UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Maja Zavišić

Razumevanje koncepta beskonačnosti kod učenika osnovnih škola

- master rad -

Mentor: dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2020.

Sadržaj

Uvod

Beskonačnost je filozofski, teološki i matematički koncept. Odnosi se na sve ono što, u pogledu prostorne veličine, vremenskog trajanja ili broja, nema kraja. Iako ponekad ne primećujemo, beskonačnost se pojavljuje svuda oko nas. Ipak, teško je dati kratak i precizan odgovor na pitanje: „Šta je beskonačnost?“.

Reč beskonačnost potiče od latinske reči *infinitas*, što znači neograničenost. Simbol beskonačnosti je horizontalna osmica ∞ i potiče od Džona Valisa, koji ga je najverovatnije izveo iz tadašnjeg rimskog broja 1000. Ipak, jednu stvar sigurno znamo: beskonačnost je mnogo veća od 1000.

Od početka zabeležene istorije, ljudi su se pitali, razmišljali i „borili“ sa beskonačnošću. Kako je 1926. godine i sam Hilbert rekao: *„Od pamtiveka, beskonačnost je uzburkala ljudska osećanja više nego bilo koja druga tema.“* No, ogroman trud koji je uložen na kraju se isplatio, jer nakon što su matematičari uspeli da je shvate i donekle objasne, dogodila se prava revolucija i matematika je počela ubrzano da se razvija u nezamislivim razmerama.

Kako su matematičari tada bili zbunjeni, tako su danas mnogi učenici i studenti, jer, iako je beskonačnost svuda oko nas, ona izmiče našim spoznajnim naporima. Deca predškolskog i mlađeg školskog uzrasta pokazuju interesovanje i intuiciju o beskonačnosti. Iako se ne uvodi formalno, koncept beskonačnosti je u velikoj meri uključen u školsku matematiku. U ovom radu biće data analiza na koji način je to urađeno u osnovnoškolskom obrazovanju.

U prvom delu rada biće prikazan razvoj i opis koncepta beskonačnosti u matematici. U drugom delu biće data analiza o uključivanju ovog koncepta u nastavu matematike u osnovnoj školi, odnosno u nastavni program. Poseban akcenat će biti stavljen na predstavljanje beskonačnosti u udžbenicima. Takođe će biti prikazano nekoliko publikovanih istraživanja o razumevanju koncepta beskonačnosti. U trećem delu biće prikazana dva istraživanja sprovedena u školskoj 2019/2020. godini među učenicima osnovne škole u Subotici. U četvrtom delu biće predstavljene neke mogućnoćnosti za unapređenje podučavanja o konceptu beskonačnosti u osnovnoj školi.

I KONCEPT BESKONAČNOSTI

Istorija koncepta beskonačnosti

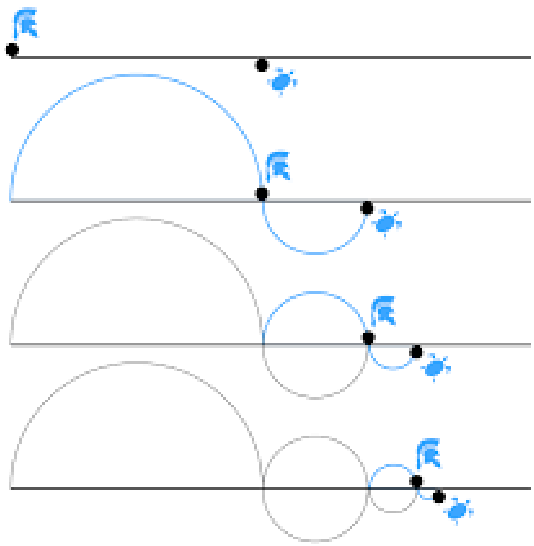
Ljudi u drevnim civilizacijama imali su problema da odgonetnu mnoge stvari i u konačnom svetu oko sebe. Svet su spoznavali iskustveno, te su im znanja bila maglovita i nepotpuna. Poznato je da su još stari Indijci, početkom prvog milenijuma pre nove ere, razmatrali beskonačnost u matematici. Ipak, tek su antički Grci dali prve konkretne odgovore na mnoga naučna pitanja, pa tako i pitanje beskonačnosti. Zanimljivo je da su Grci u početku bili veliki protivnici beskonačnosti, čak su je i zabranjivali (jedna od aksioma iz Euklidovih „*Elemenata*“ glasi: „Celina mora biti veća od dela“, što će se kasnije ispostaviti kao netačno). Ovaj negativan odnos je proistekao iz filozofskih stavova i verovanja tog vremena. Za Grke, beskonačnost nije postojala u stvarnosti, nego je taj pojam bio tek potencijalni konstrukt. Grčka riječ *apejron* označava nešto što nema granice, nema kraj ni početak, nije određeno. U osnovi, ta reč je imala negativno, pežorativno značenje. U matematičkim dokazima metod svođenja na protivrečnost je obično značio svođenje na beskonačnost. Prvi koji je uočio beskonačnost bio je grčki filozof **Anaksimandar** (oko 610 – 546. p.n.e). On je počelo bića video, ne u vodi, vazduhu, zemlji ili vatri, već u apejronu – beskonačnoj, večnoj, neodređenoj materiji, iz koje nastaju i u koju se vraćaju sve stvari. Prvi koji je razmatrao pojam beskonačnosti bio je **Anaksagora** (oko 500 – 428. p.n.e), koji je rekao: *„Među malim veličinama ne postoji najmanja, već smanjivanje ide neprekidno, ili uvek postoji nešto što je veće od onog što je veliko.“* Dakle, već se tada pravi razlika između beskonačno malih i beskonačno velikih veličina.

Pitagora (oko 580 – 500. p.n.e) i njegovi sledbenici nastojali su da celu geometriju zasnuju na prirodnim brojevima, a beskonačni procesi stvorili su jaz između aritmetike i geometrije. Zato su se grčki matematičari opredelili za geometriju, razvijajući je do takvih granica da se njihovim rezultatima godinama nije moglo dodati gotovo ništa novo. Pitagorejci su svet izgradili od tačaka koje imaju veličinu, a svaka prava je bila sastavljena od takvih tačaka. Oni nikad nisu izričito rekli koliki je broj tačaka u pojedinoj pravoj, ali su tvrdili da je on konačan. Kako tačka ima veličinu, moguće je upoređivanje pravih – veća je ona koja sadrži više tačaka. Kada je otkrivena nesamerljivost dijagonale i stranice kvadrata, njihova teorija je zapala u ozbiljne probleme. Otkriće iracionalnih brojeva, tj.

brojeva koji „idu u beskonačnost“, predstavlja glavni doprinos Pitagore i pitagorejaca konceptu beskonačnosti.

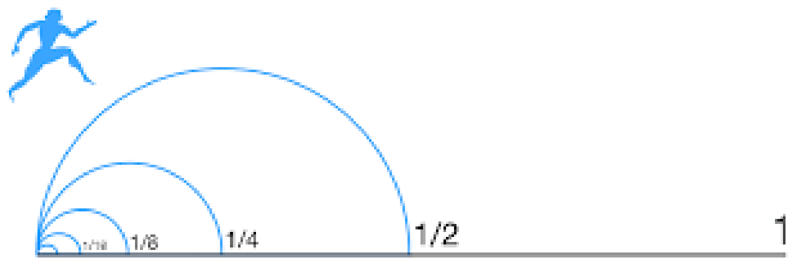
Među prve matematičke pokušaje da se pristupi problemu beskonačnosti, pripadaju i čuveni *Zenonovi paradoksi*. Starogrčki filozof **Zenon** iz Eleje (oko 490 – 430. p.n.e), sredinom petog veka pre nove ere formulisao je četiri kinematička paradoksa, dokazujući nemogućnost kretanja.

AHIL I KORNJAČA: *Zamislimo trku Ahila i kornjače. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da Ahil trči 10 puta brže od kornjače i trku počinje od tačke A, dok kornjača počinje od tačke B, 100 metara ispred Ahila (kornjači, koja je sporija, data je prednost). Da bi prestigao kornjaču, Ahil prvo mora da stigne do tačke B. Međutim, za to vreme, kornjača pređe 10 metara i stigne do tačke* B_1*. Dalje, dok Ahil stigne do tačke* B_1*, kornjača pređe još 1 metar i stigne u* B_2*. Dok Ahil stigne do* B_2*, kornjača stigne u* B_3 *itd. Dakle, kornjača će uvek imati prednost nad Ahilom, bez obzira na to koliko mala ona bila. Prema tome, Ahil nikada neće stići kornjaču.*



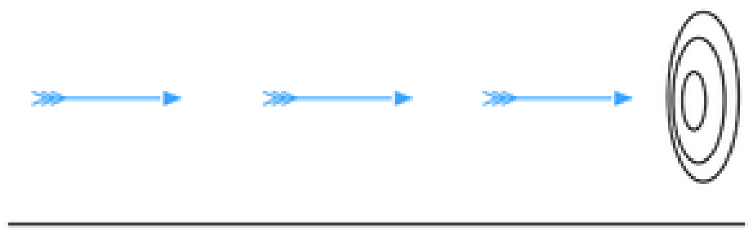
Slika 1: Paradoks Ahil i kornjača (izvor: https://www.wikiwand.com/en/Zeno%27s_paradoxes)

DIHOTOMIJA: *Zamislimo da neko treba da pređe put od tačke A do tačke B. Da bi stigao do cilja, on prvo mora da pređe polovinu puta i stigne do tačke* B_1 *(koja je na sredini između A i B). Ali, da bi stigao do tačke* B_1*, mora prvo da stigne do tačke* B_2*, koja se nalazi na polovini puta između A i* B_1*. Da bi stigao do* B_2*, mora prvo da stigne do* B_3*, na polovini puta između A i* B_2 *itd. Dakle, kretanje nikada ne može početi.*



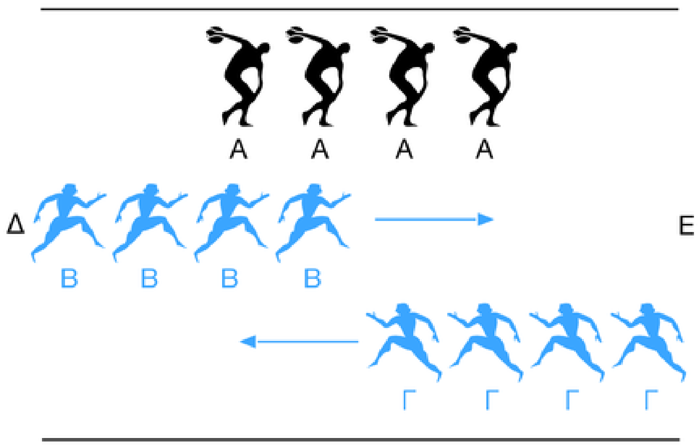
Slika 2: Paradoks dihotomija (izvor: https://www.wikiwand.com/en/Zeno%27s_paradoxes)

