



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU  
I INFORMATIKU



# Modelovanje rasporeda pacijenata -analiza različitih metoda optimizacije-

MASTER RAD

mentor:

prof. dr Zorana Lužanin

student:

Monika Žunji  
196m/17

Novi Sad, 2020. godine

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Matematičko modeliranje</b>	<b>4</b>
1.1 Osnove matematičkog modeliranja . . . . .	5
1.2 Osnove modela za pravljenje rasporeda pregleda . . . . .	6
1.2.1 Svrha modela . . . . .	6
1.2.2 Promenljive . . . . .	6
1.2.3 Pretpostavke . . . . .	6
1.2.4 Određivanje rešenja modela . . . . .	7
1.3 Matematičko programiranje - problem optimizacije . . . . .	9
1.3.1 SA postupak . . . . .	10
<b>2 Osnovni model zakazivanja pregleda</b>	<b>12</b>
2.1 Konstrukcija osnovnog modela . . . . .	12
2.2 Analiza osnovnog modela . . . . .	16
2.2.1 Primer 1 . . . . .	17
2.2.2 Primer 2 . . . . .	26
<b>3 Modifikovani model sa nepojavljivanjem pacijenata</b>	<b>36</b>
3.1 Konstrukcija modela . . . . .	39
3.2 Analiza modela . . . . .	40
3.2.1 Primer . . . . .	42
<b>4 Zaključak</b>	<b>53</b>
<b>A GNU Octave kodovi</b>	<b>55</b>
A.1 Osnovni model . . . . .	55
A.2 Model sa prebukiranjem . . . . .	56
<b>Literatura</b>	<b>65</b>

# Uvod

Idealan zdravstveni sistem bio bi sistem u kojem je svakom građaninu dostupna medicinska usluga kad god se za to pojavi potreba. Naravno, ovakav sistem ne postoji ni u jednoj zemlji niti ga je moguće ostvariti. Međutim dobri zdravstveni sistemi pokušavaju da se u što većoj meri primaknu idealnom modelu. Za svakog pojedinca, odnosno korisnika medicinske usluge, dva faktora su izuzetno važna. Jedno je kvalitet usluga, a drugo je vreme koje je potrebno da se usluga realizuje. U ovom radu fokus je stavljen na drugi faktor, odnosno na vreme koje je korisniku/pacijentu potrebno da bi dobio odgovarajuću uslugu/pregled. Vreme čekanja na pregled može da igra ključni faktor u uspešnosti izlečenje neke bolesti. Važnost ovog faktora može se eksponentijalno povećavati sa težinom zdravstvenog stanja pacijenta. Razlikujemo dve vrste čekanja pacijenta. Pričamo o indirektnom čekanju kada posmatramo vreme između trenutka kada se pojavi potreba za nekim pregledom i trenutka kada je zakazan određen pregled. Sa druge strane vreme koje prođe između trenutka kada pacijent ulazi u ambulantu i trenutka kada se pregled započne nazivamo direktnim čekanjem. Cilj svakog pacijenta jeste da minimizira obe vrste čekanja.

Sa druge strane, uprave medicinskih ustanova susreću se sa ograničenjima u pogledu opremljenosti, prostora, finansija i ljudstva. Resursi koje se koriste u pružanju zdravstvene usluge su vrlo često skupi, jer između ostalog, obuhvataju medicinsku opremu i visoko profesionalni rad medicinskog osoblja. Svaki medicinski aparat ima rok trajanja, tj. životni rok kroz koji se amortizuje. Stepen optimalnog iskorišćenja ljudskih i materijalnih resursa je ključan za postizanje maksimalne delotvornosti rada. Dobra organizacija rada koja se u ovom radu odnosi na pravljenje rasporeda pregleda, trebalo bi da obezbedi što manje neaktivnog, ali i prekovremenog rada lekara. Ako se zakazuje jako mali broj pacijenata, tada se smanjuje stepen iskorišćenja resursa, ali takođe se smanjuje direktno čekanje pacijenta pri povećanju indirektnog čekanja pacijenta i neaktivnog vremena lekara. U suprotnom zakazivanje suviše pacijenata za neki period (na primer za jedan dan) smanjuje indirektno čekanje pacijenta, neaktivno vreme lekara i neiskorištenost resursa uz povećanje direktnog čekanja pacijenta. Sa druge strane, preopterećenje dovodi do neželjenih posledica. Preveliko opterećenje lekara uzrokuje umor, što verovatno smanjuje profesionalnost rada. Preterano korišćenje aparata koje često nije u skladu sa tehničkim zahtevima, povećava rizik kvara. U slučaju nefunkcionalnosti nekog aparata povećava se indirektno čekanje pacijenta.

Pravljenje optimalnog rasporeda pacijenata, odnosno pregleda jeste kompleksan realan problem koji je već dugi niz godina predmet velikog broja istraživanja. Matematičko modeliranja predstavlja jednu od ključnih tehnika za razmatranje ovog problema.

Vrlo često ovako određeni matematički modeli se svode na problem optimizacije. Problemi optimizacije vrlo često sadrže veliki broj ograničenja koji se nameću iz realnog konteksta. Uključivanje velikog broja promenljivih i parametara može da dovede do slabog, odnosno neupotrebljivog modela, jer bez obzira što "bolje" opisuje situaciju iz prakse, može da postane nerešiv.

Rad se stoji iz tri ključna dela. U prvom delu dat je prikaz komponenti matematičkog modelovanja za posmatrani problem. U drugom delu predstavimo osnovni model koji se zasniva na ideji predstavljenoj u [8]. Glavni cilj modela je da se odrede termini pregleda tako da se minimizuje neaktivno vreme lekara i vreme čekanja pacijenata. Nakon formiranja modela data je analiza njegovog ponašanja iz više aspekata. Razmatramo različite načine zakazivanja i njihove uticaje na funkciju cilja. Poseban akcenat je stavljen na uvođenje pojma prihvatljivog rešenja, a to je da najčešće rešenje mora biti celobrojno ili možda čak i imamo strože uslove (na primer dozvoljeno je zakazivanje samo na skali od po 5 minuta). Treći deo je posvećen proširenju osnovnog modela koji se, između ostalog, zasniva na uvođenju mogućnosti kašnjenja i nepojavljivanja pacijenata. Kao i kod osnovnog modela, urađena je, pre svega, numerička analiza proširenog modela. Na osnovu analiza na kraju je predložen model koji u najvećoj meri opisuje realni kontekst. U radu su takođe razvijani i algoritmi koji se koriste za dobijanje rešenja definisanih modela.

U radu su teorijski rezultati ilustrovani kroz primere. Oblast medicine sadrži u velikoj meri osetljive podataka i veoma je teško obezbediti realne istorijske podatke neophodne za određivanje modela. Lični podaci čine kategoriju koja je regulisana zakonima i određuju ko može i pod kojim uslovima da ima pristup podacima. Iz tih razloga su u primerima, umesto istorijskih podataka, korišćeni podaci dobijeni simulacijom. Jedna od prednosti korišćenja simulacija jeste mogućnost razmatranja većeg broja različitih situacija, što doprinosi dobijanju relevantnijih zaključaka o ponašanju konstruisanih modela.

Zahvaljujem se svojoj mentorki, prof. dr. Zorani Lužanin na sugestijama i strpljenju kojim je doprinela kvalitetu ovog rada. Zahvaljujem joj se na puno uloženog vremenu i dobijenoj prilici da unapredim znanje iz oblasti matematičkog modeliranja i uvidim velike mogućnosti njegove primene.

Veliku zahvalnost dugujem porodici i svojim prijateljima. Zahvaljujem se na njihovom strpljenju, razumevanju i podršci tokom mog celokupnog studiranja.

## Deo 1

# Matematičko modeliranje

Globalno gledano, zdravstveni sektor je verovatno najvažniji deo ljudskih života. Pružaoci zdravstvene zaštite motivisani su za smanjenje operativnih troškova uz poboljšanje kvaliteta usluge. Ovo je stvorilo preventivnu medicinu da bi se izbegle bolesti, smanjujući potrebu za hitnim službama i boravkom u bolnicama za bolesne ljude. Industrija zdravstvene zaštite predstavlja otrlike 15% bruto domaći proizvod Sjedinjenih Država,[4]. Polazeći sa stanovišta da su vreme i resursi ograničeni, bez obzira da li pruža ili prima uslugu, modeli zakazivanja pregleda (pravljenja rasporeda) je dugi niz godina u fokusu istraživanja. Zakazivanje pregleda pacijenta je složen proces koji igra jednu od ključnih uloga u efikasnom zdravstvu. Dobar sistem zakazivanja termina obezbeđuje zadovoljstvo pacijenta i lekara, kao i optimalnu iskorišćenost resursa (medicinske opreme, prostora), i kao takvo, jeste važna komponenta zdravstvene zaštite. Odnosno, sistemi za zakazivanja treba da obezbede efikasnost zdravstvene ustanove i blagovremenog pristupa zdravstvenim uslugama. Pravovremeni pristup važan je za postizanje dobrih medicinskih rezultata. To je takođe važna odrednica zadovoljstva pacijenata.

Predmet ovog rada su modeli (sistemi) za zakazivanje pregleda čije je fokus na blagovremenost i iskorišćenost vremena pacijenata i lekara, dok posmatrani modeli ne obuhvataju pitanja koje se odnose na prostor zdravstvene ustanove, opreme i osoblja (osim lekara), kao i raspodelu resursa u sistemima sa više usluga. Ključne komponente za dobro planiranje u zdravstvu su podaci, analitika, sistemi, softver, kultura i upravljanje. Zadržaćemo se na prve dve stvari. Podaci se kombinuju sa analitikom kako bi se pratili istorijski trendovi i predvidjali budućnost, odgovarajući na pitanja kao što su:

Koliko dugo će određeni postupak trajati za određenog pacijenta, kod određenog lekara, određenog dana?

Koliko pacijenata možemo očekivati da se pojave na pregled u određenom danu u nedelji ili u određenom periodu dana ili u određenom periodu u godini?

Kolika je verovatnocća da se određeni pacijent neće pojaviti na zakazanom pregledu ili da će zakasniti?

U svim tim situacijama, potrebno je da se maksimizira preciznost kojom se zdravstvena zaštita isporučuje u skladu sa pokazanim obrascima potreba. Analitika, pod kojom ćemo u ovom radu podrazumevati matematički model, omogućava optimizaciju rasporeda u odnosu na definisane ciljeve povezane sa troškovima pružanja usluge, kvalitetom pružene usluge i zdravstvenim ishodima.

## 1.1 Osnove matematičkog modeliranja

Model je uprošćena predstava stvarnosti, koja i pored toga što je iskrivljena i „netočna”, otkriva neke suštinske komponente složene stvarnosti. Lišen suvišnih detalja, dobar model može omogućiti dubinsku analizu koja bi inače izostala. Specijalno, matematički model je apstraktan, pojednostavljen, matematički koncept koji uspostavlja relacije sa stvarnošću, a kreira se za određenu namenu. Modeli često omogućavaju brzu i jeftinu procenu alternativa, što dovodi do optimalnih rešenja koja inače nisu očigledna. U našem slučaju matematički model je kreiran sa namerom optimizovanja rasporeda zakazivanja pregleda. Ne postoji idealan ili najbolji model jer proces modeliranja izuzetno složen. Model bi trebalo da u što većoj meri podražava bitne karakteristike pojave ili situacije koja je predmet proučavanja. Gradnja matematičkog modela, po pravilu, prolazi kroz sledeće faze:

- **posmatranje pojave u realnom kontekstu** što zahteva dobro razumevanje realnog okruženja;
- **formulisanje svrhe modela** podrazumeva precizno definisanje cilja modeliranja;
- **skiciranje modela** se sastoji iz odabira promenljivih i parametara, postavljanje odgovarajućih prepostavki i definisanje veza odabranih promenljivih koristeći matematički aparat;
- **upotrebljivosti modela** podrazumeva korišćenje odgovarajućih, najčešće, numeričkih algoritama za određivanje rešenja matematičkog problema definisanog u prethodnoj fazi;
- **testiranje modela** obuhvata procenu koliko se model adekvatno ponaša u realnoj situaciji. U ovoj fazi je neophodno postojanje validnih podataka ili odgovarajućih simulacija koje će produkovati podatke;
- **modifikacija modela** podrazumeva da se na osnovu rezultata dobijenih testiranjem, model modifikuje kroz promenu prepostavki, skupa promenljivih i parametara ili njihovih veza kako bi se popravile njegove performanse.

Postavljanje prepostavki i odabir promenljivih koje će služiti za opis realne situacije i koje se prevode u matematički zapis predstavljaju najizazovniji deo modelovanja. Neodgovarajuće ili slabe prepostavke udaljuju model od njehove svrhe, dok jake prepostavke mogu dovesti do suviše složenog modela koji često nema rešenje, odnosno model postaje neupotrebljiv.

Finalna provera svakog modela jeste valjanost njegovog ponašanja u primeni na problemima za koje je namenjen. U slučaju modeliranja rasporeda, uštede koje se postižu su jedan od kvantitifikatora kvaliteta modela.

## 1.2 Osnove modela za pravljenje rasporeda pregleda

### 1.2.1 Svrha modela

Kako je već napomenuto osnovni cilj i svrha modeliranja rasporeda pregleda jeste minimizacija utrošenog vremena lekara i pacijenata. To povlači da je u većem broju razvijenih modela korišćena teorija optimizacije sa funkcijom cilja koja predstavlja kombinaciju utroška vremena lekara i pacijenata. Načini kombinovanja vremena vezanih za lekare i pacijente biće detaljno razmatrani u delu koji se bavi konstrukcijom modela.

### 1.2.2 Promenljive

U nastavku dajemo osnovne promenljive koji će biti korišćene u konstrukciji modela. To su sledeće promenljive

- $n$  — broj pacijenata koji se zakazuju
- $t_i^a$  — vreme dolaska pacijenta
- $t_i^b$  — vreme početka pregleda pacijenta
- $\Theta_i$  — vreme dužina pregleda pacijenta
- $J_i$  — zakazano vreme (termin za pregled, slot za pregled),

gde se indeks  $i$  odnosi na  $i$ -tog posmatranog pacijenta. Vreme čekanja pacijenta i neaktivnog vremena lekara su promenljive koje će biti prikazane pomoću navednih osnovnih promenljivih.

### 1.2.3 Prepostavke

Svaki od modela koji će biti predstavljen u nastavku rada određen je skupom prepostavki, koji se preveden u teoriju optimizacije najčešće svodi na promenu ograničenja ili korekciju funkcije cilja. Razmatrane prepostavke su vezane za promenljive koje određuju model. Kao primer navodimo najjednostavnije prepostavke i njihovo prevođenje u zapis preko definisanih promenljivih

- prepostavka *pacijenti ne kasne* (zapis  $t_i^a \leq T_i$ )
- prepostavka *pregled ne može početi pre zakazanog termina* (zapis  $J_i \leq t_i^b$ )

Kako nedovoljne prepostavke onemogućuje dobijanje optimalnog rasporeda ili daju nedovoljno dobro rešenje, potrebno je proširenje prepostavki i modifikovanje funkcije

cilja, odnosno potrebne su modifikacije modela. Modifikacije modela za zakazivanje pregleda su dugi niz godina u fokusu izučavanja.

Prepostavke modela vrlo često uključuju koje vrste ponašanja pacijenata su moguće. Tako možemo proširiti model koji uzima u obzir kašnjenje pacijenata na zakazani pregled ili koji uzima u obzir nepojavljivanje pacijenata u zakazanom terminu. Najčešće primjenjeni metod za rad sa ovom prepostavkom je metod prebukiranosti (*overbooking*), odnosno zakazivanje dva ili više pacijenata u istom terminu. Što se tiče vremena lekara, većina modela uključuje mogućnost prekovremenog rada.

Ako posmatramo  $i$ -tog pacijenta tada se u odnosu na posmatrana vremena, odnosno promenljive, može realizovati četrnaest različitih slučajeva koji su prikazani na slici 1.1. Na slici su prikazani termini za  $i$ -tog pacijentas i pacijenta koji je zakazan pre njega,  $J_{i-1}$  i  $J_i$ , zatim vremena početka pregleda za oba pacijenata,  $t_{i-1}^b$  i  $t_i^b$ , kao i vreme dolaska  $i$ -tog pacijenta,  $t_i^a$ . Dužine trajanja pregleda za dva uzastopna pacijenta,  $\theta_{i-1}$  i  $\theta_i$ , označena su plavom bojom. Vremena čekanje, ako je do njega došlo, označena su žutom bojom. Kada su se pojavili periodi neaktivnosti lekara upotrebljena je zelena boja, dok je prekovremen rad označen ljubičastom bojom.

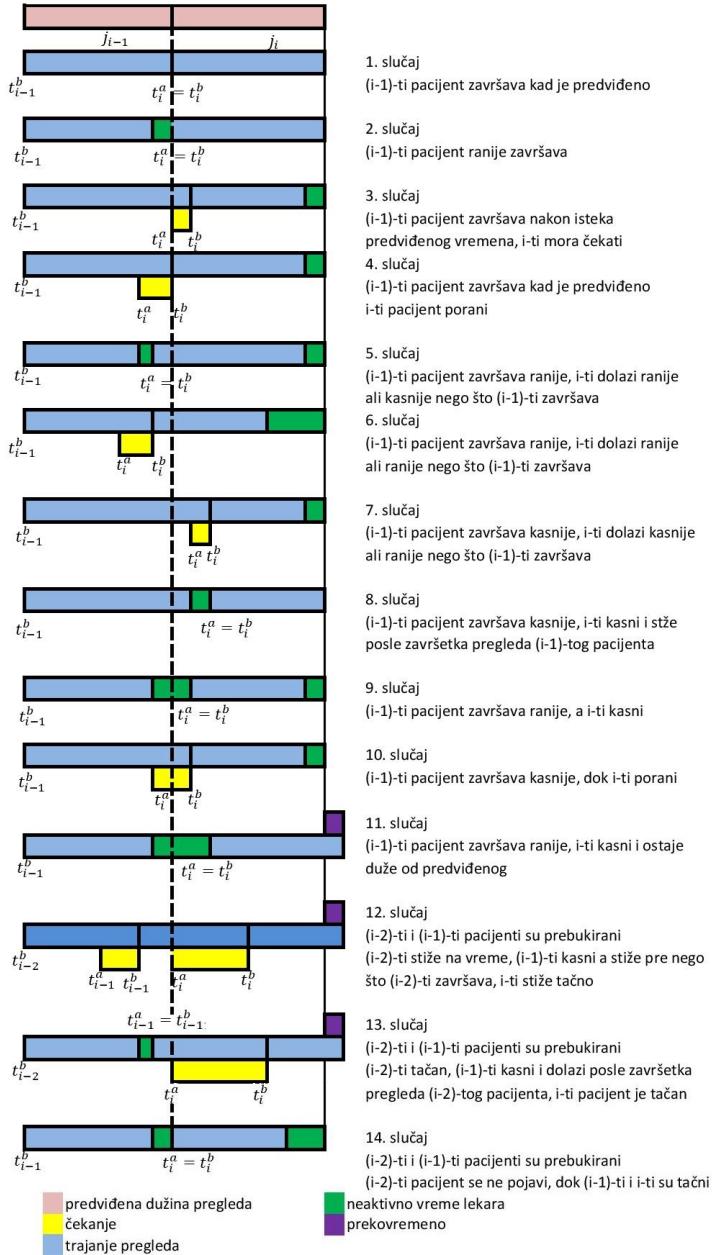
#### 1.2.4 Određivanje rešenja modela

Kako je već napomenuto, najčešće se problem određivanja zakazivanja pregleda svodi na problem optimizacije. Međutim metode za rešavanje problem optimizacije zavise od vrste optimizacije.

Jedna od ključnih prepostavki koje će biti razmatrane jeste da je vreme pregleda stohastičko, tj. da se dužina pregleda opisuje slučajnom promenljivom. To povlači da će vreme čekanja pacijenata i neaktivnosti lekara takođe biti opisane slučajnom promenljivama, što znači da će se problem svesti na **stohastičku optimizaciju**.

Pod pojmom stohastičke optimizacije podrazumevamo da se službene promenljive pojavljuju u formulaciji samog problema optimizacije, bilo kroz uključivanje slučajne promenljive u funkciju cilja i/ili uključivanje u ograničenja problema.

Najpoznatije metode za rešavanje ove vrste problema dele se u dve grupe. Prvu grupu čine metode koje koristi ocene za funkciju cilja ili ograničenja, kao što je stochastic approximation (SA) metod. Drugu grupu čine metode koje koriste slučajno pretraživanje.

Slika 1.1: Moguće realizacije pregleda za  $i$ -tog pacijenta

### 1.3 Matematičko programiranje - problem optimizacije

Optimizacija je oblast matematike koja svoj razvoj u velikoj meri duguje Fermatu i Langražu koji su prvi formalisali problem optimizacije u matematičkom zapisu dok je Gaus bio među prvima koji je započeo razvoj iterativnih postupaka za rešavanje problema optimizacije. Značajne rezultate su postigli u ovim oblasti i matematičari Leonid Kantorovich koji je formalno uveo pojam linearne programiranje 1939. godine), kao i George Dantzig koji je 1947. godini razvio simpleks metod za rešavanje problema optimizacije. Razvoj računara imao je ključni uticaj na velike mogućnosti primene optimizacije u drugim disciplinama i zato je matematička i numerička optimizacija postala jedna od najbrže razvijajućih oblasti matematike.

U osnovi optimizacije leži problem određivanja ekstremnih vrednosti funkcije nad nekim domenom, odnosno optimizacija je proces pronalaženja vrednosti promenljivih koje daju maksimalnu ili minimalnu vrednost funkcije. Očigledno je da ako tačka  $x^*$  odgovara minimalnoj vrednosti funkcije  $f(x)$ , ista tačka odgovara maksimalnoj vrednosti funkcije  $-f(x)$ . Dakle, optimizacija može se smatrati minimizacijom i u nastavku ćemo posmatrati problem

$$\min_{x \in \mathbf{X}} f(x) \quad (1.1)$$

gde je  $f : \mathbf{X} \rightarrow R^m$ ,  $\mathbf{X} \subseteq R^n$

**Definicija 1.** Neka je funkcija  $f(x)$  definisana nad skupom  $\mathbf{X} \subseteq R^n$ . Tada:

- $x^*$  je tačka lokalnog minimuma ako i samo ako za neke okoline  $\delta_r(x^*) = \{x | x \in R^n, \|x - x^*\| \leq r\}$  tačke  $x^*$  i za sve  $x \in \delta_r(x^*) \cap \mathbf{X}$  važi da  $f(x^*) \leq f(x)$
- $x^*$  je tačka globalnog minimuma na skup  $\mathbf{X}$  ako i samo ako za sve  $x \in \mathbf{X}$  važi da  $f(x^*) \leq f(x)$

Na osnovu skupa rešenja problema optimizacije možemo podeli na probleme bez rešenja (skup je prazan), problem sa jedinstvenim rešenjem (postoji tačno jedno rešenje), problem sa prebrojivim i problem sa neprebrojivim skupom rešenja. U sledećem primeru ilustrujemo te tri vrsta rešenja.

