamma} \|f-g\|_{L^1_2} + + \|f-g\|_{L^1_\gamma} \|f+g\|_{L^1_2}\Big).\end{aligned}$$

Ako iskoristimo monotnost norme (2.2), važi da je

$$\mathcal{I}_H \leq 2c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} \|f-g\|_{L^1_{2+\gamma}} \left(\|f+g\|_{L^1_{2+\gamma}} + \|f+g\|_{L^1_2} \right).$$

Primjenjujući (A.7) dobjamo

$$\|f-g\|_{L^1_{2+\gamma}} \leq \|f-g\|^{\frac{1}{2}}_{L^1_2} \|f-g\|^{\frac{1}{2}}_{L^1_{2+\gamma}},$$

sa druge strane ako iskoristimo osobine skupa Ω

$$\begin{aligned}\|f-g\|^{\frac{1}{2}}_{L^1_{2+\gamma}} &\leq \|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^1_{2+\gamma}} + \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L^1_{2+\gamma}} \leq 2C^{\frac{1}{2}}_{2+\gamma}, \\ \|f+g\|_{L^1_{2+\gamma}} &\leq \|f\|_{L^1_{2+\gamma}} + \|g\|_{L^1_{2+\gamma}} \leq 2C_{2+\gamma}, \\ \|f+g\|_{L^1_2} &\leq \|f\|_{L^1_2} + \|g\|_{L^1_2} \leq 2C_2.\end{aligned}$$

Finalno dobijamo

$$\mathcal{I}_H \leq 8c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} C^{\frac{1}{2}}_{2+\gamma}(2C_{2+\gamma} + C_2) \|f-g\|^{\frac{1}{2}}_{L^1_2}.$$

□

3.2 Pod-tangetni uslov

Pod-tangetni uslov u teoremi 3.1 je dat sa

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\text{dist}\,(u + h\mathcal{Q}[u], \mathcal{S})}{h} = 0, \ \forall u \in \mathcal{S},$$

odnosno da za svako u iz $\mathcal{S}$, distanca $u + h\mathcal{Q}[u]$ i skupa $\mathcal{S}$ kad $h \to 0+$ je jednaka nula.

U našem slučaju, ideja pod-tangetnog uslova je da pokažemo da je presjek lopte sa centrom u $f + hQ(f, f)$ i skupa Ω neprezan skup. Preciznije, za $f \in \Omega$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $h_1 > 0$ tako da lopta sa centrom u $f + hQ(f, f)$ i poluprečnikom $h\varepsilon$, u oznaci $\mathbb{B}(f + hQ(f, f), h\varepsilon)$, daje neprazan skup kad se presječe skupom Ω za svako $0 < h < h_1$. Za svako h_1 imamo da je

$$h^{-1}\text{dist}\,((f + hQ(f, f), \Omega) \leq \varepsilon, \tag{3.8}$$

za svako $0 < h < h_1$. Vidimo da je (3.8) ekivalentan sa pod-tangetnim uslovom iz teorme 3.1, pa ćemo sledećemo propozicijom pokazati da postoji h_1 takvo da je uslov (3.8) zadovoljen.

Propozicija 1. *Za fiksno f koje pripada Ω, važi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $h_1 > 0$ takvo da $\mathbb{B}(f + hQ(f, f), h\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$ za svako $0 < h < h_1$.*

Dokaz. Definišimo prvo pridruženu funkciju raspodjele

$$f_r(t, v) := f(t, v)\mathbb{1}_{\mathbb{B}_r(0)}(v), \tag{3.9}$$

gdje je $\mathbb{1}_{\mathbb{B}_r(0)}(v)$ je indikatorska funkcija za sferu $\mathbb{B}_r(0)$ poluprečnika r definisanu u (2.19). Takođe definišemo propratnu funkciju

$$g_r = f + h\,Q(f_r, f_r), \tag{3.10}$$

za svako $h > 0$. Cilj nam je naći r i h tako da $g_r \in \mathbb{B}(f + hQ(f, f), h\epsilon) \cap \Omega$.

Primjetimo da svako $f \in \Omega$ implicira da je $f_r \in \Omega$. onda koristeći daje kolizioni operator veći od emisionog dijela, dobijamo

$$Q(f_r, f_r)(v) \geq Q^-(f_r, f_r)(v) = -f_r \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} f_{r*} B \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}v_*.$$

Sledeće koristimo donje ograničenje iz leme 2.6, dobijamo

$$Q(f_r, f_r)(v) \geq -c_d f_r (C_0 + C_\gamma)(1 + v^2)^\gamma \geq -c_d(C_0 + C_\gamma)(1 + r^\gamma) f_r.$$

Odakle slijedi da je g_r ograničeno sa

$$g_r \leq f(1 - c_d(C_0 + C_\gamma)(1 + r^\gamma)h) \geq 0$$

za svako h koje zadovoljava

$$h \in \left(0, \frac{1}{c_d(C_0 + C_\gamma)(1 + r^\gamma)}\right).$$

Sledeće, korišćenjem slabe formulacije (1.20) dobijamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f_r, f_r)(v)\mathrm{d}v = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} Q(f_r, f_r)(v) \langle v \rangle^2 \mathrm{d}v = 0,$$

što implicira da je

$$\mathfrak{m}_0[g_r](t) = \mathfrak{m}_0[f](t), \qquad \mathfrak{m}_2[g_r](t) = \mathfrak{m}_2[f](t),$$

nezavisno od r i h, što znači da sva gornja i donja ograničenja za polinomne momente od f važe i za g_r. Definišimo sada preslikavanje $\mathcal{L}_k(x) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}_k(x) := -A_* x^{1+\frac{\gamma}{k}} + B_k x,$$

pri čemu su A_* i B_k pozitivne konstante iz leme 2.7 za svako $\gamma > 0$, $k > 2$. Ovo preslikavanje ima samo jednu netrivijalnu nulu, koja je data sa

$$\hat{x}_k := \left(\frac{B_k}{A_*}\right)^{\frac{k}{\gamma}}, \quad k > k_*, \tag{3.11}$$

pri čemu se $\mathcal{L}_k(x)$ se mijenja vrijednost iz pozitivne u negativnu, za $x > \hat{x}_k$. Sada, neka je $x \geq 0$, tada je zadovoljena nejednakost

$$\mathcal{L}_k(x) \leq \max_{0 \leq x \leq \hat{x}_k} \mathcal{L}_k(x) =: \hat{\mathcal{L}}_k(x),$$

a sam maksimum preslikavanja $\hat{\mathcal{L}}_k(x)$ se lagano računa, te se dobija

$$\hat{\mathcal{L}}_k(x) := \mathcal{L}_k\left(\left(\frac{B_k k}{A_*(k + \gamma)}\right)^{\frac{k}{\gamma}}\right) = \mathcal{L}_k\left(\hat{x}_k^{\frac{k}{\gamma}} \frac{k}{k + \gamma}\right)^{\frac{k}{\gamma}} := K_{\gamma,k} \tag{3.12}$$

gdje $K_{\gamma,k}$ zavisi od $\|f_0\|_{L^1_k}$. Iz leme 2.7 slijedi za svako $k > 2$ važi

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f, f)(v) \langle v \rangle^k \mathrm{d}v \leq \mathcal{L}_k(\mathfrak{m}_k[f]) \leq \hat{\mathcal{L}}_{\gamma,k},$$

i definišemo

$$C_{\hat{k}} = \hat{x}_k + \hat{\mathcal{L}}_{\gamma,k}. \tag{3.13}$$

Za bilo koje $f \in \Omega$, imamo dva slučaja: (i) $\mathfrak{m}_k[f] \leq \hat{x}_k$ ili (ii) $\mathfrak{m}_k[f] > \hat{x}_k$. U prvom slučaju, za g_r dobijamo da je

$$\mathfrak{m}_k[g_r] \leq \hat{x}_k + h \int_{\mathbb{R}^d} Q(f_r, f_r)(v) \langle v \rangle^k \, \mathrm{d}v \leq \hat{x}_k + h\hat{\mathcal{L}}_{\gamma,k} \leq C_{\hat{k}},$$

gdje smo bez gubitka opštosti pretpostavili da je $h \leq 1$. U drugom slučaju, neka je $r = r(f) > 0$, dovoljno veliko da važi uslov $\mathfrak{m}_k[f] > \hat{x}_k$. U tom slučaju je $\mathcal{L}_k$ je negativno, odnosno

$$\mathcal{L}_k(\mathfrak{m}_k[f_r]) \leq 0,$$

odakle slijedi da je

$$\mathfrak{m}_k[g_r] \leq \hat{x}_k + \mathcal{L}_k(\mathfrak{m}_k[f_r]) \leq \hat{x}_k \leq C_{\hat{k}}.$$

Sad zaključujemo da svako $g_r \in \Omega$ ako je $0 < h < h_*$,

$$h = \min\left\{1, \frac{1}{c_d(C_0 + C_\gamma)(1 + r^\gamma)}\right\}.$$

Pokažimo da g_r pripada $\mathbb{B}(f + hQ(f,f), h\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left\| g_r - f - hQ(f,f) \right\|_{L^1_2} &= \left\| Q(f_r, f_r) - Q(f,f) \right\|_{L^1_2} \\ &\leq \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} C_H \left\| f_r - f \right\|_{L^1_2}^{\frac{1}{2}} < h\varepsilon, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili ocjenu iz (3.6) iz leme 3.2. Dokaz završavamo određivanjem paramaterara r i h_1 kao

$$r = \max\{r(f), r(\varepsilon)\}, \qquad h_1 = \min\left\{1, \frac{1}{c_d(C_0 + C_{\frac{\gamma}{2}})(1 + r^\gamma)}\right\}.$$

$\square$

3.3 Jednostrani Lipšicov uslov

Za slučaj $\mathcal{E} = L^1_2$ uslov za $[\varphi, \phi]$ u jednačini (3.2) se svodi na

$$\begin{aligned} [\varphi, \phi] &= \lim_{h \to 0^-} h^{-1}(\|\varphi + h\phi\|_{L^1_2} - \|\varphi\|_{L^1_2}) = \\ &= \lim_{h \to 0^-} \int h^{-1} \left(|\varphi + h\phi| - |\varphi| \right) \langle v \rangle^2 \, \mathrm{d}v = \int \phi \, \mathrm{sign}(\varphi) \langle v \rangle^2 \, \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Poslednji korak slijedi na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji A.9 i izraza

$$h^{-1}\left(|\varphi+h\phi|-|\varphi|\right)\sim\frac{2\varphi\phi+h\phi^2}{|\varphi+h\phi|+|\varphi|}\to\phi\,\mathrm{sign}(\varphi)\quad\text{kad}\quad h\to 0^-.$$

Lema 3.3 (Lipšicov uslov)**.** *Za sve funkcije f i g koje pripradaju Ω, važi*

$$[f-g,Q(f,f)-Q(g,g)]\leq\|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)}\,C_L\,\|f-g\|_{L^1_2},$$

gdj je $C_L=4c_gC_{2+\gamma}$.

Dokaz. Kao kod Helderove neprekidnosti, iskoristićemo osobinu (3.7), odnosno

$$\begin{aligned}I_L:=[f-g,Q(f,f)-Q(g,g)]&\leq\int_{\mathbb{R}^d}(Q(f,f)-Q(g,g))\mathrm{sign}(f(v)-g(v))\,\langle v\rangle^2\,\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}(Q(f+g,f-g)+Q(f-g,f+g))\,\mathrm{sign}(f(v)-g(v))\,\langle v\rangle^2\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Iskoristićemo slabu formulaciju kolizionog operatora za test funkciju apsolutne vrijednosti, te dobijamo

$$\begin{aligned}I_L:=\leq\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}}&((f+g)(f_*-g_*)+(f-g)(f_*+g_*))\\&\times\Big(\mathrm{sign}(f'-g')\,\langle v'\rangle^2+\mathrm{sign}(f'_*-g'_*)\,\langle v'_*\rangle^2\\&\qquad-\mathrm{sign}(f-g)\,\langle v\rangle^2-\mathrm{sign}(f_*-g_*)\,\langle v_*\rangle^2\Big)\,B\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}v_*\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Zbog lakšeg zapisa uvodimo lokalnu notaciju, $h:=f-g$, i

$$\Delta(v,v_*):=\mathrm{sign}(h')\,\langle v'\rangle^2+\mathrm{sign}(h'_*)\,\langle v'_*\rangle^2-\mathrm{sign}(h)\,\langle v\rangle^2-\mathrm{sign}(h_*)\,\langle v_*\rangle^2.$$

Integral I_L u ovoj notaciji postaje

$$I_L\leq\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}}((f+g)(h_*)+(h)(f_*+g_*))\,\Delta(v,v_*)B\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}v_*\mathrm{d}v.$$

Primjetimo da sledeći identiteti važe zbog mikroskopskog zakona održanja energije (1.7)

$$\begin{aligned}h\Delta(v,v_*)&\leq|h|\left(\langle v'\rangle^2+\langle v'_*\rangle^2+\langle v_*\rangle^2-\langle v\rangle^2\right)=2\,|h|\,\langle v_*\rangle^2,\\h_*\Delta(v,v_*)&\leq|h_*|\left(\langle v'\rangle^2+\langle v'_*\rangle^2-\langle v_*\rangle^2+\langle v\rangle^2\right)=2\,|h_*|\,\langle v\rangle^2,\end{aligned}$$

odakle slijedi da je

$$I_L \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^{d-1}} \left((f+g)\,|h_*|\,\langle v\rangle^2 + (f_*+g_*)\,|h|\,\langle v_*\rangle^2 \right) B \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v.$$

Zbog integrabilnost B, i gornjeg ograničenja (2.5) slijedi

$$\begin{aligned} I_L \leq \frac{1}{2} c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} &\left((f+g)\,|h_*|\,\langle v\rangle^2 \right. \\ &\left. +(f_*+g_*)\,|h|\,\langle v_*\rangle^2 \right) (\langle v\rangle^\gamma + \langle v_*\rangle^\gamma) \mathrm{d}v_* \mathrm{d}v \\ \leq c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} &\left(\|f+g\|_{L^1_{2+\gamma}} \|f-g\|_{L^1_0} + \|f+g\|_{L^1_2} \|f-g\|_{L^1_\gamma} \right) \\ &\leq 2c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} \left(\|f+g\|_{L^1_{2+\gamma}} \|f-g\|_{L^1_\gamma} \right), \end{aligned}$$

pri čemu smo u poslijednjoj nejednakosti koristili monotonost normi (2.2). Zbog istog argumenta važi da je

$$\|f-g\|_{L^1_\gamma} \leq \|f-g\|_{L^1_2}, \quad \|f+g\|_{L^1_{2+\gamma}} \leq \|f\|_{L^1_{2+\gamma}} + \|g\|_{L^1_{2+\gamma}} \leq 2C_{2+\gamma},$$

čime dobijamo

$$I_L \leq 4c_g \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1};\mathrm{d}\sigma)} C_{2+\gamma} \|f-g\|_{L^1_2},$$

što završava dokaz. $\square$

3.4 Rješenje Košijevog problema

Na osnovu teoreme 3.1, pri čemu smo provjerili sve potrebne uslove kroz leme 3.2, 1 i 3.3 slijedi egzistencija i jedinstvenost rješenja Košijevog problema (3.1).