STRELA: *Zamislimo da strela leti unapred tokom određenog vremenskog intervala. U svakom trenutku tog intervala, strela je nepomična. Prema tome, strela je nepomična tokom čitavog intervala (zbir mirovanja ne može da da kretanje).*



Slika 3: Paradoks strela (izvor: https://www.wikiwand.com/en/Zeno%27s_paradoxes)

STADION: *Zamislimo tri „reda" tela. Označimo tela sa A, B i Γ, u zavisnosti od toga u kom redu se nalaze. U svakom redu nalazi se isti broj jednakih tela. Tela označena sa B i Γ nalaze se na suprotnim krajevima stadiona i kreću trkačkom stazom u suprotnim smerovima, jednakim intenzitetom brzine, dok se tela označena sa A nalaze u sredini i miruju. Posmatra se kretanje B-ova u odnosu na A-ove i Γ-ove, od momenta datog na slici 4. Dok B-ovi prođu pored pola reda A-ova, istovremeno prođu pored celog reda Γ-ova. Red tela koja se kreću prolazi pored polovine reda koji miruje za vreme T/2. Istovremeno su se sva tela redova koji se kreću mimoišli, pa kako u ta dva reda imamo 4 polovine, za ovo mimoilaženje je potreban vremenski interval 2T. Sledi da je polovina vremena jednaka duplom tom vremenu, što je besmisleno. Dakle, kretanje je prividnog karaktera.*



Slika 4: Paradoks stadion (izvor: https://www.wikiwand.com/en/Zeno%27s_paradoxes)

Zenonovi paradoksi imali su veliki uticaj na grčku matematiku, a kako ističu kontraintuitivnu prirodu beskonačnosti, i u današnje vreme su čest uzrok kontroverzi i polemika.

Veliki doprinos matematici tog vremena dao je i **Demokrit** iz Abdere (oko 460 – 370. p.n.e), jedan od osnivača atomizma[1] i njegov najistaknutiji predstavnik. On je pomoću infinitezimala[2] došao do važnog rezultata: zapremina prizme i piramide jednakih osnova i visina odnose se kao $3:1$. Takođe je dokazao da se obimi krugova odnose kao njihovi poluprečnici. Identifikovao je krug sa poligonom sa „velikim" brojem strana koje su sve po dužini „male".

Ključna figura u filozofiji beskonačnosti je **Aristotel** (384 – 322. p.n.e). U početku, on povezuje beskonačnost sa prirodom, čija je glavna karakteristika promena. Promena je neprekidna, stoga beskrajno deljiva, pa priroda neminovno vodi ka razmatranju beskonačnog. Beskonačnost mora postojati, u određenom smislu, jer bi u suprotnom postojale mnoge „nemoguće posledice", poput vremena koje ima početak i kraj. Aristotel odbija mogućnost postojanja beskonačnosti kao dovršenog, gotovog objekta – za njega, beskonačno može da postoji samo potencijalno, kao proces koji se uvek može nastaviti. Za razliku od atomista koji su duž, kružnu liniju i slično, zamišljali kao diskretan niz atoma, koji su poređani kao prirodni brojevi do određenog prirodnog broja, Aristotel je duž

[1] *Atomizam* je teorija po kojoj su svi objekti u kosmosu sastavljeni od veoma malih, nedeljivih, nepropadljivih čestica – atoma. Nastala je kao rezultat razmišljanja o granicama deljivosti materije.

[2] U matematici, *infinitezimal* je broj čija je apsolutna vrednost manja od bilo kog pozitivnog realnog broja, a nije nula.

zamišljao drugačije. Za njega je svaka duž bila deljiva, drugim rečima, između svake dve tačke na duži mogla se ubaciti treća koja je različita od te dve tačke. To deljenje duži je potencijalno beskonačno, tj. iza svake deobe može se napraviti sledeća. Aristotelova teorija beskonačnosti je naišla na probleme kada se suočila sa njegovim verovanjem da je univerzum večan, tj. da vreme nema početak.

Polovinom trećeg veka pre nove ere, **Arhimed** (287 – 212. p.n.e) je za svoj metod izračunavanja površine kruga koristio ideju graničnih vrednosti i beskonačnosti. On je opisivao i upisivao poligone oko kruga. Počeo je sa površinom šestougla, zatim je duplirao broj stranica i taj proces nastavio sve dok nije izračunao površinu 96-ostranog poligona. Savršenu površinu dao bi poligon sa beskonačno mnogo stranica, gde bi došlo do konvergencije opisanog i upisanog poligona tačkama kružnice. Kako broj strana teži beskonačnosti, razlika između površina poligona i površine kruga teži nuli, a granice se podudaraju. Ovde je Arhimed naišao na dva koncepta, koja će kasnije postati izuzetno popularna – koncept graničnih vrednosti i koncept beskonačnosti.

Grčki filozofi i matematičari Zlatnog doba, od Pitagore do Zenona i Arhimeda, otkrili su mnogo o konceptu beskonačnosti. Iznenađujuće, tokom naredna dva milenijuma vrlo malo se saznalo o matematičkim svojstvima beskonačnosti. Koncept beskonačnosti se, međutim, ponovo pojavljuje tokom srednjovekovnog doba, u novom kontekstu: religiji.

Verzije beskonačnosti se pojavljuju u mnogim religijama. Kako Filopon[3] objašnjava, filozofija i matematika beskonačnosti postale su usko isprepletane sa ranohrišćanskim verovanjima. U srednjovekovno doba pojačala se ideja da Bog nema granice; to je bila umnogome definicija Božanstva. Čovek je efemeran, smrtan, sa ograničenim moćima i znanjem; Bog je večan, besmrtan, svemoguć i sveznajuć.

Koncept beskonačnosti je složen i ponekad zaista zbunjujuć. Značajno je spomenuti i razmotriti ovu **Galileovu**[4] misao: *„Poteškoće u proučavanju beskonačnosti nastaju zato što pokušavamo, s našim konačnim umovima, da raspravljamo o beskonačnom, pripisujući mu ona svojstva koja dajemo konačnom i ograničenom.“*

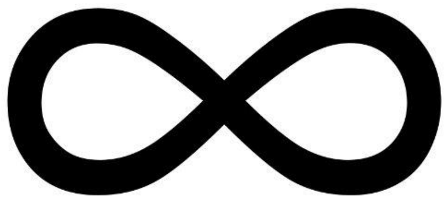
U 17. veku dolazi do važnih otkrića u matematici, kada o pojmu beskonačnosti počinje da se govori u pravom matematičkom smislu. Među mnogim poznatim

[3] ***Jovan Filopon***, vizantijski pisac, filolog, filozof i teolog.
[4] ***Galileo Galilei*** (1564 – 1642), italijanski astronom, fizičar, matematičar i filozof.

matematičarima iz tog perioda, za razvoj ove teme posebno su značajna dvojica. **Njutn**[5] i **Lajbnic**[6] smatraju se tvorcima diferencijalnog i integralnog računa, a osnova tih delova matematike su beskonačni procesi. Kasnije će se iz navedenih oblasti razviti važna disciplina: matematička analiza. Razvojem ovog područja matematike, beskonačnost postaje važan pojam bez kojeg mnogo toga ne bi imalo smisla.

Problem u vezi sa konceptom beskonačnosti vraća se i u novije vreme kada su **Dedekind**[7] i **Kantor**[8] razvili teoriju beskonačnih skupova i on do danas nije na zadovoljavajući način rešen. Više o tome u poglavlju „Beskonačnost u matematici“.

Matematički simbol za beskonačnost je horizontalna osmica ili tzv. *lemniskata*:



Pored nauke, prisutan je i u mnogim drugim sferama života, pa čak i na zastavi Metisa, autohtonog naroda iz Severne Amerike, tačnije Kanade. Napisao ga je **Džon Valis**[9] 1655. godine, dok se bavio infinitezimalnim računom. Do danas nije sa sigurnošću utvrđeno na koji način je Valis došao do ∞ kao simbola beskonačnosti – postoje dve mogućnosti: prva je da je ∞ varijanta grčkog slova ω, što se ređe spominje, a druga, češća, da je ∞ modifikovan zapis rimskog broja 1000. Pri tome, ne misli se na današnje „M“, već na zapis „CIƆ“, koji se koristio tada. Neki su povezivali ∞ sa Mebijusovom trakom. Bilo kako bilo, Valisov simbol je vrlo brzo ušao u široku upotrebu i kao takav se koristi i danas.

[5] ***Isaac Newton*** (1643 – 1727), engleski fizičar, matematičar, astronom, alhemičar i filozof prirode.

[6] ***Gottfried Wilhelm Leibniz*** (1646 – 1716), nemački filozof, matematičar, pronalazač, pravnik, istoričar, diplomata i politički savetnik lužičkosrpskog porekla.

[7] ***Julius Wilhelm Richard Dedekind*** (1831 – 1916), nemački matematičar.

[8] ***Geeorg Cantor*** (1845 – 1918), nemački matematičar, utemeljivač teorije skupova.

[9] ***John Wallis*** (1616 – 1703), engleski sveštenik i matematičar.

Beskonačnost u matematici

Beskonačnost je, bez dileme, jedan od najtežih matematičkih pojmova za razumevanje. Ona nije iskustvena – ne možemo je doživeti čulima, već je u sferi misaonog. To je ideja o nečemu što nema kraja.

Započnimo temu pitanjem: Da li postoji najveći broj? Još kao deca smo uvideli da brojanju nema kraja. Koliko god velik broj uspemo da „smislimo", uvek ćemo dodavanjem jedinice tom broju da dobijemo veći. Postoje izuzetno veliki brojevi koji imaju svoje ime. Jedan od njih jeste **gugol** (googol), koji je jednak 10^{100}, a po kom je pretraživač Gugl (Google) dobio ime, sa greškom u spelovanju. Već je gugol veći od broja elementarnih čestica u univerzumu. Sledeći primer je **gugolpleks** (googolplex), koji predstavlja jedinicu iza koje sledi gugol nula, odnosno $10^{10^{100}}$. Zatim imamo **gugolpleksijan** (googolplexian), to je jedinica praćena sa gugolpleks nula, tj. $10^{10^{10^{100}}}$... Najveći broj koji ima ime i korišten je u matematičkom dokazu naziva se **Grahamov broj**[10]. Njega nije moguće zapisati, jer prostor potreban za zapisivanje prevazilazi kapacitet vidljivog svemira. Upisan je u Ginisovu knjigu svetskih rekorda 1980. godine. Međutim, i on ima konačnu vrednost. Lako možemo formirati i mnogo veće brojeve od gorenavedenih. Ali, svi oni su konačni i nijedan nije ni blizu beskonačnosti.