Rešenja problema minimizacije može biti lokalno i globalno. Neka je funkcija  $f(x)$  definisana nad skupom  $\mathbf{X} \subseteq R^n$ . Tada:

- $x^*$  je tačka lokalnog minimuma ako i samo ako za sve  $x \in \delta_r(x_0)$  važi da  $f(x^*) \leq f(x)$
- $x^*$  je tačka globalnog minimuma na skup  $\mathbf{X}$  ako i samo ako za sve  $x \in \mathbf{X}$  važi da  $f(x^*) \leq f(x)$

U zavisnosti od osobina funkcije  $f$  i skupa  $D$  mogu se posmatrati sledeći oblici optimizacije

- neprekidna ( $f$  je neprekidna) vs diskretna optimizacija ( $f$  uzima vrednost nad diskretnim skupom)

- optimizacija sa ograničenjima vs optimizacija bez ograničenja ( $D = \mathbb{R}^n$ )
- deterministička vs stohastička optimizacija ( $f$  zavisi od slučajne promenljive)
- multi-objektna vs jedno-objektna optimizacija
- linerna vs nelinearna optimizacija

Kako je već dato relacijom (1.1) problem optimizacije čini pronalaženja tačke  $x = (x^1, \dots, x^n)$  koja minimizuje vrednost **funkcije cilja**  $f(x)$  nad skupom  $D$ , odnosno nad **skupom ograničenja** koji je opisani sledećim relacijama

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

i

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

gde  $x$  funkcije  $g_i(x), i = 1, \dots, m$  su ograničenja za tipa nejednakosti, a funkcije  $h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p$  su ograničenja tipa jednakosti. Rešenje problema minimizacije mora da zadovoljava sva ograničenja/uslove.

U modelima koji su predstavljeni u ovom radu korišćena je neprekidna stohastička jednoobjektna optimizacija sa ograničenjima. Posmatramo sledeći oblik problema optimizacije

$$\min_{x \in \subseteq} \{f(x) := E_P F(x, \xi)\} \quad (1.2)$$

gde je  $W$  slučajna promenljiva i  $P$  njena raspodela verovatnoće,  $\subseteq$  je konačan skup i  $F(x, \xi)$  je realna funkcija dve promenljive (dva vektora)  $x$  i  $\xi$ . Takođe funkciju  $f(x)$  ne možemo zapisati u zatvorenom obliku, dok je funkcija  $F(x, \xi)$  jednostavna za izračunavanje za dato  $x$  i  $\xi$ . Mnogi diskretni problemi optimizacije su teško rešiti, dok je druga poteškocća što funkcija cilja  $f(x)$  može biti komplikovana i / ili teška čak i za približno izračunavanje.

### 1.3.1 SA postupak

U ovom delu opisujemo postupak aproksimacije uzoračkom sredinom (Sample Average Approximation - SA postupak, [5]) za rešavanje problema stohastičke optimizacije (1.2).

SA postupak čine dva koraka: *uzrokovavanje* i *rešavanje problem determinističke optimizacije*. U praksi je često nemoguće tačno odrediti  $E[F(x, \xi)]$  zato u prvom koraku vršimo Monte Carlo simulaciju. Neka je  $\{\xi_k\}_{k=1}^K$  skup nezavisnih promenljive sa istom raspodelom (i.i.d.) kao  $\xi$  tada određujemo približnu vrednost funkcije cilja u tački  $x$  na sledeći način

$$f(x) = E[F(x, \xi)] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K F(x, \xi_k) \quad (1.3)$$

Drugi korak SA postupka je određivanje rešenja determinističkog problema

$$\min_{x \in \mathbf{X}} \{f_K(x) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K F(x, \xi_k)\}. \quad (1.4)$$

Konvergencija SA postupka zasniva se na centralnoj graničnoj teoremi.

**Teorema 1.** Ako su  $X_1, X_2, X_3, \dots$  nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i konačnom disperzijom  $D(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, 3, \dots$ , onda važi:

$$P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^K X_k - E[\sum_{k=1}^K X_k]}{\sqrt{D[\sum_{k=1}^K X_k]}} < x \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad K \rightarrow \infty$$

Drugim rečima za dovoljno veliko  $K$  raspodela uzoračke sredine  $K$  nezavisnih slučajne promenljive sa istom raspodelom ponaša se kao  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Prema centralnoj graničnoj teoremi i zakonu velikih brojeva, ako su zadovoljene navodene uslove za svaki fiksiran  $x$  za uslovnu raspodelu slučajne promenljive  $f_K(x)$  važi da  $E[f_K(x)] = f(x)$  i  $\sigma^2(x) = D[f_K(x)] = \frac{D[F(x, \xi)]}{K} < \infty$ , tj.

$$\sqrt{K}|f_K(x) - f(x)| \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Neka je  $x^*$  jedinstveno rešenje našeg problema optimizacije. Tada važi:

$$|y_K^* - y^*| \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{\sqrt{K}})$$

## Deo 2

# Osnovni model zakazivanja pregleda

### 2.1 Konstrukcija osnovnog modela

Model koji će biti predstavljen i analiziran razmatran je od strane Lawrence W. Robinsona i Rachel R. Chena u [8]. Model kombinuje vreme čekanja pacijenta i vreme koje lekari provode besposleni, tj. radno vreme za koje ne obavljaju preglede. Naravno, koliku oba posmatrana vremena, vreme čekanja pacijenta i neiskorišćeno vreme lekara, želimo da minimiziramo. Pitanje je da li ćemo i u kom obimu favorizovati jedno od dva posmatrana vremena. Predloženi model uključuje parametre koji određuju odnos cene neaktivnog vremena lekara i vremena čekanja pacijenta. Koristeći ovaj parametar određujemo koje vreme ćemo favorizovati, tj. da li će model voditi više računa o zadovoljstvu pacijenata ili o troškovima zdravstvene ustanove. Model koji posmatramo određuje raspored pregleda za jedan dan.

Ključni elemenat posmatranog modela je procena dužine pregleda pacijenta. Dobra ocena ove promenljive predstavlja preduslov za korisnost dobijenog rešenja u realnom okruženju. Za promenljivu koja predstavlja trajanje pregleda prepostavljamo da je slučajna, što povlači da je posmatrani problem stohastičke prirode i da će biti opisan pomoću stohastičke optimizacije.

#### Prepostavke modela

- P1: Pacijenti ne kasne. U slučaju da pacijent dođe pre zakazanog vremena, a lekar je slobodan, pregled može da započne pre vremena zakazanog u rasporedu.
- P2: Raspored pregleda je fiksiran i ne može se menjati u toku radnog dana.
- P3: Lekari su tačni i tokom radnog vremena nemaju dodatne aktivnosti ili zadatke, tj. njihovo celokupno ravno vreme je namenjeno isključivo za zakazane preglede.
- P4: Dužina pregleda svakog pacijenta je slučajna promenljiva sa poznatim očekivanjem i disperzijom.

P5: Pregelede će obavljati jedan lekar i njegovo radno vreme iznosi  $S$  sati.

### Promenljive

Za svakog pacijenta  $i = 1, \dots, n$  definišemo sledeće promenljive:

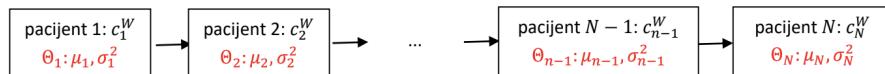
- $\Theta_i$  – vreme trajanja pregleda pacijenta - slučajna promenljiva
- $t_i^a$  – vreme dolaska pacijenta
- $t_i^b$  – vreme početka pregleda pacijenta
- $J_i$  – vreme (dužina vremenskog intervala) predviđeno za pregled pacijenta
- $W_i$  – vrema čekanja pacijenta

i parametre:

- $c_i^W$  – koeficijent čekanja pacijenta (vrednost vremena)
- $\mu_i$  – srednja vrednost dužine pregleda pacijenta:  $\mu_i = E(\Theta_i)$
- $\sigma_i$  – standardna devijacija dužine pregleda pacijenta:  $\sigma_i^2 = Var(\Theta_i)$ .

### Gradnja modela

Na osnovu prepostavki zaključujemo da model zakazivanja možemo prikazati kao rednu vezu  $n$  slotova. Svaki slot predstavlja vreme rezervisano za jednog pacijenta. Kada se pacijent pojavi, njegovom slotu dodeljujemo i vrednost promenljive koja predstavlja dužinu realizovanog pregleda, tj. pridružujemo mu realizaciju slučajne promenljive  $\Theta_i$ . Grafički se model može prikazati dijagramom na slici 2.1.



Slika 2.1: Slotovi i pacijenti u modelu

Svaki od pravougaonika predstavlja jedan slot u kojem se zakazuje pregled tačno jednog pacijenta. Ne postoji preklapanja slotova i ne primenjuje se princip *overbookinga*. U odnosu na razlike mogućnosti predstavljane na slici 1.1 na strani ??, u ovom modelu dozvoljena su prva tri slučaja.

Na osnovu prepostavke P1 da pacijenti ne kasne i da pregled može početi čim se završi prethodni pregled, dobijamo da se promenljiva koja predstavlja početak pregleda  $i$ -tog pacijenta,  $t_i^b$ , može predstaviti kao funkcija njegovog vremena dolaska ( $t_i^a$ ), vremena početka pregleda ( $t_{i-1}^b$ ) i trajanja pregleda ( $\Theta_{i-1}$ ) prethodnog pacijenta na sledeći način

$$t_i^b = \max\{t_i^a, t_{i-1}^b + \Theta_{i-1}\} \quad i = 2, \dots, n$$

Za vreme dolaska i vreme početka pregleda prvog pacijenta važi  $t_1^a = t_1^b = 0$ . Pret-hodna relacija opisuje situaciju da ako  $i$ -ti pacijent stiže nakon završetka pregleda prethodnog  $(i-1)$ -og pacijenta, onda njegov pregled započinje odmah pri njegovim dolasku. Kako  $t_i^b$  zavisi od slučajne promenljive  $\Theta_{i-1}$ , zaključujemo da je  $t_i^b$  slučajna promenljiva za svako  $i = 2, \dots, n$ .

U slučaju da pregled prethodnog pacijenta još traje,  $i$ -ti pacijent će morati da sa-čeka, pa njegovo vreme čekanja iznosi

$$W_i = t_i^b - t_i^a,$$

odnosno slučajna promenljiva  $W_i$  je data sa

$$W_i = t_i^b - t_i^a = \begin{cases} 0, & t_i^b = t_i^a \\ t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} - t_i^a, & t_i^b = t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} \end{cases}.$$

Ukupno vreme čakanja svih pacijenata koji su zakazani za posmatrani dan je

$$\mathbf{W} = \sum_{i=2}^n W_i = \sum_{i=2}^n (t_i^b - t_i^a). \quad (2.1)$$

To je vreme koje su pacijenti "izgubili" i koje predstavlja njihov trošak. Sa druge strane, neaktivno vreme lekara pojavjuje se kada je pregled  $i$ -og pacijenta završen pre dolaska  $(i+1)$ -og pacijenta, tj. pre početka pregleda  $(i+1)$ -og pacijenta pa je

$$I_i = t_{i+1}^b - (t_i^b + \Theta_i),$$

neaktivno vreme određeno pacijentom  $i$ , dok je ukupno neaktivno vreme lekara (ne-iskorišćeno vreme, vreme kada ne vrši pregled, niti obavlja neki drugi zadatok) u toku radnog vremena u posmatranom danu

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{n-1} I_i = \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1}^b - (t_i^b + \Theta_i)) = t_n^b - \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i. \quad (2.2)$$

Cilj našeg modela je da minimizuje neiskorišćeno vreme lekara (2.2) i vreme čekanja pacijenata (2.1). Kako su  $I$  i  $W$  slučajne promenljive, dobijamo problem stohastičke optimizacije. Iz tih razloga posmatraćemo matematičko očekivanje ove dve promenljive. Cena izgubljenog vremena za svakog pacijenta može biti različita i u modelu ćemo ovu cenu meriti relativno u odnosu na neaktivno vreme lekara, uvođenjem parametra  $c_i^W$ , odnosno normirano po neaktivnom vremenu lekara. Smatramo da cena jedne jedinice neaktivnog vremena lekara iznosi 1, dok je cena jedne jedinice vremena čekanja  $i$ -og pacijenta  $c_i^W$ . Očekivano je da je  $c_i^W < 1$ , tj. da je vreme čekanja pacijenta jeftinije od neaktivnog vremena lekara.

Vodeći računa da su oba vremena slučajne promenljive, jer su funkcije slučajne promenljive  $\Theta$  koja predstavlja dužinu pregleda, dobijamo problem stohastičke optimizacije. Međutim, naš cilj je da minimizujemo **очекivano** neaktivno vreme i vreme čekanja, pa tako dobijamo sledeći problem optimizacije

$$\min_{\{t_1^a, \dots, t_n^a\}} \left\{ E_\Theta[(t_n^b - \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i) + \sum_{i=2}^n c_i^W(t_i^b - t_i^a)] \right\} \quad (2.3)$$

uslovi:  $t_i^b = \max\{t_i^a, t_{i-1}^b + \Theta_{i-1}\}, \quad i = 2, \dots, n$

$t_1^b = 0$

Za funkciju cilja koristićemo oznaku  $Z$ . Tako je u ovom slučaju

$$\begin{aligned} Z &= Z(t_1^a, \dots, t_n^a; \Theta_1, \dots, \Theta_n; c_1^W, \dots, c_n^W) \\ &= E_\Theta[(t_n^b - \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i) + \sum_{i=2}^n c_i^W(t_i^b - t_i^a)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

U slučaju kada važi

$$c_i^W = c^W, \quad i = 1, \dots, n,$$

tj. kada je cena čekanja ista za sve pacijente, u modelu se menja funkcija cilja i problem postaje

$$\begin{aligned} \min_{\{t_1^a, \dots, t_n^a\}} Z &= \min_{\{t_1^a, \dots, t_n^a\}} Z(t_1^a, \dots, t_n^a; \Theta_1, \dots, \Theta_n; c^W) \\ &= \min_{\{t_1^a, \dots, t_n^a\}} \{E_\Theta[\mathbf{I}] + c^W E_\Theta[\mathbf{W}]\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ako uvedemo novu promenljivu koja predstavlja vreme između dolaska dva uzaštopna pacijenta

$$J_i = t_{i+1}^a - t_i^a$$

tada očigledno promenljive  $t_i^a$  jednoznačno određuju promenljive  $J_i$  i obrnuto. Tako dobijamo da je  $t_j^a = \sum_{i=1}^{j-1} J_i$ , odakle sledi

$$\begin{aligned} W_i &= t_i^b - t_i^a \\ &= \max\{t_i^a, t_{i-1}^b + \Theta_{i-1}\} - t_i^a \\ &= \max\{0, (t_{i-1}^a + W_{i-1}) + \Theta_{i-1} - t_i^a\} \\ &= \max\{0, W_{i-1} + \Theta_{i-1} - J_{i-1}\} \\ &:= (W_{i-1} + \Theta_{i-1} - J_{i-1})^+. \end{aligned}$$

Model (2.3) možemo preformulisati koristeći promenjive  $J_i$  i  $W_i$ , odnosno koristeći vreme predviđeno za pregled  $i$ -tog pacijenat i vreme čekanja  $i$ -tog pacijenta, na sledeći način:

$$\min_{\{t_1^a, \dots, t_n^a\}} \left\{ E_\Theta \left[ \sum_{i=1}^{n-1} (J_i - \Theta_i) + W_n + \sum_{i=2}^n c_i^W W_i \right] \right\} \quad (2.6)$$

uslovi:  $W_i = \max \{W_{i-1} + \Theta_{i-1} - J_{i-1}, 0\} \quad i = 2, \dots, n$   
 $W_1 = 0$

Na osnovu pretpostavke P4, znamo da su dužine pregleda homoskedastične sa istim standardnim ostupanjem

$$\sigma_i = \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

pa koristeći pretpostavku da je  $E(\Theta_i) = \mu_i$  i osobine matematičkog očekivanja možemo izvršiti standardizaciju posmatranih promenljivih na sledeći način

$$\begin{aligned} j_i &= \frac{J_i - \mu_i}{\sigma} \\ \theta_i &= \frac{\Theta_i - \mu_i}{\sigma} \\ w_i &= \frac{W_i}{\sigma}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sada se model (2.6) može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\sigma \cdot \min_{\{j_1, \dots, j_n\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} j_i + \sum_{i=2}^n c_i^W E_\theta[w_i] \right\} \quad (2.9)$$

uslovi:  $w_i = \max \{0, w_{i-1} + \theta_{i-1} - j_{i-1}\}$   
 $w_1 = 0$

Na ovaj način smo dobili problem koji zavisi samo od transformisanih slučajnih promenljivih  $\theta_i$  koje su međusobno nezavisne sa istom raspodelom, čije je očekivanje 0, a disperzija jednaka 1. To znači da smo transformisali vreme tako da je jedinica vremena omogućila da je  $\sigma = 1$ .

## 2.2 Analiza osnovnog modela

Sva tri modela (2.3), (2.6) i (2.9) su međusobno ekvivalentni. Razlika posmatranih modela ogleda se u definisanju različitih slučajnih promenljivih koje se mogu modelirati najčešće pomoću istorijskih podataka. Međutim, određivanje raspodela posmatranih slučajnih promenljivih je veoma težak problem i vrlo često nerešiv. Kako u modelu koristimo samo parametre raspodela, njihovo ocenjivanje je jednostavniji zadatak. U nastavku rada koristimo Monte Carlo simulacije za ocenjivanje očekivanja. Na osnovu pretpostavljene raspodele dužine pregleda, urađena je simuacija  $K$  dana sa po  $N$  slo-tovima i tako je dobijena matrica podataka  $S$

$$S = [s_{ij}]_{N \times K}.$$

Element  $s_{ij}$  predstavlja simuliranu dužinu pregleda  $i$ -tog pacijenta (pacijenta pregleđanog u  $i$ -tom slotu) u  $j$ -tom danu, osnosno realizaciju promenljive  $\Theta_i$ .

Koristići simulaciju  $K$  dana sa  $N$  pregleda, za svaki slot  $i$  ( $i$ -ti pacijent), definicije promenljivih  $W_i$  i  $I_i$  i činjenicu da je srednja vrednost nepristrasan, efikasan i konzistentan ocenjivač matematičkog očekivanja dobijamo ocenu za dužinu pregleda

$$E[\Theta_i] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Theta_i^k, \quad (2.10)$$

dužinu čekanja, koristeći

$$E[W_i] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K W_i^k, \quad (2.11)$$

i neaktivno vreme lekara prozurokovano  $i$ -tim pacijentom

$$E[I_i] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_i^k. \quad (2.12)$$

Na osnovu simulacija možemo izračunati funkciju cilja u posmatranim modelima.

Kako je cilj našeg modela da napravi optimalan raspored, izlaz iz modela je skup vremena zakazivanja. Termini zakazivanja i radno vreme lekara jednoznačno određuju broj pacijenata koji mogu biti zakazani za jedan dan. To znači da su vrednosti koje određujemo  $t_i^a$  i  $n$ .

Ulazna promenljiva koja je ključna za naš model je dužina pregleda,  $\Theta_i$ . Međutim, kako je u pitanju slučajna promenljiva, a kako je već napomenuto, njeno modelovanje je veoma zahtevan zadatak. Modelovanje ove slučajne promenljive razmatrano je u velikom broju radova. Korišćenje lognormalne raspodele kao oblika raspodele  $\text{LogNor}(\mu_i, \sigma_i)$  je široko zastupljeno jer su moguće samo pozitivne realizacije, a omogućuje i dobro modeliranje nakrivljenosti, [2], [6] i [10]. Takođe se i generalizovana lambda distribucija određena sa četiri parametra pokazala kao dobar model za ocenu trajanja pregleda, [8].

Drugi važan input u model su cene čekanja pacijenata,  $c_i^W$ . Ovi parametri mogu da zavise od više faktora, kao što su radni status (zaposlen, nezaposlen, penzioner, učenik) i, u slučaju zaposlenosti, vrsta posla. Jedna od mogućnosti je da se cena čekanja definiše u odnosu na radni status, a da se slotovi raspodele na osnovu cene čekanja. Zato bi pacijenti sa najskupljim vremenom trebalo da se zakazuju na početku radnog vremena i tako bi im se smanjilo vreme čekanja.

Kako nam nisu dostupni istorijski podaci potrebni za modeliranje, iskoristili smo simulacije na osnovu kojih smo dobili podatke potrebne za model. U primerima koji slede koristili smo različite inpute i načine zakazivanja pregleda kako bismo procenili funkciju cilja, u cilju određivanja optimalnog rešenja.

### 2.2.1 Primer 1

- **Zakazivanje** - Posmatrano je pet slučajeva. Pacijenti se zakazuju na svakih 15, 20, 25, 30 i 35 minuta. To znači da određujemo koji od predloženih 5 slučajeva

zakazivanja je najefikasniji. Koristeći podatke da je radno vreme lekara 8 sati, odnosno 480 minuta, posmatrani slučajevi su:

1. **slučaj:** pacijenti se zakazuju na svakih 15 minuta, odnosno  $J_i = 15 \text{ min}$  za svakog pacijenta i broj pregleda zakazan za jedan dan je  $n = 32$
  2. **slučaj:** predviđeno vreme za pregled je  $J_i = 20 \text{ min}$  i  $n = 24$
  3. **slučaj:** predviđeno vreme za pregled je  $J_i = 25 \text{ min}$  i  $n = 19$  (Napomena: kako je  $19 \cdot 25 = 475$  dobijamo da smo, po rasporedu, lekaru ostavili 5 minuta neaktivnog vremena)
  4. **slučaj:** predviđeno vreme za pregled je  $J_i = 30 \text{ min}$  i  $n = 16$
  5. **slučaj:** predviđeno vreme za pregled je  $J_i = 35 \text{ min}$  i  $n = 13$  (Napomena: kako je  $13 \cdot 35 = 455$  dobijamo da smo, po rasporedu, lekaru ostavili 25 minuta neaktivnog vremena)
- **Cene čekanja** -  $c_i^W$  su parametri koji daju relativnu cenu vremena čekanja pacijenta u odnosu na neaktivno vreme lekara. Razmatran je slučaj kada je cena neaktivnog vremena skuplja od cene čekanja. Vrednosti za  $c_i^W$  su generisane na slučajan način, iz raspodele

$$P(c_i^W = 0.4) = \frac{1}{3}, \quad P(c_i^W = 0.5) = \frac{1}{3}, \quad P(c_i^W = 0.6) = \frac{1}{3}$$

za svaki mogući slot. Na taj način su dobijene vrednosti parametra  $c_i^W$  za sve moguće slotove koji su predstavljeni u sledećoj tabeli

$c_i^W$	redni broj slota sa vrednošću $c_i^W$
0.4	1, 6, 7, 10, 11, 12, 16, 19, 22, 24, 26, 30
0.5	5, 8, 14, 15, 17, 18, 21, 23, 28, 32
0.6	2, 3, 4, 9, 13, 20, 25, 27, 29

- **Dužina pregleda** - predstavlja realizaciju slučajne promenljive  $\Theta_i$ . Realizacije ove promenljive se dobijaju na osnovu istorijskih podataka. Kako bismo simulirali istorijske podatke, posmatrali smo slučaj kada se dužina pregleda poviňuje unifomnoj raspodeli i kada je ista za sve slotove, a to znači da je  $\Theta_i : U(15, 25)$

Podaci o dužini pregleda su simulirani u Excelu i tako je dobijena matrica  $S$ .