Teorema 3.4 (Egzistencija i jedinstvenost rješenja)**.** *Neka je $\gamma \in (0,1]$, b integrabilno i početni uslov $f_0 \in \Omega$, gdje je Ω data u* (3.3)*. Tada, postoji jedinstvena nenegativna funkcija takva da*

$$f(t,v) \in \mathcal{C}([0,\infty);\Omega) \cap \mathcal{C}^1\left((0,\infty); L^1_2\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$

koja rješava Košijev problem (3.1)*.*

Napomena 6. Primjetimo da ova teorema ne zahtjeva uslove koji se odnose na entropiju. Međutim, ako je entropija u početnom trenutku ograničena, na osnovu H-teoreme tj. (1.24) entropija će biti ograničena i u svakom drugom trenutku za $t > 0$.

Glava 4

Košijev problem za mješavinu jednoatomskih gasova

4.1 Osnovni pojmovi kinetičke teorije za mješaviju gasova

Veliki broj mašina koji se javljaju u tehnici za radno tijelo imaju gas, ali taj gas je najčešće mješavina različitih gasova. Između ostalog, zbog toga se javila potreba da se razvije teorija mješavina u sklopu kinetičke teorije. Ovdje ćemo predstaviti osnovne principe kinetčke teorije za mješavine jednoatomskih gasova. Kao prvo, moramo definisati šta je to tačno mješavina, i tu ćemo se pozvati na Truzdela [30], koji je dao osnovne postulate za mješavine:

(i) Sve osobine mješavine moraju biti matematičke posljedice njenih komponenata;

(ii) Da bismo opisali kretanje komponenata, možemo zamisliti da ih izolujemo od ostatka mješavine, pod uslovom da smo pravilno uračunali kako ostatak mješavine djeluje na taj izolovani dio;

(iii) Kretanje cjelokupne mješavine je opisano jednačinama kao kod jednog tijela (intuitivno, mješavina ne zna da je mješavina).

U nastavku iznijećemo osnovne pojmove za mješavine na osnovu [28, 5, 8, 31]. Posmatramo mješavinu od I jednoatomskih gasova, čije komponente označavamo $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_I$. U okvirima kinetičke teorije, svaka komponenta mješavine $\mathcal{A}_i$ je opisana sa sopstvenom funkcijom raspodjele $f_i := f_i(t, x, v)$, koja u opštem slučaju zavisi od vremena $t \geq 0$, pozicije u prostoru $x \in \mathbb{R}^3$ i brzinom čestice $v \in \mathbb{R}^3$. Pošto ćemo posmatrati prostorno homogen slučaj, zavisnost od x će biti zanemarena. Funkcija raspodjele f_i se mjenja zbog binarnih sudara, te u kontekstu mješavine čestice komponente $\mathcal{A}_i$ se sudaraju ne samo same sa sobom već i sa česticama iz $\mathcal{A}_j$, $j \neq i$.

4.1.1 Procesi sudara

Posmatrajmo dvije čestice; jednu iz komponente $\mathcal{A}_i$, čija masa je m_i i pre-koliziona brzina v'_{ij} i drugu koja pripada vrsti $\mathcal{A}_j$ sa masom m_j i pre-kolizionom brzinom v'_{*ij}. Neka su post-kolizione brzine označene sa v and v_*, respektivno, tada pošto posmatramo elastične sudare, zakoni održanja količine kretanja i kinetčke energije glase

$$\begin{aligned} m_i v'_{ij} + m_j v'_{*ij} &= m_i v + m_j v_*, \\ m_i \left|v'_{ij}\right|^2 + m_j \left|v'_{*ij}\right|^2 &= m_i \left|v\right|^2 + m_j \left|v_*\right|^2 . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Standardno, prelazimo u sistem centra mase, pri čemu definišemo

$$V_{ij} := \frac{m_i v + m_j v_*}{m_i + m_j}, \qquad u := v - v_*. \tag{4.2}$$

Kao i obično sistem jednačina (4.1) parametrizujemo pomoću $\sigma \in S^2$, kako bi dobili pre-kolizione brzine pomoću post-kolizionih

$$v'_{ij} = V_{ij} + \frac{m_j}{m_i + m_j} \left|u\right| \sigma, \quad v'_{*ij} = V_{ij} - \frac{m_i}{m_i + m_j} \left|u\right| \sigma, \tag{4.3}$$

ili ekvivaletno, uvodeći parametar mase koji povezuje dvije mase $r_{ij} = \frac{m_i}{m_i+m_j} \in (0,1)$, pridružen čestici mase m_i, bez gubitka opštosti, jer za česticu mase m_j paramter mase $r_{ji} = \frac{m_j}{m_j+m_i} = (1 - r_{ij})$, dobijamo

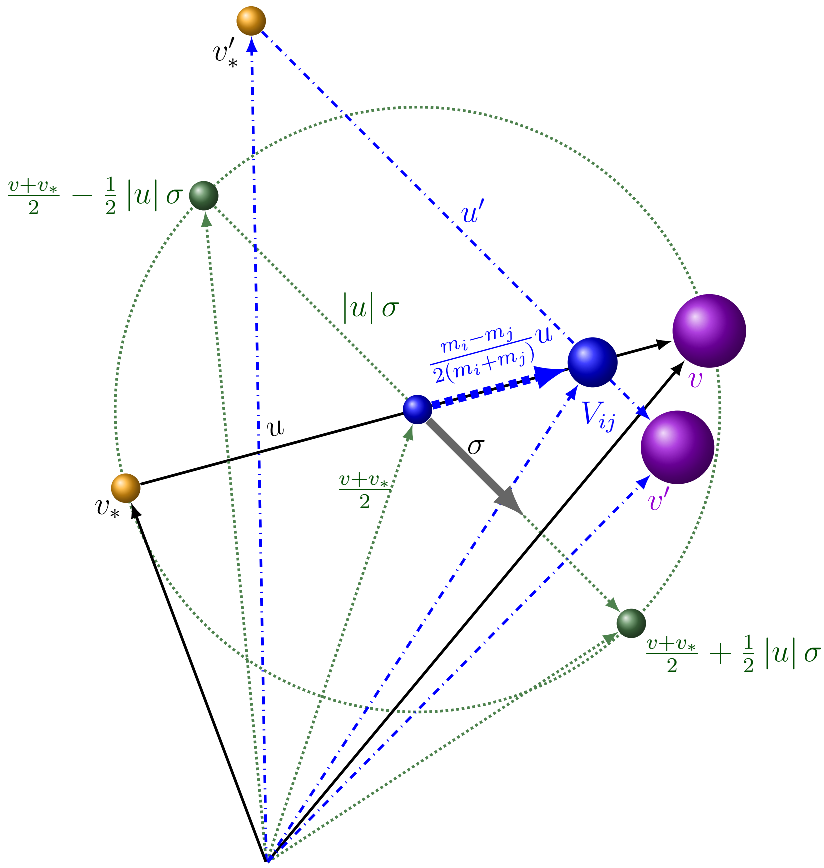
$$v'_{ij} = V_{ij} + (1 - r_{ij}) \left|u\right| \sigma, \quad v'_{*ij} = V_{ij} - r_{ij} \left|u\right| \sigma. \tag{4.4}$$

Primjetimo, u slučaju da su mase jednake $m_i = m_j = m$, jednačine (4.4) se svode na (1.11).

Napomena 7. Da bi olakšali notaciju, nećemo pisati indekse i, j za v'_{ij}, v'_{*ij}, V_{ij} i r_{ij}.

Slika 4.1 ilustruje kolizione transformacije pri različitim masa. Recimo da je ljubičastom bojom označena čestica mase m_i a sa žutom mase m_j. U slučaju kada su mase iste, posle sudara one bi završile na mjestu zelenih kuglica, kao što je na slici 1.1. Ali pošto su mase različite, centar mase sistema se mijenja (mala plava kuglica je pomjerena na mjesto veće plave kuglice). Brzina centra mase (4.2) se može zapisati u obliku

$$V = \frac{v + v_*}{2} + \frac{m_i - m_j}{2(m_i + m_j)} u, \qquad u := v - v_*,$$



Slika 4.1: Ilustracija kolizionih transformacija pri elastičnom sudaru čestica razlčitih masa.

pomjeraj je tačno za $\frac{m_i-m_j}{2(m_i+m_j)}u$, što objašnjava slučaj kad su mase iste, jer bi ovaj član bio jednak nuli.

4.1.2 Kolizioni operator i Bolcmanova jednačina

Fiksirajmo $\mathcal{A}_i$ za bilo koje $i = 1, \ldots, I$, i neka je njena funkcija raspodjele g, s druge strane neka funkcija raspodjele h opisuje komponente $\mathcal{A}_j$. Tada je kolizioni operator dat sa

$$Q_{ij}(g,h)(v) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2} (g(v')h(v'_*) - g(v)h(v_*))\, \mathcal{B}_{ij}(v, v_*, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}v_*, \tag{4.5}$$

gdje su v' i v'_* dati u (4.3), $\mathcal{B}_{ij}(v, v_*, \sigma)$ predstavlja kolizioni presjek, koji zadovoljava pretpostavku o mikroreverzibilnosti

$$\mathcal{B}_{ij}(v, v_*, \sigma) = \mathcal{B}_{ji}(v_*, v, -\sigma).$$

Primjetimo, da za svaki operator Q_{ij} za fiskirani par (i, j) postoji pridruženi operator Q_{ji},

$$Q_{ji}(h, g)(v) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \left(h(w')g(w'_*) - h(v)g(v_*)\right) \mathcal{B}_{ji}(v, v_*, \sigma) \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}v_*, \tag{4.6}$$

gdje pre-kolizione brzine w' i w'_* se razlikuju u odnosu na (4.3), i koje se mogu dobiti promjenom masa $m_i \leftrightarrow m_j$, odnosno

$$w' = \frac{m_j v + m_i v_*}{m_i + m_j} + \frac{m_i}{m_i + m_j} |v - v_*| \, \sigma, \quad w'_* = \frac{m_j v + m_i v_*}{m_i + m_j} - \frac{m_j}{m_i + m_j} |v - v_*| \, \sigma. \tag{4.7}$$

Kada je $m_i = m_j$, iako su pre-kolizione brzine iste, Q_{ij} i Q_{ji} se i dalje razlikuju, jer ne moraju imati isti kolizioni prijesk $\mathcal{B}_{ij}(v, v_*, \sigma) \neq \mathcal{B}_{ji}(v, v_*, \sigma)$. U nastavku ćemo posmatrati kolizioni presjek dat u obliku

$$\mathcal{B}_{ij}(v, v_*, \sigma) = |u|^{\gamma_{ij}} \; b_{ij}(\hat{u} \cdot \sigma), \tag{4.8}$$

pri čemu $\gamma_{ij} \in (0, 1]$ i $b_{ij}(\hat{u} \cdot \sigma) = b_{ji}(\hat{u} \cdot \sigma) \in L^1(\mathbb{S}^2; \mathrm{d}\sigma)$ zavise od komponenata $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$.

Bolcmanova jednačina koja opisuje evoluciju funkcije raspodjele f_i koja opisuje čestice iz $\mathcal{A}_i$ glasi

$$\partial_t f_i(t, v) = \sum_{j=1}^{I} Q_{ij}(f_i, f_j)(t, v), \qquad i = 1, \ldots, I. \tag{4.9}$$

Pošto proučavamo sve komponente mješavine istovremeno, korisno je uvesti sledeću vektorsku notaciju. Sve funkcije raspodjele f_i, $i = 1, \ldots, I$ stavljamo u vektor funkcije raspodjele

$$\mathbb{F} = [f_i]_{1 \leq i \leq I}. \tag{4.10}$$

Takođe uvodimo vektorski kolizioni operator $\mathbb{Q}$, čija je i-ta komponenta

$$[\mathbb{Q}(\mathbb{F})]_i = \sum_{j=1}^{I} Q_{ij}(f_i, f_j). \tag{4.11}$$

Tada sistem Bolcmanovih jednačina (4.9) može biti zapisan u vektorskom obliku

$$\partial_t \mathbb{F}(t, v) = \mathbb{Q}(\mathbb{F})(v). \tag{4.12}$$

Sada prirodno uvodimo pojam slabe formulacije kolizionog operatora u vektorskom obliku (5.16), koja je data sa

$$\sum_{i=1}^{I}\int_{\mathbb{R}^3}[\mathbb{Q}(\mathbb{F})]_i\,\psi_i(v)\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2} f_i(v)f_j(v_*) \\ \times\left(\psi_i(v') + \psi_j(v'_*) - \psi_i(v) - \psi_j(v_*)\right)\mathcal{B}_{ij}(v,v_*,\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}v_*\mathrm{d}v. \quad (4.13)$$

Kao i prije, slaba forma i kolizione invarijante ukazuju na makroskopske veličine koje su očuvane. Preciznije, za svaku funkciju raspodjele $\mathbb{F}$, kada je test funkcija $\psi_i(v) = 1$ dobijamo

$$\int_{\mathbb{R}^3}[\mathbb{Q}(\mathbb{F})]_i\,\mathrm{d}v = 0, \qquad \text{za sve } i = 1,\ldots,I, \quad (4.14)$$

i iz (4.13) za izbor $\psi_\ell(x) = m_\ell\,|x|^2$, i $\psi_\ell(x) = m_\ell x$, $x \in \mathbb{R}^3$, dobijamo na osnovu (4.1)

$$\sum_{i=1}^{I}[\mathbb{Q}(\mathbb{F})]_i\,m_i\,|v|^2\,\mathrm{d}v = 0, \quad (4.15)$$

i

$$\sum_{i=1}^{I}[\mathbb{Q}(\mathbb{F})]_i\,m_i v\,\mathrm{d}v = 0,$$

za sva vremena $t \geq 0$.