U istoriji matematike, temelje beskonačnosti postavili su, krajem 19. veka, Dedekind i Kantor, kada su rešili problem potencijalne beskonačnosti i razvili teoriju kardinalnih brojeva.

Beskonačnost je veoma važan koncept u matematici, posebno u analizi. Sa njim se susrećemo već pri obradi osnovnih matematičkih pojmova.

PRIMERI:

- Prava se prostire beskonačno u oba smera.
- Niz prirodnih brojeva je beskonačan, nikad se ne završava.
- $\frac{1}{3}$ je konačan broj, ali kada ga zapišemo u decimalnom obliku $0{,}33333\ldots$ cifra 3 se ponavlja beskonačno.
- Između bilo koje dve (različite) tačke na pravoj postoji beskonačno mnogo tačaka.

---

[10] ***Ronald Graham***, američki matematičar.

Zanimljivo je da pojam beskonačnosti nema samo jedno značenje, već u različitim kontekstima ima drugačija značenja.

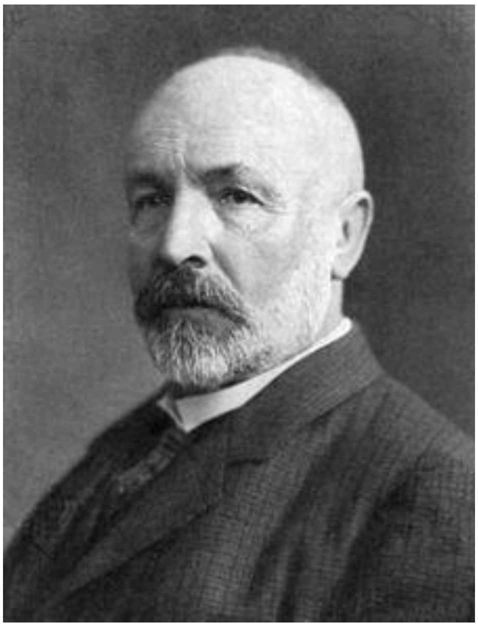
Posmatrajmo proces brojanja – to je proces koji nema gornje ograničenje: $1, 2, 3, 4$ ... itd. On predstavlja jedan od prvih primera sa kojim se deca susreću kada je u pitanju beskonačnost. Pri tome, možemo da opišemo proceduru za dobijanje svakog sledećeg broja, ali sam proces ne možemo nikada dovesti do kraja u praksi. Ovakvi neprekidni procesi koji nemaju kraja su uglavnom prvi primeri beskonačnosti za decu i nazivaju se **potencijalno beskonačni**. Potencijalna beskonačnost se u matematici javlja vrlo često; još neki primeri, pored gorenavedenog, su i proces brojanja decimala broja π, crtanje pravilnih mnogouglova sa sve većim brojem stranica unutar kruga, brojni nizovi itd. Dakle, potencijalna beskonačnost ne predstavlja neku određenu veličinu ili broj, već proces koji se nikad ne završava. Kod potencijalne beskonačnosti lako možemo da, u bilo kojoj fazi, bez obzira na dužinu procesa, uočimo naredni korak. U matematiku su je uveli Njutn i Lajbnic kada su otkrili infinitezimalni račun.

Sa druge strane, pojam **aktualne (stvarne) beskonačnosti**, ima sasvim drugi smisao. Naime, beskonačnost nazivamo aktualnom ukoliko je posmatramo kao „realizovanu stvar“. Skup prirodnih brojeva primer je aktualne beskonačnosti – potencijalno beskonačan proces brojanja konceptualizujemo kao da je nekako završen. Aktualnu beskonačnost su otkrili Kantor i Dedekind, a njeno shvatanje dovelo je do razvoja teorije skupova.

Postoje paralele između istorijskog razvoja i našeg razvoja razumevanja beskonačnosti. U oba slučaja, razvoj potencijalne beskonačnosti je prethodnik razvoja aktualne beskonačnosti. Problemi koji nastaju zbog razlike u ovim beskonačnostima, a koji su postojali još od vremena Aristotela, i dalje su relevantni, kako za učenike, tako i za nastavnike. Iako je koncept potencijalne beskonačnosti za matematičare relativno jednostavan, koncept aktualne beskonačnosti je kontraintuitivan i težak. Prelazak iz potencijalne u aktualnu beskonačnost zapravo podrazumeva prelazak iz matematičkog procesa u matematički objekat. Aktualna beskonačnost pripisuje konačnost (celinu) beskonačnom procesu. Ona nema osnovu u realnom životu. Recimo, ne možemo da zamislimo celokupan skup prirodnih brojeva, već samo ideju da se posle svakog, ma koliko velikog prirodnog broja, nalazi drugi prirodan broj.

Zašto uopšte treba da razmišljamo o konceptu sa kojim se nikada ne susrećemo direktno? Postoji mnogo razloga. Čak i u osnovama matematike nailazimo na aspekte beskonačnosti, npr. kada pišemo razlomak $\frac{1}{3}$ u decimalnom obliku – da bismo dobili tačnu reprezentaciju, decimala 3 mora da se „ponavlja" zauvek. Generalno gledano, čini se da naši umovi zahtevaju ideju da stvari mogu „trajati zauvek", u vremenu i prostoru, budućnosti i prošlosti. Beskonačnost je, možda, mentalni nedostatak, prirodna nuspojava sposobnosti naših umova koji traže model. Evolucija nas je naterala da primećujemo obrasce u spoljnom svetu, bili oni stvarni ili zamišljeni. Nastaviti zauvek bez promene možda je najjednostavniji obrazac od svih. Shodno tome, rado objašnjavamo vreme kao nešto što je oduvek postojalo i stoga nema početak. Smatramo da je to jednostavnije od vremena koje nekako počinje, iako to predlaže trenutna kosmologija. Radije mislimo i da je prostor beskonačan, a univerzum se širi bez ikakvih ograničenja, jer mislimo da u suprotnom mora postoji granica i pitamo se šta leži izvan te granice. Svi brojevi koje je iko ikad koristio, bilo da se radi o naukama poput matematike i medicine ili o kupovini hrane, koristeći bilo koju izmišljenu notaciju, manji su od nekog određenog broja. Nemamo pojma koji broj je u pitanju i, ako bismo ga zapisali, odmah bismo uništili to svojstvo, međutim, takav broj mora da postoji. Dakle, u praksi, jedino brojevi manji od te granice su ikad bili potrebni. Apsolutno nijedna aktivnost koja zavisi od brojeva u celoj ljudskoj istoriji ne bi se promenila ako bismo se ograničili na ovaj konačni opseg brojeva. Pa zašto onda matematičari insistiraju na tome da opseg brojeva mora biti beskonačan? Jedan od razloga je nesvesna pretpostavka da ako se neki jednostavan obrazac dugo zadrži, mora da traje večno. Drugo je da, kada su matematičari počeli da formalizuju procese brojanja i aritmetike, shvatili su da je sve jednostavnije ako od početka pretpostavimo da su određena aritmetička pravila univerzalna. Jedno od njih je npr. da je $n + 1$ uvek veće od $n.$ Ako napustimo, za primer, konvenciju da postoji beskonačno mnogo celih brojeva, tradicionalna pravila aritmetike, pa tako i algebre, više ne bi važila. Nije nemoguće postaviti konačnu verziju aritmetike sa vrlo velikim najvećim brojem, ali bi to bilo neelegantno i teško za rad. Matematičari vole da njihovi obrasci budu opšti, pa, shodno tome, prihvataju beskonačnost celih brojeva. Beskonačnost je jednostavnija od nekog određenog, ali nejasnog veoma velikog broja.

Kako bismo bolje razumeli koncept beskonačnosti, spustićemo se koji korak niže – u teoriju skupova. Skup predstavlja jedinstveni osnovni pojam na kom se zasniva cela matematika. Tvorcem moderne teorije skupova, kao posebne matematičke discipline, smatra se **Georg Kantor**.



Slika 5: Georg Kantor (izvor: http://totallyhistory.com/georg-cantor/)

DEFINICIJA: *Skup* je bilo koja kolekcija iz celine izdvojenih i određenih objekata naše intuicije ili mišljenja.

U širem smislu, skup je kolekcija objekata. U matematici, ti objekti su obično brojevi, tačke u prostoru ili čak drugi skupovi.

Poređenje „veličine" konačnih skupova obično je najlakše izvršiti direktnim prebrojavanjem elemenata svakog od tih skupova. Kod beskonačnih skupova, međutim, situacija je znatno složenija, te je bilo neophodno uvesti neki drugi metod poređenja. Kantorova istraživanja rezultirala su definisanjem sledećeg:

DEFINICIJA: Skupovi $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ su *ekvivalentni (iste veličine)* ako je, po nekom pravilu, moguće staviti ih u takav odnos da svakom elementu svakog od njih odgovara tačno jedan element drugog. Drugim rečima, $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ su ekvivalentni ako se između njih može uspostaviti bijekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje).

Ako su dva skupa ekvivalentna, često kažemo da imaju *istu kardinalnost* ili *istu moć*. Za označavanje kardinalnosti skupa koristićemo oznaku $|\cdot|$.

Postoji gledište po kome se ideja korišćenja bijekcije čini osnovnijom od brojanja, jer pomoću nje možemo odlučiti da li su dva skupa iste veličine, bez potrebe za prebrojavanjem njihovih elemenata. Ako su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ konačni skupovi, između njih se može uspostaviti bijekcija ako i samo ako imaju isti broj elemenata. Ali šta ako su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ beskonačni? Tada stvari postaju mnogo zanimljivije...

Koristeći Kantorovu definiciju, možemo upoređivati beskonačne skupove. Neka je $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ skup prirodnih brojeva i neka je $\boldsymbol{P} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ skup parnih prirodnih brojeva. Lako možemo pokazati da su ova dva beskonačna skupa iste veličine, tako što uspostavimo bijekciju $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{P}, f(n) = 2n$. Na prvi pogled, ovo izgleda paradoksalno. Čini se da bi trebalo da postoji upola manje parnih brojeva od prirodnih, međutim, sve je u skladu sa definicijom ekvivalentnosti skupova, kao i sa Kantorovim shvatanjem da beskonačne skupove možemo posmatrati kao totalitet i kao takve ih proučavati. Dakle, Kantor je prvi u istoriji matematike prihvatio koncept aktualne beskonačnosti.

Koristeći bijekciju kao osnovnu ideju elementarne teorije skupova, definisaćemo beskonačan skup na sledeći način:

DEFINICIJA: Skup je *beskonačan* ako je ekvivalentan svom pravom podskupu.

DEFINICIJA: Skup se naziva *prebrojiv (prebrojivo beskonačan)* ako se između njega i skupa prirodnih brojeva $\boldsymbol{N}$ može uspostaviti bijekcija.