U softveru GNU Octave je napisan kod koji na osnovu podataka i datih parametara, izračunava prosečno vreme čekanja pacijenata, prosečno neaktivno vreme lekara (posebno posle svakog pacijenta i ukupno) i vrednost funkcije cilja za model (2.3)

## Vreme čekanja pacijenata

Prvo posmatramo realizaciju promenljive  $W_i$  u svih pet slučajeva zakazivanja, u zavisnosti od rednog broja slota (pacijenta). Dobijeni rezultati su predstavljeni na slici 2.3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
	Pacijent 1	Pacijent 2	Pacijent 3	Pacijent 4	Pacijent 5	Pacijent 6	Pacijent 7	Pacijent 8	Pacijent 9	Pacijent 10	Pacijent 11	Pacijent 12	Pacijent 13	Pacijent 14	Pacijent 15	Pacijent 16	Pacijent 17	Pacijent 18	
1																			
2	Dan 1	22	22	24	24	19	16	19	16	15	21	21	25	20	18	25	1		
3	Dan 2	21	17	15	25	19	24	16	21	24	20	17	22	16	17	15	17	1	
4	Dan 3	24	21	19	19	24	25	16	20	21	18	18	22	19	20	18		1	
5	Dan 4	24	19	21	15	17	25	22	24	18	20	19	19	17	23	24	19	24	
6	Dan 5	21	19	18	16	15	17	25	15	21	18	24	19	16	25	18	16	21	
7	Dan 6	17	20	23	25	17	17	19	17	18	19	23	15	22	17	18	19	24	
8	Dan 7	21	16	18	17	28	18	19	19	20	23	25	24	18	24	18	22	25	
9	Dan 8	25	19	18	21	15	24	20	19	15	20	21	25	22	22	20	15	23	
10	Dan 9	17	21	22	15	24	23	22	23	25	19	19	20	25	25	17	19	1	
11	Dan 10	21	17	20	19	15	23	16	16	21	18	17	19	25	23	24	18	20	
12	Dan 11	20	18	21	18	16	17	25	22	24	24	15	23	15	21	16	20	16	
13	Dan 12	20	19	20	17	22	19	20	20	24	16	21	15	17	21	15	19	22	
14	Dan 13	25	25	24	17	24	19	16	22	19	17	25	22	22	23	17	18	23	
15	Dan 14	22	20	17	19	23	21	20	18	23	20	22	17	18	20	24	16	17	
16	Dan 15	25	19	22	16	25	23	22	21	20	20	16	23	21	20	25	16	18	
17	Dan 16	19	24	15	18	15	20	16	16	20	17	20	15	21	23	16	1		
18	Dan 17	25	19	18	20	21	17	23	21	24	16	22	19	15	21	18	17	2	
19	Dan 18	22	24	15	15	19	17	16	18	16	17	16	25	23	20	15	15	22	
20	Dan 19	15	25	20	15	19	17	20	19	16	24	24	21	18	22	23	24	1	
21	Dan 20	18	21	20	15	21	22	24	23	19	22	16	22	22	17	24	23	24	
22	Dan 21	21	24	22	19	25	23	16	25	18	25	21	19	16	19	24	16	2	
23	Dan 22	16	23	19	23	22	18	23	25	23	18	16	15	25	24	23	16	16	
24	Dan 23	20	21	24	25	18	19	23	24	21	16	16	16	24	17	21	22	21	
25	Dan 24	16	18	18	20	24	18	15	21	23	17	15	15	16	20	17	16	24	

Slika 2.2: Simulirani podaci

Vrednosti na  $x$ -osi predstavljaju redni broj pacijenta, odnosno redni broj termina u kom je pacijent bio zakazan. Ocenu vremena čekanja  $\bar{w}_i$ , koja je predstavljena na  $y$ -osi, dobijamo na osnovu relacije

$$\bar{w}_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K w_i^{(k)},$$

gde je

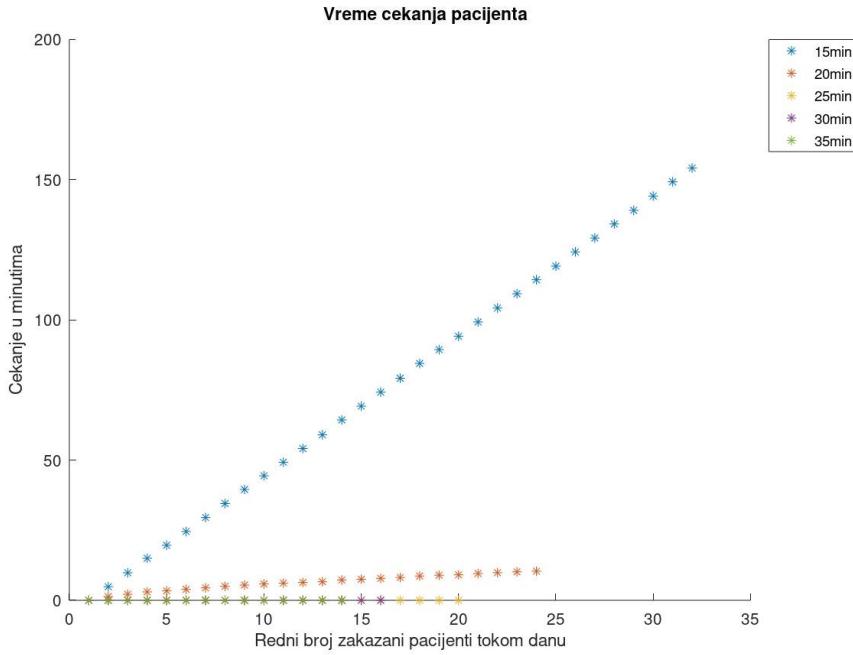
$$w_i^{(k)} = t_i^{b(k)} - t_i^{a(k)}, \quad k = 1, \dots, K$$

Rezultati potvrđuju teorijski zaključak,  $P(\Theta > 15) = 1$  za  $\Theta : U(15, 25)$  da će vreme čekanje pacijenata linearno da raste za po 5 minuta, pa će poslednji zakazani pacijent čekati 150 minuta, što povlači da će lekar morati da radi prekovremno. Ovakvo zakazivanje je veoma loše što će se odraziti i na veliku vrednost funkcije cilja za ovaj slučaj. Kada se pacijenti zakazuju na svakih 20 minuta, tada je verovatnoća da lekar neće stići da pregleda pacijenta za previđenih 20 minuta  $P(\theta > 20) = 0.5$ . Međutim sa istom verovatnoćom će lekar završiti pregled ranije od predviđenog vremena, što obezbeđuje da ne dolazi do akumulacije vremena čekanja kao u 1. slučaju. Poslednja tri razmatrana slučaja zakazivanja favorizuju pacijenta i ne dolazi do čekanja jer je  $P(\Theta > l) = 0$ , za  $l = 25, 30, 35$ .

## Cene čekanja pacijente

Model u velikoj meri zavisi od parametra  $c^W$ , pa je njegovo ocenjivanje od izuzetne važnosti kako bi dobijeni rezultati imali smisla. Jedan od zadataka uprave zdravstvene ustanove jest da objektivno odrede, odnosno ocene cene čekanja pacijenata. Cena čekanja zavisi od velikog broja faktora od kojih se izdvajaju zdravstveno stanje pacijenta i starosti pacijenta (mala deca su nestrpljivija od odraslih), drugih obaveza pacijenta (kod zaposlenih koliko će izostajati sa posla, ili kako je organizovano čuvanje dece kod mladih roditelje, i slično).

U analizi polazimo od najjednostanijeg slučaja kada je cena čekanja ista za svakog pacijenta. Cilj nam je da odredimo optimalnu dužinu slota za koji bi trebalo zakazivati



Slika 2.3: Prosečno vreme čekanja po slotu

pacijente u zavisnosti od cene čekanja. Zbog složenosti problema optimizacije funkciju cilja aproksimiramo interpolacionim polinomima za svaku vrednost cene čekanja iskoristiti tačne vrednosti funkcije cilja u slučajevima zakazivanja pacijenata na svakih 15, 20, 25 i 30 minute. Dobijeni rezultati su sumirani u tabelu 2.1

Uočimo da kako raste cena čekanja tako raste i optimlina dužina slota za koji treba zakazivati pacijente. Razlog za ovakav zaključak leži u činjenici da kada je cena čekanja niža tada se suma ponderisana cenom čekanjem (drugi sabiraka) u funkciji cilja znatno smanjuje. Kako se povećava cena čekanja ta razlika između cene vremena pacijenta i lekara se približava i više se stavlja akcenat na zakazivanje tako da pacijent što manje čeka, što je objašnjeno u prethodnom delu.

Koristeći dobijene aproksimacije optimalnog slota za devet različitih cena čekanja možemo dobiti aproksimaciju funkcije koja predstavlja zavisnost dužine slota za zadato  $c_W$ . Primenom regresione analize, koristeći model  $s(x) = a + b\frac{1}{x}$  dobijena je sledeća funkcija

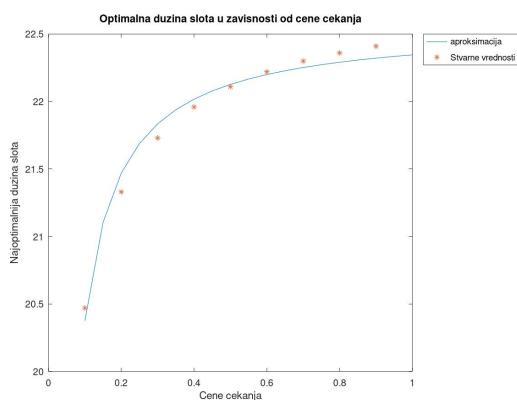
$$s(c^W) = -\frac{0.22}{c^W} + 22.564, \quad c^W \in (0, 1),$$

gde su oba koeficijenti statistički različita od nule i za koji je  $R^2 = 0.98$ . Grafički je rezultat prikazan na slici 2.4.

Analiza modela kada cena čekanja nije konstantna je znatno složenija. Kao primer moguće analize ovog slučaja primenjena je sledeća ideja. U cilju određivanja najboljeg

Cena čekanja	Interpolacioni polinom	Tačka minimuma
0.1	$p(x) = -0.4x^3 + 29.89x^2 - 718.53x - 5656.04$	20.47
0.2	$p(x) = -0.67x^3 + 50.15x^2 - 1227.92x + 9883.81$	21.33
0.3	$p(x) = -0.93x^3 + 70.41x^2 - 1737.3x + 14111.6$	21.73
0.4	$p(x) = -1.2x^3 + 90.66x^2 - 2246.69x + 18339.39$	21.96
0.5	$p(x) = -1.47x^3 + 110.92x^2 - 2756.08x + 22567.17$	22.11
0.6	$p(x) = -1.73x^3 + 131.17x^2 - 3265.47x + 26794.95$	22.22
0.7	$p(x) = -2x^3 + 151.43x^2 - 3774.85x + 31022.73$	22.3
0.8	$p(x) = -2.26x^3 + 171.69x^2 - 4284.24x + 35250.51$	22.36
0.9	$p(x) = -2.53x^3 + 191.94x^2 - 4793.63x + 39478.3$	22.41

Tablica 2.1: Analiza cene čekanja



Slika 2.4: Optimalno zakazivanje u zavisnosti od cene čekanja

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	Vrednost objektivne funkcije
1	Pacijent 1	Pacijent 2	Pacijent 3	Pacijent 4	Pacijent 5	Pacijent 6	Pacijent 7	Pacijent 8	Pacijent 9	Pacijent 10	Pacijent 11	Pacijent 12	Pacijent 13	Pacijent 14	Pacijent 15	Pacijent 16	Pacijent 17	Pacijent 18	Pacijent 19	Pacijent 20	Pacijent 21	Pacijent 22	Pacijent 23	Pacijent 24	Pacijent 25	Pacijent 26	Pacijent 27	Pacijent 28	Pacijent 29	Pacijent 30	Pacijent 31	Pacijent 32		
2	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1109.10		
3	0.6	0.6	0.6	0.6	0.4	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1185.18		
4	0.6	0.6	0.6	0.6	0.4	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1187.09		
5	0.5	0.4	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.4	0.6	0.6	0.5	0.4	0.6	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1187.79		
6	0.6	0.6	0.4	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.4	0.5	0.5	1190.63		
7	0.6	0.4	0.5	0.4	0.5	0.6	0.6	0.5	0.4	0.6	0.4	0.6	0.6	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1197.96		
8	0.6	0.5	0.4	0.6	0.4	0.4	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.4	0.5	0.5	0.4	0.5	0.4	0.6	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	1200.36		
9	0.5	0.6	0.6	0.6	0.8	0.4	0.4	0.4	0.6	0.5	0.4	0.5	0.4	0.5	0.6	0.6	0.4	0.4	0.5	0.5	0.4	0.5	0.6	0.5	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	1200.84		
10	0.4	0.5	0.6	0.6	0.4	0.4	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1201.88		
11	0.6	0.6	0.5	0.5	0.6	0.4	0.4	0.5	0.4	0.6	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	0.4	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.6	0.4	0.5	0.4	0.4	0.6	0.4	1201.88		
43	0.4	0.4	0.4	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.4	0.5	0.5	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	1247.72		
44	0.5	0.4	0.4	0.4	0.6	0.5	0.4	0.4	0.6	0.4	0.6	0.4	0.6	0.4	0.4	0.5	0.4	0.6	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.6	0.5	1248.08		
45	0.5	0.5	0.6	0.4	0.4	0.4	0.5	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.6	0.6	0.6	0.5	0.4	0.5	0.4	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1249.02		
46	0.5	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6	0.5	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.4	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.4	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	1250.71		
47	0.4	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.5	0.4	0.5	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1253.34		
48	0.6	0.4	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.4	0.5	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	1255.61		
49	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4	0.6	0.6	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1257.04		
50	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.4	0.5	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	1257.78		
51	0.6	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.6	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	1260.71		
52	0.4	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.4	0.6	0.6	0.5	0.4	0.4	0.5	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	1262.61		
53	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.4	0.4	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	1286.02		
54	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	1326.68	

Slika 2.5: Analiza cene čekanja prilikom zakazivanja na svake 15 minute

redosleda pacijenata konstruisano je 50 različitih redosleda pacijentata i za svaki redosled izračunata je vrednosti funkcije cilja. Na kraju rangiramo rasporede na osnovu vrednosti funkcije cilja počevši od najniže prema većim vrednostima.

Na osnovu rezultata prikazanih na 2.5 i 2.6 zaključimo da prilikom zakazivanja pacijente na svaki 15 odnosno 20 minuta bolje rešenje dobijamo kada za početak radnog vremena lekara zakazujemo pacijente sa većem cenom čekanja. Razlog za ovakav zaključak leži, kako je već napomenuto, u činjenici da prilikom zakazivanja na 15, odnosno 20 minuta imamo tendenciju da vreme čekanja raste kako se više udaljavamo od početka radnog vremena lekara. U slučajevima kada se pacijenti zakazuju na svakih 25, 30 ili 35 minute, pacijenti ne čekaju te je drugi sabirak u funkciji cilja uvek jednak 0.

## Neaktivno vreme lekara

Neaktivno vreme lekara predstavlja dvostruki gubitak. Prvo, ustanova plaća lekara i u periodu kada ne obavlja pregledе, a drugo, neki pacijenti koji su mogli biti zakazani nisu dobili svoj termin. Kada lekar ne pregleda pacijente ne mora nužno da bude neaktivan, jer je u mogućnosti da vrši neke druge poslove (na primer: ispisuje recepte, sređuje arhivu, radi na usavršavanju). Po prepostavci našeg modela lekar se smatra aktivnim samo za vreme kada pregleda pacijenta, pa na taj način definisemo i analiziramo iskorišćenost njegovog radnog vremena. Naravno, vreme čekanja pacijenata i neaktivno vreme lekara su u jakoj vezi. Kada se povećava čekanje pacijenta, očekuje se smanjenje neaktivnog vremena lekara. Ipak ove dve promenljive ne određuju u potpunosti jedna drugu, jer obe zavise od vremena dolaska pacijenta.

Ocenu očekivanog neaktivnog vremena lekara, datog relacijom (2.2), dobijamo ko-

	Pacijent 1	Pacijent 2	Pacijent 3	Pacijent 4	Pacijent 5	Pacijent 6	Pacijent 7	Pacijent 8	Pacijent 9	Pacijent 10	Pacijent 11	Cene čekanja	Pacijent 12	Pacijent 13	Pacijent 14	Pacijent 15	Pacijent 16	Pacijent 17	Pacijent 18	Pacijent 19	Pacijent 20	Pacijent 21	Pacijent 22	Pacijent 23	Pacijent 24	Vrednost objektivne funkcije
1																										
2																										
3	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	80.33	
4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.4	0.4	0.5	0.4	0.6	0.6	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	80.92	
5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.4	0.4	0.6	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4	0.6	0.4	81.38	
6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4	0.6	0.5	0.4	0.6	0.5	0.4	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6	0.4	0.5	81.38	
7	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.6	0.4	0.4	0.6	0.4	0.4	0.6	0.4	0.5	0.4	0.5	0.5	0.6	0.4	0.4	0.4	81.41	
8	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.6	0.4	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.4	0.5	81.83	
9	0.5	0.6	0.6	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6	0.4	0.5	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	82.21	
10	0.5	0.5	0.6	0.6	0.4	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.6	0.5	0.4	0.4	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	82.23	
11	0.6	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.4	0.6	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	0.6	0.4	0.6	0.5	0.4	0.4	0.5	82.58	
43	0.4	0.4	0.4	0.6	0.4	0.5	0.4	0.4	0.5	0.4	0.6	0.6	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	85.29	
44	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.4	0.6	0.6	0.5	0.4	0.5	0.6	0.4	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	0.6	85.45	
45	0.4	0.5	0.6	0.6	0.5	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.6	0.5	0.5	0.4	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	85.94	
46	0.5	0.4	0.6	0.4	0.4	0.5	0.4	0.4	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	86.72	
47	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.5	0.4	0.4	0.6	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	86.99	
48	0.4	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.4	0.5	0.6	0.6	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.4	0.6	0.6	0.6	0.4	0.6	0.4	0.4	0.4	87.01	
49	0.5	0.4	0.4	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.4	0.4	0.6	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.4	0.4	0.5	0.6	0.4	0.4	0.5	87.74	
50	0.4	0.4	0.4	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	87.82	
51	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	88.17	
52	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.6	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.5	0.4	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	88.99	

Slika 2.6: Analiza cene čekanja prilikom zakazivanja na svake 20 minute

risteći aritmetičku sredinu kao ocenjivač, tj.

$$E(I) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K t_n^{b(k)} - \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i^{(k)}$$

gde je  $t_i^{b(k)} = \max\{t_i^{a(k)}, t_{i-1}^{b(k)} + \Theta_{i-1}^{(k)}\}$ . U prvom slučaju kada pacijente zakazujemo na 15 minuta, koristeći osobine uniformne raspodele, dobijamo sledeće realizacije za promenljivu  $t_i^b$  koja predstavlja početak pregleda  $i$ -og pacijenta

$$\begin{aligned} t_2^{b(k)} &= \max\{t_2^{a(k)}, t_1^{b(k)} + \Theta_1^{(k)}\} = \max\{15, 0 + \Theta_1^{(k)}\} = \Theta_1^{(k)} \\ t_3^{b(k)} &= \max\{t_3^{a(k)}, t_2^{b(k)} + \Theta_2^{(k)}\} = \max\{30, \Theta_1^{(k)} + \Theta_2^{(k)}\} = \Theta_1^{(k)} + \Theta_2^{(k)} \\ t_4^{b(k)} &= \max\{t_4^{a(k)}, t_3^{b(k)} + \Theta_3^{(k)}\} = \max\{45, \Theta_1^{(k)} + \Theta_2^{(k)} + \Theta_3^{(k)}\} = \Theta_1^{(k)} + \Theta_2^{(k)} + \Theta_3^{(k)} \end{aligned}$$

...

$$t_{32}^{b(k)} = \max\{t_n^{a(k)}, t_{n-1}^{b(k)} + \Theta_{n-1}^{(k)}\} = \Theta_1^{(k)} + \dots + \Theta_{n-1}^{(k)}$$

Odnosno, za ovaj slučaj zakazivanja važi  $t_i^{b(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \Theta_j^{(k)}$ , pa dobijamo da je neaktivno vreme lekara

$$E(I) = t_n^{b(k)} - \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i^{(k)} - \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i^{(k)} = 0.$$

U drugom slučaju pacijente zakazujemo na svakih 20 minuta, odnosno  $t_1^a = 0, t_2^a = 20, t_3^a = 40, \dots, t_n^a = (n-1)20$ . Kako je  $P(\Theta > 20) = 0.5$ , to povlači da  $i$ -ti

pacijent, iako je došao u zakazano vreme, može da čeka jer je pregled prethodnog pacijenta trajao duže od 20 minuta koliko je raporedom rezervisano za njegov pregled. Kako je

$$\begin{aligned} t_i^b = \max\{t_i^a, t_{i-1}^b + \Theta_{i-1}\} &= \begin{cases} t_i^a & t_i^a > t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} \\ t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} & t_i^a < t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 20(i-1) & 20(i-1) > t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} \\ t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} & 20(i-1) < t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} \end{cases} \end{aligned}$$

koristeći osobine matematičkog očekivanja dobijamo

$$E(t_i^b) = \begin{cases} 20(i-1) & t_i^a > t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} \\ E(t_{i-1}^b) + E(\Theta_{i-1}) & t_i^a < t_{i-1}^b + \Theta_{i-1} \end{cases},$$

Po pretpostavci je za prvog pacijenta  $t_1^a = t_1^b = 0$ , dok se za naredne pacijente dobija očekivano vreme početka pregleda

$$\begin{aligned} i = 2 : \quad E(t_2^b) &= \begin{cases} 20 \cdot 1 & t_2^a > t_1^b + \Theta_1 \\ 0 + E(\Theta_1) & t_2^a < t_1^b + \Theta_1 \end{cases} = \begin{cases} 20 & t_2^a > t_1^b + \Theta_1 \\ 20 & t_2^a < t_1^b + \Theta_1 \end{cases} = 20 \\ i = 3 : \quad E(t_3^b) &= \begin{cases} 20 \cdot 2 & t_3^a > t_2^b + \Theta_2 \\ 20 + E(\Theta_2) & t_3^a < t_2^b + \Theta_2 \end{cases} = \begin{cases} 40 & t_3^a > t_2^b + \Theta_2 \\ 40 & t_3^a < t_2^b + \Theta_2 \end{cases} = 40 \\ i = 4 : \quad E(t_4^b) &= \begin{cases} 20 \cdot 3 & t_4^a > t_3^b + \Theta_3 \\ 40 + E(\Theta_3) & t_4^a < t_3^b + \Theta_3 \end{cases} = \begin{cases} 60 & t_4^a > t_3^b + \Theta_3 \\ 60 & t_4^a < t_3^b + \Theta_3 \end{cases} = 60 \\ &\dots \\ i = n : \quad E(t_n^b) &= 20(n-1) = t_n^a \end{aligned}$$

Tako dobijamo da je očekivano neaktivno vreme lekara je:

$$E(I) = E(t_n^a) - \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i = 20(n-1) - 20(n-1) = 0.$$

Međutim, ova jednakost važi samo teorijski, dok korišćenje ocene za matematičko očekivanje povlači i varijansu. Odnosno, kako se očekivanje ocenjuje na osnovu konačnog broja podataka ( $K$ ) to povlači da će za neki slot ocenjeno vreme trajanja pregleda ipak biti kraće od 20 minuta i da će tada doći do neaktivnosti lekara.