4.1.3 Funkcionalni prostori

Definicija 4.1 (Lebegova zagrada za mješavine)**.** Za slučaj mješavina Lebegovu zagradu definišemo na sledeći način

$$\langle v\rangle_i := \sqrt{1 + \frac{m_i}{\sum_{j=1}^{I} m_j}\,|v|^2}, \qquad v \in \mathbb{R}^3. \quad (4.16)$$

Primjetimo da se u samoj definiciji uzima masa konstituenta $\mathcal{A}_i$ podijeljena sa sumom masa svih konstituenata $\mathcal{A}_j,\ \ j = 1,\ldots,I$.
U slučaju mješavina koristimo prostor L^1, ali ovaj put sa drugačije definisanom Lebegovom zagradom, odnosno koristimo (4.16), tj. rješenje Košijevog problema tražićemo u prostorima

$$L^1_k = \left\{\mathbb{F} = [f_i]_{1\leq i\leq I} \text{ mjerljiva} : \sum_{i=1}^{I}\int_{\mathbb{R}^3}|f_i(v)|\,\langle v\rangle_i^k\,\mathrm{d}v < \infty,\ k \geq 0\right\}. \quad (4.17)$$

Pridružena norma, u ovom slučaju je

$$\|\mathbb{F}\|_{L^1_k} = \sum_{i=1}^{I} \int_{\mathbb{R}^3} |f_i(v)| \, \langle v \rangle_i^k \, \mathrm{d}v. \tag{4.18}$$

i naravno kao i prije, važi monotonost normi

$$\|\mathbb{F}\|_{L^1_{k_1}} \leq \|\mathbb{F}\|_{L^1_{k_2}} \text{, za svako } 0 \leq \ k_1 \leq k_2. \tag{4.19}$$

Definicija 4.2. *Skalarni polinomni momenat* reda $q \geq 0$ za vektor $\mathbb{G} = [g_i]_{1 \leq i \leq I}$ je definisan sa

$$\mathfrak{m}_q[\mathbb{G}](t) = \sum_{i=1}^{I} \int_{\mathbb{R}^3} g_i(t, v) \, \langle v \rangle_i^q \, \mathrm{d}v. \tag{4.20}$$

Za $\mathbb{F} \geq 0$, njegova norma L^1_k je tačno jednaka skalarnom polinomnom momentu reda k, odnosno

$$\|\mathbb{F}\|_{L^1_k} := \mathfrak{m}_k[\mathbb{F}].$$

Polinomni momenat reda nula $\mathfrak{m}_0$ se fizički interpretira kao brojna gustina gasa, dok $\mathfrak{m}_2$ ima fizičko tumačenje zbira brojne gustine i gustine energije mješavine. Štaviše, ako $\mathbb{F}$ je rješenje sistema Bolcmanovih jednačina (4.9), onda (4.14) i (4.15) impliciraju očuvanje gustine gase i ukupne energije mješavine. Odnosno,

$$\partial_t \mathfrak{m}_0[\mathbb{F}](t) = 0 \qquad \partial_t \mathfrak{m}_2[\mathbb{F}](t) = 0. \tag{4.21}$$

Preciznije, iz (4.14) važi zakon održanja gustine za svaki konstituent $\mathcal{A}_i$, $\partial_t \mathfrak{m}_{0,i}[\mathbb{F}](t) = 0$, za sve $i = 1, \ldots, I$.

4.2 Fundamentalne leme

U ovom poglavlju ćemo dokazati fundamentalne leme koje ukazuju na disipaciju $\mathfrak{m}_k$ momenata apsorpcionog člana kolizionog operatora, što omogućava dominaciju $\mathfrak{m}_k$ momenata emisionog člana, te na kraju običnu diferencijalnu nejednakost za momente $\mathfrak{m}_k$ rješenja Bolcmanove jednačine, što je ključna apriori ocjena za dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja Košijevog problema.

4.2.1 Energijski identitet

Lema 4.3 (Energijski identitet za mješavine)**.** *Neka je fiksan par čestica (i, j) sa brzinama v and v_*, koje imaju masu m_i i m_j, respektivno. Neka je njihova lokalna energija $E_{ij} = \langle v \rangle_i^2 + \langle v_* \rangle_j^2$, gdje $\langle v \rangle_i^2$ i $\langle v_* \rangle_j^2$ su definisani na osnovu* (4.16)*.*

Tada postoje funkcije $p_{ij} = p_{ij}(v, v_*, m_i, m_j)$ *i* $q_{ij} = q_{ij}(v, v_*, m_i, m_j)$ *takve da* $p_{ij} + q_{ij} = E_{ij}$ *i važi reprezentacija*

$$\langle v'_{ij}\rangle_i^2 = p_{ij} + \lambda_{ij}\,\sigma\cdot\hat{V}_{ij}, \qquad \langle v'_{*ij}\rangle_j^2 = q_{ij} - \lambda_{ij}\,\sigma\cdot\hat{V}_{ij}. \tag{4.22}$$

gdje je $\lambda_{ij} := 2\sqrt{r_{ij}(1-r_{ij})(sE_{ij}-1)((1-s_{ij})E_{ij}-1)}$ *sa* $s_{ij} = s_{ij}(v, v_*, m_i, m_j) \in [0,1]$. *U ovoj reprezentaciji, važi sledeći identitet*

$$\langle v'_{ij}\rangle_i^2 + \langle v'_{*ij}\rangle_j^2 \;=\; p_{ij} + q_{ij} \;=\; E_{ij} \;=\; \langle v\rangle_i^2 + \langle v_*\rangle_j^2\,. \tag{4.23}$$

Štaviše važe sledeće nejednakosti

$$p_{ij} + \lambda_{ij} \le E_{ij}, \quad q_{ij} + \lambda_{ij} \le E_{ij}, \tag{4.24}$$

za sve brzine $v, v_* \in \mathbb{R}^3$ *i sve mase* $m_i, m_j > 0$.

Kao što smo prije rekli, da bi olakšali notaciju, ij indeks će biti izostavljen.

Dokaz. Prirodno prelazimo u sistem centra mase,

$$V = \frac{m_i v + m_j v_*}{m_i + m_j}, \qquad u = v - v_*.$$

A zatim primjetimo da sledeći izrazi važe

$$\begin{aligned} |v'|^2 &= |V|^2 + \frac{m_j^2}{(m_i+m_j)^2}\,|u|^2 + \frac{2m_j}{m_i+m_j}\,|u|\,|V|\,\sigma\cdot\hat{V},\\ |v'_*|^2 &= |V|^2 + \frac{m_i^2}{(m_i+m_j)^2}\,|u|^2 - \frac{2m_i}{m_i+m_j}\,|u|\,|V|\,\sigma\cdot\hat{V}. \end{aligned}$$

Preleženjem u Lebegove zagrade $\langle\cdot\rangle$ koje su definisane u (4.16), dobijamo

$$\begin{aligned} \langle v'\rangle_i^2 &= 1 + \frac{m_i}{\sum_{\ell=1}^I m_\ell}\,|V|^2 + \frac{m_i m_j^2}{(m_i+m_j)^2\sum_{\ell=1}^I m_\ell}\,|u|^2\\ &\qquad\qquad + \frac{2m_i m_j}{(m_i+m_j)\sum_{\ell=1}^I m_\ell}\,|u|\,|V|\,\sigma\cdot\hat{V},\\ \langle v'_*\rangle_j^2 &= 1 + \frac{m_j}{\sum_{\ell=1}^I m_\ell}\,|V|^2 + \frac{m_j m_i^2}{(m_i+m_j)^2\sum_{\ell=1}^I m_\ell}\,|u|^2\\ &\qquad\qquad - \frac{2m_i m_j}{(m_i+m_j)\sum_{\ell=1}^I m_\ell}\,|u|\,|V|\,\sigma\cdot\hat{V}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Uvedimo totalnu energiju E dvije čestice koje se sudaraju u formi Lebegovih zagrada $\langle\cdot\rangle$, što je konzervativna veličina zbog mikroskopskog zakona odražanja energije (4.1) i zakona održanja mase,

$$E := \langle v\rangle_i^2 + \langle v_*\rangle_j^2 = \langle v'\rangle_i^2 + \langle v'_*\rangle_j^2\,.$$

Korištenjem izraza (4.25) i energije E možemo napisati sledeće izraze u sistemu centra mase

$$E = 2 + \frac{m_i + m_j}{\sum_{\ell=1}^{I} m_\ell} |V|^2 + \frac{m_i m_j}{(m_i + m_j)\sum_{\ell=1}^{I} m_\ell} |u|^2 . \tag{4.26}$$

Cilj nam je da predstavimo kvadrate $\langle v' \rangle_i^2$ i $\langle v'_* \rangle_j^2$ kao skalarnu kombinaciju rażlicitih dijelova E. Ovo uspjevamo, uvodeći sledeće parametre

i) parametar $r \in (0,1)$, koji dijeli masu u konveksnu kombinaciju

$$r = \frac{m_i}{m_i + m_j} \quad \text{and} \quad 1 - r = \frac{m_j}{m_i + m_j}, \tag{4.27}$$

ii) funkcija $s \in [0,1]$ koja isto konveksno dijeli E na dva dijela, jedan je povezan sa $|u|^2$ a drugi sa $|V|^2$, korištenjem prethodnog izrzaza (4.26) na sledeći način

$$sE = 1 + \frac{m_i m_j}{(m_i + m_j)\sum_{\ell=1}^{I} m_\ell} |u|^2 \quad \text{and} \quad (1-s)E = 1 + \frac{m_i + m_j}{\sum_{\ell=1}^{I} m_\ell} |V|^2 . \tag{4.28}$$

Konačno, post-kolizione brzine $\langle v' \rangle_i^2$ i $\langle v'_* \rangle_j^2$ se mogu reprezentovati pomoću (4.25), kao funkcije energije E i skalarnog produkta brzine centra mase V i parametra σ na sledeći način

$$\begin{aligned}
\langle v' \rangle_i^2 &= r(1-s)E + (1-r)sE + 2\sqrt{r(1-r)(sE-1)((1-s)E-1)}\, \sigma \cdot \hat{V}, \\
\langle v'_* \rangle_j^2 &= rsE + (1-r)(1-s)E - 2\sqrt{r(1-r)(sE-1)((1-s)E-1)}\, \sigma \cdot \hat{V},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Zatim, uzimajući da su

$$\begin{aligned}
p &= r(1-s)E + (1-r)sE, \\
q &= E - p = rsE + (1-r)(1-s)E, \\
\lambda &= 2\sqrt{r(1-r)(sE-1)((1-s)E-1)} \\
&= 2\sqrt{r(1-r)} \frac{\sqrt{m_i m_j}}{\sum_{\ell=1}^{I} m_\ell} |u| \, |V|,
\end{aligned}$$

jasno je $p + q = E$ i reprezentacija (4.22) pri čemu je održana jednakost (4.23)

$$\langle v' \rangle_i^2 = p + \lambda\, \sigma \cdot \hat{V}, \quad \langle v'_* \rangle_j^2 = q - \lambda\, \sigma \cdot \hat{V},$$

čime smo dokazali (4.22) i (4.23).

Sa druge strane, slijedi

$$\frac{1}{E}(p+\lambda) \leq \left(\sqrt{r(1-s)}+\sqrt{(1-r)s}\right)^2 \leq 1,$$

pošto

$$\max_{\substack{0\leq r\leq 1\\ 0\leq s\leq 1}} \left(\sqrt{r(1-s)}+\sqrt{(1-r)s}\right) = 1.$$

Na sličan način

$$\frac{1}{E}(q+\lambda) \leq \left(\sqrt{rs}+\sqrt{(1-r)(1-s)}\right)^2 \leq 1.$$

□

Usporedimo energijski identitet za mješavine 4.3 i jednokomponentni gas 2.2. Definišimo energiju čestice sa masom m_i

$$\bar{E} = \langle v\rangle_i^2 + \langle v_*\rangle_i^2 = 2 + \frac{2m_i}{\sum_{j=1}^I m_j}|V|^2 + \frac{m_i}{2\sum_{j=1}^I m_j}|u|^2.$$

Kada su $m_i = m_j$ onda je parametar $r = 1/2$, i kao posljedica $\bar{p} := p(v, v_*, m_i, m_i)$, $\bar{q} := q(v, v_*, m_i, m_i)$ i $\bar{\lambda}$ dobijamo

$$\bar{p} = \bar{q} = \frac{1}{2}\bar{E}, \quad \bar{\lambda} = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^I m_j}|u|\,|V|$$

što nam omoguću da dobijemo kvadrate pre-kolizione brzine kada je $m_i = m_j$,

$$\langle v'\rangle_i^2 = \bar{E}\left(\frac{1}{2} + \frac{m_i}{\sum_{j=1}^I m_j}\frac{|u|\,|V|}{\bar{E}}\sigma\cdot\hat{V}\right),$$

$$\langle v'_*\rangle_i^2 = \bar{E}\left(\frac{1}{2} - \frac{m_i}{\sum_{j=1}^I m_j}\frac{|u|\,|V|}{\bar{E}}\sigma\cdot\hat{V}\right).$$

Odakle se vidi da su energijski identiteti za mješavine 4.3 i jedno-komponentni gas 2.2 jednaki. Ali važna razlika je u tome kada je $m_i = m_j$,

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{m_i}{\sum_{j=1}^I m_j}\xi\bar{E},$$

gdj je ξ dato u (2.8). Korišćenjem Jangove nejednakosti (A.4) dobijamo

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{E}} \leq \frac{1}{2},$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{\bar{E}}\left(\bar{p}+\bar{\lambda}\right) = \frac{1}{\bar{E}}\left(\bar{q}+\bar{\lambda}\right) \leq 1.$$

U drugu ruku kada su mase različite $m_i \neq m_j$, upotreba Jangove nejednakosti nije moguća, jer onda dovodi do narušavanja nejednakosti $\bar{p}+\bar{\lambda} \leq E$ i $\bar{q}+\bar{\lambda} \leq E$.

4.2.2 Povznerova Lema

Kod jednokomponentnog jednoatomskog gasa, jedna od ključnih lema je bila Povznerova lema. U ovom dijelu predstavićemo ideju njenog dokaza u kontekstu mješavina i na kraju predstaviti razliku, između ta dva slučaja.

Lema 4.4 (Povznerova lema angularnog usrednjavanja za mješavine)**.** *Neka je angularni dio kolizionog presjeka $b_{ij}(\hat{u}\cdot\sigma)$ integrabilan u odnosu na mjeru* $\mathrm{d}\sigma$. *Tada postoji konstanta $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{ij}_{\frac{k}{2}}$ takva da važi*

$$\int_{S^2}\left(\langle v'\rangle_i^k+\langle v'_*\rangle_j^k\right)\,b_{ij}(\hat{u}\cdot\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\le\boldsymbol{\mathcal{C}}^{ij}_{\frac{k}{2}}\left(\langle v\rangle_i^2+\langle v_*\rangle_j^2\right)^{\frac{k}{2}},\tag{4.30}$$

gdje konstanta $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{ij}_{\frac{k}{2}}$ konvergira ka nuli, kad k raste i postoji $k_*^{ij}>2$ tako da je sledeća nejednakost je ispunjena

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{ij}_{\frac{k}{2}}-\|b_{ij}\|_{L^1(\mathbb{S}^2;\mathrm{d}\sigma)}<0,\qquad \textit{za svako } k\ge k_*^{ij},\quad 1\le i,j\le I,\tag{4.31}$$

gdje svako k_*^{ij} zavisi od b_{ij} i r_{ij}.