Primetimo, to znači da elemente prebrojivih skupova možemo poređati u nizove. Već smo pokazali da je $|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{N}|$ (kardinalnost skupa parnih prirodnih brojeva jednaka je kardinalnosti skupa prirodnih brojeva). Postavlja se pitanje da li celih brojeva ima više nego prirodnih.

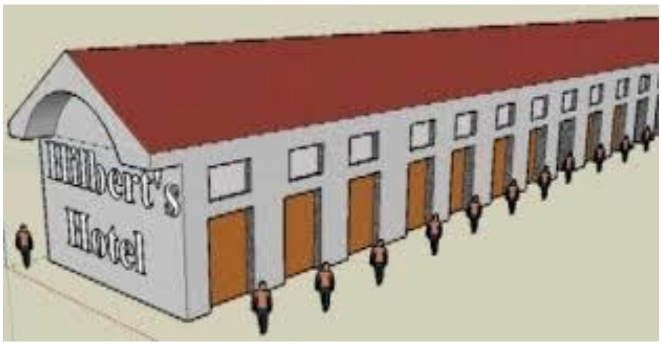
TEOREMA: Skup celih brojeva je prebrojiv.

DOKAZ: Neka je $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ skup prirodnih i neka je $\boldsymbol{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ skup celih brojeva. Bijekcija kojom dokazujemo tvrđenje je: $f(1) = 0, f(2k) = k, f(2k+1) = -k,\ k \in \boldsymbol{N}$, odnosno:

N:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9** ...
Z:	**0**	**1**	**-1**	**2**	-2	**3**	**-3**	**4**	**-4** ... ■

Simbol koji je Kantor odabrao da označi veličinu prebrojivog skupa je $\aleph_0$ (čita se **alef-nula**), po prvom slovu hebrejskog alfabeta. To je najmanja poznata aktualna beskonačnost. Dakle, Kantorovo proučavanje beskonačnih skupova dovelo ga je do novog broja, tačnije nove vrste brojeva – *transfinitnih kardinala*.

Da bismo istražili neka svojstva alef-nule, koristićemo ideju predstavljenu od strane **Davida Hilberta**[11], 1924. godine, nazvanu *Hilbertov hotel*.



Slika 6: Hilbertov hotel (izvor: https://philosophicaldisquisitions.blogspot.com/2013/07/hedrick-on-hilberts-hotel-and-actual.html)

Hilbertov hotel je ogroman hotel koji ima beskonačno (tačnije prebrojivo mnogo) soba i sve su zauzete. Međutim, pojavi se novi gost i zatraži sobu. Nakon malo razmišljanja, menadžer hotela, koji se, igrom slučaja, zove Kantor, pronalazi rešenje. On premešta svakog gosta u sobu sa brojem za 1 većim od broja sobe u kojoj je prethodno bio smešten, znači: gost iz sobe 1 prelazi u sobu broj 2, gost iz sobe 2 u sobu 3, gost iz sobe 3 u sobu 4 itd. Zatim novog gosta smešta u sobu broj 1. Gotovo!

Napomena: Kada prebrojivom skupu dodamo još jedan element, on ostaje prebrojiv, odnosno $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$.

Sada, u hotel pristigne autobus sa 66 ljudi koji traže sobe. Kantor pomisli da, ako je pronašao rešenje za 1, lako će to uraditi i za 66 novih dolazaka. Premešta svakog gosta u sobu sa brojem za 66 većim od broja njegove prethodne sobe, znači: gost iz sobe 1 prelazi u sobu 67, gost iz sobe 2 u sobu 68, gost iz sobe 3 u sobu 69 itd. Na taj način oslobađaju se sobe sa brojevima od 1 do 66 i u njih se smeštaju svi pristigli gosti iz autobusa. Kantor sada zaključuje da na ovaj način može da reši problem za proizvoljan konačan broj novih gostiju.

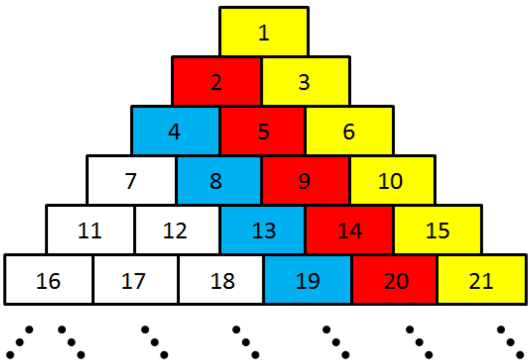
Napomena: Kada prebrojivom skupu dodamo konačno mnogo elemenata, on ostaje prebrojiv, odnosno $\aleph_0 + n = \aleph_0$, gde $n \in \boldsymbol{N}$.

[11] ***David Hilbert*** (1862 – 1943), nemački matematičar.

Iako se nije nadao, menadžera Hilbertovog hotela čeka još mnogo posla. Stiže novi autobus, koji ovog puta dovozi beskonačno, tačnije prebrojivo mnogo putnika. Ali, ni to nije težak zadatak za njega. Sve što treba da uradi je da preseli svakog gosta u sobu sa brojem duplo većim od broja sobe u kojoj se trenutno nalazi: gost iz sobe 1 seli se u sobu 2, gost iz sobe 2 u sobu 4, gost iz sobe 3 u sobu 6 itd. Tako se oslobađaju sve sobe sa neparnim brojem, kojih, kao i soba sa parnim brojem, ima prebrojivo mnogo.

Napomena: Kada prebrojivom skupu dodamo prebrojivo mnogo elemenata, on ostaje prebrojiv, odnosno $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Međutim, najveći izazov tek sledi! Pristiže prebrojivo mnogo autobusa, svaki sa prebrojivo mnogo gostiju. Kantorova ideja je da izmeni plan hotela i zamisli ga u obliku piramide, a sobe numeriše kao na slici:



Slika 7: Plan rekonstrukcije Hilbertovog hotela (izvor: [21])

Postojeće goste smešta u kolonu koju formiraju krajnje desne sobe svakog sprata, na slici označene žutom bojom. Ključno je primetiti da, nakon ovog koraka, preostale prazne sobe ponovo formiraju piramidu. Sada se putnici prvog autobusa smeštaju u krajnje desne sobe nove piramide, na slici označene crvenom bojom. Prazne prostorije ponovo formiraju piramidu, pa gosti pristigli drugim autobusom dobijaju sobe na slici označene plavom bojom... I tako dalje. Na ovaj način, za svakog od prebrojivo mnogo putnika iz prebrojivo mnogo autobusa naći će se slobodna soba u Hilbertovom hotelu. Sličnu ideju, interpretiranu na malo drugačiji način, koristićemo za dokazivanje prebrojivosti skupa razlomaka.

Napomena: Sve prethodno učinjeno možemo matematički zapisati kao $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Na osnovu predstavljanja nekih fascinantnih računa sa $\aleph_0$ pomoću Hilbertovog hotela, možemo pomisliti da isti važe jer se radi o diskretnim beskonačnim skupovima. Međutim, nije baš tako.

Zamislimo skup racionalnih brojeva. Označimo ga sa $\boldsymbol{Q}$. To je beskonačan skup, koji nema praznine između svojih elemenata, kao što je slučaj sa celim brojevima, u smislu da između svaka dva racionalna broja postoji treći racionalni broj (npr. njihova aritmetička sredina). Da bismo dokazali prebrojivost skupa $\boldsymbol{Q}$, biće nam potrebna sledeća teorema:

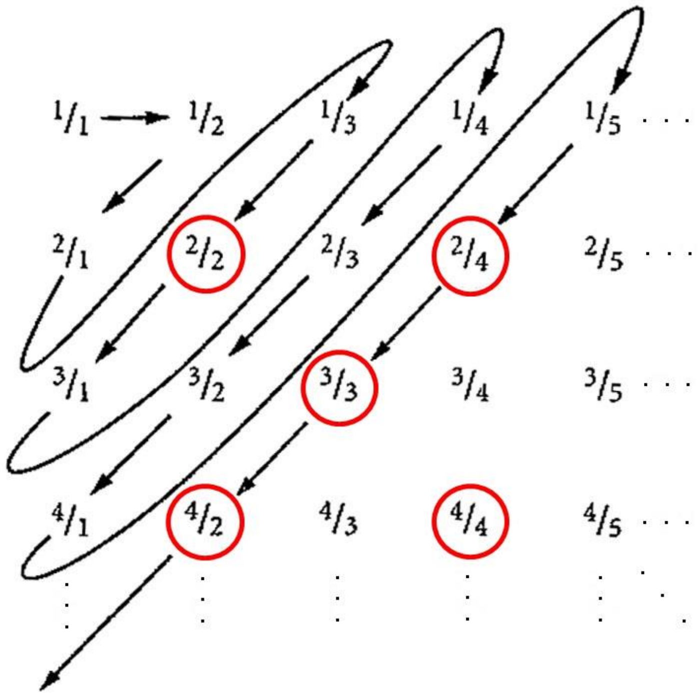
TEOREMA: Skup razlomaka $\boldsymbol{Q}_+$ je prebrojiv.

<u>Napomena</u>: Racionalni broj predstavlja bilo koji ceo broj podeljen bilo kojim ne-nula celim brojem. Pod razlomcima podrazumevamo samo pozitivne racionalne brojeve, tj. količnike prirodnih brojeva.

DOKAZ: Poređajmo sve razlomke na sledeći način:

$$
\begin{array}{cccccc}
1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & \cdots \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & \cdots \\
4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Dakle, u prvoj koloni nalaze se svi pozitivni celi brojevi, u drugoj koloni polovine, u trećoj trećine itd. Želimo da ih složimo u jedan niz. To možemo da uradimo tako što ćemo ispisivati redom brojeve na dijagonalama, preskačući one koji su već ranije upisani u niz, kao što je prikazano na sledećoj slici:



Ovako konstruisan niz sadrži sve razlomke, tj. prikazuje bijekciju između skupa razlomaka i skupa prirodnih brojeva.

$\boldsymbol{N}$:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\boldsymbol{Q}_+$:	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	...

Time je dokazana ekvivalentnost ova dva skupa. ■

TEOREMA: Skup racionalnih brojeva je prebrojiv.

DOKAZ: Dokazali smo da je skup razlomaka, tj. pozitivnih racionalnih brojeva, prebrojiv. Analogno, skup negativnih racionalnih brojeva je prebrojiv. Disjunktna unija pozitivnih, negativnih racionalnih brojeva i nule čini ceo skup racionalnih brojeva, pa je zbir kardinalnosti ta tri skupa jednak upravo kardinalnosti skupa $\boldsymbol{Q}$. Na osnovu toga i predstavljenih osobina $\aleph_0$ zaključujemo da je skup racionalnih brojeva prebrojiv. ■

Sada znamo**:** $\aleph_0 = |\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{Z}| = |\boldsymbol{Q}|$. Pa, jesu li svi beskonačni skupovi prebrojivi? Odgovor je NE. Postoji beskonačan skup koji nije prebrojiv.