Od trećeg do petog slučaja zakazujemo pacijente na svakih 25, 30 i 35 minuta, respektivno. Kako  $\Theta : \mathcal{U}(15, 25)$ , sledi  $P(\Theta < 25) = 1$ , pa će sigurno postojati neaktivno vreme lekara, odnosno u ova tri slučaja zakazivanja važi

$$t_i^b = \max\{t_i^a, t_{i-1}^b + \Theta_{i-1}\} = t_i^a.$$

Za treći slučaj dobijamo da su vremena početka pregleda

$$t_1^b = 0, \quad t_2^b = 25, \quad t_3^b = 50, \dots, t_{19}^b = 450$$

pa je očekivano neaktivno vreme lekara

$$E(I) = 450 - 18 \cdot 20 = 120.$$

U četvrom razmatranom slučaju je

$$t_1^b = 0, \quad t_2^b = 30, \quad t_3^b = 60, \dots, t_{16}^b = 450$$

te sledi

$$E(I) = 450 - 15 \cdot 30 = 150.$$

Za peti slučaj, kada se pregledi zakazuju na po 35 minuta, sledi

$$t_1^b = 0, \quad t_2^b = 35, \quad t_3^b = 70, \dots, t_{13}^b = 420$$

što daje

$$E(I) = 420 - 18 \cdot 20 = 180.$$

Vrednosti dobijene simulacijama date su u tabeli i predstavljene na slici 2.7

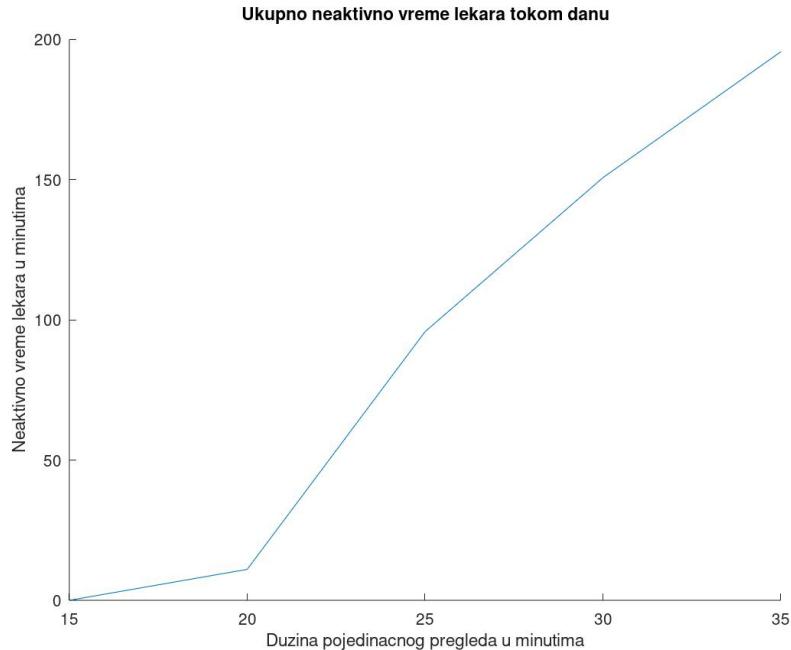
slučaj	$E(I)$	$\hat{E}(I)$
1.	0	0
2.	0	11.4
3.	120	95.82
4.	150	150.75
5.	180	195.66

## Funkcija cilja

Na osnovu simuliranih vrednosti, pokazali smo kako smo dobili vrednosti za vreme čekanja pacijenata,  $W$ , i neaktivno vreme lekara,  $I$ , pa sada možemo za svih pet razmatranih slučajeva izračunati funkciju cilja,  $Z$ , kao zbir izračunatih vrednosti za dva posmatrana vremena.

$J$	$W$	$I$	$Z$
15	1220.86	0	1220.86
20	71.56	11.4	82.96
25	0	95.82	95.82
30	0	150.75	150.75
35	0	195.66	195.66

To znači da smo vrednost funkcije cilja ocenili u pet različitih tačaka. Od pet razmatranih slučajeva zaključujemo da je najbolji drugi slučaj, gde su pregledi zakazivani na 20 minuta. Međutim, ostaje otvoreno pitanje kako odrediti optimalnu vrednost funkcije cilja nad celim skupom definisanosti.



Slika 2.7: Neaktivno vreme lekara po svakom pacijentu

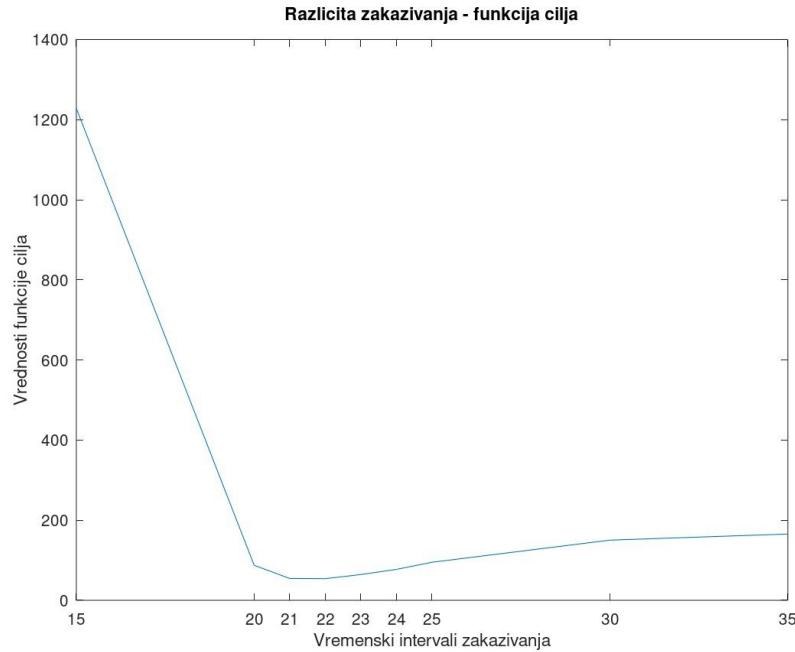
Jedna od mogućnosti je da nastavimo postupak izračunavanja funkcije cilja za druge vrednosti predviđene dužine pregleda. Iz tih razloga smo ponovili opisani postupak izračunavanja funkcije cilja za četiri nova slučaja, odnosno za  $T \in \{21, 22, 23, 24\}$ . Tako smo dobili, za date ulazne parametre  $c_i^W$ , vrednosti funkcije cilja u devet tačaka. Aproksimacija funkcije cilja data je na slici 2.8.

Koristeći ovaku aproksimaciju funkcije cilja, uočavamo da je minimalna vrednost postignuta za  $T = 21$ , tj. kada se pacijenti zakazuju na svakih 21 minut. Kako dobijamo da je  $n = 480/21 = 22.85$ , potrebno je odrediti da li zakazati 22 pacijenta i na taj način povećali vrednost neaktivnog vremena, ili 23 pacijenta, kada bi se povećalo vreme čekanja.

### 2.2.2 Primer 2

- **Zakazivanje** - Posmatrana su tri različita slučaja. U prva dva slučaja, kao i kod Primera 1, posmatramo zakazivanje pregleda sa istim vremenskim intervalom u toku radnog dana, dok u trećem slučaju razmatramo zakazivanje pregleda sa različitim vremenskim intervalima u toku dana. To znači da određujemo koji od predložena 3 slučaja zakazivanja je najefikasniji. Koristeći podatak da je radno vreme lekara 8 sati, odnosno 480 minuta, posmatrani slučajevi su:

1. **slučaj:** pacijenti se zakazuju na svakih 20 minuta,  $n = 24$



Slika 2.8: Vrednosti objektivne funkcije za različita zakazivanja

2. slučaj: predviđeno vreme za pregled je 30 minuta,  $n = 16$

3. slučaj: Koristimo istorijske podatke za određivanje termina pregleda. Podaci o dužini pregleda su simulirani za 365 dana i dobijena je matrica podataka

$$F = \begin{bmatrix} \Theta_1^1 & \Theta_2^1 & \dots & \Theta_N^1 \\ \Theta_1^2 & \Theta_2^2 & \dots & \Theta_N^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta_1^{365} & \Theta_2^{365} & \dots & \Theta_N^{365} \end{bmatrix}$$

U  $i$ -toj koloni nalaze se podaci za 365 pacijenata, odnosno u njoj se nalaze realizovane vrednosti za dužinu pregleda, za  $i$ -tog pacijenta u radnom danu, pa je prosečna dužina pregleda  $i$ -tog pacijenta

$$\bar{\Theta}^i = \frac{1}{365} \sum_{k=1}^{365} \Theta_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Ako je

$$\tilde{\Theta}^i = [\bar{\Theta}^i], \quad i = 1, 2, \dots, N$$

gde  $\lfloor \cdot \rfloor$  označava najbliži ceo broj, tada su pregledi zakazani u sledećim terminima

$$t_1^a = 0, \quad t_2^a = \tilde{\Theta}_1, \quad t_3^a = \tilde{\Theta}_1 + \tilde{\Theta}_2, \quad \dots \quad t_N^a = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\Theta}_i$$

gde 0 označava početak radnog vremena.

- **Cene čekanja** - U ovom primeru koristimo politiku da cene čakanja određujemo na osnovu neke karakteristike pacijenta. Ako su nam dostupni podaci o ispitanicima, kao što su starost i radni status (vrsta posla), možemo uvesti različite cene za vreme čekanja. Za simulacije smo koristili sledeću raspodelu za  $c_i^W$

$$c_i^W : \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.18 & 0.42 & 0.4 \end{pmatrix} .$$

- **Dužina pregleda** - Dužina pregleda je simulirana korišćenjem dve neprekidne raspodele sa istim očekivanjem i disperzijom, ali različitog oblika:

1. **slučaj:** uniformna raspodela,  $\Theta_i : \mathcal{U}(a, b)$
2. **slučaj:** normalna raspodela,  $\Theta_i : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ,

gde je  $\frac{a+b}{2} = m$  i  $\frac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2$ . U ovom primeru smo ispitivali ponašanje modela zakazivanja kada lekar obavlja različite pregledе, odnosno pregledе koji zahtevaju različitu dužinu vremena. Testirali smo sledeći slučaj:

$$\begin{aligned} i = 1, 2, \dots, 12 : \quad E(\Theta_i) &= 20, \quad Var(\Theta_i) = 8.33 \\ i = 13, 14, \dots, 22 : \quad E(\Theta_i) &= 15, \quad Var(\Theta_i) = 8.33 \\ i = 23, 24, \dots, 30 : \quad E(\Theta_i) &= 10, \quad Var(\Theta_i) = 8.33 \end{aligned}$$

Radi jednostavnijeg praćenja analize uvodimo sledeće oznake

$$\begin{aligned} \Theta_{20n} &: \mathcal{N}(20, 8.33) \\ \Theta_{15n} &: \mathcal{N}(15, 8.33) \\ \Theta_{10n} &: \mathcal{N}(10, 8.33) \\ \Theta_{20u} &: \mathcal{U}(15, 25) \\ \Theta_{15u} &: \mathcal{U}(10, 20) \\ \Theta_{10u} &: \mathcal{U}(5, 15) \end{aligned}$$

Kako smo imali imali tri razlicita modela zakazivanja koje smo testirali i dva razlicita modela za simulaciju vremena pregleda, u ovom primeru smo razmatrli šest

različitih opcija, za koje su uvedene sledeće oznake

oznaka	slučaj
<b>30 min-UR:</b>	zakazivanje na 30 minuta (1. slučaj) i uniformna raspodela za dužinu pregleda (1. slučaj);
<b>30 min-NR:</b>	zakazivanje na 30 minuta (1. slučaj) i normalna raspodela za dužinu pregleda (2. slučaj);
<b>20 min-UR:</b>	zakazivanje na 20 minuta (2. slučaj) i uniformna raspodela za dužinu pregleda (1. slučaj);
<b>20 min-NR:</b>	zakazivanje na 20 minuta (2. slučaj) i normalna raspodela za dužinu pregleda (2. slučaj);
<b>prosek-UR:</b>	zakazivanje na osnovu proseka (3. slučaj) i uniformna raspodela za dužinu pregleda (1. slučaj);
<b>prosek-NR:</b>	zakazivanje na osnovu proseka (3. slučaj) i normalna raspodela za dužinu pregleda (2. slučaj);

Rezultati i analiza ovih šest mogućnosti data je u nastavku kroz analizu vremena čekanja pacijenta, neaktivnog vremena lekara i vrednosti funkcije cilja.

### Vreme čekanja pacijenata

Na slici 2.9 je predstavljeno prosečno vreme čekanje po svakom slotu, kao što je to urađeno na slici 2.3 za prvi razmatrani primer.

Vrednost na  $x$ -osi označava redni broj slota za koji je pacijent zakazan dok je na  $y$ -osi predstavljeno prosečno čekanje pacijenta po slotu. Prosečno čekanje izračunavamo kao

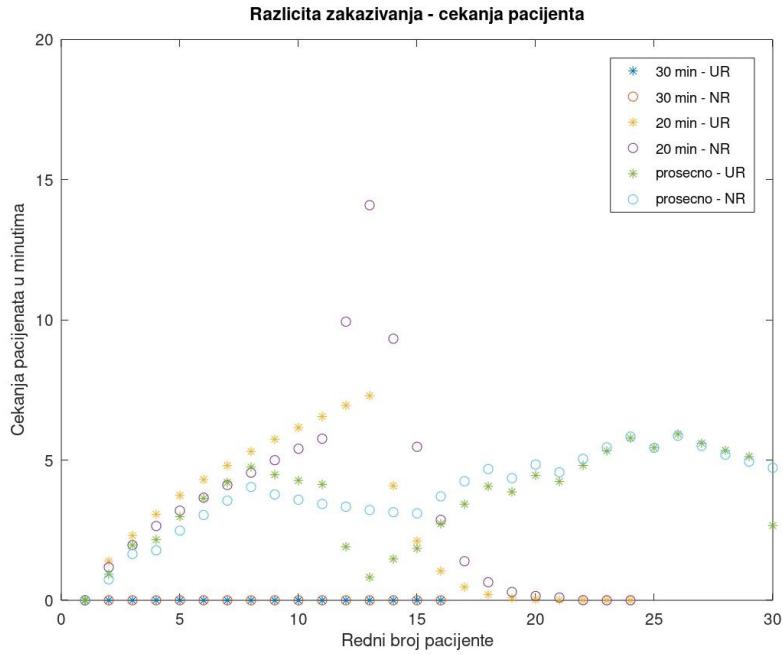
$$\overline{w_i} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K w_i^{(k)},$$

gde je

$$w_i^{(k)} = t_i^{b(k)} - t_i^{a(k)}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Dobijeni rezultati potvrđuju teorijsku pozadinu. Neka prvo posmatramo prvi slučaj, kada pacijente zakazujemo na svakih 30 minuta. Koristeći raspodele za uniformnu i normalnu raspodelu dobijamo

$$\begin{aligned} P(\Theta_{20u} > 30) &= 0 \\ P(\Theta_{15u} > 30) &= 0 \\ P(\Theta_{10u} > 30) &= 0 \\ P(\Theta_{20n} > 30) &= P\left(\frac{\Theta_{20n} - 20}{2.89} > \frac{30 - 20}{2.89}\right) = 1 - P\left(\frac{\Theta_{20n} - 20}{2.89} < 3.48\right) \approx 0 \\ P(\Theta_{15n} > 30) &= 1 - P\left(\frac{\Theta_{15n} - 15}{2.89} < 5.19\right) = 0 \\ P(\Theta_{10n} > 30) &= 1 - P\left(\frac{\Theta_{10n} - 20}{2.89} < 6.92\right) = 0 \end{aligned}$$



Slika 2.9: Čekanja pacijenata po slotu pri korišćenju različite raspodele dužine pre-gleda

što znači da u slučaju ovakvog zakazivanja pregleda neće doći do pojave čekanja kod pacijenata.

U drugom slučaju, kada se pacijenti zakazuju na svakih 20 minuta, verovatnoća da lekar ne završi pregled pacijenta za 20 minuta, odnosno da će naredni pacijent morati da čeka iznosi

$$\begin{aligned} P(\Theta_{20u} > 20) &= 0.5; & P(\Theta_{15u} > 20) &= 0; & P(\Theta_{10u} > 20) &= 0; \\ P(\Theta_{20n} > 20) &= 0.5; & P(\Theta_{15n} > 20) &= 0.0418; & P(\Theta_{10n} > 20) &= 0.0003 \approx 0 \end{aligned}$$

Vidimo da će, u slučaju kada je očekivana dužina pregleda 20 minuta, naredni pacijent morati da čeka sa verovatnoćom 0.5. Takođe, uočavamo i razliku kod dve posmatrane raspodele kada je očekivana dužina pregleda 15 minuta. Kod uniformne raspodele ne može doći do čekanja, dok je kod normalne raspodele to moguće sa verovatnoćom 0.041. Posledica ove razlike ogleda se u dužem čekanju pacijenata kada je pregled simuliran normanom raspodelom u srednjem delu dana, tj. kada se sa pregleda za koji je očekivana dužina 20 minuta, pređe na pregleda čija je očekivana dužina pregleda 15 minuata.

Posmatrani primer ukazuje da do čekanja gotovo sigurno dolazi u prvoj polovini radnog dana. Zato bi bilo poželjno naizmenično zakazivanje pregleda sa očekivanim dužim i kraćim vremenom trajanja.

U trećem slučaju, kada se pacijenti zakazuju na osnovu prosečnog vremena dobijenog na osnovu istorijskih podataka, dobijamo da je verovatnoća da lekar ne završi pregled u predviđenom vremenu za sve slučajeve jednaka 0.5. To nam uzrokuje generalnu tendenciju sporijeg rasta čekanja pacijenta u toku dana.

### Cene čekanja pacijenata

U ovom primeru koristimo različite dužine pregleda što dovodi do kompleksnijih problema. Prvo posmatramo slučaj kada su cene čekanja iste za sve pacijente. Jedna mogućnosti za približno rešavanje problema je da za svaki razmatrani slučaj odredimo optimalnu duž slota. Kako bismo došli do prihvatljivog rešenja koristimo aproksimaciju polinom trećeg stepena, a čiji minimim ćemo uzeti kao aproksimaciju minima posmatranog problema. Za svaki od šest slučajeva smo primenili opisani postupak. Koeficijenti interpolacionih polinoma su dati u tabelama na 2.10 i 2.11. Na primer, kada primenjujemo normalnu raspodelu  $\mathcal{N}(15, 8.33)$  za modeliranje dužine pregleda i cenu čekanja  $c^W = 0.3$  onda funkciju cilja aproksimiramo polinomom  $p(x) = -0.1x^3 + 6.15x^2 - 116.82x + 718.95$  na intervalu  $[10, 25]$ . Polinom dostiže svoj minimum u tački  $x = 14.76$ , tj. 14.76 je optimalna dužina slot-a za zakazivanje pacijenata čije je očekivano vreme pregleda 15 minuta i ima cenu čekanja 0.3.

		Cene čekanja								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Uniformna raspodela U(15,25)	$c$	1005.26	1441.89	1878.52	2315.14	2751.77	3188.39	3625.02	4061.65	4498.27
	$x$	-131.42	-181.69	-231.96	-282.23	-332.50	-382.77	-433.04	-483.31	-533.57
	$x^2$	5.49	7.41	9.33	11.25	13.17	15.09	17.01	18.93	20.85
	$x^3$	-0.07	-0.09	-0.12	-0.14	-0.17	-0.19	-0.22	-0.24	-0.26
	Tačka minimuma	18.59	19.61	20.29	20.78	21.16	21.45	21.70	21.90	22.07
Uniformna raspodela U(10,20)	$c$	378.87	536.51	694.15	851.78	1009.42	1167.06	1324.70	1482.34	1639.98
	$x$	-67.05	-89.66	-112.27	-134.88	-157.50	-180.11	-202.72	-225.33	-247.94
	$x^2$	3.74	4.82	5.89	6.96	8.04	9.11	10.18	11.26	12.33
	$x^3$	-0.06	-0.08	-0.09	-0.11	-0.13	-0.14	-0.16	-0.18	-0.20
	Tačka minimuma	13.17	14.11	14.77	15.26	15.65	15.96	16.21	16.43	16.62
Uniformna raspodela U(5,15)	$c$	85.91	127.67	169.44	211.20	252.97	294.74	336.50	378.27	420.03
	$x$	-23.03	-30.72	-38.42	-46.12	-53.81	-61.51	-69.21	-76.90	-84.60
	$x^2$	1.92	2.39	2.86	3.33	3.80	4.27	4.74	5.20	5.67
	$x^3$	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09	-0.10	-0.11	-0.12
	Tačka minimuma	8.00	8.88	9.53	10.04	10.44	10.77	11.05	11.29	11.50

Slika 2.10: Koeficijenti interpolacionih polinoma kada dužine pregleda prate uniformnu raspodelu

Ponovo dobijamo očekivani rezultat, odnosno sa povećanjem cene čekanja raste optimalna dužina slot-a. Funkcije koje određuju optimalnu dužinu slot-a u zavisnosti od cene čekanja za šest razmatranih slučajeva date su u tabeli 2.2

		Cene čekanja								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Normalna raspodela N(20, 8.33)	$c$	1009.78	1474.08	1938.38	2402.67	2866.97	3331.27	3795.57	4259.87	4724.17
	$x$	-131.53	-185.64	-239.75	-293.85	-347.96	-402.07	-456.18	-510.29	-564.39
	$x^2$	5.47	7.56	9.66	11.75	13.84	15.93	18.02	20.11	22.20
	$x^3$	-0.07	-0.10	-0.12	-0.15	-0.18	-0.20	-0.23	-0.26	-0.28
	Tačka minimuma	18.70	19.69	20.34	20.80	21.14	21.42	21.64	21.82	21.98
Normalna raspodela N(15, 8.33)	$c$	391.32	555.14	718.95	882.77	1046.58	1210.40	1374.21	1538.03	1701.84
	$x$	-69.30	-93.06	-116.82	-140.58	-164.34	-188.10	-211.86	-235.62	-259.38
	$x^2$	3.87	5.01	6.15	7.29	8.42	9.56	10.70	11.84	12.98
	$x^3$	-0.06	-0.08	-0.10	-0.12	-0.13	-0.15	-0.17	-0.19	-0.21
	Tačka minimuma	13.21	14.13	14.76	15.24	15.60	15.90	16.14	16.35	16.53
Normalna raspodela N(10, 8.33)	$c$	78.11	121.42	164.73	208.05	251.36	294.67	337.98	381.29	424.61
	$x$	-19.78	-27.68	-35.58	-43.48	-51.37	-59.27	-67.17	-75.07	-82.97
	$x^2$	1.57	2.05	2.53	3.00	3.48	3.96	4.44	4.92	5.40
	$x^3$	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09	-0.10	-0.11
	Tačka minimuma	8.33	9.31	9.99	10.50	10.91	11.23	11.51	11.74	11.94