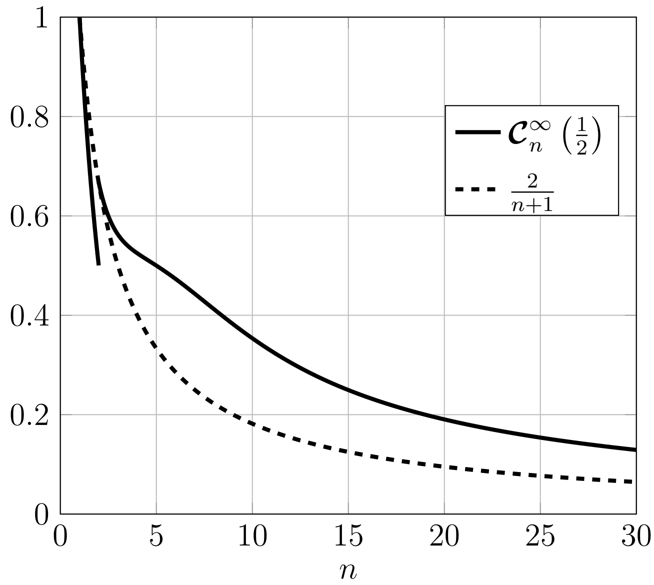
Dokaz. Kao i u slučaju jednokomponentnog gasa, prvi dio dokaza će se oslanjati na energijski identitete (4.22) i (4.23). Tada lijeva strana (4.30) postaje

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^2}&\left(\langle v'\rangle_i^k+\langle v'_*\rangle_j^k\right)b_{ij}(\hat{u}\cdot\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{\mathbb{S}^2}\left(\left(p+\lambda\,\hat{V}\cdot\sigma\right)^{\frac{k}{2}}+\left(q-\lambda\,\hat{V}\cdot\sigma\right)^{\frac{k}{2}}\right)b_{ij}(\hat{u}\cdot\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left((p+\lambda\,\mu)^{\frac{k}{2}}+(q-\lambda\mu)^{\frac{k}{2}}\right)b_{ij}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}\tag{4.32}$$

pri čemu smo σ zapisali u jediničnim sfernim koordinatama i uveli oznaku $\hat{V}\cdot\sigma=\mu$. Ideja dokaza je da se članovi $(p+\lambda\,\mu)^{k/2}$ i $(q-\lambda\,\mu)^{k/2}$ razviju oko $\mu=0$ u Tejlorov red sa integralnim ostatkom korišteći A.8, čime dobijamo

$$\begin{aligned}(p+\lambda\,\mu)^{\frac{k}{2}}&=p^{\frac{k}{2}}+\tfrac{k}{2}p^{\frac{k}{2}-1}\lambda\mu+\tfrac{k}{2}\left(\tfrac{k}{2}-1\right)\lambda^2\mu^2\int_0^1(1-z)(p+\lambda\mu z)^{\frac{k}{2}-2}\mathrm{d}z,\\(q-\lambda\,\mu)^{\frac{k}{2}}&=q^{\frac{k}{2}}-\tfrac{k}{2}q^{\frac{k}{2}-1}\lambda\mu+\tfrac{k}{2}\left(\tfrac{k}{2}-1\right)\lambda^2\mu^2\int_0^1(1-z)(q-\lambda\mu z)^{\frac{k}{2}-2}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Ocjenjivanjem svakog pojedinačnog člana dokazujemo tvrđenje. Zainteresovani čitalac može pronaći dokaz u [19]. □



Slika 4.2: Komparacija Povznerove konstante za $r = \frac{1}{2}$ za mješavine i jednokomponentnog gasa za $n > 1$.

Napomena 8 (Slučaj $b_{ij} \in L^{\infty}(\mathbb{S}^2; d\sigma)$)**.** Kada angularni dio kolizionog presjeka pripada $b_{ij} \in L^{\infty}(\mathbb{S}^2; d\sigma)$ konstanta iz Povznerove leme 4.30 je data sa

$$\mathcal{C}_n^{\infty}(r) = 2\overline{r}^n - 2\frac{\overline{r}^2}{\underline{r}^2}(1-\underline{r})^n - \frac{\overline{r}^2}{\underline{r}}\, n\,(1-\underline{r})^{n-1} + 2\frac{\overline{r}^2}{\underline{r}^3}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{(1-\underline{r})^{n+1}}{n+1}\right), \quad (4.33)$$

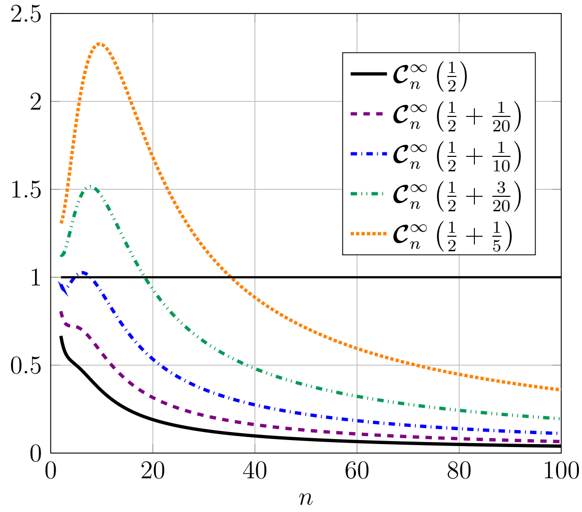
za $n > 2$ i $\mathcal{C}_n^{\infty}(r) = 2\overline{r}^n$ ako $1 < n \leq 2$, pri čemu su $\overline{r} = \max\{r, 1-r\}$ i $\underline{r} = \min\{r, 1-r\}$.

Sada možemo usporediti Povznerove konstante u slučaju mješavina i jednokomponentnog gasa. Prvo, stavimo da je $r = \frac{1}{2}$, i dobijamo da je

$$\mathcal{C}_n^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{4}{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(n + \frac{2}{n+1}\right), \text{if } n > 2, \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{if } 1 < n \leq 2. \end{cases}$$

Sa druge strane Povznerova konstanta za jednokomponente gasove je bila data $\mathcal{C}_n^{\infty} = \frac{2}{n+1}$, i na slici 4.2 su prikaze obje konstante.

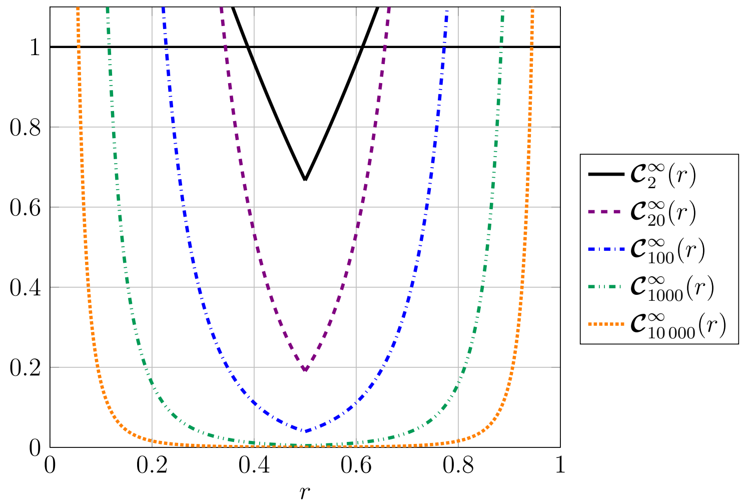
Na slici 4.3 je prikazano kako $\mathcal{C}_n^{\infty}$ zavisi od n za neko fiksno r. Zapaža se da što je veće r, odnosno što je veća razlika masa između komponenti koje se sudaraju, potreban je veći broj momenata kako bi Povznerova konstana $\mathcal{C}_n^{\infty}$ bila manja od



Slika 4.3: Konstanta $\mathcal{C}_n^\infty(r)$ za fiksno $r =: r_*$, gdje prikazuje koliko je potrebno momenata n da bi konstanta $\mathcal{C}_n^\infty(r)$ bila manja od jedan.

jedinice. Tako na primjer, u slučaju da su mase 7 i 3 (u nekim proizvoljnim jedinicama), onda je $r = 0.7$, te potrebno je da $n > 35$ kako bi došlo do disipacije.

Na slici 4.4 je prikazno kako $\mathcal{C}_n^\infty$ zavisi od r za neko fiksno n, odnosno kada fiksiramo n postavlja se pitanje za koje vrijednosti r važi da je Povznerova konstanta manja od jedinice. Tako na primjer, za $n = 100$, r može biti u intervalu $[0.25, 0.75]$, tj. ako su mase atoma takve da je r u ovom intervalu, posle $n = 100$ sigurno će Povznerova konstana biti manja od jedinice.



Slika 4.4: Konstanta $\mathcal{C}_n^\infty(r)$ za fiksno $n =: n_*$, pri čemu je ilustrovano domen od r za koji važi da je $\mathcal{C}_n^\infty(r) < 1$.

4.2.3 Gornje i donje ograničenje

Lema 4.5 (Gornje ograničenje za mješavine za kolizioni presjek)**.** *Neka je $\gamma_{ij} \in (0,1]$ za bilo koje $i, j \in \{1, \dots, I\}$, tada je gornje ograničenje*

$$|v - v_*|^{\gamma_{ij}} \leq \max_{1 \leq i,j \leq I} \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^I m_i}{\sqrt{m_i m_j}} \right)^{\gamma_{ij}} \right) \left(\langle v \rangle_i^{\overline{\gamma}} + \langle v_* \rangle_j^{\overline{\gamma}} \right). \tag{4.34}$$

pri čemu je $\overline{\gamma} = \max_{1 \leq i,j \leq I} \gamma_{ij}$.

Lema 4.6 (Donje ograničenje za mješavine)**.** *Neka je $\gamma_{ij} \in [0,1]$, za svako $i, j \in \{1, \dots, I\}$, i neka $0 \leq \left\{ F(t) = [f_1(t) \dots f_I(t)]^T \right\}_{t \geq 0} \subset L_2^1$ zadovoljava*

$$c \leq \sum_{i=1}^I \int_{\mathbb{R}^3} m_i \, f_i(t,v) \mathrm{d}v \leq C, \qquad c \leq \sum_{i=1}^I \int_{\mathbb{R}^3} f_i(t,v) m_i \, |v|^2 \, \mathrm{d}v \leq C,$$

i

$$\sum_{i=1}^I \int_{\mathbb{R}^3} f_i(t,v) m_i v \mathrm{d}v = 0,$$

za neke pozitivne konstante c and C. Dodatno, zahtjevamo

$$\sum_{i=1}^I \int_{\mathbb{R}^3} f_i(t,v) m_i \, |v|^{2+\delta} \, \mathrm{d}v \leq \Delta, \quad \delta > 0.$$

Tada postoji c_d, takva da važi

$$\sum_{i=1}^{I} \int_{\mathbb{R}^3} m_i f_i(t,w)\, |v-w|^{\gamma_{ij}}\, \mathrm{d}w \geq c_d \, \langle v \rangle_j^{\underline{\gamma}}\,, \tag{4.35}$$

za svako $j \in \{1, \dots, I\}$, sa $\underline{\gamma} = \min_{1 \leq i,j \leq I} \gamma_{ij}$. Preciznije, c_d je dato sa

$$c_d = \frac{c}{2}\tilde{c} \left(2^{2+\delta} \left(\frac{\max\{C, \Delta\}}{c} \right) \left(1 + \frac{1}{\underline{\mathbf{m}}^2} \left(\frac{4\,C}{\tilde{c}\,c} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \right)^{\frac{2+\delta}{2}} \right)^{\frac{-2+\underline{\gamma}}{\delta}} \times \left(1 + \left(\frac{\overline{\mathbf{m}}}{\underline{\mathbf{m}}} \right)^2 \left(\frac{4\,C}{\tilde{c}\,c} \right)^{\frac{2}{\underline{\gamma}}} \right)^{-\underline{\gamma}/2},$$

pri čemu su $\tilde{c} = \min_{1 \leq i,j \leq I} \left(\min\{1, 2^{1-\gamma_{ij}}\} \right)$, i

$$\underline{\mathbf{m}} := \sqrt{\frac{\min_{1 \leq j \leq I} m_j}{\sum_{i=1}^{I} m_i}}, \qquad \overline{\mathbf{m}} := \sqrt{\frac{\max_{1 \leq j \leq I} m_j}{\sum_{i=1}^{I} m_i}}.$$

Kao i prije gornje ograničenje je tačkasto u odnosu na Lebegovu mjeru, dok je donje ograničenje u funkcionalnom obliku. Bitna razlika u odnosu na jednokomponentni gas jeste da je donje ograničenje dato u odnosu na najmanje γ_{ij}, dok je gornje ograničenje dato za najveće γ_{ij}. Kao i prije donje ograničenje će mnogo uticati na izbor prostora za rješenje.

4.2.4 L^1_k a priori ocjene za momente

Jedna od ključnih ocjena koju su potrebni za egzistenciju jeste L^1_k a priori ocjena kolizionog operatora. Ovakva ocjena će nam omogućiti kontrolu kolizionog operatora što je bitno kod teorije egzistencije ODJ u Banahovim prostorima.

Lema 4.7. *Neka je $\mathbb{F} = [f_i]_{i=1,\dots,I} \in L^1_2$ i $k_* \geq \max\{\overline{k}, 2+2\overline{\gamma}, 2+\delta\}$, pri čemu je $\overline{k} = \max_{1 \leq i,j \leq I}\{k_*^{ij}\}$ iz Povznerove leme za mješavine 4.4. Tada je zadovoljena sledeća nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{I} \int_{\mathbb{R}^3} [\mathbb{Q}(\mathbb{F})]_i \, \langle v \rangle_i^k \, \mathrm{d}v \leq -A_{k_*}\, \mathfrak{m}_k[\mathbb{F}](t)^{1+\frac{\underline{\gamma}}{k}} + B_k\, \mathfrak{m}_k[\mathbb{F}](t), \tag{4.36}$$

sa pozitivnim konstantama $A_k \geq A_{k_*}$ i B_k za $k \geq k_*$,

$$\begin{aligned} A_{k_*} &= \min_{1 \leq i,j \leq I} \left(\|b_{ij}\|_{L^1(\mathrm{d}\sigma)} - \boldsymbol{\mathcal{C}}^{ij}_{\frac{k_*}{2}} \right) \frac{c_d}{\max_{1 \leq i \leq I} m_i} \left(I \mathfrak{m}_0[\mathbb{F}] \right)^{-\frac{\underline{\gamma}}{k_*}}, \\ B_k &= 2\, \mathfrak{m}_2[\mathbb{F}] \max_{1 \leq i,j \leq I} \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{I} m_i}{\sqrt{m_i m_j}} \right)^{\gamma_{ij}} \boldsymbol{\mathcal{C}}^{ij}_{\frac{k}{2}} \right) \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{k}{\ell}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

gdje je c_d iz leme 4.6, a $\mathcal{C}^{ij}_{\frac{k}{2}}$ je Povznerova konstanta.