TEOREMA: Skup realnih brojeva iz intervala $[0,1]$ nije prebrojiv.

DOKAZ: Pretpostavimo suprotno, da unutar intervala $[0,1]$ ima prebrojivo mnogo realnih brojeva. To znači da sve možemo da zapišemo u jednom nizu:

$$x_1 = 0,256173\ldots$$
$$x_2 = 0,654321\ldots$$
$$x_3 = 0,876241\ldots$$
$$x_4 = 0,60000\ldots$$
$$x_5 = 0,67678\ldots$$
$$x_6 = 0,38751\ldots$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$$
$$\vdots$$

Konstruišimo broj $b = 0,b_1b_2b_3b_4b_5\ldots b_n\ldots$ na sledeći način:

b_1 se razlikuje od prve decimale x_1 ($b_1 \neq 2$, npr. $b_1 = 4$),

b_2 se razlikuje od druge decimale x_2 ($b_2 \neq 5$, npr. $b_2 = 7$),

b_3 se razlikuje od treće decimale x_3 ($b_3 \neq 6$, npr. $b_3 = 8$),

b_4 se razlikuje od četvrte decimale x_4 ($b_4 \neq 0$, npr. $b_4 = 3$),

b_5 se razlikuje od pete decimale x_5 ($b_5 \neq 8$, npr. $b_5 = 7$),

$\vdots$

b_n se razlikuje od n-te decimale x_n ($b_n \neq a_n$)

$\vdots$

Broj $b = 0,47837\ldots$ ne može biti jednak broju x_1, jer se od njega razlikuje na prvom decimalnom mestu; ne može biti jednak broju x_2, jer se od njega razlikuje na drugom decimalnom mestu; ne može biti jednak broju x_3, jer se od njega razlikuje na trećem decimalnom mestu i tako dalje.

Dakle, pretpostavili smo da se u gorepomenutom nizu nalaze svi realni brojevi iz intervala $[0,1]$. Sa druge strane, konstruisali smo realan broj b iz intervala $[0,1]$ koji se ne nalazi u tom nizu, jer se razlikuje od svakog njegovog člana na bar jednom decimalnom mestu. Kontradikcija.

To nam govori da je naša pretpostavka da postoji bijekcija između skupa prirodnih brojeva i skupa realnih brojeva iz intervala $[0,1]$ bila pogrešna. Drugim rečima, skup realnih brojeva iz intervala $[0,1]$ nije prebrojiv. ■

Možemo pokazati da je kardinalnost skupa $\boldsymbol{R}$ svih realnih brojeva jednaka kardinalnosti skupa $[0,1]$ realnih brojeva između 0 i 1. Bijekcija između ovih skupova data je, npr., funkcijom $f\colon [0,1] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-x^2}$. Na taj način bismo dokazali sledeću, vrlo važnu teoremu:

TEOREMA: Skup realnih brojeva nije prebrojiv.

Dakle, realnih brojeva ima više nego prirodnih. Prvi koji je dokazao neprebrojivost skupa realnih brojeva bio je Kantor. Tako je došao do zaključka da ne postoji samo jedna beskonačnost.

Kardinalnost realnih brojeva obično se označava sa $\boldsymbol{c}$ (i čita se **kontinuum**).

Pretpostavka da između $\aleph_0$ i c nema drugih kardinalnih brojeva, tj. beskonačnosti, naziva se *hipoteza kontinuuma* i jedan je od 23 važna problema koja je Hilbert postavio na Međunarodnom kongresu matematičara (ICM) u Parizu 1900. godine. On do današnjeg dana nije rešen. Ipak, dokazane su dve interesantne, međusobno protivrečne, ali jednako moguće stvari: da se Kantorova hipoteza kontinuuma ne može niti opovrgnuti[12] niti dokazati[13] unutar standardne (ZF ili ZFC) teorije skupova.

U nastavku ćemo videti još jedan značajan Kantorov rezultat.

DEFINICIJA: Partitivni skup skupa $\boldsymbol{A}$, u oznaci $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}]$, jeste skup svih podskupova datog skupa.

Ako skup ima n elemenata, tada njegov partitivni skup ima 2^n elemenata – drugim rečima, skup od n elemenata ima 2^n podskupova (svaki od elemenata skupa može da pripada ili ne pripada njegovom podskupu, dakle za svaki od n elemenata postoje po 2 mogućnosti).

PRIMER: Neka je dat skup $\boldsymbol{A} = \{a, b, c\}$. Kako A ima 3 elementa, $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}]$ ima $2^3 = 8$ elemenata i $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}] = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

TEOREMA: Između proizvoljnog skupa i njegovog partitivnog skupa ne može da se uspostavi bijekcija.

DOKAZ: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji bijekcija između ova dva skupa.

---

[12] Dokazao Kurt Gedel (***Kurt Gödel***, 1906 – 1978, austrijsko-američki matematičar) 1938. godine.

[13] Dokazao Pol Koen (***Paul Cohen***, 1934 – 2007, američki matematičar) 1963. godine.

Elementi $\boldsymbol{A}$	Elementi $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}]$
a	$\{c, d\}$
b	$\{e\}$
c	$\{b, c, d, e\}$
d	$\{\,\}$
e	$\boldsymbol{A}$
f	$\{a, c, e, g, \dots\}$
g	$\{b, k, m, \dots\}$
$\vdots$	$\vdots$

Definišimo sada skup $\boldsymbol{B}$ kao skup svih elemenata skupa $\boldsymbol{A}$ koji nisu sadržani u podskupu sa kojim su upareni: $\boldsymbol{B} = \{a, b, d, f, g, \dots\}$. $\boldsymbol{B}$ je takođe podskup skupa $\boldsymbol{A}$, pa se mora nalaziti u desnoj koloni i biti uparen sa nekim elementom skupa $\boldsymbol{A}$, recimo z.

$\vdots$	$\vdots$
z	$\boldsymbol{B}$
$\vdots$	$\vdots$

Sledi ključno pitanje: da li je z element skupa $\boldsymbol{B}$?

- Ako pretpostavimo da z pripada $\boldsymbol{B}$, onda na osnovu definicije skupa $\boldsymbol{B}$ sledi da z ne pripada $\boldsymbol{B}$.
- Ako pretpostavimo da z ne pripada $\boldsymbol{B}$, tada na osnovu definišućeg svojstva skupa $\boldsymbol{B}$ sledi da z pripada $\boldsymbol{B}$.

U oba slučaja dolazimo do kontradikcije, pa zaključujemo da je naša polazna pretpostavka, da postoji bijekcija između $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}]$, pogrešna. ■

Dakle, partitivni skup ima veću kardinalnost od polaznog skupa. To nam omogućava da izgradimo beskonačnu skalu beskonačnih brojeva – postoji beskonačno mnogo beskonačnosti: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \cdots$

Napomena: Jednakost $2^{\aleph_0} = c$ dokazuje se koristeći Kantor-Šreder-Berštajn teoremu[14] i injekcije između skupova $[0, 1)$ i $\{0, 1\}^{\boldsymbol{N}}$.

Kantorova teorija skupova je na početku imala veliki broj protivnika, jer je sa sobom povlačila zaista teška pitanja, te su mnogi matematičari bili kritični prema onome što je postigao. Ipak, do kraja karijere, Kantor je ostvario mnoga priznanja i nagrade. Početkom XX veka, njegova teorija doživljavala je svoj procvat i nalazila široku primenu u

[14] **Teorema**: (*Kantor-Šreder-Berštajn*) Ako postoji injekcija $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ i injekcija $g : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$, tada postoji bijekcija između $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$.

matematici. Istovremeno, uočene su i prve protivrečnosti, odnosno paradoksi. Najčuveniji je **Raselov paradoks**[15], nastao 1902. godine. Postoje razne interpretacije ovog paradoksa: paradoks brijača, paradoks biblioteke i mnogi drugi.

*Ako za svako svojstvo postoji skup svih objekata koji zadovoljavaju to svojstvo, onda isto važi i za svojstvo „skup ne pripada samom sebi“. Označimo sa **X** skup objekata za koje važi ovo svojstvo. Da li **X** pripada samom sebi?*
*- Ako pretpostavimo da **X** pripada skupu **X**, to znači da zadovoljava svojstvo „skup ne pripada samom sebi“, što je kontradikcija.*
*- Ako pretpostavimo da **X** ne pripada **X**, to znači da ne zadovoljava dato svojstvo, tj. da pripada sebi, što je opet kontradikcija.*

Pojava Raselovog paradoksa ozbiljno je uzdrmala Kantorovu teoriju. Rasel je definisao pojam klase i jedan od načina prevazilaženja ovog paradoksa se svodi da se skup svih skupova ne smatra skupom, već klasom, koja je uopštenje pojma skupa.

Uprkos problemima koji su se pojavili u vidu paradoksa, zahvaljujući Kantorovoj teoriji skupova nastale su nove oblasti matematike kao što su topologija, teorija mere i tako dalje. Bez obzira na razvoj nauke u celini i velika matematička otkrića, beskonačnost će ostati jedna od najvećih inspiracija, kako matematičara, tako i drugih naučnika. Beskonačnost ima bogato značenje čak i izvan okvira matematike – to je deo naše kulture, naših verovanja o vremenu i univerzumu, a pronalazi svoje izraze i u umetnosti, religiji, filozofiji, poeziji...

[15] ***Bertrand Russel*** (1872 – 1970), engleski filozof, logičar, esejista i društveni kritičar, najpoznatiji po svojim radovima iz matematičke logike i analitičke filozofije.

II KONCEPT BESKONAČNOSTI U NASTAVI MATEMATIKE

Beskonačnost u nastavnim sadržajima u nastavi matematike

Moglo bi se reći da je beskonačnost u matematici, za razliku od filozofije i teologije, dobila jasnije okvire. Ipak, kada je u pitanju metodički pristup u nastavi matematike, ovaj koncept predstavlja jedno od najosetljivijih mesta. Beskonačnost izaziva interesovanje kod dece i pre nego što krenu u školu. Deca predškolskog uzrasta i mlađih razreda osnovne škole pokazuju intuiciju o beskonačnosti, uglavnom zasnovanu na njihovom prethodnom životnom iskustvu. To uglavnom nije adekvatno propraćeno i podržano nastavnim planom i programom[16], pa tako pojam beskonačnosti za mnoge ostaje misterija tokom čitavog školovanja.

Učenici se prvi put susreću sa pojmom beskonačnog pri izučavanju skupa prirodnih brojeva u četvrtom razredu osnovne škole. Što se tiče geometrijskih sadržaja, jedan od prvih primera i koraka ka sticanju predstave o ovom konceptu jeste upoznavanje sa pojmom prave u drugom razredu, a kasnije i ravni. Međutim, formalnom upoznavanju i detaljnijem izučavanju beskonačnosti pristupa se u srednjoj školi.