Slika 2.11: Koeficijenti interpolacionih polinoma kada dužine pregleda prate normalne raspodele

Dužina pregleda	Funkcija
$\mathcal{U}(15, 25)$	$h(x) = -\frac{0.38}{x} + 22.05$
$\mathcal{U}(10, 20)$	$h(x) = -\frac{0.38}{x} + 16.54$
$\mathcal{U}(5, 15)$	$h(x) = -\frac{0.38}{x} + 11.37$
$\mathcal{N}(20, 8.33)$	$h(x) = -\frac{0.36}{x} + 21.98$
$\mathcal{N}(15, 8.33)$	$h(x) = -\frac{0.36}{x} + 16.46$
$\mathcal{N}(10, 8.33)$	$h(x) = -\frac{0.4}{x} + 11.85$

Tablica 2.2: Funkcija dužine slota  $h$  u zavisnosti od cene čekanja  $x$

Kada kombinujemo različite dužine pregleda i različite cene čekanja možemo zaključiti da u slučaju kada zakazujemo pacijente na svakih 30 minuta cene čekanja nemaju uticaj na vrednosti funkcije cilja, jer je drugi sabirak uvek jednak 0, tj. vreme čekanja jednak nuli. Ako su pacijenti zakazani na svakih 20 minuta tada je bolji raspored kada se grupišu pacijenti sa istom dužinom pregleda, a zatim se naizmenično zakazuju grupe gde je očekivana dužina pregleda duža, odnosno kraća. Unutar jedne grupe, odnosno bloka, prvo se zakazuju pacijenti sa većom cenom čekanja. Najgori raspored predstavlja slučaj kada se za početak radnog dana zakazuju pacijenti sa najdužim očekivanim pregledom i najnižom cenom čekanja dok za kraj dana ostavljamo pacijente čiji pregled traje najkraće, a imaju relativno visoku cenu čekanja. Ovo je empirijski zaključak dođen na osnovu rezultata datih na slici 2.12. Slični zaključci važe i u slučaju kada pacijente zakazujemo na osnovu prosečne dužine pregleda kao što je prikazan na 2.13.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	
2	CC	0.5	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.4	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.4	0.5	0.6	
3	DP	19.79	19.70	19.89	9.99	15.12	15.27	20.02	19.95	20.07	19.98	9.96	20.16	14.98	10.07	15.04	14.75	14.95	14.84	20.12	14.82	20.19	19.88	20.00	10.07	
4	CC	0.4	0.6	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5
5	DP	19.98	20.02	10.07	9.99	19.99	14.84	20.07	19.89	20.12	20.16	20.13	19.70	14.98	14.75	15.27	15.12	19.79	19.70	10.07	14.82	9.95	14.95	19.88	20.15	20.04
6	CC	0.6	0.6	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.4	0.6	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5
7	DP	19.70	19.79	14.98	20.02	15.12	18.99	20.12	14.82	20.04	15.27	19.95	20.07	9.99	20.16	10.07	14.84	19.88	10.07	14.95	15.04	19.98	14.75	9.96	20.13	
8	CC	0.4	0.6	0.5	0.6	0.4	0.6	0.6	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5
9	DP	14.98	15.04	20.04	19.79	10.07	19.88	15.12	15.27	20.02	14.84	18.99	14.82	9.99	14.75	10.07	20.13	20.07	19.70	19.98	20.16	19.95	9.96	20.12	14.95	
10	CC	0.6	0.6	0.6	0.8	0.5	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5
11	DP	19.98	19.88	18.99	20.02	10.07	9.96	19.70	20.12	15.04	20.16	19.95	19.79	15.17	14.75	14.98	20.04	14.95	14.84	15.12	9.99	14.82	20.13	20.07	10.07	
12	CC	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5
13	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
14	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
15	DP	15.3	15.0	20.1	14.8	19.7	14.8	20.2	10.1	10.0	15.0	20.0	20.1	19.8	20.0	14.9	14.8	20.0	20.1	20.0	10.1	10.0	19.9	15.1	19.9	
16	CC	0.6	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.6	0.4	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
17	DP	14.9	15.0	20.1	19.7	20.0	14.8	15.0	10.1	15.1	20.2	14.8	15.3	19.9	20.1	20.0	10.0	10.0	19.8	19.9	20.0	10.1	20.1	20.0	14.8	
18	CC	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5
19	DP	20.0	19.8	19.9	20.0	19.9	20.1	19.7	20.1	20.0	20.2	20.0	20.1	19.3	15.0	15.0	14.8	14.9	14.8	15.1	14.8	14.0	10.1	10.0	10.1	
20	CC	0.5	0.6	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.4	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
21	DP	20.0	19.8	19.9	20.0	19.9	20.1	19.7	20.1	20.0	20.2	20.0	20.1	15.3	15.0	15.0	14.8	14.9	14.8	15.1	14.8	10.0	10.1	10.0	10.1	
22	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
23	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
24	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
25	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
26	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
27	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
28	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
29	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
30	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
31	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
32	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
33	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
34	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
35	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
36	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
37	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
38	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
39	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
40	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
41	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
42	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
43	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
44	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
45	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
46	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
47	DP	19.79	10.07	15.27	20.02	14.84	19.88	19.95	20.13	9.99	14.98	9.96	17.90	15.04	19.98	10.07	19.89	14.75	20.04	20.16	14.82	14.95	20.07	15.12	20.12	
48	CC	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
49	DP	20.0	19.8	19.9	20.0	19.9	20.1	19.7	20.1	20.0	20.2	20.0	20.1	19.3	15.0	15.0	14.8	14.9	14.8	15.1	14.8	10.0	10.1	10.0	10.1	
50	CC	0.5	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.4	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6
51	DP	20.0	19.8	19.9	20.0	19.9	20.1	19.7	20.1	20.0	20.															

Slika 2.12: Analiza rasporeda - slučaj zakazivanje na svakih 20 minuta

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF		
1	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	P26	P27	P28	P29	VFC			
2	C2	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	122.79				
3	D9	10.07	19.98	20.07	20.23	20.19	7.52	10.07	19.98	9.99	7.41	14.95	14.98	19.79	10.33	19.98	20.16	20.12	15.12	10.07	14.84	14.75	20.04	8.97	13.99	15.47	15.04	9.96	18.82	14.05			
4	C4	0.5	0.8	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	131.81				
5	D4	14.84	10.38	20.03	9.99	18.91	14.75	10.07	10.07	19.89	17.97	15.27	20.12	19.70	20.16	10.07	7.52	14.82	19.95	9.87	15.12	9.96	15.04	9.89	14.86	7.41	13.98	20.04	20.07	12.15	13.81		
6	C6	0.5	0.8	0.6	0.8	0.6	0.8	0.6	0.8	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	131.81			
7	D9	19.98	20.03	20.07	20.12	20.13	15.04	9.96	19.88	14.75	14.95	9.99	10.07	7.52	19.89	20.10	9.99	17.97	15.27	14.98	10.07	10.07	8.87	10.33	20.04	20.16	13.98	15.12	15.82	14.87	7.41		
8	C8	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	139.92			
9	D9	15.04	20.07	9.87	20.02	15.12	20.16	15.27	14.98	17.90	14.84	7.52	10.07	14.75	19.79	19.88	20.04	20.13	9.99	9.96	10.07	12.02	9.99	7.41	19.98	19.89	14.85	13.89	9.95	18.42	10.07		
10	C10	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.5	0.5	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	133.96			
11	D9	14.95	19.79	14.75	10.07	19.78	7.41	19.95	10.33	9.99	20.07	9.96	20.12	14.98	14.82	20.13	15.12	19.98	20.16	10.07	15.27	10.07	9.99	14.84	7.52	19.70	9.87	20.04	20.07	15.04	18.89		
12	C12	0.5	0.8	0.4	0.5	0.5	0.5	0.4	0.5	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	124.72			
13	D9	9.99	14.75	15.04	19.95	20.13	19.98	14.98	20.02	15.12	20.16	20.04	7.41	15.27	9.87	20.07	19.89	14.95	14.84	7.52	14.82	9.99	19.70	19.79	9.96	10.07	20.12	10.07	19.88	10.07	10.33		
94	C4	0.5	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.6	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.4	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	130.72				
95	D9	9.99	7.41	15.04	19.88	9.96	10.07	19.70	15.12	19.89	10.33	14.84	9.99	0.95	19.98	10.07	19.79	20.04	10.07	14.75	19.88	20.02	15.77	7.52	9.87	14.87	18.42	20.13	10.66	14.95	20.07	19.89	15.12
96	C6	0.4	0.6	0.4	0.6	0.4	0.5	0.5	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	131.59			
97	D9	20.16	10.07	19.89	20.12	19.70	9.99	15.12	15.27	19.79	20.04	17.95	7.41	14.95	20.04	10.33	14.74	18.42	20.13	0.07	0.95	14.95	14.82	19.88	20.02	19.95	14.89	14.75	10.07	9.87	10.07		
98	C8	0.5	0.5	0.4	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	131.95				
99	D9	20.02	14.84	20.12	20.07	20.04	19.98	10.07	9.96	14.95	15.27	20.16	9.99	19.95	15.04	20.13	14.75	19.88	19.70	19.79	10.07	19.89	10.07	7.41	19.79	14.82	9.99	14.87	10.33	14.98	7.52	15.12	
100	C10	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	133.91			
101	D9	14.75	14.95	9.99	9.99	19.99	20.16	19.79	10.07	10.07	13.88	7.52	20.07	19.70	20.13	15.04	15.12	14.82	9.99	20.04	19.75	7.41	18.89	15.27	14.98	10.07	9.87	19.98	19.89	20.02	20.12	14.84	
102																																	
103	D9	DP - dužina pregleda																									C6 - cena čekanja						
		P - Pacijent																									VFC - vrednost funkcije cješja						

Slika 2.13: Analiza rasporeda - slučaj "prosečno"

### **Neaktivno vreme lekara i funkcija cilja**

U razmatranom primeru, kako je već napomenuto, na početku dana su zakazani pacijenti sa najvećom očekivanom dužinom pregleda, dok za kraj dana ostavljamo preglede za koje je očekivano vreme najkraće. Koristeći ovu karakteristiku pregleda i promenljivu  $t_i^b$  koja predstavlja početak pregleda  $i$ -tog pacijenta i vezu  $t_i^b = \max\{t_i^a, t_{i-1}^b + \Theta_{i-1}\}$ , za slučaj zakazivanja na 30 minuta dobijamo

$$\begin{aligned} t_1^b &= 0 \\ E(t_2^b) &= E(\max\{30, 0 + \Theta_1\}) = 30 \\ E(t_3^b) &= E(\max\{60, 0 + \Theta_2\}) = 60 \\ &\dots \\ E(t_{16}^b) &= E(\max\{450, 0 + \Theta_{15}\}) = 450 \end{aligned}$$

Pri zakazivanju na 20 minuta dobijamo

$$i = 1 : \quad t_1^b = 0$$

$$i = 2 :$$

$$E(t_2^b) = \begin{cases} 20 \cdot 1 & t_2^a > t_1^b + \Theta_1 \\ 0 + E(\Theta_1) & t_2^a < t_1^b + \Theta_1 \end{cases} = \begin{cases} 20 & t_2^a > t_1^b + \Theta_1 \\ 20 & t_2^a < t_1^b + \Theta_1 \end{cases} = 20$$

$$i = 3 :$$

$$E(t_3^b) = \begin{cases} 20 \cdot 2 & t_3^a > t_2^b + \Theta_2 \\ 20 + E(\Theta_2) & t_3^a < t_2^b + \Theta_2 \end{cases} = \begin{cases} 40 & t_3^a > t_2^b + \Theta_2 \\ 40 & t_3^a < t_2^b + \Theta_2 \end{cases} = 40$$

...

$$i = 12 :$$

$$E(t_{12}^b) = \begin{cases} 20 \cdot 11 & t_{12}^a > t_{11}^b + \Theta_{11} \\ 200 + E(\Theta_{11}) & t_{12}^a < t_{11}^b + \Theta_{11} \end{cases} = \begin{cases} 220 & t_{12}^a > t_{11}^b + \Theta_{11} \\ 220 & t_{12}^a < t_{11}^b + \Theta_{11} \end{cases} = 220$$

Odavde sledi da je

$$E(t_i^b) = t_i^a \quad \text{za } i = 1, \dots, 12.$$

Od 13. do 24. pacijenta predviđeno vreme za pregled je duže od stvarne dužine pre-gleda sa verovatnoćom (skoro) 1

$$P(\Theta_{15n} < 20) = 0.96, \quad P(\Theta_{10n} < 20) = 1, \quad P(\Theta_{15u} < 20) = 1, \quad P(\Theta_{10u} < 20) = 1.$$

pa dobijamo da je

$$E(t_i^b) = t_i^a \quad \text{za } i = 13, \dots, 24.$$

U trećem modelu zakazivanja dobijamo istu relaciju, odnosno

$$E(t_i^b) = t_i^a \quad \text{za } i = 1, \dots, 30.$$

Ove rezultate dobijamo analogno kao kod drugog slučaja za prvih 12 pacijenata.

Na osnovu modela (slučaja zakazivanja) možemo izračunati vrednosti za promenljivu  $t_i^a$ . Tako dobijamo

Sada određujemo  $t_i^a$ . Te vrednosti dobijamo na sledeći način:

### 1. slučaj:

$$t_1^a = 0, \quad t_2^a = 30, \quad t_3^a = 60, \dots, t_{16}^a = 15 \cdot 30 = 450$$

### 2. slučaj:

$$t_1^a = 0, \quad t_2^a = 20, \quad t_3^a = 40, \dots, t_{24}^a = 23 \cdot 20 = 460$$

**3. slučaj:**

$$\begin{aligned}
 t_1^a &= 0, \quad t_2^a = 20, \quad t_3^a = 40, \dots, t_{12}^a = 11 \cdot 20 = 220, \\
 t_{13}^a &= 220 + (13 - 12) \cdot 15 = 235, \quad t_{14}^a = 220 + (14 - 12) \cdot 15 = 250, \dots, \\
 t_{22}^a &= 220 + (22 - 12) \cdot 15 = 370, \quad t_{23}^a = 370 + (23 - 22) \cdot 10 = 380, \\
 t_{24}^a &= 370 + (24 - 22) \cdot 10 = 390, \dots, t_{30}^a = 370 + (30 - 22) \cdot 10 = 450
 \end{aligned}$$

Na ovaj način smo odredili sve promenljive koje su nam potrebne za izračunavanje neaktivnog vremena lekara i funkcije cilja. Za šest različitih mogućnosti koje razmatramo, vrednosti dve ključne promenljive (neaktivno vreme i vreme čekanja) za određivanje funkcije cilja su date u tabeli 2.3, gde je data i vrednost funkcije cilja.

Slučaj	Neaktivno vreme	Ponderisano čekanje	Vrednost funkcija cilja
20 min-UR	69.87	33.59	103.46
20 min-NR	61.66	43.09	104.74
30 min-UR	164.089	0	164.089
30 min-NR	156.65	0	156.65
prosecno-UR	30.39	56.8	87.19
prosecno-NR	20.11	60.78	80.89

Tablica 2.3: Rezultati

Uočavamo da je funkcija cilja najmanja kada se koristi model zakazivanja na osnovu istorijskih podataka. Ovakav rezultat je bio očekivan, jer se u najvećoj meri oslanja na realizovane vrednosti, odnosno na realnu situaciju. Međutim, primena ovakvog modela zakazivanja nije jednostavna u praksi.

## Deo 3

# Modifikovani model sa nepojavljivanjem pacijenata

Model analiziran u prethodnom delu je pojednostavljen, u smislu da ne uzima u obzir nekoliko važnih realnih situacija koje se događaju u domovima zdravlja. Zato je potrebno njegovo uopštenje.

Pored dve vrste vremena koja su definisana kod osnovnog modela, modifikovani modeli mogu uključiti i nova promenljive koje se tiču vremena. Tako možemo posmatrati sledeće promenljive:

- *direktno vreme čekanja* - jeste vreme koje pacijent čeka između zakazanog termina (dolaska u dom zdravlja) i početka pregleda;
- *indirektno vreme čekanja* - jeste vreme između traženog (preferiranog) termina i stvarno zakazanog termina;
- *neaktivno vreme* - jeste vreme koje lekar provede čakajući pojavljivanje pacijenta zbog ranijeg završetka prethodnog pregleda ili zbog kašnjenja/nepojavljivanja pacijenta;
- *prekovremen rad* - jeste vreme koje lekar ostaje nakon završetka radnog vremena kako bi završio preglede svih zakazanih pregleda koji su se pojavili;

Sva prethodno definisana vremena predstavljaju trošak i funkcija cilja se najčešće modelira kao ponderisana kombinacija ova četiri vremena. Naravno, kod ovakvog pristupa, slično kao u osnovnom modelu, potrebno je odrediti parametre kojima se ocenjuje cena čekanja ili cena prekovremenog rada.

U praksi se često dešava da se pacijent uopšte ne pojavi (*no-show*) na pregled. Razlozi za to mogu biti različiti. Neke mogući razlozi su:

- Pacijent je zakazan za termin koji njemu ne odgovara, npr. dugo se čeka, i u međuvremenu odlazi kod drugog lekara.
- U periodu između zakazivanja termina i zakazanog termina nestaju simptomi i pacijent odluci da u tom slučaju ne ide na pregled.

- Dešavanje neke nepredviđene situacije koja sprečava pacijenta da dođe na pregled (npr. problem dolaska zbog transporta, pojava neke druge bolesti pri kojim se ne sme izvršiti određen pregled).

U radu [1] objedinjeni su i sumirani rezultati 105 istraživanja čiji su nalazi publikovani u naučnim časopisima, a koji se bave problemom nepojavljivanja pacijenata u zakazanim terminima. Dobijeno je da je prosečna stopa nepojavljivanja u svih 105 razmatranih studija iznosila 23.0%, i da je najviša stopa uočena na afričkom kontinentu (43.0%), a najniža u Okeaniji (13.2%). Razmatrane studije su se u najvećoj meri odnose na raspored zakazivanja u primarnoj nezi i psihijatriji. U analizi faktora, odnosno razloga, zašto dolazi do pojave nepojavljivanja pacijenata korišćene su različite statističke metode za identifikaciju prediktora za pojavu nepojavljivanja, među kojima su najčešće bili  $\chi^2$ -test,  $t$ -test i multivrijaciona logistička regresija. U većini razmatranih studija, uočeno je da su najvažniji faktori koji utiču na nepojavljivanje:

- indirektno vreme čekanja (vremenski interval između datuma kada je termin registrovan u sistemu zakazivanja klinike i stvarnog datuma pregleda) i
- prethodna istorija nepojavljivanje (postojanje prethodno propuštenih termina od strane pacijenta).

Pored ova dva najuticajnija faktora, registrovan je i uticaj sledećih socio-ekonomskih karakteristika pacijenta: odrasli mlađih godina, niži socio-ekonomski status, mesto boravka udaljeno je od klinike i neposedovanje privatnog osiguranja.

Pored mogućnosti nepojavljivanja pacijenta na zakazani pregled u model se može uvesti i prekovremen rad lekara koji se definiše kao razlika između planiranog zatvaranja klinike (planiranog kraja radnog vremena za lekara) i stvarnog zatvaranja odnosno završetka pregleda poslednjeg pacijenta. Ovu promenljivu možemo iskoristiti za određivanje broja pacijenata za jedan dan ili za određivanje broja pregleda ako definišemo sa kojom verovatnoćom želimo da se dogodi prekovremen rad lekara.

Kako slučajne promenljive  $\Theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  predstavlja dužinu pregleda  $i$ -tog pacijenta to je ukupno aktivno vreme lekara dato sa

$$T = \sum_{i=1}^n \Theta_i.$$

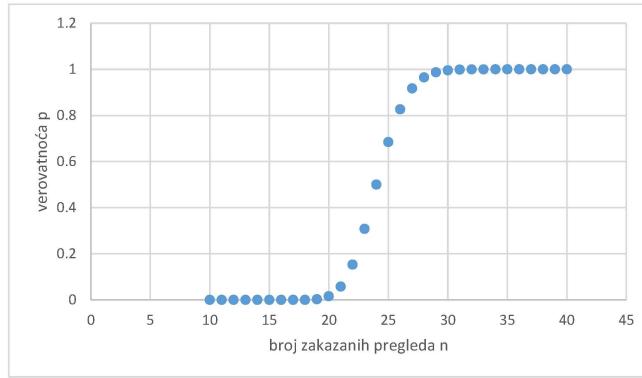
Ako prepostavimo da su  $\Theta_i$  nezavisnosne slučajne promenljive i da sve imaju istu normalnu raspodelu  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , događaj da će lekar raditi prekovremeno je opisan sa  $T > 480$ . Kako je

$$\begin{aligned} E[T] &= E\left[\sum_{i=1}^n \Theta_i\right] = n \cdot m \\ D[T] &= D\left[\sum_{i=1}^n j_i\right] = n \cdot \sigma^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

to zaključujemo da slučajna promenljiva  $T$  ima normalnu raspodelu  $T : \mathcal{N}(n \cdot m, n \cdot \sigma^2)$ . Verovatnoću da dođe do prekovremenog rada određujemo na sledeći način

$$P(T > 480) = P(T^* > \frac{480 - n \cdot m}{\sigma \sqrt{n}}) = 1 - \Phi\left(\frac{480 - n \cdot m}{\sigma \sqrt{n}}\right) = p$$

Ako su parametri slučajne promenljive  $\Theta$  poznati, odnosno ocenjeni tada prethodna relacija određuje vrednost verovatnoće  $p$  u odnosu na broj zakazanih pregleda  $n$ . Ako je  $m = 20$  i  $\sigma = 8.33$  dobijamo grafik 3.1 koji prikazuje zavisnost verovatnoće da neće doći do prekovremenog rada,  $p$ , u zavisnosti od broja termina (slotova za taj dan). Vidimo da kada je broj zakazanih pacijenata manji od 20, odnosno kada se pacijenti zakazuju na  $480/20 = 24$  minuta ili ređe verovatnoća da će doći do prekovremenog rada je skoro 0. Sa druge strane ako je broj zakazanih pacijenata 24, odnosno na svakih 20 minuta, verovatnoća da će doći do prekovremenog rada iznosi 0.5. Ako je broj zakazanih pacijenata veći od 30 tada će gotovo sigurno doći do prekovremenog rada.



Slika 3.1: Određivanje broja pregleda (slotova) na osnovu pojave prekovremenog rada

Međutim iz praktičnih razloga pregledi se češće zakazuju na "lep" broj, odnosno na 20 ili 30 minuta. U prvom slučaju, kada su pregledi zakazani na po 20 minuta, lekar će često raditi prekovremeno, dok se u drugom slučaju to gotovo sigurno neće dogoditi. Napominjemo da je prvim slučajem obuhvaćen pregled  $n = 24$  pacijenta, a u drugom trećina manja, odnosno samo  $n = 16$  pacijenata.

Nepojavljivanje nekog pacijenta je, kako je to već napomenuto, česta pojava kod zakazivanja pregleda, pa je neophodno ovu pojavu uključiti u model. Jasno je da se u slučaju nepojavljivanja nekog pacijenta neaktivno vreme lekara povećava. U nastavku ćemo predstavljati uopštenje modela koje se oslanja na model razmatran u [3].