4.3 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

U ovom dijelu predstavićemo teoriju egzistencije i jedinstevnosti za vektor funkcije raspodjele $\mathbb{F}$ za početni problem

$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{F}(t,v) = \mathbb{Q}(\mathbb{F})(v), & t>0, \ v \in \mathbb{R}^3, \\ \mathbb{F}(0,v) = \mathbb{F}_0(v), \end{cases} \tag{4.38}$$

za prostorno homogenu Bolcmanovu jednačinu u kontekstu mješavina, pri čemu su kolizioni prjesjeci zavisni od $\mathcal{A}_i$ i $\mathcal{A}_j$, $i,j \in \{1,\ldots,I\}$ u obliku čvrstih potencijala $|u|^{\gamma_{ij}}$ za $\gamma_{ij} \in (0,1]$ i integrabilnim angularnim dijelom b_{ij}. Na osnovu leme 4.7, dobijamo k_*,

$$k_* \geq \max\{\overline{k}, 2+2\overline{\gamma}, 2+\delta\} \qquad \text{za } \ \overline{k} = \max_{1\leq i,j\leq I}\{k_*^{ij}\}$$
$$\text{i } \ \underline{\gamma} = \min_{1\leq i,j\leq I} \gamma_{ij}, \quad \overline{\gamma} = \max_{1\leq i,j\leq I} \gamma_{ij}. \tag{4.39}$$

Kako bi primjenili teoremu 3.1, potrebno je da nađemo oblast $\Omega \subset L^1_2$ u kojoj kolizioni operator (4.11) $\mathbb{Q}: \Omega \to L^1_2$ zadovoljava Helderovu neprekidnost, pod-tangetni uslov i jednostrani Lipšicov uslov.

Zbog pod-tangetnog uslova, posmatrajmo preslikavanje $\mathcal{L}_{\underline{\gamma},k_*} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definisano sa

$$\mathcal{L}_{\underline{\gamma},k_*}(x) = -Ax^{1+\frac{\underline{\gamma}}{k_*}} + Bx,$$

gdje su A i B pozitivne konstante, $\underline{\gamma} \in (0,1]$ and k_* defined in (4.39). Ovo preslikavanje ima jednu netrivijalnu nulu, označimo je sa $x^*_{\underline{\gamma},k_*}$, za koju $\mathcal{L}_{\underline{\gamma},k_*}$ mijenja znak iz pozitivnog u negatvno. Tada za svako $x \geq 0$, možemo napisati

$$\mathcal{L}_{\underline{\gamma},k_*}(x) \leq \max_{0\leq x\leq x^*_{\underline{\gamma},k_*}} \mathcal{L}_{\underline{\gamma},k_*}(x) =: \mathcal{L}^*_{\underline{\gamma},k_*},$$

a zatim definišemo sledeću konstantu

$$C_{k_*} := x^*_{\underline{\gamma},k_*} + \mathcal{L}^*_{\underline{\gamma},k_*}. \tag{4.40}$$

Sada smo u mogućnosti da definišemo ograničen, konveksan i zatvoren skup $\Omega \subset L^1_2$

takav da važi

$$\Omega = \Big\{ \mathbb{F}(t,\cdot) \in L^1_2 : \mathbb{F} \geq 0, \sum_{i=1}^{I} \int_{\mathbb{R}^3} m_i v\, f_i(t,v) \mathrm{d}v = 0,$$
$$\exists\, C_0, C_2, C_{k_*} > 0 \quad \text{takvi da } \forall t \geq 0,$$
$$\mathfrak{m}_0[\mathbb{F}](t) = C_0,\ \mathfrak{m}_2[\mathbb{F}](t) = C_2, \quad \mathfrak{m}_{k_*}[\mathbb{F}](t) \leq C_{k_*} \text{iz } (4.40) \Big\}.$$

Kao što vidimo da bi definisali skup Ω iskoristili smo uslove leme o donjem ograničenju 4.6 i potrebne uslove da bi zadovoljili pod-tangetni uslov.

Napomena 9. Ključna razlika između mješavine i jedno-komponentnog jednoatomskog gasa jeste konstanta C_{k_*}. Kod jedno-komponentnog je bilo potrebno samo, $\hat{k} = \max\{2+2\gamma, 2+\delta\}$ momenata i nije bilo uslova iz Povznerove leme, odnosno već za $k > 2$ konstanta $\mathcal{C}_{\frac{k}{2}}$ iz leme 2.3 je bila manje od jednice. Sa druge strane kod mješavine jednoatomskih gasova potrebni su jači uslovi, pa tražimo maksimum po svim konstituentima te tako dobijamo k_* (4.39).

Teorema 4.8 (Egzistencija i jedinstevnost za mješavine)**.** *Pretpostavimo da je* $\mathbb{F}(0,v) = \mathbb{F}_0(v) \in \Omega$*. Onda Košijev problem* (4.38) *za kolizioni presjek* (4.8) *ima jedinstveno rješenje u* $\mathcal{C}\left([0,\infty), \Omega\right) \cap \mathcal{C}^1\left((0,\infty), L^1_2\right)$.

Glava 5

Košijev problem za višeatomske gasove

5.1 Osnovni pojmovi kinetičke teorije za više-atomske gasove

Većina gasova koji se javljaju u prirodi su u molekularnom stanju, odnosno njihova struktura je bazirana na vezi između dva ili više atoma. Neki od klasičnih primjera su molekuli vodonika H_2, kiseonika O_2, ugljenik-4-okisida CO_2 i drugi. Unutrašnja struktura molekula je izrazito kompleksna i u opštem slučaju se opisuje korišćenjem kvantne mehanike, pri čemu se uzimaju u obzir interkacije između elektrona u elektronskom oblaku molekula, uticaj jezgra na same elektrone i među djelovanje jezgra jednog atoma na jezgro drugog. Pošto klasična fizika ne može opisate sve ove interakcije, ideja je da se kinetički model pojednostavi, te pretpostavljamo da molekuli imaju mikroskopsku unutrašnju energiju, koja je posljedica ovih interakcija. Što se tiče samog opisa višeatomskih gasova, u literaturi su najčešća dva pravca, kontinualni i diskretni. Diskretni model uzima da unutrašnja energija može poprimati tačno određene vrijednosti energije, pa slijedi da je sam spektar unutrašnje energije diskretan, odakle potiče sam naziv modela. Za više o diskretnim modelima pogledati [24, 32, 13]. Kontinualni model za višeatomske gasove se bazira na tome da je unutrašnja energija neprekidna promjenljiva, te se uspostavlja veza između unutrašnje energije i broja stepeni slobode koji određeni molekul posjeduje. U nastavku mi ćemo predstaviti kontinualni model, čije osnovne karakteristike se mogu naći u [6, 16, 9].

5.1.1 Procesi sudara

Posmatrajmo dva molekula, koji imaju brzine i unutrašnju energiju (v', I'), $(v'_*, I'_*) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ prije sudara, dok posle sudara poprimaju vrijednosti (v, I) i (v_*, I_*), respektivno. Pošto posmatramo elastične sudare, očuvani su količina kretanja i ukupna energija

$$\begin{aligned} v + v_* &= v' + v'_*, \\ \frac{m}{2}|v|^2 + I + \frac{m}{2}|v_*|^2 + I_* &= \frac{m}{2}|v'|^2 + I' + \frac{m}{2}|v'_*|^2 + I'_*. \end{aligned} \tag{5.1}$$

U jednačinama (5.1) se uočava prva razlika za višeatomske gasove u odnosu na jednoatomske. Kod jednoatomskih se očuvala samo kinetička energija (jer unutruašnju energiju ne posjeduju), dok kod višeatomskih gasova dolazi do konzervacije cjeloukupne energije, tj. zbira kinetičke i unutrašnje energije. Kao i obično prelazimo u centar mase, te uvodimo relativnu brzinu u i brzinu centra mase V na sledeći način

$$V := \frac{v + v_*}{2}, \quad u := v - v_*. \tag{5.2}$$

Tada ukupna energija molekula (5.1) se može zapisati na sledeći način

$$\frac{m}{4}|u|^2 + I + I_* = \frac{m}{4}|u'|^2 + I' + I'_* =: E. \tag{5.3}$$

Sa druge strane, zakon odražanja količine kretanja postaje

$$V = V', \tag{5.4}$$

kao što je bilo i prije u slučaju jednoatomskih.

Želja nam je da pre-kolizione veličine v', I', v'_*, I'_* zapišemo pomoću post-kolizionih. Kako bi ovo uradili pozivamo se na Bornake-Larsen proceduru [15], koja će nam omogućiti parametrizaciju u obliku duple konveksne kombinacije. Uvodimo parametar $R \in [0, 1]$, koji dijeli ukupnu energiju na dva dijela, jedan koji pripada kinetičkoj energiji a drugi dio koji je posljedica unutrašnjih energija molekula

$$\frac{m}{4}|u'|^2 = RE, \quad I' + I'_* = (1 - R)E.$$

Dodatno, uvodimo $r \in [0, 1]$ kako bi podijelili dio energije $(1 - R)E$ na njene konstituente I', I'_*, na sledeći način

$$I' = r(1 - R)E, \qquad I'_* = (1 - r)(1 - R)E. \tag{5.5}$$

Na kraju uvodimo paramterar $\sigma \in S^2$, kao kod jednoatomskih gasova, kako bi parametrizovali relativnu brzinu molekula prije sudara.

$$u' = |u'|\,\sigma = 2\sqrt{\frac{RE}{m}}\sigma. \tag{5.6}$$

Primjetimo, u slučaju nepostojanja unutrašnjih energija molekula, poslednji izraz se svodi na klasičan izraz za jednoatomske gasove, $|u'| = |u|$.

Konačno, uvođenjem svih ovih parametara, u mogućnosti smo da napišemo pre-kolizione brzine pomoću post-kolizionih

$$v' = V + \sqrt{\frac{RE}{m}}\sigma, \quad v'_* = V - \sqrt{\frac{RE}{m}}\sigma. \tag{5.7}$$

Da bi došli do strukture kolizionog operatora za višeatomske gasove, potrebno je da znamo Jakobijan preslikavanja pri prelazu iz pre-kolizionih u post-kolizione veličine, i tu nam pomaže sledeća lema.

Lema 5.1. *Jakobijan transformacije*

$$T : (v, v_*, I, I_*, r, R, \sigma) \mapsto (v', v'_*, I', I'_*, r', R', \sigma'), \tag{5.8}$$

gdje su brzine v' i v'_* definisane u (5.7), energije I' i I'_* u (5.5), u

$$r' = \frac{I}{I + I_*} = \frac{I}{E - \frac{m}{4}|u|^2}, \quad R' = \frac{m|u|^2}{4E}, \quad \sigma' = \frac{u}{|u|}, \tag{5.9}$$

je dat sa

$$J_T = \frac{(1-R)R^{1/2}}{(1-R')R'^{1/2}} = \frac{(1-R)|u'|}{(1-R')|u|}. \tag{5.10}$$

Dokaz ove leme se može pronaći u [17].

Sledeća lema omogućiće nam da nađemo invarijantu u odnosu na procese sudara. Ta invarijanta će sadržati faktor $I^\alpha I_*^\alpha$ koja je izrazito bitna za modelovanje višeatomskih molekula. Kao što ćemo vidjeti parametar α je vezan za broj stepeni slobode D, koji se "krije" u ukupnoj energiji cijelog gasa,

$$\rho e = \frac{D}{2}kT, \tag{5.11}$$

pri čemu za višeatomske gasove $D > 3$, dok za jednoatomske $D = 3$. Definišemo sledeće particione funkcije

$$\varphi_\alpha(r) := (r(1-r))^\alpha, \qquad \psi_\alpha(R) := (1-R)^{2\alpha}. \tag{5.12}$$

Lema 5.2. *Za svako $\alpha > -1$, pri promjeni varijabli*

$$(v, v_*, I, I_*, R, r, \sigma) \leftrightarrow (v', v'_*, I', I'_*, R', r', \sigma'), \tag{5.13}$$

$$(v, v_*, I, I_*, R, r, \sigma) \leftrightarrow (v_*, v, I_*, I, R, 1-r, -\sigma), \tag{5.14}$$

sledeća mjera ostaje invarijanta

$$\mathrm{d}A = \mathcal{B}(v, v_*, I, I_*, R, r, \sigma)\,\varphi_\alpha(r)\,(1-R)R^{1/2}\psi_\alpha(R)\,I^\alpha I_*^\alpha\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}r\mathrm{d}R\mathrm{d}I_*\mathrm{d}I\mathrm{d}v_*\mathrm{d}v. \tag{5.15}$$

Dokaz se može naći u [17].

5.1.2 Kolizioni operator i Bolcmanova jednačina za višeatomske gasove

Struktura kolizionog operatora za višeatomske gasove prvo je data u [6]. Funkcija raspodjele je data prirodno u Banahovom prostoru $L^1(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ za varijable v i I.

Kolizioni operator u jakoj formulaciji je dat u obliku

$$Q(f,g)(v,I) = \int_{\Delta\times\mathbb{K}} \left(f' \, g'_* \left(\frac{I \, I_*}{I' \, I'_*} \right)^{\alpha} - f g_* \right) \\ \times \mathcal{B}\,(1-R)\,R^{1/2}\,\varphi_\alpha(r)\,\psi_\alpha(R)\mathrm{d}R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}I_*\,\mathrm{d}v_*, \quad (5.16)$$

$\alpha > -1$, sa funkcijama $\varphi_\alpha(r)$, $\psi_\alpha(R)$ iz (5.12), v', v'_* su definisani u (5.7). Za prostor nad kojim integralimo smo uveli sledeće oznake

$$\Delta := \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \qquad \text{and} \qquad \mathbb{K} := [0,1]^2 \times \mathbb{S}^2, \quad (5.17)$$

pri čemu Δ se odnosi na prostor brzina i energije, dok $\mathbb{K}$ se odnosi na prostor parametara r, R, σ. Takođe, koristili smo standardnu notaciju za funkciju raspodjele $f' := f(t,v',I')$, $g'_* := g(t,v'_*,I'_*)$, $f := f(t,v,I)$, $g_* := g(t,v_*,I_*)$.