U nastavku, koristeći program nastave i obrazovne standarde za kraj osnovnog obrazovanja, navešćemo sadržaje kroz koje se učenici susreću sa pojmom beskonačnosti u nastavi matematike.

– BROJEVI I OPERACIJE SA NJIMA

Ova oblast obuhvata znanja o različitim vrstama brojeva, njihovo zapisivanje na različite načine, upoređivanje, poznavanje osnovnih aritmetičkih operacija i izračunavanje vrednosti brojevnih izraza. Počevši od prvog razreda, učenici uče brojeve, da bi se, konačno, u četvrtom, uveo prvi beskonačan skup, skup prirodnih brojeva. Uvođenje skupa prirodnih brojeva je, zajedno sa pojmom prave (geometrija), najvažnija tema u nižim razredima osnovne škole koja se tiče beskonačnosti. Pri obradi ove teme, učenike treba navesti da samostalno donesu zaključke o postojanju sledbenika svakog prirodnog broja, nepostojanju najvećeg prirodnog broja, pa samim tim i beskonačnosti ovog skupa. U nižim razredima, učenici se takođe upoznaju sa pojmovima prethodnika i sledbenika poznatih brojeva, kao i

[16] Od školske 2017. godine u Srbiji je uveden pojam plan i program nastave, umesto nastavni plan i program.

brojevima manjim/većim od nekog broja. S obzirom na to da u momentu uvođenja ovih pojmova učenici ne poznaju negativne brojeve, mogu da zaključe samo da postoji beskonačno mnogo sledbenika nekog broja, odnosno beskonačno mnogo brojeva većih od njega. Kada nauče razlomke, učenici nailaze na mogućnost različitog predstavljanja istog razlomka, gde se može izvesti zaključak da se svaki razlomak može zapisati na beskonačno mnogo načina (proširujući ga proizvoljnim brojem). Dalje, obrađuju se pojmovi delioca i sadržaoca nekog broja. Skup sadržalaca bilo kog broja je beskonačan, kao i skup svih zajedničkih sadržalaca dva ili više brojeva. U okviru ove oblasti spominje se i podela brojeva na proste i složene, kojih takođe ima beskonačno mnogo. Proširivanjem skupa prirodnih brojeva dolazimo do skupova celih, a kasnije i racionalnih brojeva. Iz osobine beskonačnosti prirodnih brojeva sledi da i celih i racionalnih brojeva ima beskonačno mnogo. Nakon ovoga učenici mogu da zaključe da i prethodnika, odnosno brojeva manjih od nekog broja, ima beskonačno mnogo. Takođe, uvodi se pojam brojevne prave, kao prave na kojoj su tačke označene brojevima. Kada u sedmom razredu uoče postojanje iracionalnih, odnosno nauče skup realnih brojeva, učenici dolaze do saznanja o uzajamno jednoznačnoj vezi između tačaka na pravoj sa jedne i realnih brojeva sa druge strane. Bitno je napomenuti da se ne pravi razlika između beskonačnosti skupa prirodnih i beskonačnosti skupa realnih brojeva. Što se tiče decimalnog zapisa brojeva, važno je da nauče da neki racionalni, ali i svi iracionalni, imaju beskonačno mnogo decimala. Uči se prevođenje razlomka u decimalni broj i obratno. Uvodi se još jedan veoma važan pojam, pojam aritmetičke sredine, koji nam pokazuje da se između svaka dva broja nalazi novi broj. Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo da se između svaka dva broja nalazi beskonačno mnogo brojeva.

– ALGEBRA I FUNKCIJE

Pojam beskonačnosti se u okviru oblasti „Algebra i funkcije“ implicitno i eksplicitno javlja kod rešavanja linearnih jednačina i nejednačina, kao i sistema jednačina. Kao što znamo, u skupu prirodnih brojeva, skup rešenja nejednačine npr. $x > 402$ je beskonačan, dok je skup rešenja nejednačine $x < 402$ konačan. Međutim, u skupu celih i racionalnih brojeva, ako proizvoljna nejednačina ima bar jedno rešenje, ona ima beskonačno mnogo rešenja. Za potrebe zapisivanja skupa rešenja nejednačina, već u osnovnoj školi, uvodi se simbol beskonačnosti. Postoje i jednačine, kao i sistemi jednačina, sa beskonačno mnogo rešenja. Pojam funkcije i njenog grafika, takođe pripadaju ovoj oblasti. Tokom osnovnoškolskog obrazovanja, učenici treba da nauče pojam zavisnosti među promenljivama, kao i crtanje grafika linearne funkcije, koji je, kao što znamo, prava. Grafički prikaz sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznate čine dve prave i on ima beskonačno mnogo rešenja ako se one poklapaju.

– GEOMETRIJA

Poznavanje geometrijskih objekata u ravni i prostoru, njihovih svojstava i primena istih, predstavlja sadržaj ove oblasti. U osnovnoj školi u geometriju se uvode prvi beskonačni matematički objekti: poluprava i prava, a kasnije i poluravan i ravan. Uče se njihove osobine i međusobni odnosi: prava i ravan sadrže beskonačno mnogo tačaka; u svakoj ravni postoji beskonačno mnogo pravih; postoji beskonačno mnogo ravni koje sadrže neku zadatu pravu u prostoru; ako prava i ravan imaju više od jedne zajedničke tačke, onda imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka; za svaku tačku i svaku ravan postoji bekonačno mnogo ravni koje sadrže datu tačku i normalne su na datu ravan; ako je prava normalna na ravan, onda postoji beskonačno mnogo ravni koje sadrže tu pravu i normalne su na datu ravan... Svaka duž takođe ima beskonačno mnogo tačaka i može beskonačno mnogo puta da se nanese na proizvoljnu pravu. Još neki beskonačni objekti koji se uče su ugaona linija i ugao. Treba razlikovati ugaonu od izlomljene linije. Krake ugla, kako su to poluprave, možemo proizvoljno produžavati. Analogno uglu u ravni, u prostoru definišemo diedar, a spominju se još dve neograničene površi: cilindrična i konusna. Na beskonačnost nailazimo i pri obradi osne simetrije – naime, postoje figure koje imaju beskonačno mnogo osa simetrije (to su kružnica i krug). Pri obradi kruga učenici nauče da krugu/kružnici može da se nacrta više poluprečnika. Na ovom mestu bilo bi dobro usmeriti ih da zaključe da ih zapravo ima beskonačno mnogo, najbolje korišćenjem tehničke podrške. Sličan predlog kada je potrebno odrediti tačke koje pripadaju/ne pripadaju nekoj geometrijskoj figuri. Obrađuju se i pojmovi centralnog i periferijskog ugla. Proizvoljnom luku kružnice odgovara jedan centralni i beskonačno mnogo periferijskih uglova. Prilikom izvođenja formule za obim kruga, primećeno je da što više stranica ima pravilan mnogougao upisan u neki krug, on sve više podseća na taj krug. Samim tim, i obimi tih mnogouglova se sve manje razlikuju od obima kruga, odnosno, u graničnom slučaju, kada bismo pustili da broj stranica mnogougla teži beskonačnosti, dobili bismo upravo obim odgovarajuće opisane kružnice. Na ovaj način dobijen je novi iracionalni broj – π, koji predstavlja odnos obima i prečnika svakog kruga i čiji zapis je, kao što znamo, beskonačan neperiodičan.

– MERENJE

U oblasti merenje predviđena je sposobnost procenjivanja i zaokrugljivanja datih podataka. Učenici treba da savladaju pravila zaokruživanja decimalnih brojeva. Tu se, kao primer aktualne beskonačnosti, javlja jedno posebno pravilo kod brojeva čiji se zapisi završavaju sa beskonačno mnogo devetki, npr: $0{,}999\ldots = 1$; $1{,}6999\ldots = 1{,}7$; $34{,}02999\ldots = 34{,}03$. Ovo se može povezati i potkrepiti korišćenjem poznatog načina prevođenja decimalnog broja u razlomak, iz oblasti „Brojevi i operacije sa njima“.

– OBRADA PODATAKA

Kao što možemo da odredimo položaj tačke na brojevnoj pravoj, položaj bilo koje tačke u ravni određujemo pomoću pravouglog koordinatnog sistema. To je unija dve brojevne prave koje su međusobno normalne – dakle, ima dve beskonačne dimenzije.

Intelektualni razvoj dece u nižim razredima osnovne škole je u stadijumu konkretnih operacija (Pijaže), te je i nastava matematike umnogome ograničena na posmatranje nekog specijalnog, konačnog skupa objekata. Tako se npr. prilikom određivanja šta je najmanje, najduže, najviše, najšire i sl., učenik ograničava na sliku, učionicu, razred itd. Slična je situacija sa brojevima, gde se u primerima i zadacima podrazumeva rad sa do tada naučenim brojevima, čak i kada to nije naglašeno. Ipak, pojam beskonačnosti se implicitno javlja počevši već od prvog razreda, što ćemo videti u nastavku. U višim razredima, beskonačnost se javlja mnogo češće, kako implicitno, tako i eksplicitno. Na mnogim mestima u udžbenicima možemo da naiđemo na reč beskonačno, međutim, sam pojam se detaljnije ne obrađuje niti objašnjava. Shodno tome, postavlja se pitanje u kom uzrastu su učenici u mogućnosti usvoje pojam beskonačnosti.

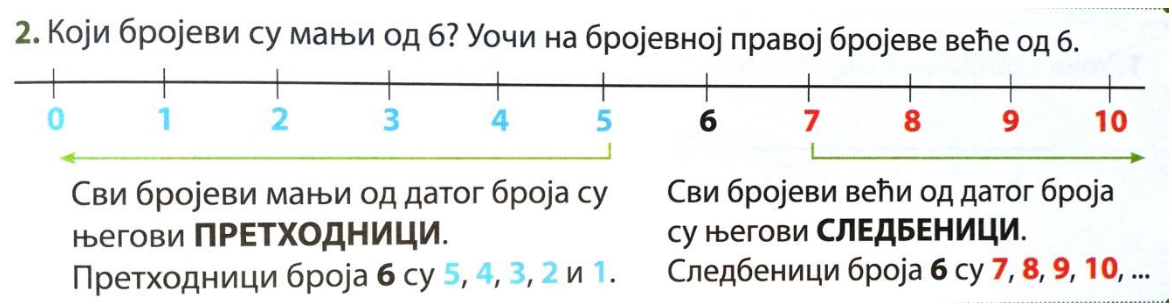
U 20. veku, švajcarski psiholog Žan Pijaže je razvio teoriju o razvoju dečjeg mišljenja. Pijažeova shvatanja o stadijumima u intelektualnom razvoju oblikovala su mnoge smernice za obrazovnu praksu. Prema Pijažeu, deca pre sedme godine spoznaju svet kroz opažaje i praktične aktivnosti i uče kroz igru, ali imaju problema sa logikom i uzimaju tačku gledišta drugih ljudi. Od sedme do jedanaeste godine traje *faza konkretnih operacija*. U ovoj fazi pojavljuje se logička misao, ali se deca još uvek bore sa apstraktnim i teorijskim mišljenjem. *Faza formalnih operacija* traje od dvanaeste do šestnaeste godine. U ovoj fazi deca postaju mnogo veštija i razvija se apstraktna misao i dedukcija. Prelazi se sa pojedinačnog na opšte, sa konkretnog na apstraktno. Dakle, deca postaju sposobna za razumevanje i usvajanje pojma beskonačnosti u višim razredima osnovne škole, pa sve do polaska u srednju školu. To ne znači da u ranijim godinama školovanja treba izbegavati svaki vid ovog koncepta, naprotiv, pažnju i razmišljanje učenika od početka treba usmeravati, kako bi kasnije lakše savladali mnoge apstraktne pojmove, pa tako i pojam beskonačnosti.