### 3.1 Konstrukcija modela

Ako za  $i$ -tog pacijenta definišmo Bernulijevu slučajnu promenljivu  $Y$ , gde verovatnoća  $p_i$  predstavlja verovatnoću da će pacijent doći u zakazanom terminu, tada očekivano čekanje pacijenta  $i$ , koje zavisi od realizacije slučajne promenljive  $Y$ , ima raspodelu

$$E[\tilde{W}_i | Y] : \begin{pmatrix} 0 & E[W_i] \\ 1 - p_i & p_i \end{pmatrix}.$$

Odnosno, očekivano vreme čekanja pacijenta u slučaju kada se uzima u obzir nepojavljivanje pacijenta je

$$E[E[\tilde{W}_i]] = p_i E[W_i].$$

Nepojavljivanje pacijenta utiče i na neaktivno vreme lekara. Kada se neki pacijent ne pojavi u zakazanom terminu, to povećava neaktivno vreme lekara. Znamo da promenljiva  $I_i$  označava neaktivno vreme lekara između završetka pregleda  $i$ -tog pacijenta i početka pregleda  $i + 1$ -og pacijenta. Koristeći Bernulijevu slučajnu promenljivu  $Y$  koja opisuje (ne)pojavljivanje pacijenta, za neaktivno vreme dobijamo

$$E[I_i | Y] : \begin{pmatrix} t_{i+1}^b - (t_i^b + \Theta_i) & t_{i+1}^b - t_i^b \\ p_i & 1 - p_i \end{pmatrix}.$$

Odnosno očekivano vreme kada je lekara neaktivan između pregleda  $i$ -tog i  $i + 1$ -og pacijenta u slučaju kada uključimo i mogućnost nepojavljivanja pacijenta je

$$E[I_i] = E[t_{i+1}^b - t_i^b] - p_i E[\Theta_i].$$

Odavde sledi da je ukupno neaktivno vreme lekara u toku dana

$$E[I] = E[t_n^b] - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot E[\Theta_i].$$

Sada funkcija cilja postaje

$$\min_{\{t_1^a, \dots, t_n^a\}} \{E[t_n^b] - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot E[\Theta_i] + \sum_{i=2}^n c_i^W \cdot p_i \cdot E[W_i]\} \quad (3.2)$$

gde su  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  verovatnoće pojavljivanja pacijenta na slotu  $i$ . Nepojavljivanje pacijenta na pregled smanjuje vreme čekanja pacijenta, ali povećava neaktivno vreme lekara. To povlači da se ne može zaključiti šta će se desiti sa funkcijom cilja, odnosno da vrednost funkcije cilja zavisi od procenjenih verovatnoća,  $p_i$ , i cena čekanja,  $c_i^W$ .

U osnovnom modelu smo prepostavili da pacijenti uvek dolaze u zakazano vreme. Međutim u praksi oba odstupanja, tj. dolazak pre zakazanog vremena i kašnjenje na pregled, su često zastupljena. Vreme dolaska pacijenta u ambulantu je stoga slučajna promenljiva i na njenu realizaciju utiče širok spektar faktora, npr. vremenski uslovi,

vreme čekanja na semaforima, eventualne blokade na putu, itd. Do netačnosti dolazi i zbog različitog ponašanja ljudi (neki uvek kasne, a sa druge strane, neki dolaze mnogo ranije). Za proširenje modela posmatraćemo kako vreme dolaska pacijenata sa mogućnošću netačnosti utiče na ključne promenljive modela, vreme čekanja pacijenta i neaktivno vreme lekara.

U osnovnom modelu smo promenljivu koja predstavlja početak pregleda  $i$ -tog pacijenta definisali koristeći relaciju

$$t_i^b = \max\{t_i^a, t_{i-1}^b + \Theta_{i-1}\}.$$

Ako sa  $l_i$  označimo slučajnu promenljivu koja predstavlja vreme netačnosti  $i$ -tog pacijenta, gde negativne vrednosti znače da je pacijent stigao pre zakazanog termina, a pozitivne vrednosti da je zakasnio, tada početak pregleda možemo preformirati u

$$t_i^b = \max\{t_i^a + l_i, t_{i-1}^b + \Theta_{i-1}\} \quad (3.3)$$

Dalje dobijamo:

$$\begin{aligned} t_i^b - t_i^a &= \max\{l_i, (t_{i-1}^a + W_{i-1}) + \Theta_{i-1} - t_i^a\} \\ W_i &= \max\{l_i, W_{i-1} + \Theta_{i-1} - J_{i-1}\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Očigledno se može dogoditi da vreme čekanja bude negativno. To znači da pregled počinje pre zakazanog termina što je realna situacija u praksi. Ako se ne čeka do zakazanog vremena to pozitivno utiče na neaktivno vreme lekara (smanjuje ga), a takođe smanjuje i vreme čekanja pacijenta.

Vratimo se ponovo na slučaj nepojavljivanja pacijenta. Kako bi bile ublažene posledice ovakvog ponašanja, najčešća modifikacija modela zakazivanja uključuje overbooking, u ovom slučaju duplo-bukiranje, tj pacijenti sa nižom verovatnoćom pojavljivanja zakazuju se u istom slotu sa drugim pacijentom. Na slici 1.1 detaljno su predstavljene mogućnosti.

## 3.2 Analiza modela

Već kod osnovnog modela pokazana je složenost određivanja optimalnog rešenja, tj. dobijanja najboljeg mogućeg rasporeda. Kod modela koji uzima u obzir i pojavu nepojavljivanja pacijenta, funkcija cilja je dobila kao proširenje funkcije cilja za osnovni model, što znači da se problem određivanja optimalnog rešenja prenosi i na modifikovani model.

Neka su dati termini pregleda, tj. slotovi u koje "upisujujemo", tj. zakazujemo pacijente. Prepostavimo da su slotovi jednakog dužine, to znači da imamo sledeći raspored

1	2	3	...	S
---	---	---	-----	---

Uvodimo sledeće oznake za promenljive, parametre i indekse koje ćemo koristiti u izračunavanju funkcije cilja:

- $i$  - pacijent  $i = 1, \dots, n$   
 $t^a$  - termini zakazivanja pacijenta  $t^a = t_1^a, \dots, t_n^a$   
 $A$  - skup cena čekanja,  $c_i^W$   
 $h$  - skup verovatnoća pojavljivanja,  $p_i$   
 $d$  - simulirani podaci kašnjenja pacijenata,  $l_i$   
 $DA$  - simulirani podaci za dužine preglede,  $W_i$   
 $b$  - granica za upotrebu duplo- i prebukiranje  
 $S$  - raspored pacijente  
 $f$  - vrednost funkcije cilja

U nastavku dajemo algoritam za određivanje optimalnog rasporeda kada su termini zakazivanja ekvidistantni, a koji se osanja na algoritam razvijen u [2].

**Algorithm 1:** ALGORITAM ZA OPTIMALNAM RASPORED SA PREBUKIRANJEM

```

1 Input :  $t^a, I, A, h, d, DA, b;$ 
2 Output :  $S, f$ 
3
4 for all  $i$ 
5   for  $j=1$  to  $i$ 
6     put  $i$ th patient to the slot  $j$ 
7     calculate  $f$ 
8   end
9   find the best place for  $i$ th patient
10  update  $S$ 
11 end
12 find set of patients  $L$  with no-shows rates lower than  $b$ 
13 for all  $l$  in  $L$ 
14   for all  $j$  in  $J$ 
15     overbook/double-book patient  $l$  to the slot  $j$ 
16     calculate  $f$ 
17   end
18   find the best place for overbooking/double-booking patient  $l$ 
19   update  $S$ 
20 end
21 return  $S, f$ 
```

Algoritam je implementan u softveru GNU Octave, kodovi za implementaciju se nalaze u prilogu. U nastavku dajemo rezultate dobijene na osnovu primene predloženog algoritma.

### 3.2.1 Primer

Za potrebe testiranja algoritma i modela, konstrusali smo primer koji je predstavljen u ovom delu.

Posmatramo ambulantu i jednog lekara koji vrši pregled u toku osmočasovnog radnog vremena. Parametre koji karakterišu pacijente smo odredili na osnovu njihove starosti jer, kako je već napomenuto, postoje istraživanja koja detektuju starost kao uticajni faktor na (ne)pojavljivanje i cenu čekanja. Odnosno, verovatnoće pojavljivanja i cena čekanja definisane su na sledeći način

Starost (u godinama)	Verovatnoće pojavljivanja	Koeficijent čekanja
18-30	0.6	0.4
31-55	0.75	0.5
56-65	0.85	0.6
65+	0.9	0.6

Posmatramo 30 pacijenta koji čekaju na pregled. Kako bismo simulirali starost pacijenata iskoristili smo podatke Republičkog zavoda za statistiku o strukturi populacije u Republici Srbiji, [9]) i utvrdili sledeću raspodelu starosti stanovništva

$$ST : \begin{pmatrix} 18-30 & 31-55 & 56-65 & 65+ \\ 0.18 & 0.42 & 0.18 & 0.22 \end{pmatrix}.$$

Neka je analiza istorijskih podataka o dužini pregleda dala da su pregleda može opisati sa tri tipične raspodele čija su očekivanja 10, 15 i 20 minuta sa standardnim devijacijom od 5 minuta. Raspodela očekivanog vreme trajanja pregleda je ocenjena sa

$$E(W) : \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 0.15 & 0.35 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Analiza istorijskih podataka o dolasku pacijenata na pregled služi za modeliranje promenljive  $l$  koja predstavlja kašnjenje (što obuhvata i raniji dolazak) pacijenta. Prepostavili smo da se za sve pacijente ova promenljiva može modelirati istom raspodelom, tj. prepostavili smo  $l_i = l$ . Odlučili smo se za sledeću raspodelu očekivanja promenljive  $l$

$$E(l) : \begin{pmatrix} -28 & 1 & 10 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

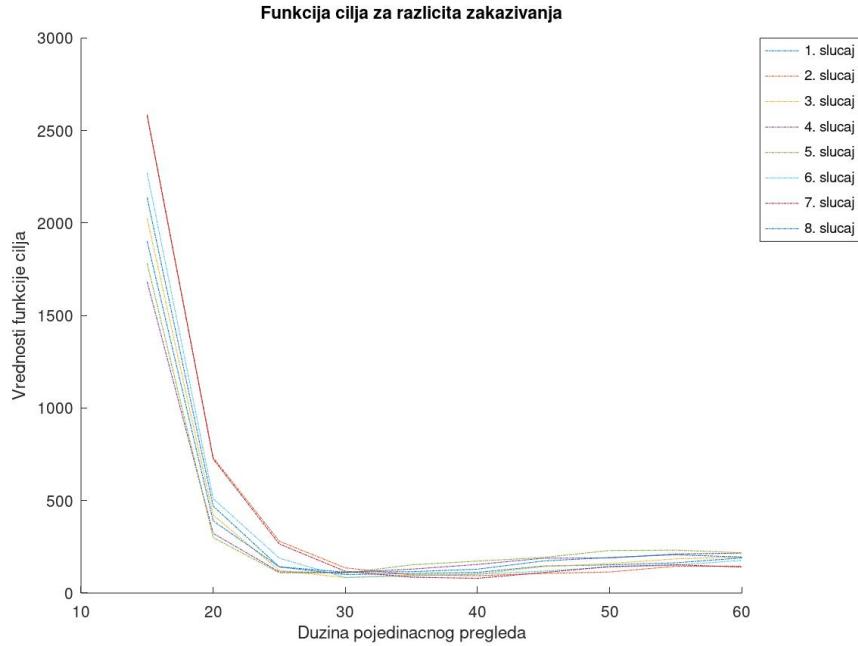
Za simulacije smo korsitili sledeće raspodele Za simulaciju dužine pregleda smo koristili uniformnu raspodelu, pa na osnovu raspodele za  $E(W)$  i koristeći homoskeastičnost,  $D(W) = 8,33$  smo posmatrali sledeće tri raspodele

$$\mathcal{U}(5, 15), \quad \mathcal{U}(10, 20), \quad \mathcal{U}(15, 25).$$

Za simulaciju kašnjenja pacijenta, takođe smo koristili tri uniformnu raspodelu sa istom disperzijom i očekivanjima  $E(l)$  prethodno određenim

$$\mathcal{U}(-35, -20), \quad \mathcal{U}(-5, 3), \quad \mathcal{U}(6, 15).$$

Posmatrali smo 8 različitih slučajeva. Kako je funkcija cilja složena i zavisi od velikog broja promenljivih povećava se vreme izračunavanja pa smo, za razliku od osnovnog modela, u ovom slučaju koristili  $K = 100$  simulacija



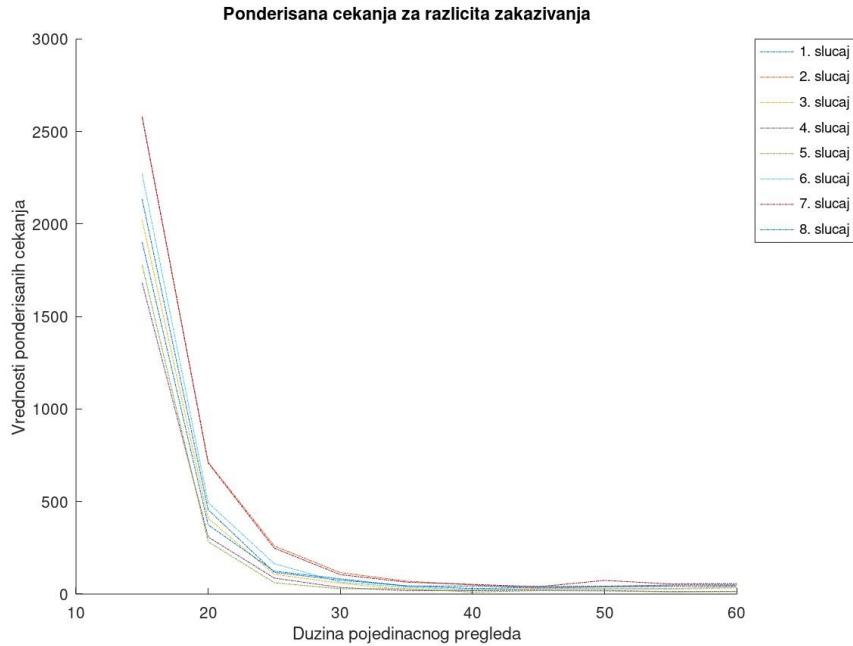
Slika 3.2: Zavisnost funkcije cilja od dužine slotova

Naš implementirani algoritam u GNU Octave radi na sledeći način: Radni dan lekara se podeli na intervale. Interval je predviđena dužina nekog pregleda (svaki interval ima istu dužinu). Raspored sa pregledima na svakih 15 minuta je raspored sa najkratim slotovima ( $n = 480/15 = 32$  slotova), dok je raspored sa slotovima od 60 minuta, raspored sa najdužim slotovima ( $n = 480/60 = 8$  slotova). Zbog praktičnih razloga dužine intervale se povećavaju uvek za 5 minuta u odnosu na prethodne dužine. To znači da smo posmatrati rasporede sa ekvidistanntnim dužinama slotova i za testiranje smo koristili sledeće dužine slotova

$$T = 15 + 5 \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9.$$

To znači da smo za jedan izbor parametara i drugih vrednosti bili u mogućnosti da izračunamo funkciju cilja za 11 različitih ekvidistantnih rasporeda i na taj način analiziramo koje zakazivanje bi bilo optimalno.

Prvo se uzima prvih  $n$  pacijenta gde  $n$  se označava broj slotova, odnosno termina u toku dana. Njih raspodeđujemo tako da dobijamo najmanju moguću vrednost funkcije cilja. To je ekvivalento da izračunamo funkciju cilja u  $n!$  mogućih redosleda pacijenata i utvrđimo koja permutacija je dala najmanju vrednost funkcije cilja. Naravno, kako je



Slika 3.3: Zavisnost ukupnog čekanja od dužine slot-a

$n!$  veliko (za slučaj od 48 pacijenata  $1.24 \cdot 10^{61}$ ), to je u algoritmu data procedura koja ovaj problem rešava na optimalni način i svodi na problem malih dimenzija.

Sada posmatramo pacijente koje smatramo rizičnim za nepojavljivanje, tj. pacijente čija je verovatnoća pojavljivanja niža od unapred zadate granice (pacijenti koji su iz prvih  $r$  će biti duplo-bukirani, dok pacijenti koji nisu između prvih  $r$  ali imaju nižu verovatnoću pojavljivanja, dobijaju samo jedan termin).

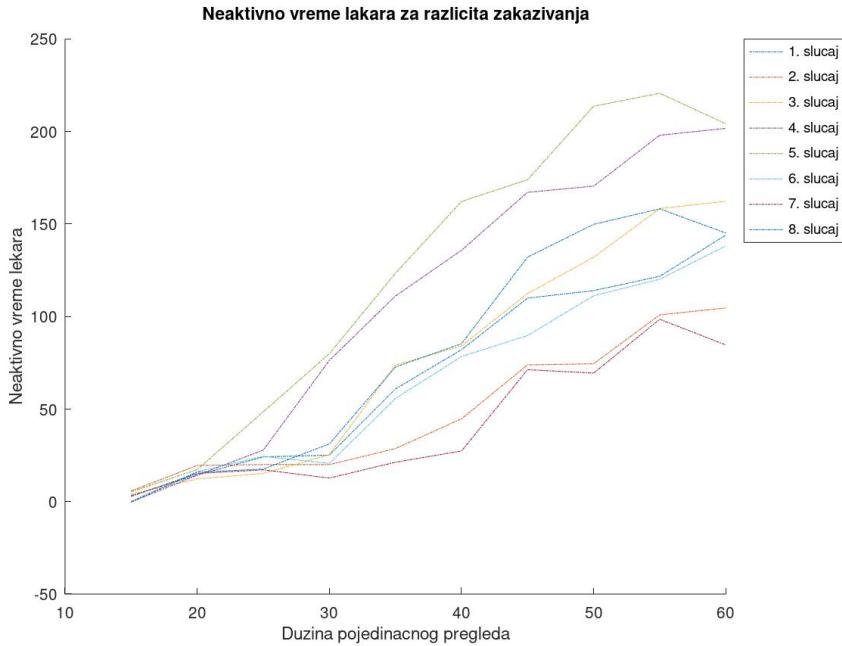
Na grafiku 3.2 za osam simuliranih slučajeva prikazano je ponašanje funkcije cilja za ekvidistantne rasporede zakazivanja koji su prethodno opisani. Na graficima 3.3 i 3.4 za iste simulirane slučajeve prikazni su ukupni ponderisani minuti čekanja pacijenata, odnosno ukupno neaktivno vreme lekara.

Posmatrajmo prvo ponašanje funkcije cilja, slika 3.2. Za svih osam slučajeva grafik pokazuje osobinu konveksnosti.

Kada su slotovi na kratkom rastojanju, vrednosti objektivne funkcije je veoma visoka jer se nagomilava vreme čekanja pacijenata, a i dolazi do potrebe za produženim radom lekara, što je isto nepovoljno sa ekonomskog stanovišta.

Vreme čekanja pacijenata prikazano je na grafiku 3.3 i jasno pokazuje opadajući trend kada se termini za pregledove povećaju, a dužina pregleda ostaje ista. Kako su neaktivno vreme lekara i čekanje pacijenata obrnuto proporcionalni, grafik 3.4 pokazuje tendenciju raste neaktivnog vremena sa povećanjem dužine planiranog slota za pregled, ali sa relativnom velikom fluktuacijom.

Dobijeni rezultati ukazuju da je od ponuđenih modela zakazivanja optimalan ras-



Slika 3.4: Zavisnost ukupnog neaktivnog vremena lekara od dužine slotova

pored sa zakazivanjem na približno 30 minuta.

U posmatranom algoritmu nismo uzimali u obzir cenu prekovremenog rada lekara. Međutim ako pustimo besuslovno prebukiranje onda je veća verovatnoća da će lekar morati da radi mnogo duže od predviđenog radnog vremena. Jedna mogućnost je da uvodimo granicu koja opisuje verovatnoću za prekovremen rad. To znači da ako definisemo verovatnoću  $c$  tako da određujemo broj pacijenata, odnosno broj zakazanih pregleda tako da važi

$$P(T > 480) = c.$$

Ovo ograničenje uvodimo u algoritam tako da prebukiranje vršimo sve dok je verovatnoća za prekovremen rad manji ili jednako unapred zadatoj granici. Ova modifikacija je data u Algoritmu 2.

Za primenu algoritma je napisan kod u GNU Octave koji se nalazi u Prilogu (A.2). Analizirani su slučajevi kada se pacijenti zakazuju na svakih 20 i 30 minuta. Optimalni raspored pacijenata dobijen primjenjenim algoritmom prikazani su na slikama 3.5 i 3.6. Brojevi predstavljaju identifikacione brojeve pacijenata koji se nalazi u bazi.

Na osnovu urađenih simulacija možemo zaključiti da kada primenimo prebukiranje onda je bolje pacijente zakazivati na duži slot. Kada njih zakazujemo samo na onoliko vreme koliko im je prosečna dužina pregleda, onda pojavljivanja dva (ili više) pacijenata koji su zakazani za isti termin, uzrukuje duže čekanja sledećim pacijentima. S druge strane, zakazivanje pacijenata na kraјem slotovima smanjuje neaktivno vreme

**Algorithm 2:** ALGORITAM ZA OPTIMALAM RASPORED SA PREBUKIRANJEM SA OGRANIČENJEM

```

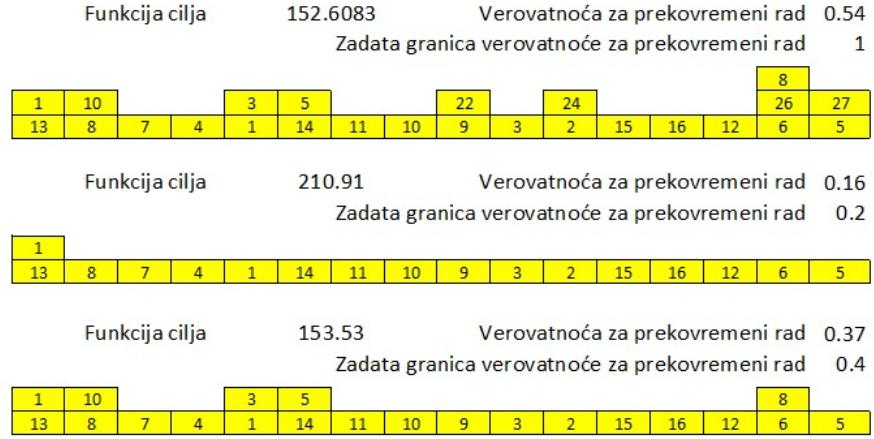
1 Input :  $J, I, A, h, d, DA, b, c;$ 
2 Output :  $S, f$ 
3
4 for all  $i$ 
5   for  $j=1$  to  $i$ 
6     put  $i$ th patient to the slot  $j$ 
7     calculate  $f$ 
8   end
9   find the best place for  $i$ th patient
10  update  $S$ 
11 end
12 calculate  $\mu$  and  $\sigma$  of  $T$ 
13 find set of patients  $L$  with no-shows rates lower than  $b$ 
14 rank patients by no-show rate
15 for all  $l$  in  $L$ 
16   calculate  $p = P(T > 480)$ 
17   if  $p \leq c$ 
18     for all  $j$  in  $J$ 
19       overbook/double-book patient  $l$  to the slot  $j$ 
20       calculate  $f$ 
21     end
22     find the best place for overbooking/double-booking patient  $l$ 
23     update  $S$ 
24   end
25 end
26 return  $S, f$ 

```

lekara, a time i vrednost funkcije cilja. Da bismo ipak zakazali više od jednog pacijenta po slotu onda je bolje da njih zakazujemo blže kraju radnog dana jer se tako minimizira broj pacijenata koji moraju da čekaju zbog pojavljivanja prebukiranih pacijente, ali istovremeno će ovakav plan zakazivanja rezultirati povećanjem verovatnoće događaja da će lekar morati da radi prekovremeno.