Kolizioni presjek, je dat sa

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}(v,v_*,I,I_*,R,r,\sigma) \geq 0, \quad (5.18)$$

koji je invarijantan u odnosu na promjene varijabli (5.13) i (5.14).

Kolizioni operator (5.16) možemo zapisati na malo drugačiji način ako izvučemo član $(I\,I_*)^\alpha$ iz emisionog dijela,

$$Q(f,g)(v,I) = \int_{\Delta\times\mathbb{K}} \left(\frac{f' \, g'_*}{(I' \, I'_*)^{\alpha}} - \frac{f g_*}{(I\,I_*)^{\alpha}} \right) \\ \times \mathcal{B}\,(1-R)\,R^{1/2}\,\varphi_\alpha(r)\,\psi_\alpha(R) I^\alpha I_*^\alpha \mathrm{d}R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}I_*\,\mathrm{d}v_*. \quad (5.19)$$

Ovaj zapis je dosta praktičniji za kasniji rad, pogotovo kad definišemo makroskopske promjenljive i slabo rješenje.

Lema 5.3. *Neka je $\chi(v,I) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takva da*

$$\int_{\Delta} Q(f,g)(v,I)\,\chi(v,I)\,\mathrm{d}I\,\mathrm{d}v \quad (5.20)$$

ima smisla. Tada slaba formulacija kolizionog operatora (5.16) *je dato sa*

$$\begin{aligned}
&\int_\Delta Q(f,g)(v,I)\,\chi(v,I)\,\mathrm{d}I\,\mathrm{d}v \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{\Delta^2\times K} f g_* \left(\chi(v',I') + \chi(v'_*,I'_*) - \chi(v,I) - \chi(v_*,I_*)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \times \mathcal{B}\,\mathrm{d}\sigma\,\varphi_\alpha(r)\mathrm{d}r\,(1-R)R^{1/2}\,\psi_\alpha(R)\mathrm{d}R\,\mathrm{d}I_*\,\mathrm{d}v_*\mathrm{d}I\,\mathrm{d}v \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{\Delta^2\times K} \frac{f g_*}{(II_*)^\alpha} \left(\chi(v',I') + \chi(v'_*,I'_*) - \chi(v,I) - \chi(v_*,I_*)\right)\mathrm{d}A,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

gdje je mjera $\mathrm{d}A$ *data u* (5.15)*.*

Dokaz se može naći u [17].

Kolizione invarijante za ovaj kinetički model, tj. funkcije $\chi(v,I)$ takve da

$$\int_\Delta Q(f,g)(v,I)\,\chi(v,I)\,\mathrm{d}I\,\mathrm{d}v = 0,$$

su linearna kombinacija sledećih funkcija

$$\chi_1(v,I) = m, \qquad \chi_k(v,I) = m\,v_k,\;\; k=1,2,3, \qquad \chi_5(v,I) = \frac{m}{2}\,|v|^2 + I.$$

Evolucija funkcije raspodjele za višeatomske gasove $f = f(t,v,I)$ je data sa Bolcmanovom jedačinom

$$\partial_t f = Q(f,f)(v,I), \tag{5.22}$$

gdje se kolizioni operator dat u (5.16) ili ekvivaletno (5.19).

5.2 Fundamentalne leme i pretpostavke

5.2.1 Funkcionalni prostori

Kao i u prošlim dijelovima, prvo uvodimo Lebegovu zagradu ili težinu za brzine $v \in \mathbb{R}^3$ i mikroskopsku unutrašnju energiju $I \in \mathbb{R}_+$

$$\langle v, I\rangle = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\,|v|^2 + \frac{I}{m}},. \tag{5.23}$$

Naravno, odavde slijedi prirodan Banahov prostor u kojem ćemo tražiti rješenje Bolcmanove jednačine (5.22)

$$L^1_k = \left\{ f \text{ mjerljiva} : \int_\Delta |f(v,I)|\,\langle v,I\rangle^k\,\mathrm{d}I\mathrm{d}v < \infty,\;\; k \geq 0 \right\}, \tag{5.24}$$

gdje je $\Delta = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ iz (5.17). Zatim definišemo normu

$$\|f\|_{L^1_k} = \int_\Delta |f(v, I)| \langle v \rangle^2 \, \mathrm{d}I \mathrm{d}v. \tag{5.25}$$

Prisjetimo se da i u prethodnim slučajevima, važila je monotonost norme, odnosno

$$\|f\|_{L^1_{k_1}} \leq \|f\|_{L^1_{k_2}} \quad \text{whenever } 0 \leq \; k_1 \leq k_2. \tag{5.26}$$

Definicija 5.4. Polinomni momenat reda $k \geq 0$ za funkciju g je definisan sa

$$\mathfrak{m}_k[g](t) = \int_\Delta g(t, v, I) \, \langle v, I \rangle^k \, \mathrm{d}I \, \mathrm{d}v,$$

Primjetimo da ako je $f \geq 0$, važi da je $\mathfrak{m}_k[f](t) = \|f\|_{L^1_k}(t)$.

Fizička intepretacija polinomnih momenata za funkciju raspodjele f se dobija za $k = 0$ i $k = 2$. Naime, $m \, \mathfrak{m}_0$ se može intepretirati kao gustina gasa, dok je $m \, \mathfrak{m}_2$ zbir gustine i totalne energije gasa,

$$m \, \mathfrak{m}_0 = \rho, \qquad m \, \mathfrak{m}_2 = \rho + \frac{\rho}{2} |U|^2 + \rho \, e,$$

gdje je U srednja brzina gasa, ρe gustine unutrašnje energije gasa.

Kao što je pokazano u [26] za ravnotežnu raspodjelu, unutrašnja energija postaje

$$\rho \, e = \left(\alpha + \frac{5}{2} \right) n \, k \, T. \tag{5.27}$$

Upoređivanjem poslednje jednačine sa jednačinom (5.11) postaje jasno da su D iz (5.11) i α iz (5.27), povezani na sledeći način

$$\alpha = \frac{D - 5}{2}.$$

Pošto za višeatomske gasove $D > 3$ to implicira da je $\alpha > -1$.

Ako je f rješenje Bolcmanove jednačine (5.22), onda integracijom sa kolizionim invarijantama dobijamo makroskopske zakone održanja,

$$\partial_t m \mathfrak{m}_0[f] = 0, \qquad \partial_t m \mathfrak{m}_2[f] = 0.$$

	Translacije i rotacije		Translacije, rotacije i vibracije
	Linearni molekuli	Nelinearni molekulu	
Stepeni slobode D	5	6	$3\mathcal{N}$
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(3\mathcal{N}-5)$

Tabela 5.1: Veza između parametar α i stepeni slobode D molekula, koji je sačinjen od $\mathcal{N} \geq 2$ atoma.

5.2.2 Kolizioni presjek $\mathcal{B}$

Jedan od najvećih problema za kinetičku teoriju višeatomskih gasova jeste oblik funkcije kolizionog presjeka. Odnosno postavlja se pitanje kojeg oblika može biti kolizioni presjek $\mathcal{B}$, a da je pri tome moguće pokazati egzistenciju i jedinstvenost rješenja za što veću klasu modela koji će imati fizičkog smisla.

U slučaju jednoatomskog gasa, kolizioni presjek je bio oblika $B = |u|^\gamma\, b(\hat{u}\cdot\sigma)$ što se ispostavlja da ima veliku opštost i da se može dati teorija egzistencije i jedinstvenosti. Prisjetimo se da je za jednoatomski gas, mikroskopski zakon održanja kinetičke energije glasio $|u'| = |u|$. Zbog toga su Gamba, Pavić-Čolić [20] pretpostvile da kolizioni presjek u slučaju višeatomskih gasova, mora imati istu osobinu, odnosno da je kolizioni presjek mora imati mirkoreverzibilnu strukturu i da u nekom obliku podsjeća na zakon održanja ukupne energije (pošto smo kod višeatomskih gasova, ne očuvava se samo kinetička energija).

Pretpostavka 5.5 (Oblik kolizionog presjeka $\mathcal{B}$)**.** Neka je $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}(v, v_*, I, I_*)$ definisan sa

$$\tilde{\mathcal{B}}(v, v_*, I, I_*) := |u|^\gamma + \left(\frac{I+I_*}{m}\right)^{\gamma/2}, \quad u := v - v_*, \quad \gamma \in (0,1]. \tag{5.28}$$

Pretpostavljamo da kolizioni presjek $\mathcal{B} := \mathcal{B}(v, v_*, I, I_*, r, R, \sigma)$ ima sledeću osobinu

$$d_\gamma^d(r)\, e_\gamma^d(R)\, b(\hat{u}\cdot\sigma)\, \tilde{\mathcal{B}} \leq \mathcal{B} \leq d_\gamma^g(r)\, e_\gamma^g(R)\, b(\hat{u}\cdot\sigma)\, \tilde{\mathcal{B}}, \tag{5.29}$$

za svako $v, v_* \in \mathbb{R}^3$, $I, I_* \in [0,\infty)$, $r, R \in [0,1]$, $\sigma \in S^2$, $\hat{u} = u/|u|$, gdje b, $d_\gamma^g(r)$, $d_\gamma^d(r)$, $e_\gamma^g(R)$, i $e_\gamma^d(R)$ zadovoljavaju sledeće uslove integrabilnosti

1. angularni dio b je integrabilan
$$b(\hat{u}\cdot\sigma) \in L^1(\mathbb{S}^2; \mathrm{d}\sigma); \tag{5.30}$$

2. funkcije $d_\gamma^g(r)$ i $d_\gamma^d(r)$ su integrabilne u donosu na mjeru $\varphi_\alpha(r)\mathrm{d}r$, gdje je $\varphi_\alpha(r)$ iz (5.12),
$$d_\gamma^g(r)\varphi_\alpha(r), \quad d_\gamma^d(r)\varphi_\alpha(r) \in L^1([0,1]; \mathrm{d}r), \tag{5.31}$$

i dodatno

$$d^g_\gamma(r) = d^{\mathrm{g}}_\gamma(1-r), \quad d^d_\gamma(r) = d^{\mathrm{d}}_\gamma(1-r),$$

što omogućava da je zadovoljena druga mikroreverzibilna osobina (5.14);

3. funkcije $e^g_\gamma(R)$ i $e^d_\gamma(R)$ su integrabilne u odnosu na mjeru $\psi_\alpha(R)(1-R)R^{1/2}\mathrm{d}R$, gdje je ψ_α iz (5.12), odnosno

$$e^g_\gamma(R)\psi_\alpha(R)(1-R)R^{1/2}, \quad e^d_\gamma(R)\psi_\alpha(R)(1-R)R^{1/2} \in L^1([0,1];\mathrm{d}R). \quad (5.32)$$

Napomena 10. Primjetimo da uslovi (5.31) i (5.32) sadrže $d^d_\gamma(r)$ i $d^g_\gamma(r)$ pomnožene sa particione funkcije za unutrašnju energiju molekula $\varphi_\alpha(r)$; isto tako $e^d_\gamma(R)$ i $e^g_\gamma(R)$ su pomnožene sa $\psi_\alpha(R)$. Zbog toga uvodimo nove konstante, u smislu usrednjavanja po parametru na sledeći način

$$c^d_{\gamma,\alpha} := \int_0^1 d^d_\gamma(r)\varphi_\alpha(r)\mathrm{d}r, \quad C^d_{\gamma,\alpha} := \int_0^1 e^d_\gamma(R)\psi_\alpha(R)(1-R)R^{1/2}\mathrm{d}R,$$
$$c^g_{\gamma,\alpha} := \int_0^1 d^g_\gamma(r)\varphi_\alpha(r)\mathrm{d}r, \quad C^g_{\gamma,\alpha} := \int_0^1 e^g_\gamma(R)\psi_\alpha(R)(1-R)R^{1/2}\mathrm{d}R.$$

Pod datim pretpostavkama 5.5, moguće je odrediti tri modela kolizionog presjeka takvih da oni imaju smisla. Na kraju ćemo pokazati da jedan od tih modela, ima fizičkog smisla, dok za druga dva potrebno je jos istraživanja.

Model 1 (totalna energija)

Posmatrajmo sve ukupno energiju u sistemu centra mase, odnosno kolizioni presjek tada možemo zapisati kao

$$\mathcal{B}(v, v_*, I, I_*, r, R, \sigma) = b(\hat{u}\cdot\sigma)\left(\frac{m}{4}|v-v_*|^2 + I + I_*\right)^{\gamma/2}, \qquad \gamma \in (0,1].$$

Tada $\mathcal{B}$ je oblika iz (5.29) sa koeficijentima

$$d^d_\gamma(r) = d^g_\gamma(r) = 1, \quad e^d_\gamma(R) = m^{\gamma/2}2^{-(\gamma/2+1)}, \quad e^g_\gamma(R) = m^{\gamma/2},$$

Model 2 (dekompozicija kinetičke i unutrašnje energije)

U ovom modelu, kinetička energija i unutrašnja energija molekula su podjeljene pomoću parametra $R \in [0,1]$,

$$\mathcal{B}(v, v_*, I, I_*, r, R, \sigma) = b(\hat{u}\cdot\sigma)\left(R^{\gamma/2}|v-v_*|^\gamma + (1-R)^{\gamma/2}\left(\frac{I+I_*}{m}\right)^{\gamma/2}\right),$$

za $\gamma \in (0,1]$. Tada $\mathcal{B}$ je oblika iz (5.29) sa koeficijentima

$$d_\gamma^d(r) = d_\gamma^g(r) = 1, \quad e_\gamma^d(R) = \min\{R,(1-R)\}^{\gamma/2}, \quad e_\gamma^g(R) = \max\{R,(1-R)\}^{\gamma/2}.$$

drugi mogući izbor je

$$d_\gamma^d(r) = d_\gamma^g(r) = 1, \quad e_\gamma^d(R) = R^{\gamma/2}(1-R)^{\gamma/2}, \quad e_\gamma^g(R) = 1.$$

Model 3 (totalna dekompozicija kinetičke i unutrašnje energije)

U ovom modelu, pored parametrizacije po R, kao u modelu 2. 5.2.2, totalna dekompozicija se dobija kada razdvojimo unutrašnje energije pomoću paramatera $r \in [0.1]$, odnosno

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(v,v_*,I,I_*,r,R) = b(\hat{u}\cdot\sigma)\Big(R^{\gamma/2}|v-v_*|^\gamma \\ + \left(r(1-R)\frac{I}{m}\right)^{\gamma/2} + \left((1-r)(1-R)\frac{I_*}{m}\right)^{\gamma/2}\Big),\end{aligned} \tag{5.33}$$

za $\gamma \in (0,1]$. Tada $\mathcal{B}$ je oblika iz (5.29) sa koeficijentima

$$\begin{aligned} d_\gamma^d(r) = \min\{r,(1-r)\}^{\gamma/2}, \quad d_\gamma^g(r) = 1, \\ e_\gamma^g(R) = 2^{1-\gamma/2}\max\{R,(1-R)\}^{\gamma/2}, \quad e_\gamma^d(R) = \min\{R,(1-R)\}^{\gamma/2},\end{aligned}$$

ili

$$d_\gamma^d(r) = r^{\gamma/2}(1-r)^{\gamma/2}, \quad d_\gamma^g(r) = 1, \quad e_\gamma^g(R) = 2^{1-\gamma/2}, \quad e_\gamma^d(R) = R^{\gamma/2}(1-R)^\gamma,$$

Detaljini opisi i svi proračuni se mogu naći u [20]. Za model 3, u radu [17] je prikazana veza sa proširenom termodinamikom u kontekstu teorije šest i četrnaest momenata.