Analiza udžbenika

[I] Maša i Raša, Matematika 1, Udžbenik za prvi razred osnovne škole, *Četvrto izdanje* (*Autori:* dr Branislav Popović, dr Nenad Vulović, Petar Anokić, Mirjana Kandić; *Izdavač:* „Klett“ d.o.o, Beograd; *Godina izdavanja:* 2017.)

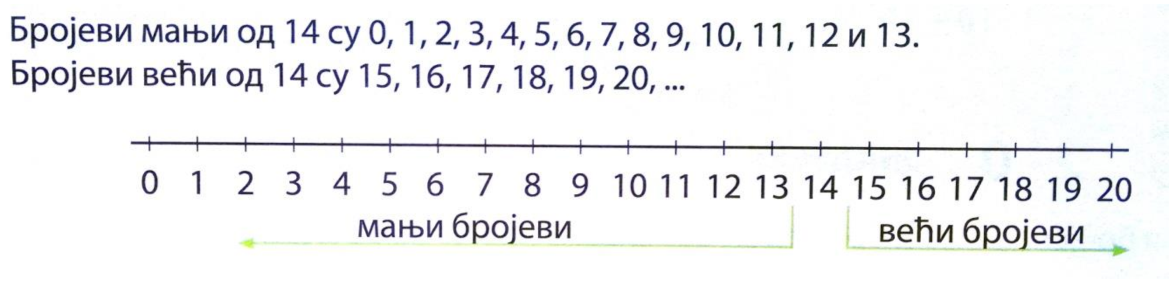
U trećem poglavlju udžbenika (str. 44, [I]) uveden je pojam brojevne prave – kako učenici do tada još nisu upoznati sa pravom, kao prave linije na kojoj su tačke označene brojevima koji se nalaze na međusobno jednakom rastojanju. Iako znamo da je prava objekat beskonačnih dimenzija, u ovom momentu se učenicima ta osobina ne spominje.

Na 51. stranici udžbenika [I] u lekciji *Prethodnici i sledbenici broja* prvi put uočavamo nešto što „ide u beskonačnost“. Označeno je sa tri tačke „ ... “ (slika 8).



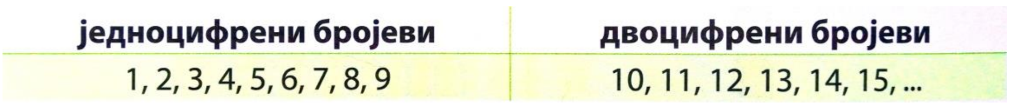
Slika 8: Prethodnici i sledbenici broja (str. 51, [I])

Dakle, prvi neposredni susret učenika sa beskonačnošću u nastavi matematike predstavljaju upravo tri tačkice. Slično kao kod sledbenika, na 64. stranici istog udžbenika, javljaju se brojevi „veći od“ nekog broja, gde nam ponovo tri tačkice ukazuju ne to da od broja postoji beskonačno mnogo većih (slika 9).



Slika 9: Brojevi manji i veći od datog broja (str. 64, [I])

I kasnije tokom školovanja koristimo „ ... “ da obeležimo da se nešto nastavlja u nedogled, tj. u beskonačnost. Međutim, ovu oznaku koristimo i na drugi način, recimo kada izostavljamo konačan broj elemenata nekog skupa (npr. $\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$), što veoma lako može dovesti do zabune kod učenika.



једноцифрени бројеви	двоцифрени бројеви
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	10, 11, 12, 13, 14, 15, ...

Slika 10: Upotreba tri tačkice umesto konačno mnogo brojeva (str. 62, [I])

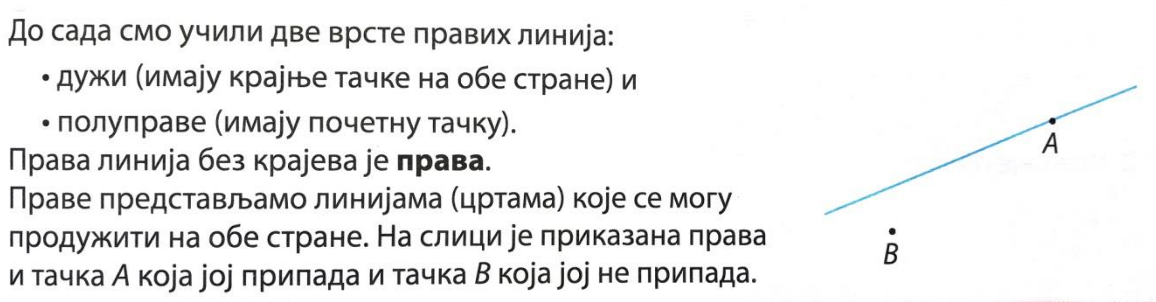
Na slikama 8 i 9 videli smo primere iz udžbenika [I] u kojima je sa tri tačkice označeno nešto što ide u beskonačnost. Poslednja slika (slika 10) prikazuje primer iz istog udžbenika, u kom je taj simbol iskorišćen za označavanje nastavka nabrajanja dvocifrenih brojeva, kojih, kao što znamo, ima konačno mnogo. Kako su do tog momenta naučeni samo brojevi do 20, čak nije zapisan ni poslednji dvocifreni broj, koji bi mogao da nagovesti da će se ovo nabrajanje u jednom momentu završiti. Ovakvo korišćenje iste oznake u različitom smislu može biti izuzetno zbunjujuće za učenike koji tek treba da usvoje pojmove.

[II] Maša i Raša, Matematika 2, Udžbenik za drugi razred osnovne škole, *Četvrto izdanje* (*Autori:* dr Branislav Popović, dr Nenad Vulović, Petar Anokić, Mirjana Kandić; *Izdavač:* „Klett“ d.o.o, Beograd; *Godina izdavanja:* 2015.)

U drugom razredu u geometriju se uvode pojmovi poluprave i prave – pravih linija koje se proizvoljno (tj. beskonačno) mogu produžiti na jednu ili obe strane (prikazano na slikama 11 i 12).


Посматрај слику.
Ракета креће из почетног положаја.
Правац кретања (лета) ракете
представљамо правом линијом
са једном крајњом тачком.
Такве праве линије су **полуправе**.

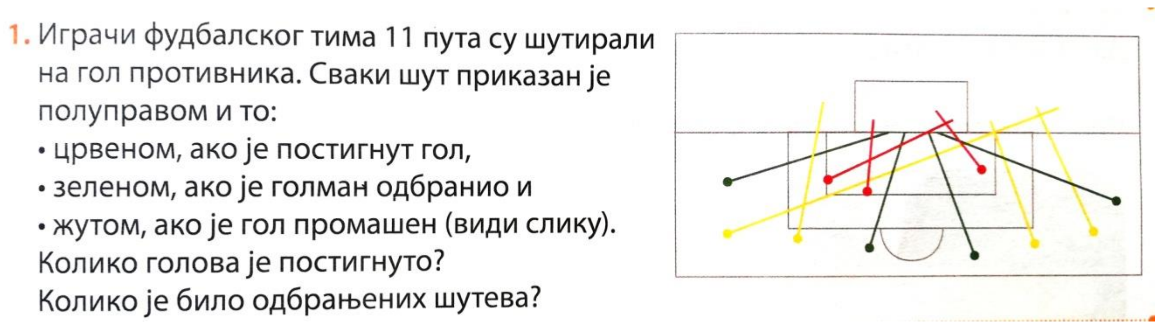
Slika 11: Uvođenje pojma poluprave (str. 13, [II])


До сада смо учили две врсте правих линија:
- дужи (имају крајње тачке на обе стране) и
- полуправе (имају почетну тачку).

Права линија без крајева је **права**.
Праве представљамо линијама (цртама) које се могу продужити на обе стране. На слици је приказана права и тачка *A* која јој припада и тачка *B* која јој не припада.

Slika 12: Uvođenje pojma prave (str. 13, [II])

Posmatrano iz ugla učenika, na 13. strani istog udžbenika, izdvaja se jedan izuzetno loš primer poluprave (slika 13):


1. Играчи фудбалског тима 11 пута су шутирали на гол противника. Сваки шут приказан је полуправом и то:
   - црвеном, ако је постигнут гол,
   - зеленом, ако је голман одбранио и
   - жутом, ако је гол промашен (види слику).

   Колико голова је постигнуто?
   Колико је било одбрањених шутева?

Slika 13: Loš primer poluprave (str. 13, [II])

Naime, dete iz iskustva zna da će svaka lopta koju šutne u jednom momentu da se zaustavi... To što je lopta upućena ka golu, ne znači da će do njega da stigne, pa bi tako bilo prikladnije šuteve prikazivati dužima, a ne polupravama.

Što se tiče aritmetike, pri učenju množenja (str. 37–61, [II]) na više mesta javlja se nalog tipa „*Nastavi započeti niz*“ (slika 14). Radi se o brojnim nizovima čiji su članovi umnošci nekog broja, a koji su, kao što znamo, beskonačni. Kao u prvom razredu, to je označeno pomoću „ ... “, a oznaka, kao ni tada, nije obrazložena.

1. Настави започети низ. а) 5, 10, 15,...; б) 50, 45, 40,... .

Slika 14: Primer naloga sa nizovima (str. 45, [II])

[III] Maša i Raša, Matematika 3, Udžbenik za treći razred osnovne škole, *Šesto izdanje* (*Autori:* dr Branislav Popović, dr Nenad Vulović, Petar Anokić, Mirjana Kandić; *Izdavač:* „Klett“ d.o.o, Beograd; *Godina izdavanja:* 2018.)