Kada analiziramo dobijene rezultate uočavamo da kada su pacijenti zakazani na svakih 20 minuta tada lekar pregleda 24 pacijenta sa verovatnoćom 0.54. Dok kad se pacijenti zakažu na svakih 30 minute sa istom verovatnoćem za prekovremeni rad lekar uspeva da pregleda 25 pacijenata. Kod zakazivanja na svakih 30 minuta možemo kontrolisati verovatnoću za prekovremeni rad i u skladu sa tim odrediti broj prebukiranja. Primetimo da je kod modela zakazivanja na svakih 30 minuta vrednost funkcije cilja znatno niža nego kod zakazivanja na svakih 20 minuta. Razlog toga je da u prvom slučaju imamo mnogo manje čekanje pri skoro istom neaktivnim vremenom lekara.

Prethodni primer pokazuje da uvođenje prebukiranosti u model, bez uvođenja pre-



Slika 3.5: Optimalna raspodela - svaki pacijent se zakaže na 30 minute

kovremenog rada ne daje dovoljno realistični model. Kako je prekovremen rad onaj rad lekara koji se obavi u periodu od planiranog završetka rada klinike do završetka pregleda poslednjeg zakazanog pacijenta, matematički to možemo opisati na sledeći način

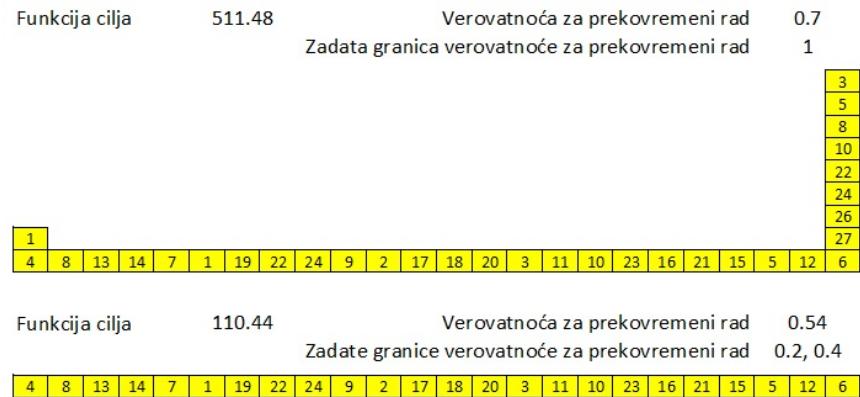
$$O = \max\{0, t_{i^*}^b + \sum_{i=i^*}^n \Theta_i - 480\}$$

gde je  $i^* = \max\{i \mid t_i^b \leq 480\}$ .

Prekovremen rad lekara ima nekoliko ključnih posledica. Najzačajnija je da lekar mora da ostane duže da radi, bez posebno planiranih pauza, što može dovesti do većeg stepena umora lekara, a samim tim i do ugrožavanje kvaliteta rada. Takođe prekovremen rad lekara košta, pa model proširujemo uvođenjem prekovremenog rada lekara ponderisanog cenom prekovremenog rada  $c^O$ . Zbog višestrukog negativnog uticaja prekovremenog rada posmatraćemo da je  $c^O > 1$ . Sada model postaje

$$\begin{aligned} \min_{t_1^a, \dots, t_n^a} \{ & E[t_n^b] - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot E[\Theta_i] + \sum_{i=2}^n c_i^W \cdot p_i \cdot E[W_i] + c^O \cdot E[O] \} \\ t_i^b = \max\{ & t_i^a + l_i, t_{(i-1)}^b + \Theta_{(i-1)} \} \\ W_i = \max\{ & l_i, W_{(i-1)} + \Theta_{(i-1)} + J_{(i-1)} \} \\ O = \max\{0, & t_{i^*}^b + \sum_{i=i^*}^n \Theta_i - 480\} \\ i^* = \max\{i, & \mid t_i^b < 480 \} \end{aligned}$$

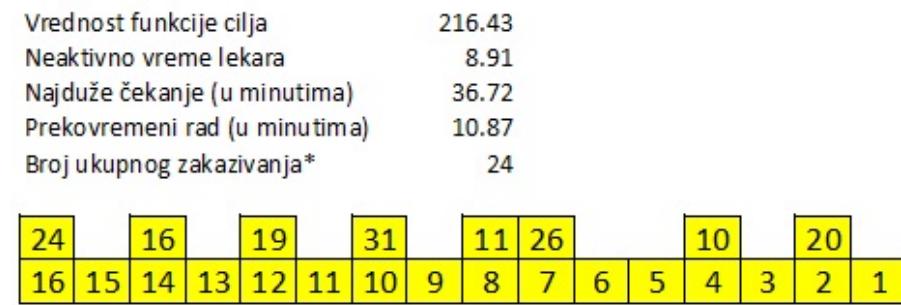
Kada Octave kôd A.2 preformulišemo tako da graničnu verovatnoću za prekovremen rad zamenimo kriterijumom za prekidanje zakazivanja više pacijenta, dobijamo



Slika 3.6: Optimalna raspodela - svaki pacijent se zakaže na 20 minute

kôd [A.2](#).

Kôd primenjujemo na pravljenje rasporeda u slučaju zakazivanje pacijente na svake 20 odnosno 30 minute. Dobiljene rezultati su prikazani na graficima [3.7](#) i [3.8](#).

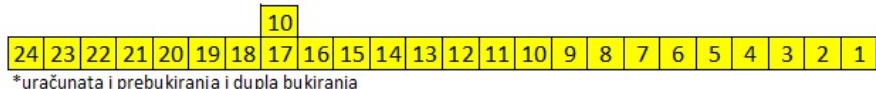


\*uračunata i prebukiranja i dupla bukirana

Slika 3.7: Raspored pacijenta prilikom zakazivanje na 30 minute

Primetimo da kod zakazivanja na 20 minute ukupno je za 25 pacijenata obezbeđen termin pregleda dok je ovaj broj pri zakazivanja na svakih 30 minuta 25. Kako u ovom primeru koristimo simulacije pregleda iz uniformne raspodele sa varijansom 8.33 imamo da je  $P(\Theta_i > 20) = 0.5$  i  $P(\Theta_i > 30) = 0$ , pa je kod zakazivanja na svakih 20 minuta verovatnoća da lekar ne stigne zaršiti pregled pacijenta za određenim vremenom 0.5. To povlači da svaki sledeći pacijent mora više da čeka. Dok u slučaju zakazivanja na svakih 30 minuta verovatnoća da lekar ne završavi pregled u određenom vremenu je 0, pa sledeći pacijent neće čekati. Kod zakazivanje na svakih 30 minute optimalno je zakazati 3 pacijenta na 2 slota. Izjednačava se predviđeno vreme za 2 slota ( $30+30=60$ ) i očekivano dužine pregleda 3 pacijenta ( $3 \cdot 20 = 60$ ). Tako da do kraja drugog posmatranog slota lekar skoro sigurno završava pregled svih 3 pacijenta

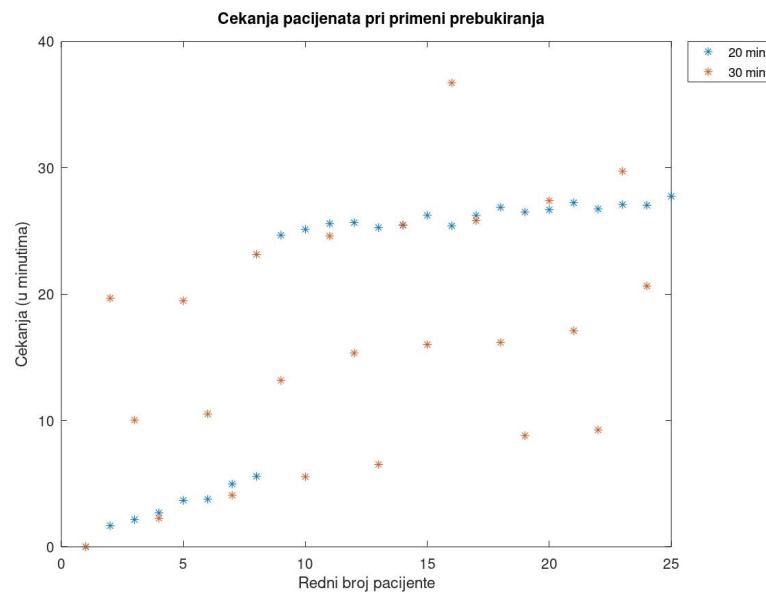
Vrednost funkcije cilja	308.87
Neaktivno vreme lekara	6.5
Najduže čekanje (u minutima)	27.74
Prekovremen rad (u minutima)	26.9
Broj ukupnog zakazivanja*	25



\*uračunata i prebukiranja i dupla bukiranja

Slika 3.8: Raspored pacijenta prilikom zakazivanje na 20 minute

ako svi se pojavljuju. Sledеci pacijent ћe чekati samo ako stigne ranije na zakazivan pregled. Ove zaključke su dobijeni na osnovu analize rezultata prikazanih na grafiku 3.9. Uočavao da zakazivanje na 30 minuta značajno smanjuje ukupno vremena čekanja pacijenta što dovodi do smanjenja vrednosti funkcije cilja, pa je od razmatrana dva načina zakazivanja bolji način zakazivanja na svakih 30 minuta.



Slika 3.9: Čekanja pacijenta prilikom primena prebukiranja

Prethodna analiza ukazuje koliko kako se uvođenjem dodatnih opcija, kao što je prebukiranost, mogu dobiti modeli zakazivanja koji daju bolje rezultate i sa stanovišta pacijenata i sa stanovišta zdravstvene ustanove. Naravno, postoji veliki broj mogućnosti za proširenje i poboljšanje modela, u nastavku navedimo neke od njih.

1. **Preferirani termini pregleda.** Često se dešava da neki pacijent zbog svojih obaveza ne može da prihvati bilo koji od ponuđenih termina za pregled. Kod našeg modela možemo definisati skup termina koji pacijent preferira i između njih tražiti optimalni termin za pregled pacijenta.
2. **Preferirani lekar.** Pregledi i stanje pacijenta često uključuju osjetljive informacije, pa je izbor određenog lekara čest zahtev od strane pacijenta. Modeli predloženi u ovom radu ne uključuju ovu mogućnost i razmatraju pravljenje rasporeda za jednog lekara. Zato to možemo smatrati nedostatkom našeg modela.
3. **Rad ambulante.** Modeli koje smo analiziraju uključuju raspored samo za jedan radni dan i samo za jednok lekara. Jedno potencijalno unaprerenje modela moglo bi da bude određivanje nekog perioda period (npr 20 dana ili radna nedelja ili mesec) i za svaki dan obuhvaćen tim periodom definišemo posebnu funkciju cilja, a zatim posmatramo sumu tako definisanih funkcija.

Proširivanje modela sa rada jednog lekara na rad više lekara u istoj ambulanti je takođe jedna od tema za dalja istraživanja. Jedna mogućnost može da bude da grupišemo lekare po vrste pregleda koje rade. Kada pravimo raspored prvo za svaki termin zakazujemo onoliko pacijenata koliko imamo lekara za određeni pregled. Tako bismo omogućili i izbor lekara od strane pacijenata. Ako podemo od pretpostavke da i lekari imaju svoje karakteristike, način i brzinu rada, onda možemo ponovo primeniti princip zasebnih funkcija cilja za svakog posmatranog lekara, a zatim posmatramo njihovu sumu.

Takođe bi model trebalo unaprediti uvođenjem prostora u raspored lekara za druge poslove ili za pauzu. Najjednostavnija modifikacija bi bila u određivanju jednog termina za pauzu. Međutim lako se može dogoditi da lekar nije završio započeti pregled do tog termina. Tada se postavlja pitanje koju politiku primeniti, produžiti pauzu i prouzrokovati čekanje epacijenata, ili skratiti pauzu i eventualno prouzrokovati zamorenost lekara.

4. **Pojavljivanje nezakazanog pacijenta.** Često se dešava da nekome hitno treba lekarski pregled. Oni dolaze bez zakazivanja i ne mogu se ostaviti bez pregleda jer to može da pogorša stanje pacijenta. Modeli razmatrani u ovom radu ne posmatraju ovu mogućnost. Jedna od modifikacija modela može da bude analiza istorijskih podataka i određivanje perioda kada dolazi do pojavljivanja nezakazanih pacijenata. Tada na te termine možemo dodati tzv. "veštacke pacijente" koji ima visok koeficijent čekanje a njegova verovatnoća pojavljivanja se određuje na osnovu istorijskih podataka. Za njih ne vršimo duplo-bukiranje.

Ako uvodimo oznake

$d$  - indeks za dane,  $d = 1, \dots, D$

$r$  - indeks za lekara  $r = 1, \dots, R$

$pt_i$  - preferirani termin  $i$ -tog pacijenta

$pr_i$  - preferirani lekar  $i$ -tog pacijenta

$vp$  - skup termina koji su rezervisani vrtačkim pacijentima

$J_{dri}$  -predviđeno vreme za pregled  $i$ -tog pacijenta  $d$ -og dana kod  $r$ -tog lekara

$O_{rd}$  - prekovremeni rad  $r$ -tog lekara  $d$ -og dana

model postaje

$$\min_{t_1^a, \dots, t_n^a} \sum_{d=1}^D \sum_{r=1}^R \{ E[t_{drN_d}^b] - \sum_{i=1}^{N_d-1} p_{dri} \cdot E[\Theta_{dri}] + \sum_{i=2}^{N_d} c_{dri}^W \cdot p_{dri} \cdot E[W_{dri}] + c^O \cdot E[O_{rd}] \}$$

$$t_{dri}^b = \max\{t_{dri}^a + l_{dri}, t_{dr(i-1)}^b + \Theta_{dr(i-1)}\}$$

$$W_{dri} = \max\{l_{dri}, W_{dr(i-1)} + \Theta_{dr(i-1)} + J_{dr(i-1)}\}$$

$$O_{dr} = \max\{0, t_{rdi^*}^b + \sum_{i=i_{rd}^*}^{N_d} \Theta_{dri} - 480\}$$

$$i_{rd}^* = \max\{i_{rd} \mid t_{dri}^b \leq 480\}$$

Algoritam za rešavanje prethodnog problema dat je u Algoritam 3.

**Algorithm 3:** ALGORITAM ZA REŠAVANJE MODELAA

```

1 Input :  $J, I, A, h, d, DA, b$ ;
2 Output :  $S, f$ 
3
4 for all i
5   for all r
6     for all d
7       for all j in  $pt_i$ 
8         if patient  $i$  prefer phisyc  $r$ 
9           put  $i$ th patient to the slot  $j$ 
10          calculate f
11        end
12      end
13    end
14  find the best place for  $i$ th patient
15  update S
16 end
17 calculate  $\mu$  and  $\sigma$  of  $T$ 
18 find set of patients L with no-shows rates lower than b
19 drop dummy patients out of L
20 rank patients by no-show rate
21 for all l in L
22   update  $\mu$  and  $\sigma$  by the datas of patient l
23   calculate  $p = P(T > 480)$ 
24   if  $p \leq c$ 
25     for all r
26       for all d
27         for all j in  $pt_l$ 
28           if patient  $l$  prefer phisyc  $r$ 
29             double/overbook  $i$ th patient to the slot  $j$ 
30             calculate f
31           end
32         end
33       end
34     find the best place for  $l$ th patient
35     update S
36   end
37 end
38 return S, f

```

## **Deo 4**

### **Zaključak**

U radu je analizirana jedna primena složenog matematičkog aparata na realnom problemu, u ovom slučaju posmatran je problem određivanja rasporeda pregleda. Rezultati prikazani u radu pokazuju vrlo čestu strategiju formiranja matematičkog modela. Polazi se od jednostavnijeg modela, a zatim se on proširuje novim promenljivama i pretpostavkama. Svi razmatrani i analizirani modeli posmatraju slučaj pravljenja rasporeda za jedan dan kod jednog lekara. Dobijeni matematički modeli se svode na problem stohastičke optimizacije. Počeli smo od jednostavnijeg modela i dodavanjem novih promenljivih i novih pretpostavki došli do proširenih i složenijih modela u nameri da model što bolje opiše realni kontekst. Teorijski razvoj modela predstavljen je kroz definisanje skupa parametara i promenivih, određivanje skupa pretpostavki, a zatim kroz formalnoi matematički zapis. Analiza modela rađena je kroz različite numeričke primere, a korišćen je veliki skup simuliranih podataka umesto istorijskih podataka. Ovakav pristup je jedino moguć u ovom trenutku jer podaci relavantni za ove modele spadaju u osjetljive podatke o ličnosti.

Skup podataka o pacijentu koji su uključeni u model obuhvata vreme kada pacijent stiže do ambulante/klinike, vreme početka pregleda i vreme završetka pregleda. Ovi podaci su jednostavni za evidentiranje što obezbeđuje da je predloženi model jednostavan sa stanovišta podataka. U ustanovama gde se primenjuje zakazivanje, lako su dostupni podaci o procentu pacijenata koji se nisu pojavili na pregled.

Iako se modeli definisani u radu svode se na neprekidni problem optimizacije, rešenje iz praktičnih razloga tražimo nad disretnim skupom. Umesto određivanja optimalnog rasporeda kao globalnog minimuma funkcije cilja, određivali smo minimum nad unapred definisanim skupom rasporeda, odnosno nepraktični problem optimizacije sveli smo na diskretni problem. Treba napomenuti da je bez ovog ograničenja gotovo nemoguće odrediti optimalno rešenje što je prikazano kroz primer određivanja optimalnog rasporeda za osnovni model primenom simpleks metode. Primena simpleks metoda zahteva uvođenje dodatnih tzv. "slack" promenljive koji smanjuje i broj simulacija koji možemo koristiti što dovodi do problema koji nije rešiv primenom ove metode. Svođenjem problema na određivanje rasporeda iz unapred datog skupa omogućeno je direktno pretraživanje.

Uključivanjem u model opcije da može doći do nepojavljivanja pacijenata, pojavi-

Ijuje se novi parametri koje je potrebno oceniti iz dostupnih podataka, a to je funkcija verovatnoće nepojavljiva. Nepojavljivanje zavisi od različitih faktora kao što su vrsta pregleda, zdravstveno stanja pacijenta, ili karakteristike pacijanta kao što su starost ili mesto stanovanja. Verovatnoča pojavlivanja takođe zavisi i od indirektnog čekanja. Što je duže jvremena između pojavlivanja potreba za pregledom i dobijenog termina veća je verovatnoča da pacijent traži termin kod drugog lekara (često obavi pregled privatno) pa se na taj način smanjuje verovatnoču pojavlivanja. Najpoznatija strategija za rešavanje problema nepojavljivanja je strategija prebukiranosti (overbookong). Ova strategija podrazumjava da se na jednom slotu zakazuje više od jednog pacijenta. U radu su prikazana i analizirana dva pristupa koji uključuju mogućnost prebukiranosti. Prvi pristup se zasniva na uvođenju verovatnoće prekovremenog rada lekara (menadžment ustanova određuje ovu verovatnoću). međutim ovakav pristup može dovesti do prekovremen rad bude isuviše dugačak što je neprihvatljivo sa stanovišta kvaliteta usluge. Zato je razmatrano proširenje modela koji uključuje granicu za dozvoljenu dužinu prekovremenog rada. Na osnovu numeričke analize utvrđeno je da je u slučaju korišćenja strategije prebukiranosti bolje koristiti duže slotove za preglede u rasporedu. Poslednji predloženi model koji će biti i tema dalje analize uključuje pravljenje rasporeda za više dana i više lekara.

## Prilog A

# GNU Octave kodovi

U ovom delu rada zadajem sve kodove koje koristim u implementaciji a napisala sam u Softveru GNU Octave verziju 5.1.0.