5.2.3 Energijski identitet

Kao i prije želimo da možemo energiju definisanu preko Lebegovih zagrada (5.23), $E^{\langle\rangle} = \langle v, I\rangle^2 + \langle v_*, I_*\rangle^2$ i pre-kolizione brzine i unutrašnje energije molekula.

Lema 5.6 (Energijski identitet za višeatomske gasove)**.** *Neka su v', v'_*, I' i I'_* definisanu u odnosu na kolizione transformacije (5.7) i (5.5). Tada postoje konveksni parametri $p = p(v,v_*,I,I_*,r,R)$ i $q = q(v,v_*,I,I_*,r,R)$, takvi da $p+q=1$, i funkcija $s = s(v,v_*,I,I_*,R)$ takva da održava sledeću jednakost*

$$\langle v', I'\rangle^2 = E^{\langle\rangle}\left(p + s\hat{V}\cdot\sigma\right), \qquad \langle v'_*, I'_*\rangle^2 = E^{\langle\rangle}\left(q - s\hat{V}\cdot\sigma\right).$$

Štaviše, ova reprezentacija održava totalnu energiju molekula,

$$\langle v', I'\rangle^2 + \langle v'_*, I'_*\rangle^2 = E^{\langle\rangle}\Big((p + s\hat{V}\cdot\sigma) + (q - s\hat{V}\cdot\sigma)\Big) \equiv E^{\langle\rangle}. \tag{5.34}$$

5.2.4 Usrednjavanje po kompaktnoj mnogostrukosti za više-atomske gasove

U kontekstu jednokomponentnih jednoatomskih gasova i mješavine jednoatomskih gasova jedna od ključnih lema je bila Povznerova, te se prirodno javlja ideja da dokažemo njen analogon za višeatomske gasove. Bitna je razlika u tome što smo prije radili usrednjavanje po paramatru σ i tako dobijali disipaciju za dovoljno veliko k, dok sada imamo parametre r, R, σ te trebamo usrednjavati po njima. Kao što ćemo vidjeti, integracije po r i σ će biti dovoljne za pokazivanje disipacije. Tako da nam ostaje usrednjavanje po r, σ, odnosno integrali po prostoru $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$, te ovakav prostor ima osobine mnogostrukosti, štaviše ima osobine kompakte mnogostrukosti. Pod kompaktnom mnogostrukosti smatramo mnogostrukost koja ima iste osobine kao topološki prostori $T4$ u odnosu na prirodnu strukturu atlasa.

Lema 5.7 (Usrednjavanje po kompaktnoj mnogostrukosti)**.** *Neka su v', v'_*, I' i I'_* date u (5.7) i (5.5). Neka funkcije $b(\sigma \cdot \hat{u})$, $d_\gamma^g(r)$ i $e_\gamma^g(R)$ zadovoljavaju uslove integrabilnosti (5.30), (5.31) i (5.32). Onda sledeća ocjena važi*

$$\int_{\mathbb{K}} \left(\langle v', I'\rangle^k + \langle v'_*, I'_*\rangle^k\right) b(\hat{u}\cdot\sigma)\, d_\gamma^g(r)\, \varphi_\alpha(r) \mathrm{d}r\, \mathrm{d}R\, \mathrm{d}\sigma$$
$$\leq 2C^g_{\gamma,\alpha}\, \mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \left(\langle v, I\rangle^2 + \langle v_*, I_*\rangle^2\right)^{\frac{k}{2}}, \quad (5.35)$$

gdje konstanta $\mathcal{C}_{\frac{k}{2}}$ ima osobinu $\mathcal{C}_{\frac{k}{2}} \searrow 0$, kad $k \to \infty$ i postoji $\bar{k} > 2$ takvo da

$$2\,\mathcal{C}_{\frac{k}{2}} < \|b\|_{L^1(\mathrm{d}\sigma)} \left\|d_\gamma^g\, \varphi_\alpha\right\|_{L^1(\mathrm{d}r)}, \quad k > \bar{k}. \quad (5.36)$$

Šta više, kada je $b(\sigma \cdot \hat{u}) \in L^\infty(S^2; \mathrm{d}\sigma)$ i $d_\gamma^g(r)\varphi_\alpha(r) \in L^\infty([0,1]; \mathrm{d}r)$, dobijamo da je

$$\mathcal{C}_{\frac{k}{2}} < 4\pi\, \|b\|_{L^\infty(\mathrm{d}\sigma)} \left\|d_\gamma^g\, \varphi_\alpha\right\|_{L^\infty(\mathrm{d}r)}, \qquad k > \bar{k}, \quad (5.37)$$

i ponašanje je oblika

$$\mathcal{C}_n \sim \frac{1}{n}, \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

5.2.5 Ograničenja za kolizioni presjek $\tilde{B}$

Kao i u prethodnim slučajevima, leme o donjem i ogrnjem ograničenju igraju bitnu ulogu. U jednu ruku su korisne za same a priori ocjene, dok u drugu lema o donjem ograničenju nam govori o dopustivim kolizionim presjecima i utiče na skup funkcija koje mogu biti rješenje Bolcmanove jednačine.

Lema 5.8 (Donje ograničenje za višeatomske gasove)**.** *Neka je $\gamma \in [0,1]$. Za funkciju $0 \leq \{f(t)\}_{t\geq 0} \subset L^1_2$ koja zadovoljava*

$$\mathcal{M}_d \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(t,v,I)\mathrm{d}v\mathrm{d}I \leq \mathcal{M}_g, \qquad \mathcal{E}_d \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\left(\frac{1}{2}|v|^2 + \frac{I}{m}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}I \leq \mathcal{E}_g$$

za neke pozitivne konstante $\mathcal{M}_d, \mathcal{M}_g, \mathcal{E}_d, \mathcal{E}_g$ i

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)v\mathrm{d}v = 0.$$

Dodatno pretpostavimo da postoji $\Delta > 0$ za neko $\delta > 0$ da važi

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\left(\frac{1}{2}|v|^2 + \frac{I}{m}\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \mathrm{d}v\mathrm{d}I \leq \Delta.$$

Tada postoji konstanta $c_d > 0$, takva da konvlucija $f \in L^1_2$ i polinomnog momenta stepena γ je ograničena s donje strane u odnosu na Lebegovu mjeru, odnosno

$$f * \left(|v|^\gamma + \left(\frac{I}{m}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t,\omega,J)\left(|v-\omega|^\gamma + \left(\frac{I+J}{m}\right)^{\frac{\gamma}{2}}\right)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}J \geq c_d \langle v, I\rangle^\gamma,$$

preciznije c_d je dato sa

$$c_d = \frac{\min\{\mathcal{M}_d, \mathcal{E}_d\}}{8}\left(\frac{2^{4+\delta}}{\mathcal{E}_d}\max\{\mathcal{M}_g, \Delta\}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(1 + \left(8\frac{\mathcal{M}_g + \mathcal{E}_g}{\mathcal{M}_d}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\frac{2+\delta}{2\delta} - \frac{\gamma}{2}},$$

za $\gamma \in (0,1]$, a ako je $\gamma = 0$ onda je $c_d = 2$.

Dokaz ove leme je malo komplikovaniji nego u slučaju jednoatomskih gasova i može se naći u [20].

Lema 5.9. *Za svako $\gamma \in (0,1]$, sledeća nejednakost je zadovoljena*

$$|v - v_*|^\gamma + \left(\frac{I + I_*}{m}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \leq 2^{\frac{3\gamma}{2}-1}\left(\langle v, I\rangle^\gamma + \langle v_*, I_*\rangle^\gamma\right),$$

za sve $v, v_* \in \mathbb{R}^3$ i $I, I_* \in [0,\infty)$.

5.2.6 L^1_k a priori ocjene za polinomne momente

A priori ocjenu su od izrazitog značaja. One utiču na prostor u kojem ćemo tražiti rješenje Košijevog problema, a i daju sama ograničenja kolizionog operatora.

Lema 5.10 (Ograničenje momenata kolizionog operatora)**.** *Neka $f \in L^1_2$ zadovoljava uslove leme 5.8. Takođe, neka kolizioni presjek $\mathcal{B}$ zadovoljava pretpostavke 5.5. Onda za svako $\gamma \in (0,1]$, sledeća nejednakost važi*

$$\mathfrak{m}_k[Q(f,f)(v,I)] = \int_\Delta Q(f,f)(v,I)\, \langle v, I\rangle^k \mathrm{d}I\mathrm{d}v \le -A_{k_*} \|f\|^{1+\frac{\gamma}{k}}_{L^1_k} + B_k \|f\|_{L^1_k}, \tag{5.38}$$

za dovoljno veliko k,

$$k > k_*, \qquad k_* = \max\left\{\bar{k}_*, 2+2\gamma, 2+\delta\right\} \tag{5.39}$$

pri čemu je $\bar{k}_*$ iz leme 5.7 o angularnom usrednjavanju na kompaktnoj mnogostrukosti. Za takvo k_*, konstante $A_{k_*} \ge A_k$ i B_k koje su definisane dole, su strogo pozitivne,

$$\begin{aligned} A_{k_*} = c_d\ \|f\|^{-\frac{\gamma}{k}}_{L^1_0} \Big(&\|b\|_{L^1(\mathbb{S}^2;\mathrm{d}\sigma)} \left\|d^d_\gamma\, \varphi_\alpha\right\|_{L^1([0,1];\mathrm{d}r)} \left\|e^d_\gamma(R)\,(1-R)R^{1/2}\psi_\alpha(R)\right\|_{L^1([0,1];\mathrm{d}R)} \\ &-2\,\mathcal{C}_{k_*} \left\|e^g_\gamma(R)\,(1-R)R^{1/2}\psi_\alpha(R)\right\|_{L^1([0,1];\mathrm{d}R)}\Big), \end{aligned} \tag{5.40}$$

$$B_k = \mathcal{C}_k \left\|e^g_\gamma(R)\,(1-R)R^{1/2}\psi_\alpha(R)\right\|_{L^1([0,1];\mathrm{d}R)}\ 2^{\frac{3\gamma}{2}+1}\ \|f\|_{L^1_2} \left(\sum_{\ell=1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor} \binom{k}{\ell}\right).$$

5.3 Egzistencija i jedinstvenost za višeatomske gasove

Kao i do sad, tražimo rješenje Košijevog problema, u ovom slučaju

$$\begin{cases} \partial_t f(t,v,I) = Q(f,f)(v,I) \\ f(0,v,I) = f_0(v,I), \end{cases} \tag{5.41}$$

pod pretpostavkama 5.5 o kolizionom presjeku $\mathcal{B}$.

Potreban uslov za egzistenciju jeste ograničenost momenta reda k_*, pri čemu je

$$k_* := \max\left\{\bar{k}_*, 2+2\gamma, 2+\delta\right\}. \tag{5.42}$$

Ovo je posljedica leme o angularnom usrednjavanju na kompaktnoj mnogostrukosti 5.7 i donjeg ograničenja 5.8, oni će omogućiti da polinomni momenti emisionog člana budu veći od apsorpcionog. Sada, definišemo zatvoren, konveksan i ograničen skup $\Omega \subset L^1_2$,

$$\Omega = \Big\{ f(v,I) \in L_2^1 : f \geq 0, \quad \int_{\Delta} v\, f \,\mathrm{d}I\,\mathrm{d}v = 0,$$
$$\exists C_0,\ C_2,\ C_{k_*} > 0 \quad \text{takvi da} \ \ \forall t \geq 0,$$
$$\mathfrak{m}_0[f](t) = C_0,\ \mathfrak{m}_2[f](t) = C_2,\ \mathfrak{m}_{k_*}[f](t) \leq C_{k_*},\ \text{with } k_* \text{ from } (5.42) \Big\}. \quad (5.43)$$

Da bi zadovoljili pod-tangetni uslov u teoremi 3.1, definišemo sledeće preslikavanje $\mathcal{L}_{\gamma,k_*} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_{\gamma,k_*} := -A\, x^{1+\frac{\gamma}{k_*}} + Bx,$$

gdje su A i B pozitivne konstante za svako $\gamma > 0$ i svako k_* iz (5.42). Kao što smo vidjeli prije, ovakvo preslikavanje ima samo jednu netrivijalnu nulu, te možemo definisati pozitivnu konstantu

$$C_{k_*} := x^*_{\gamma,k_*} + \mathcal{L}^*_{\gamma,k_*}.$$

tako da je Ω dobro definisan. Konačno možemo dati teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti.

Teorema 5.11 (Egzistencija i jedinstvenost za višeatomske gasove)**.** *Neka je $f(0,v,I) = f_0(v,I) \in \Omega$. Tada Košijev problem (5.41) sa kolizionim presjekom $\mathcal{B}$ koji zadovoljava pretpostavke 5.5 ima jedinstveno rješenje u*

$$\mathcal{C}\left([0,\infty), \Omega\right) \cap \mathcal{C}^1\left((0,\infty), L_1^1\right).$$

Glava 6

Zaključak

Pitanje egzistencije rješenja Bolcmanove jednačine je bio otvoren problem skoro stotinu godina. U ovom radu smo izložili teoriju za egzistenciju i jedinstvenost rješenja za prostorno homogenu Bolcmanovu jednačinu, kada možemo da primjenimo teoriju običnih diferencijalnih jednačina u Banahovim prostorima.

Ključni momenat jeste određivanje Bahanovog prostora, kada kinetička teorija pokazuje svu svoju ljepotu, u smislu da je nerazdvojna od fizike samog problema. Tako energijski identitet nas navodi na pravilno definisanje Lebegove zagrade, dok Povznerova lema koja govori o disipaciji, nameće nam odgovarajući Bahanov prostor u kojem kasnije tražimo rješenje Košijevog problema za Bolcmanovu jednačinu. Disipacija apsorpcionog dijela kolizionog operatora u kombinaciji sa ograničenjem od dole njegovog emisionog dijela nam daje običnu diferencijalnu nejednačinu za polinomni momenat rješenja Bolcmanove jednačine. Ključno zapažanje jeste da polinomni momenat kolizionog operatora postaje negativan kada uključimo dovoljno velik red momenta. Ovo nam omogućuje dobijanje a priori ocjenu za polinomni momenat rješenja Bolcmanove jednačine kao i dokazivanje njihove kreacije i propagacije. Konačno, svi opisani alati se koriste za dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja Košijevog problema.

Sa druge strane, tek nedavno je uspostavljena teorija egzistencije i jedinstevnosti u kontekstu višeatomskih gasova i mješavina jednoatomskih gasova. U ovom radu je prezentovan pregled tih rezultata sa naglaskom na specifičnosti i razlike u odnosu na klasični slučaj jednokomponentnih jednoatomskih gasova.

Zaintersovanost naučne zajednice za ovakve probleme u zamahu i mnogi problemi su još uvijek otvoreni. I na kraju, ne zaboravimo da je gas koji dišemo mješavina različitih višeatomskih gasova.

Dodatak A

Pomoćne nejednakosti i teoreme

Lema A.1 (Polinomna nejednakost I). *Neka je $p > 1$ i $l_p = \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$. Tada za sve $x, y > 0$ važi nejednakost*

$$(x+y)^p - x^p - y^p \leq \sum_{l=1}^{l_p} \binom{p}{l} (x^l y^{p-l} + x^{p-l} y^l). \tag{A.1}$$

Dokaz ove leme se može naći u [4].

Lema A.2 (Polinomna nejednakost II). *Neka je $b + 1 \leq a \leq \frac{p+1}{2}$. Tada za svako $x, y \geq 0$ važi*

$$x^a y^{p-a} + x^{p-a} y^a \leq x^b y^{p-b} + x^{p-b} y^b. \tag{A.2}$$

Dokaz ove leme se može naći u [29]

Lema A.3 (Polinomna nejednakost III). *Neka za svako $i = 1, ..., n$ važi $x_i \geq 0$ i neka je $p \geq 1$. Tada je*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^p, \tag{A.3}$$

obrnute nejednakosti važe u slučaju $p \in (0, 1)$.

Dokaz ove leme se može naći u [21]

Lema A.4 (Jangova nejednakost). *Neka su a, b nenegativni realni brojevi, i neka su $p, q > 1$ brojevi koji zadovoljavju $p^{-1} + q^{-1} = 1$, tada je*

$$a\ b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{A.4}$$

Lema A.5 (Helderova nejednakost)**.** *Neka su $p, q \geq 1$ brojevi koji zadovoljavju $p^{-1} + q^{-1} = 1$, tada za sve mjerljive funkcije nad prostoru $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ važi*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q . \tag{A.5}$$

Lema A.6 (Jensenova nejednakost)**.** *Neka je $f(x)$ pozitivna i integrabilna funkcija u $\mathbb{R}^d$ i G konveksna funkcija. Tada*

$$G\left(\frac{1}{\int f(x)\mathrm{d}x}\int f(x)g(x)\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{\int f(x)\mathrm{d}x}\int f(x)G(g(x))\mathrm{d}x, \tag{A.6}$$

za bilo koju pozitivnu funkciju g.

Lema A.7 (Interpolaciona nejednakost)**.** *Neka je $k = \alpha k_1 + (1-\alpha)k_2$, $\alpha \in (0,1)$, $0 < k_1 \leq k \leq k_2$. onda za svako $g \in L^1_k$*

$$\|g\|_{L^1_k} \leq \|g\|^{\alpha}_{L^1_{k_1}} \|g\|^{1-\alpha}_{L^1_{k_2}} . \tag{A.7}$$

Dokaz slijedi primjenom Helderove (A.5) i Jensenove (A.6) nejednakosti.

Teorema A.8 (Tejlorova teorema sa integralnim ostatkom)**.** *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima $k+1$ neprekidan izvod u okolini tačke $x = a$. Tada je*

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}\mathrm{d}t$$

Teorema A.9 (Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji)**.** *Neka je (f_n) niz kompleksnih funkcija na X sa svojstvima:*

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *u X;*

(ii) Postoji funkcija $g \in L^1(X,\mu)$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi da je $|f_n(x)| \leq g(x)$ u X.

Tada $f \in L^1(X,\mu)$ i važi

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f - f_n|\,\mathrm{d}\mu = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

Bibliografija

[1] R. J. Alonso and I. M. Gamba, Revisiting the Cauchy problem for the Boltzmann equation for hard potentials with integrable cross section: from generation of moments to propagation of L^∞ bounds, preprint, 2018.

[2] R. J. Alonso, I. M. Gamba and M. B.Tran, The Cauchy problem for the quantum Boltzmann equation for bosons at very low temperature, preprint, ArXiv 1609.07467.v2.

[3] A. V. Bobylev, Moment inequalities for the Boltzmann equation and applications to spatially homogeneous problems, *J. Statist. Phys.*, **88**: 1183–1214, 1997.

[4] A. V. Bobylev, I. M. Gamba, and V. A. Panferov, Moment inequalities and high-energy tails for Boltzmann equations with inelastic interactions, *J. Statist. Phys.*, **116** (2004), 1651–1682.

[5] L. Boudin, B. Grec, M. Pavić and F. Salvarani, Diffusion asymptotics of a kinetic model for gaseous mixtures, *Kin. and Rel. Models*, **6** (1): 137–157, 2013.

[6] J.-F. Bourgat, L. Desvillettes, P. Le Tallec, and B. Perthame. Microreversible collisions for polyatomic gases and Boltzmann's theorem, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, **13** (2): 237–254, 1994.

[7] A. Bressan, Notes on the Boltzmann equation, Lecture notes for a summer course, S.I.S.S.A., 2005. (http://www.math.psu.edu/bressan/)

[8] M. Briant and E. Daus, The Boltzmann equation for a multi-species mixture close to global equilibrium, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **222** (3): 1367–1443, 2016.

[9] S. Chapman and T.G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, 3rd edn. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[10] C. Cercignani, The Boltzmann equation and Its Applications, Springer Science & Business Media, 1988.

[11] C. Cercignani, Ludwig Boltzmann: The Man Who Trusted Atoms, Oxford University Press, 2006.

[12] C. Cercignani, Mathematical Methods in Kinetic Theory, Plenum Press, New York, 1969.

[13] S. Dellacherie, On the Wang Chang-Uhlenbeck equations, *Discrete Cont Dyn-B*, **3** (2): 229–253, 2003.

[14] L. Desvillettes, Some applications of the method of moments for the homogeneous Boltzmann and Kac equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **123** (1993), 387–404.

[15] L. Desvillettes, Sur un modèle de type Borgnakke–Larsen conduisant à des lois d'energie non-linéaires en température pour les gaz parfaits polyatomiques, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, **6** (2), 257–262, 1997.

[16] L. Desvillettes, R. Monaco and F. Salvarani A kinetic model allowing to obtain the energy law of polytropic gases in the presence of chemical reactions, *Eur. J. Mech. B Fluids*, **24** (2005), 219–236.

[17] V. Đorđić, M. Pavić-Čolić, and N. Spasojević, Kinetic and macroscopic modelling of a polytropic gas, ArXiv:2004.12225, 2020.

[18] I. M. Gamba, V. Panferov, and C. Villani, Upper Maxwellian bounds for the spatially homogeneous Boltzmann equation, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **194** (2009), 253–282.

[19] I. M. Gamba, and M. Pavić-Čolić, On existence and uniqueness to homogeneous Boltzmann flows of monatomic gas mixtures, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **235**, 723–781, 2020.

[20] I. M. Gamba, and M. Pavić-Čolić, On the Cauchy problem for Boltzmann equation modelling a polyatomic gas, ArXiv:2005.01017

[21] G.J.O. Jameson, Some inequalities for $(a+b)^p$ and $(a+b)^p+(a-b)^p$, *Math. Gazette* **98**, 96–103, 2004.

[22] X. Lu and C. Mouhot, On measure solutions of the Boltzmann equation, part I: moment production and stability estimates, *J. Differential Equations*, **252** (2012), 3305–3363.

[23] R. H. Martin, Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces. *Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience*, 1976.

[24] T. Magin, B. Graille and M. Massot, Kinetic theory derivation of transport equations for gases with internal energy, *42nd AIAA Thermophysics Conference, Honolulu, Hawaii, USA*, paper AIAA-2011-4034, 2011.

[25] C. Mouhot, Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials, *Comm. Math. Phys.*, **261** (2006), 629–672.

[26] M. Pavić, T. Ruggeri and S. Simić, Maximum entropy principle for rarefied polyatomic gases, *Physica A*, **392**, 1302–1317, 2013.

[27] A. J. Povzner, The Boltzmann equation in the kinetic theory of gases, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **47**(2) (1965), 193–214.

[28] L. Sirovich, Kinetic modeling of gas mixtures, *Phys. Fluids,*, **5** (1962), 908–918.

[29] M. Tasković, R. J. Alonso, I. M. Gamba, and N. Pavlović, On Mittag-Leffler moments for the Boltzmann equation for hard potentials without cutoff, *SIAM J. Math. Anal.*, **50** (1): 834–869, 2018.

[30] C. Truesdell Rational thermodynamics, *McGraw-Hill Book Co.*, New York, (1969).

[31] C. Villani, A review of mathematical topics in collisional kinetic theory, in Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, vol. I, *North-Holland, Amsterdam*, 71–305, 2002.

[32] C.S. Wang Chang, G.E. Uhlenbeck and J. de Boer, The heat conductivity and viscosity of polyatomic gases, In: Studies in Statistical Mechanics, vol. II, North-Holland, Amsterdam, 243–268, 1964.

[33] B.Wennberg, Entropy dissipation and moment production for the Boltzmann equation, *Jour. Statist. Phys.* **86** (1997), no. 5-6, 1053–1066.

[34] B. Wennberg, Stability and exponential convergence in Lp for the spatially homogeneous Boltzmann equation, *Nonlinear Anal.* **20**, 935-964, 1993.

Biografija

Nikola Spasojević je rođen u Brčkom 19.12.1996. godine. Posle završetka Gimnazije Vaso Pelagić 2015. godine, na Prirodno Matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisuje osnovne studije fizike, koje završava 2019. godine sa prosječnom ocjenom 9.66. Tokom studija fizike se zainteresovao za matematiku, zbog čega je tokom treće i četvrte godine polagao dodatne predmete iz matematike, prvenstvno one koje su u izrazitoj vezi sa fizikom. Zatim upisuje master program iz primjenjene matematike, smjer tehnomatematika i polaže sve ispite zaključno sa 17. junom 2020. Tokom godina studija bio je stipendista Fonda Jelić, Vlade Brčko Distrikta i Vlade Srbije. Koautor je jednog naučnog rada iz kinetičke teorije gasova.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FUKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFOMRACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: monografska dokumentacija
BF
Tip zapisa: tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Nikola Spasojević
AU
Mentor: dr Milana Čolić
MN
Naslov rada: Košijev problem za prostorno homogenu Bolcmanovu jednačinu
NR
Jezik publikacije: srpski
JP
Jezik izvoda:srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanjan: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2020.
GO
Izdavač: autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada:6/81/34/1/2/4/1
(broj poglavlja/broj strana /lit. citata/tabela/slika/grafikona/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Kinetčka teorija
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Bolcmanova jednačina, Košijev problem, mješavine gasova, višeatomski gasovi
PO
UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U ovom radu posmatramo prostorno homogenu Bolcmanovu jednačinu, kada funkcija raspodele zavisi samo od vremena i brzine molekula jednoatomskog gasa. U odsustvu transportnog operatora, funkcija raspodele se menja samo zbog sudara sa drugim molekulima i brzina njene promene se meri pomoću kolizionog operatora.

Cilj rada jeste da rešimo odgovarajući Košijev problem za prostorno homogenu Bolcmanovu jednačinu. Prvi korak jeste da dokažemo energijski identitet i Povznerovu lemu koje oslikavaju disipaciju kolizionog operatora. Naime, usrednjavanjem po sferi pokazuje se da negativna kontribucija kolizionog operatora postaje dominantnija u odnosu na pozitivnu. Potom ćemo izvesti a priori ocene koje se odnose na polinomne momente pridružene rešenju Bolcmanove jednačine. Da bismo rešili Košijev problem primenjujemo teoriju egzistencije i jedinstvenosti rešenja običnih diferencijalnih jednačina u Banahovim prostorima. Konačno, u ovom radu ćemo uočiti razlike koje se javljaju kada se posmatraju mešavine jednoatomskih gasova i višeatomski gasovi u odnosu na klasični slučaj jednokomponentnih i jednoatomskih gasova.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 19. maj 2020.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: prof. dr Srboljub Simić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
Član: prof. dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
Član: dr Milana Čolić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: monograph type
DT
Type of record: printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Nikola Spasojević
AU
Mentor: Milana Čolić, PhD
MN
Title: The Cauchy problem for space homogeneous Boltzmann equation
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2020.
PY
Publisher: author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description:6/81/34/1/2/4/1
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Kinetic theory
SD

Subject / Key words: Boltzmann equation, Cauchy problem, gas mixtures, polyatomic gases
SKW
UC:
Holding data: Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: In this master thesis, we examined space homogeneous Boltzmann equation, when distribution function depends only as function of time and velocity of a molecule of a monatomic gas. Because of absence of transport operator, distribution function changes via collisions between molecules and change of it is measured by collisional operator.

Aim of this thesis is to present solution of the Cauchy problem for space homogeneous Boltzmann equation. First, we prove energy identity and Povzner lemma, which explains natural dissipation of collisional operator. Namely, averaging by unitary sphere shows that negative contribution of collisional operator is greater than positive contribution. After that we give a priori estimates for polynomial moments associated to Boltzmann equation. For solution of the Cauchy problem we will use theory of existence and uniqueness of ordinary differential equations in Banach space. In the end, we will show differences between solution for mixtures of monatomic gases and polyatomic gases compared to classic solution for one component monatomic gas.
AB
Accepted by the Scientific Board on: May 19,2020
ASB
Defended:
DE
Thesisčdefend board:
DB
President: Prof. Srboljub Simić, PhD, full professor, Faculty of Science, Novi Sad
Member: Prof. Marko Nedeljkov, PhD, full professor, Faculty of Science, Novi Sad
Member: Milana Čolić, PhD, assistant professor, Faculty of Science, Novi Sad