### A.1 Osnovni model

```
1000 function [o,cek ,neak ]=obj_fja3 ( ta , alfas , dp)
1002     TA=[];
1003     K=size(dp,1);
1004     n=size(dp,2);
1005     for i=1:K
1006         TA=[TA;ta];
1007     endfor
1008     TB=TA;
1009     for i=2:n
1010         for k=1:K
1011             pom=TB(k,i-1)+dp(k,i-1);
1012             if pom>TB(k,i)
1013                 TB(k,i)=pom;
1014             endif
1015         endfor
1016     endfor
1017     neak=0;
1018     cek=mean(TB-TA);
1019     y=sum(dp(:,1:n-1),axis=2);
1020     neak=mean(TB(:,n)-sum(dp(:,1:n-1),axis=2));
1021     p=0;
1022     if size(alfas,2)>1
1023         alfas=alfas';
1024     endif
1025     p=cek(1,2:end)*alfas(2:end,1);
1026     o=neak+p;
1027 endfunction
```

obj\_fja3.m

## A.2 Model sa prebukiranjem

```

1000 function C=kontrol(br_sim , pojav)
1001 n=length(pojav);
1002 C=rand(br_sim ,n);
1003 for i=1:br_sim
1004     for j=1:n
1005         if (C(i ,j)<=pojav(j))
1006             C(i ,j)=1;
1007         else
1008             C(i ,j)=0;
1009         endif
1010     endfor
1011 endfor
1012 endfunction

```

kontrol.m

```

1000 function [fc , cek , neakt , pond_cek]=fja_cilja3(ta , alfas ,dp , pojav , kasnj)
1001 #ta ... momenti zakazivanja
1002 #alfas ... cena cekanja pacijente
1003 #dp ... simulirane duzune preglede
1004 #pojav ... veerovatnoce pojavljanja pacijente
1005 #kasnj ... simulirana kasnjenja pacijente
1006 #ta , alfas , pojav ... vektori vrsta
1007 #dp , kasnj ... matrice
1008 K=size(dp,1);
1009 n=size(dp,2);
1010 TA=[];
1011 for i=1:K
1012     TA=[TA; ta];
1013 endfor
1014 TB=TA+kasnj ;
1015 TB(:,1)=zeros(K,1) ;
1016 for k=1:K
1017     for i=2:n
1018         p=TB(k ,i-1)+dp(k ,i-1);
1019         if TB(k ,i)<p
1020             TB(k ,i)=p;
1021         endif
1022     endfor
1023 endfor
1024 W=zeros(K,n) ;
1025 for i=1:K
1026     for j=2:n
1027         if (TB(i ,j)-TA(i ,j))>0
1028             W(i ,j)=TB(i ,j)-TA(i ,j);
1029         endif
1030     endfor
1031 endfor
1032 C=kontrol(K ,pojav);
1033 wmean=[];
1034 dpmean=[];
1035 tbmean=[];
1036 for i=1:n
1037     sw=0;

```

```

1038     sdp=0;
1040     stb=0;
1041     br=1;
1042     for k=1:K
1043         if C(k,i)==1
1044             sw=sw+W(k,i);
1045             sdp=sdp+dp(k,i);
1046             stb=stb+TB(k,i);
1047             br=br+1;
1048         endif
1049     endfor
1050     wmean=[wmean sw/(br-1)];
1051     dpmean=[dpmean sdp/(br-1)];
1052     tbmean=[tbmean stb/(br-1)];
1053 endfor
cek=wmean;
1055
1056 #neakt=mean(TB(:,end))-mean(dp(:,1:end-1))*(pojav(1:end-1))';
1057 neakt=tbmean(end)-sum(dpmean(1:end-1));
1058 pond_cek=wmean*(alfas)';
1059 fc=pond_cek+neakt;
1060 endfunction

```

fja\_cilja3.m

```

1000 function [f, cek, poncek, neakt]=fja_cilja3_prebuk(R, ta, alfas, dp, pojav,
1001   kasnj)
#R... raspored pacijenata
#ta... momenti zakazivanja
#alfas... cena cekanja pacijente
#dp... simulirane duzune preglede
#pojav... veerovatnoce pojavljivanja pacijente
#kasnj... simulirana kasnjenja pacijente
#ta, alfas, pojav... vektori vrsta
#dp, kasnj... matrice
1008 ta_pom=[];
1009 alfas_pom=[];
1010 dp_pom=[];
1011 pojav_pom=[];
1012 kasnj_pom=[];
1013 br_pregleda=size(R,2);
1014 for i=1:br_pregleda
1015   if length(find(R(:,i)>0))==1
1016     ta_pom=[ta_pom ta(i)];
1017     alfas_pom=[alfas_pom alfas(i)];
1018     dp_pom=[dp_pom dp(:,i)];
1019     pojav_pom=[pojav_pom pojav(i)];
1020     kasnj_pom=[kasnj_pom kasnj(:,i)];
1021   else
1022     pacijenti=(R(find(R(:,i)>0),i))';
1023     ta_pom=[ta_pom ta(i)*ones(1,length(pacijenti))];
1024     kp=kasnji(:,pacijenti);
1025     [k, ind]=sort(kp, axis=2);
1026     a1p=[];
1027     dpp=[];
1028     pojp=[];
1029     kasnj_pom=[kasnj_pom k];
1030   end

```

```

1032   for j=1:size(dp,1)
1033     alp=[alp; alfas(pacijenti(ind(j,:)))];
1034     dpp=[dpp; dp(j, pacijenti(ind(j,:)))];
1035     pojp=[pojp; pojavi(pacijenti(ind(j,:)))];
1036   endfor
1037   alfas_pom=[alfas_pom mean(alp)];
1038   dp_pom=[dp_pom dpp];
1039   pojavi_pom=[pojavi_pom mean(pojp)];
1040   endif
1041 endfor
1042 [f, cek, neakt,poncek]=fja_cilja3(ta_pom, alfas_pom, dp_pom, pojavi_pom,
1043 kasnj_pom);
endfunction

```

fja\_cilja3\_prebuk.m

```

1000 function [fmin, opt_prebuk, cekanje, neakt]=sa_prebukiranjem(m, alfas, p_i
1001   , li, dp, granica=0.75)
1002 %m...vreme u minutima koje je predvidjen za jedan pregled
1003 %alfas ... vektor koeficijente cekanja
1004 %p_i ... verovatnoce za pojavljivanje
1005 %li ... kasnjenje
1006 %dp...duzine pregleda
1007 %granica...preg, niza verovatnoca zatreba duplo-bukiranje
1008 br_sim=size(dp,1); %broj simulacije
1009 br_pac=size(dp,2); %broj pacijente
1010 ta=gen_ta(m);
1011 br_pregleda=min(length(ta),br_pac);
1012 S=[1 zeros(1,br_pregleda-1)];
1013
1014 #Raspored pacijente
1015 for i=2:br_pregleda
1016   opt=S;
1017   fmin=0;
1018   o=br_pregleda-i;
1019
1020   for j=1:i
1021     r=S(1:i-1);
1022     if j==1
1023       r=[i r];
1024     else
1025       r=[r(1:j-1) i r(j:end)];
1026     endif
1027     alfas_p=[alfas(r) zeros(1,o)];
1028     p_pom=[p_i(r) zeros(1,o)];
1029     li_pom=[li(:,r) zeros(br_sim,o)];
1030     dp_pom=[dp(:,r) zeros(br_sim,o)];
1031     f=fja_cilja3(ta, alfas_p, dp_pom, p_pom, li_pom);
1032     if j==1
1033       fmin=f;
1034       opt=r;
1035     else
1036       if f<fmin
1037         fmin=f;
1038         opt=r;
1039       endif
1040     endif

```

```

1040      endfor
1041      S=opt;
1042  endfor

1044 #Odredjivanje pacijente kome treba duplo/prebukiranje
1045 potr_prebuk=[];
1046 for i=1:length(p_i)
1047     if (p_i(i)<=granica)
1048         potr_prebuk=[potr_prebuk i];
1049     endif
1050 endfor
1051 pom=p_i(potr_prebuk);
1052 [s, i]=sort(pom);
1053 potr_prebuk= potr_prebuk(i);

1054 for i=1:length(potr_prebuk)
1055     opt_prebuk=opt;
1056     pac= potr_prebuk(i);
1057     fmin=Inf;
1058     h=size(opt_prebuk,1);
1059     w=0;

1060     for j=1:br_pregleda
1061         S=[];
1062         if opt(1,j)==0
1063             S=opt;
1064             S(1,j)=pac;
1065         else
1066             novi=zeros(1,br_pregleda);
1067             novi(1,j)=pac;
1068             S=[novi; opt];
1069         end
1070         raz=unique(S(:,j));
1071         if (length(S(:,j))==length(raz))
1072             w=w+1;
1073             [fbuk,c,pc,n]=fja_cilja3_prebuk(S,ta,alfas,dp,p_i,li);
1074             if fbuk<fmin
1075                 fmin=fbuk;
1076                 opt_prebuk=S;
1077                 cekanje=c;
1078                 neakt=n;
1079             endif
1080         endif
1081     endfor
1082     opt=opt_prebuk;
1083 endfor

1086 #Sredivanje ispisa
1087 for i=1:br_pregleda
1088     opt(1:end-1,i)=sort(opt(1:end-1,i));
1089 endfor
1090 c=all(opt(1,:)==0);
1091 while c==true
1092     opt(1,:)=[];
1093     c=all(opt(1,:)==0);
1094 endwhile
1095 opt_prebuk=opt;

```

```
endfunction
```

sa\_prebukiranjem.m

```
1000 function t=gen_ta(m=0, dp=[ ])
1001   t=[];
1002   if m>0
1003     N=ceil(480/m);
1004     t=m*[1:N]-m;
1005   else
1006     pom=ceil(mean(dp));
1007     s=0;
1008     i=1;
1009     while s<480
1010       t=[t s];
1011       s=s+pom(i);
1012       i=i+1;
1013     endwhile
1014   endif
1015 endfunction
```

gen\_ta.m

```
1000 function [fmin, opt_prebuk, cekanje, neakt, pvrad]=
1001   prebukiranje_ogranicenjem(m, alfas, p_i, li, dp, cena_prekov, granica
1002   =0.75, granica_prekov=30)
1003   %m... vreme u minutima koje je predvidjen za jedan pregled
1004   %alfas... vektor koeficijente cekanja
1005   %p_i... verovatnoce za pojavljivanje
1006   %li... kasnjenje
1007   %dp... duzine pregleda
1008   %granica... preg, niza verovatnoca zatreba duplo-bukiranje
1009   #granica_prekov... maksimalno vreme prekovremenog rada (u minutima)
1010   %koliko lekar moze da ima
1011   br_sim=size(dp,1); %broj simulacije
1012   br_pac=size(dp,2); %broj pacijente
1013   ta=gen_ta(m);
1014   br_pregleda=min(length(ta),br_pac);
1015   S=[1 zeros(1,br_pregleda-1)];

1016   #Raspored pacijente
1017   for i=2:br_pregleda
1018     opt=S;
1019     fmin=0;
1020     o=br_pregleda-i;

1021     for j=1:i
1022       r=S(1:i-1);
1023       if j==1
1024         r=[i r];
1025       else
1026         r=[r(1:j-1) i r(j:end)];
1027       endif
1028       alfas_p=[alfas(r) zeros(1,o)];
1029       p_pom=[p_i(r) zeros(1,o)];
1030       li_pom=[li(:,r) zeros(br_sim,o)];
1031       dp_pom=[dp(:,r) zeros(br_sim,o)];
```

```

    [f ,cek ,neakt ,poncek ,pv]=fja_cilja3 (ta ,alfas_p ,dp_pom ,p_pom ,li_pom
);
1032   if j==1
1033     fmin=f;
1034     opt=r;
1035     prekov=pr;
1036   else
1037     if f<fmin
1038       fmin=f;
1039       opt=r;
1040       prekov=pr;
1041     endif
1042   endif
1043   endfor
1044   S=opt;
1045 endfor
1046
#Odredjivanje pacijente kome treba duplo/prebukiranje
1047 potr_prebuk=[];
1048 for i=1:length(p_i)
1049   if (p_i(i)<=granica)
1050     potr_prebuk=[potr_prebuk i];
1051   endif
1052 endfor
1053 pom=p_i(potr_prebuk);
1054 [s,i]=sort(pom);
1055 potr_prebuk= potr_prebuk(i);
1056 cekanje=0; %samo neki inicijalni vrednost za sprecenje problema
1057 neakt=NaN; %isto inicijalni vrednost
1058
1059 for i=1:length(potr_prebuk)
1060   opt_prebuk=opt;
1061   pac= potr_prebuk(i);
1062   fmin=Inf;
1063   h=size(opt_prebuk,1);
1064
1065   for j=1:br_pregleda
1066     S=[];
1067     if opt(1,j)==0
1068       S=opt;
1069       S(1,j)=pac;
1070     else
1071       novi=zeros(1,br_pregleda);
1072       novi(1,j)=pac;
1073       S=[novi; opt];
1074     end
1075     raz=unique(S(:,j));
1076     if (length(S(:,j))==length(raz))
1077       [fbuk ,c ,pc ,n ,pr]=fja_cilja3_prebuk(S,ta ,alfas ,dp ,p_i ,li ,
1078       cena_prekov);
1079       if pr<granica_prekov
1080         if fbuk<fmin
1081           fmin=fbuk
1082           opt_prebuk=S;
1083           cekanje=c;
1084           neakt=n;
1085           prrad=pr;

```

```

1086           endif
1087           endif
1088       endif
1089   endfor
1090   opt=opt_prebuk;
1091 endfor

#Sredivanje ispisa
1092 for i=1:br_pregleda
1093     opt(1:end-1,i)=sort(opt(1:end-1,i));
1094 endfor
1095 c=all(opt(1,:)==0);
1096 while c==true
1097     opt(1,:)=[];
1098     c=all(opt(1,:)==0);
1099 endwhile
1100 opt_prebuk=opt;
1101 endfunction

```

prebukiranje\_ogranicenjem.m

Kada umesto graničnu verovatnoće za dozvoljeni prekovremeni rad koristimo maksimalno dozvoljeno vreme prekovremenog rada (zadato u minutima), tada za rešavanje naš prtomlem primenimo sledeći kod:

```

1000 function [fmin , opt_prebuk , cekanje , neakt , pvrad]=
1001     prebukiranje_ogranicenjem2(m, alfas , p_i , li , dp , cena_prekov ,
1002         granica=0.75, granica_prekov=30)
1003 %m... vreme u minutima koje je predviđen za jedan pregled
1004 %alfas ... vektor koeficijente cekanja
1005 %p_i ... verovatnoće za pojavljivanje
1006 %li ... kasnjenje
1007 %dp... duzine pregleda
1008 %granica... preg , niza verovatnoca zatreba duplo-bukiranje
1009 #granica_prekov ... maksimalno vreme prekovremenog rada (u minutima)
1010     koliko lekar može da ima
1011 br_sim=size(dp,1); %broj simulacije
1012 br_pac=size(dp,2); %broj pacijente
1013 ta=gen_ta(m);
1014 br_pregleda=min(length(ta),br_pac);
1015 S=[1 zeros(1,br_pregleda-1)];

#Raspored pacijente
1016 for i=2:br_pregleda
1017     opt=S;
1018     fmin=Inf;
1019     o=br_pregleda-i;

1020     for j=1:i
1021         r=S(1:i-1);
1022         if j==1
1023             r=[i r];
1024         else
1025             r=[r(1:j-1) i r(j:end)];
1026         endif
1027         alfas_p=[alfas(r) zeros(1,o)];
1028         p_pom=[p_i(r) zeros(1,o)];

```

```

1030    li_pom=[li(:,r) zeros(br_sim,o)];
1031    dp_pom=[dp(:,r) zeros(br_sim,o)];
1032    [f,cek,neakt,pv]=fja_cilja3(ta,alfas_p,dp_pom,p_pom,li_pom
1033    );
1034    if f<fmin
1035        fmin=f;
1036        opt=r;
1037        prekov=pv;
1038    endif
1039    endfor
1040    S=opt;
1041    endfor

1042    #Odredjivanje pacijente kome treba duplo/prebukiranje
1043    potr_prebuk=[];
1044    for i=1:length(p_i)
1045        if (p_i(i)<=granica)
1046            potr_prebuk=[potr_prebuk i];
1047        endif
1048    endfor
1049    pom=p_i(potr_prebuk);
1050    [s,i]=sort(pom);
1051    potr_prebuk=sort(potr_prebuk);
1052    cekanje=0; %samo neki inicijalni vrednost za sprecenje problema
1053    neakt=NaN; %isto inicijalni vrednost
1054
1055    for i=1:length(potr_prebuk)
1056        opt_prebuk=opt;
1057        pac=sort(potr_prebuk(i));
1058        fmin=Inf;
1059        h=size(opt_prebuk,1);

1060        for j=1:br_pregleda
1061            S=[];
1062            if opt(1,j)==0
1063                S=opt;
1064                S(1,j)=pac;
1065            else
1066                novi=zeros(1,br_pregleda);
1067                novi(1,j)=pac;
1068                S=[novi; opt];
1069            end
1070            raz=unique(S(:,j));
1071            if (length(S(:,j))==length(raz))
1072                [fbuk,c,pc,n,pr]=fja_cilja3_prebuk(S,ta,alfas,dp,p_i,li,
1073                cena_prekov);
1074                if pr<granica_prekov
1075                    if fbuk<fmin
1076                        fmin=fbuk
1077                        opt_prebuk=S;
1078                        cekanje=c;
1079                        neakt=n;
1080                        prrad=pr;
1081                    endif
1082                endif
1083            endif

```

```
1084     endfor
1085     opt=opt_prebuk ;
1086 endfor

1088 #Sredivanje_ispisa
1089 for i=1;br_pregleda
1090     opt(1:end-1,i)=sort(opt(1:end-1,i));
1091 endfor
1092 c=all(opt(1,:)==0);
1093 while c==true
1094     opt(1,:)=[];
1095     c=all(opt(1,:)==0);
1096 endwhile
1097 opt_prebuk=opt;
1098 endfunction
```

prebukiranje\_ogranicenjem2.m

# Literatura

- [1] Dantas, L. F., Fleck J. L., Cyrino Oliveira F. L., Hamacher S. (2018), *No-shows in appointment scheduling – a systematic literature review*, Health Policy, 122(4), 412-421. <https://doi.org/10.1016/j.healthpol.2018.02.002>
- [2] Dogru, A. K., Melouk, S. H. (2019). *Adaptive appointment scheduling for patient-centered medical homes*, Omega (United Kingdom), 85, 166–181. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2018.06.0090>
- [3] Erdogan, S. A., Gose, A., Denton, B. (2015), *Online appointment sequencing and scheduling*, IIE Transactions 47, 1-20, <http://dx.doi.org/10.1080/0740817X.2015.1011355>
- [4] Gupta, D., Brian D. (2008), *Appointment Scheduling in Health Care: Challenges and Opportunities*, IIE Transactions, 800–819, <https://doi.org/10.1080/07408170802165880>
- [5] Hannah, L. A.(2015) *Stochastic Optimization*, in International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition)
- [6] Kuiper A., Kemper B., Mandjes M. (2015), *A computational approach to optimized appointment scheduling*, Queueing Syst 79(1), 5–36. <https://doi.org/10.1007/s11134-014-9398-6>
- [7] Kleywegt, A. J., Shapiro, A., Homem-de Mello, T. (2002), *The sample average approximation method for stochastic discrete optimization*, SIAM Journal on Optimization 12(2), 479–502.
- [8] Robinson, L., Chen, R. (2003), *Scheduling doctors' appointments: optimal and empirically-based heuristics policies*, IIE Transactions 35, 295-307, <https://doi.org/10.1080/07408170390175512>
- [9] Republički zavod za statistiku, <https://data.stat.gov.rs/Home/Result/18010403?languageCode=sr-Cyrillic>
- [10] Zacharias C., Pinedo M. (2014), *Appointment scheduling with no-shows and overbooking*, Prod. Oper. Manag. 23, 788–801. <https://doi.org/10.1111/poms.12065>

## Kratka biografija



Monika Žunji je rođena 10. juna 1994. godina u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu "Kokai Imre" u Temerinu 2010. godina kao nosilac Vukove diplome. Srednju školu "Lukijan Mušicki" (Temerin), smer poslovni administrator, završila je 2014. godine kao đak generacije. U toku školovanja postiže značajne rezultate na takmičenjima iz matematike i mađarskog jezika. Studije primenjene matematike, modul matematika finansijskih, na Prirodno-matematičkom fakultetu upisuje 2014. i uspšno ih završava jula 2017. godine sa prosečnom ocenom 9.22. Iste godine upisala je master studije na Deparmanu za matematiku i informatiku, smer Primjenjena matematika, modul matematika finansijskih. Položila je sve predviđene ispite zaključno sa aprilskom ispitnim rokom 2019. godine sa prosečnom ocenom 9.33.

Tokom studija bila je stipendista Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja. Učestvovala je na ECMI Modelling Week u Novom Sadu jula 2018. godine. Bila je član ekipe koja je pripremila poster za EPH (European Public Health) Conference 2019. godine.

**UNIVERZITET U NOVOM SADU PRIRODNO-MATEMATIČKI  
FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

Redni broj:

**RBR**

Identifikacioni broj:

**IBR**

Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*

**TD**

Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*

**TZ**

Vrsta rada: *Master rad*

**VR**

Autor: *Monika Žunji*

**AU**

Mentor: *Prof. dr Zorana Lužanin*

**MN**

Naslov rada: Modelovanje rasporeda pacijenta – analiza različitih metoda optimizacije

**NR**

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*

**JP**

Jezik izvoda: *s/e*

**JI**

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*

**ZP**

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

**UGP**

Godina: *2020.*

**GO**

Izdavač: *Autorski reprint*

**IZ**

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*  
**MA**

Fizički opis rada: *5 poglavlja, 8 priloga, 53 stranica, 9 tabela, 21 grafika*  
**FO**

Naučna oblast: *Primjenjena matematika*  
**NO**

Naučna disciplina: *Analiza podataka*  
**ND**

**Ključne reči:** *Medicina, optimizacija u medicine, pravljenje rasporeda pacijente, analiza Monte Carlo simulacije*

**PO**  
**UDK**

Čuva se: *Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu*  
**ČU**

Važna napomena:  
**VN**

Izvod: *U master radu je razmatran problem pravljenja rasporeda u zdravstvenim ustanovama i mogućnosti korišćenja matematičkih modela u postavci i rešavanju tog problema. U modelima koji su predloženi problem se svodi na složeni problem stohastičke optimizacije u kojoj je funkcija cilja kombinacija dve ključne slučajne promenljive, a to su vreme koje pacijenti provedu čekajući zakazani pregled i neaktivno vreme lekara. Poseban akcenat je stavljen na uvođenje pretpostavki kako bi model što više bio saglasan sa realnom situacijom. Tako je urađena modifikacija kada se problem nepojavljivanja pacijenta rešava uvođenjem prebukiranosti i dvostrukog zakazivanja. U cilju bolje organizacije rada ambulante uvedena je i mogućnost prekovremenog rada lekara. Dobijeni problem optimizacije analiziran je korišćenjem simulacija koje zamenjuju istorijske podatke. Posebno je istaknuta i prikazana složenost postupka pravljenja modela, ali i određivanja optimalnog rešenja koje predstavlja dobijanje optimalnog rasporeda zakazivanja pacijenata. Sastavni deo rada čine i programi urađeni u GNU Octave.*

**IZ**

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *29. avgust 2019.*  
**DP**

Datum odbrane:  
**DO**

Članovi komisije:

**KO**

Predsednik: *dr Sanja Rapajić, vanredni profesor PMF-a*

Član: *dr Zorana Lužanin, redovni profesor PMF-a, mentor*

Član: *dr Dušan Jakovetić, docent PMF-a*

**UNIVERSITY OF NOVI SAD FACULTY OF SCIENCES  
KEY WORD DOCUMENTATION**

Accession number:

**ANO**

Identification number:

**INO**

Document type: *Monograph type*

**DT**

Type of record: *Printed text*

**TR**

Contents code: *Master thesis*

**CC**

Author: *Monika Žunji*

**AU**

Mentor: *Zorana Lužanin, PhD*

**MN**

Title: *Patient scheduling model - analysis different methods for optimization*

**XI**

Language of text: *Serbian (latin)*

**LT**

Language of abstract: *s/e*

**LA**

Country of publication: *Republic of Serbia*

**CP**

Locality of publication: *Vojvodina*

**LP**

Publication year: *2020*

**PY**

Publisher: *Author's reprint*

**PU**

Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*  
**PP**

Physical description: *5 chapters, 8 appendixes 53 pages, 9 tables, 21 graphics*  
**PD**

Scientific field: *Applied mathematics*  
**SF**

Scientific discipline: *Data analysis*  
**SD**

Key words: *Medicine, optimization in medicine, patient scheduling, analyses Monte Carlo simulation*

**UC**

Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad*  
**HD**

Note:  
**N**

Abstract: *The master thesis presents problem patient scheduling in medical centers and applying mathematical models in solving procedure for such a problem. In presented models problems are complex stochastic optimization problems where objective function is a combination of two key random variables: patients' waiting time and physician's idle time. Special accent is put on introduction of assumptions so that our model be closer to real situations. In that way the modification has been done and patient no-show is solved by methods of overbooking and double appointing. In order to improve organization of the ambulance we have introduced over time work which appears in the objective function as well.*

*We arrived to an optimization problem which is analyzed by using simulations that replace historical data. Specially, we have featured complexity of the procedure of model creation, but also determination of optimal solution which is desired optimal schedule. Additionally, we have included several programs typed in GNU Octave language.*

**AB**

Accepted by the Scientific Board on:  
**ASB**

Defended:  
**DE**

Thesis defended board:

**DB**

Mentor: *Zorana Lužanin, PhD*

Member: *Sanja Rapajić, PhD*

Member: *Dušan Jakovetić, PhD*