U trećem razredu obrađuju se, između ostalog, nejednačine (str. 92–93, [III]). Kao što znamo, skup rešenja nejednačine $x > a$ je beskonačan. Na ovom mestu se javljaju primeri u kojima je dat skup rešenja u preseku sa naučenim brojevima (slika 15), ali i oni u kojima tri tačke nagoveštavaju da ispisivanje istog nema kraja (slika 16), te ponovo nailazimo na korišćenje tri tačkice i kod konačnih i beskonačnih skupova brojeva.

1. Прочитај неједначине и одговарајуће скупове решења дате у табели.

Неједначина	Скуп решења неједначине
$x < 16$	$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
$x > 402$	$x \in \{403, 404, 405, 406, ..., 999, 1000\}$
$x > 198$	$x \in \{199, 200, ..., 999, 1000\}$
$x < 873$	$x \in \{0, 1, 2, 3, ..., 871, 872\}$

Slika 15: Skup rešenja nejednačine dat u preseku sa skupom naučenih brojeva (str. 92, [III])

3. Одреди скуп решења неједначине $4 + x > 7$. Погледај табелу.

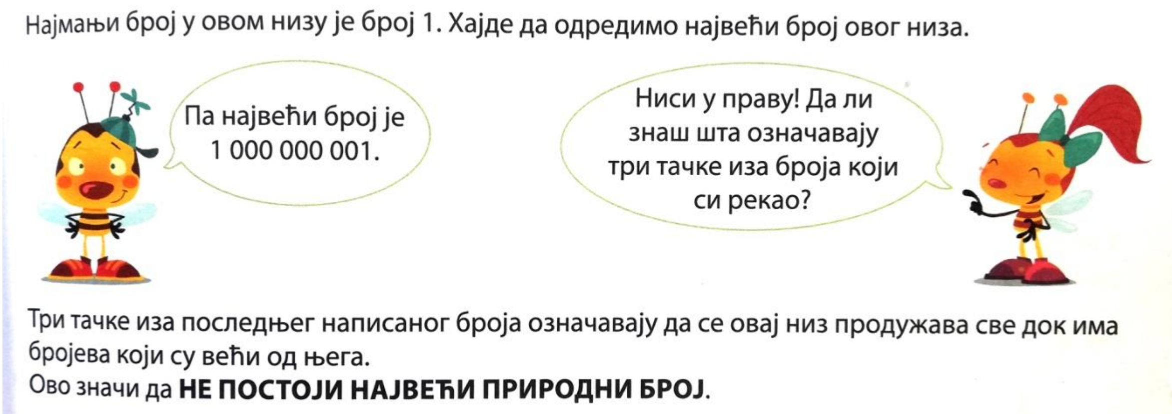
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$4 + x$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...

Slika 16: Beskonačno mnogo rešenja nejednačine (str. 92, [III])

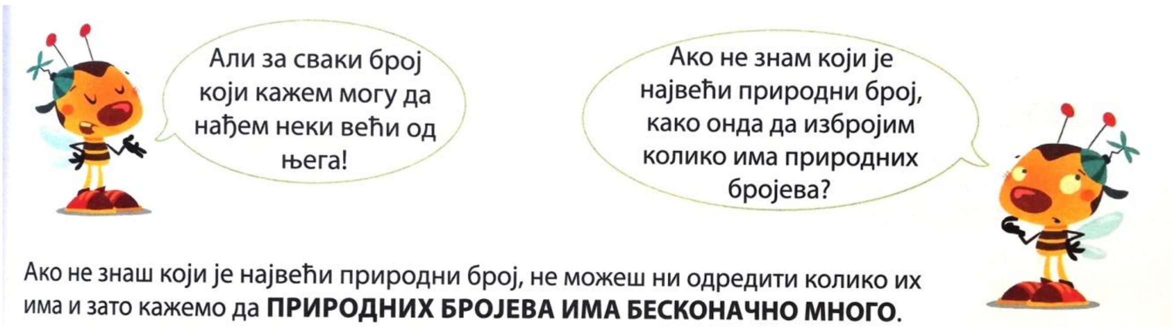
Što se tiče geometrije, rečeno je da se u krugu može nacrtati više poluprečnika, ali nije nagovešteno koliki je taj broj (str. 19, [III]). Pored toga, iako znamo da krug/trougao/četvorougao imaju beskonačno mnogo tačaka koje im pripadaju, u ovom uzrastu se ograničavamo na tačno određen (nacrtan) broj istih (str. 77 i 81, [III]). Dakle, u okviru ovih sadržaja u udžbeniku se ne nagoveštava prisustvo pojma beskonačnosti.

[IV] Maša i Raša, Matematika 4, Udžbenik za četvrti razred osnovne škole, *Peto izdanje* (*Autori:* dr Branislav Popović, dr Nenad Vulović, Marina Jovanović, Anđelka Nikolić; *Izdavač:* „Klett“ d.o.o, Beograd; *Godina izdavanja:* 2018.)

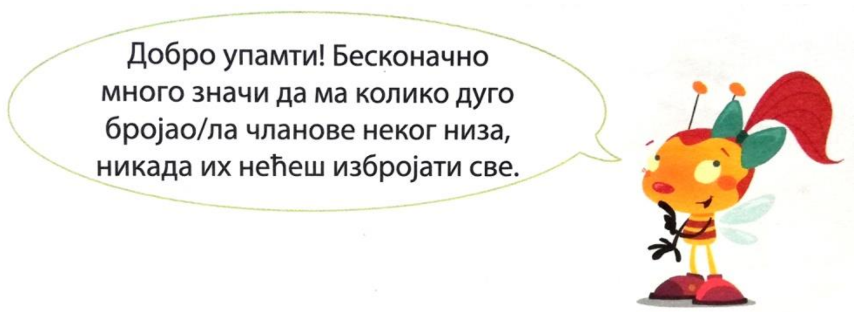
U udžbeniku za četvrti razred prvi put konkretno nailazimo na reč <u>beskonačno</u>. Reč je naravno o uvođenju *skupa prirodnih brojeva* (str. 19, [IV]). Iako su se učenici i ranije susretali sa tri tačkice na kraju nekog niza, tek se na ovom mestu donekle objašnjava njihovo značenje. Važni zaključci, koje bi trebalo da izvedu kroz obradu ovog gradiva, jesu da ne postoji najveći prirodan broj (slika 17) i da, samim tim, prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo (slika 18).



Slika 17: Nepostojanje najvećeg prirodnog broja (str. 19, [IV])



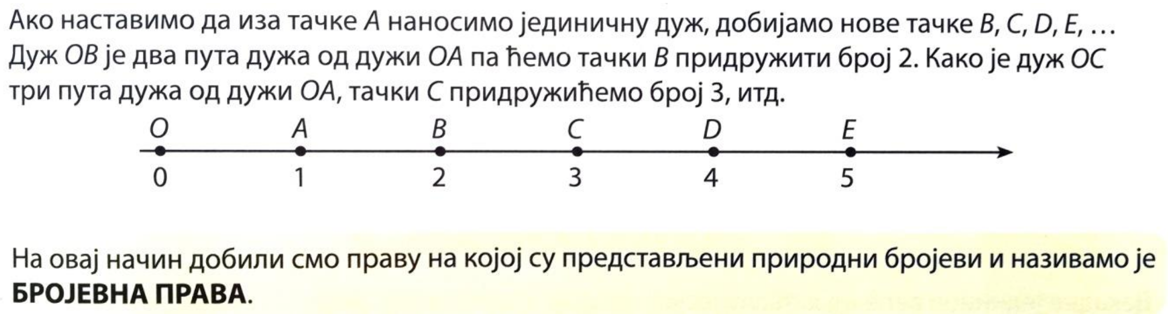
Slika 18: Beskonačnost prirodnih brojeva (str. 19, [IV])



Slika 19: Objašnjenje „beskonačnosti niza“ (str. 19, [IV])

U tekstu se pominje reč niz i članovi niza, dosta teški i apstraktni pojmovi. Oni nisu prethodno definisani niti intuitivno uvedeni. Niz je preslikavanje skupa prirodnih brojeva, a skup prirodnih brojeva je uveden preko niza prirodnih brojeva, što je veoma konfuzno.

U okviru iste jedinice data je i definicija brojevne prave (str. 21, [IV], slika 20), različita od one naučene u prvom razredu – to je prava na kojoj su predstavljeni prirodni brojevi, dakle, objekat beskonačne dimenzije.

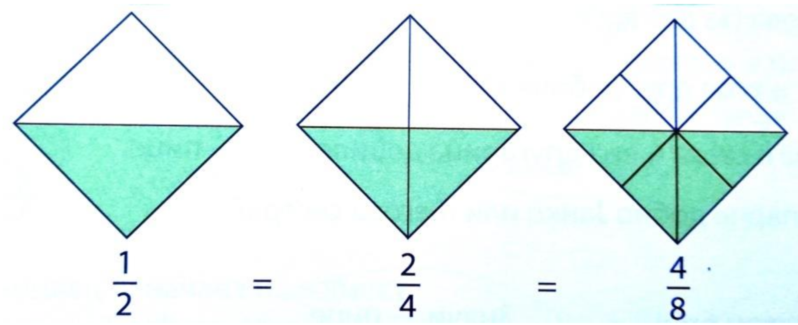


Slika 20: Brojevna prava (str. 21, [IV])

Kao u udžbeniku za treći razred, i ovde se javljaju beskonačni skupovi kao rešenja nejednačina (sa sabiranjem, oduzimanjem, množenjem).

Na 91. strani [IV], nalazi se zanimljiva priča o Fibonačijevim brojevima – beskonačnom nizu brojeva čija su prva dva člana jedinice, a svaki sledeći je jednak zbiru prethodna dva.

Pred kraj, pri obradi teme *Jednakost razlomaka*, nailazimo na mogućnost različitog predstavljanja istog razlomka, gde se može izvesti zaključak da se svaki razlomak može zapisati na beskonačno mnogo načina (slika 21).



Slika 21: Različito predstavljanje razlomka (str. 107, [IV])

Poslednje pojavljivanje beskonačnosti u navedenom udžbeniku za četvrti razred nalazimo na strani 111, pri obnavljaju znanja o brojevnoj pravoj i povezivanju istog sa novonaučenim gradivom o razlomcima. Reč je o nanošenju date duži na datu pravu, što možemo da učinimo proizvoljan broj puta (pa i beskonačno mnogo).

[V] Matematika 5, Udžbenik za peti razred osnovne škole, *Prvo izdanje* (*Autori*: dr Nebojša Ikodinović, mr Slađana Dimitrijević, Sanja Milojević, Nenad Vulović; *Izdavač:* „Klett“ d.o.o, Beograd; *Godina izdavanja:* 2008.)

Na 27. strani udžbenika [V] uvode se osnovni geometrijski pojmovi: tačka, prava i ravan.

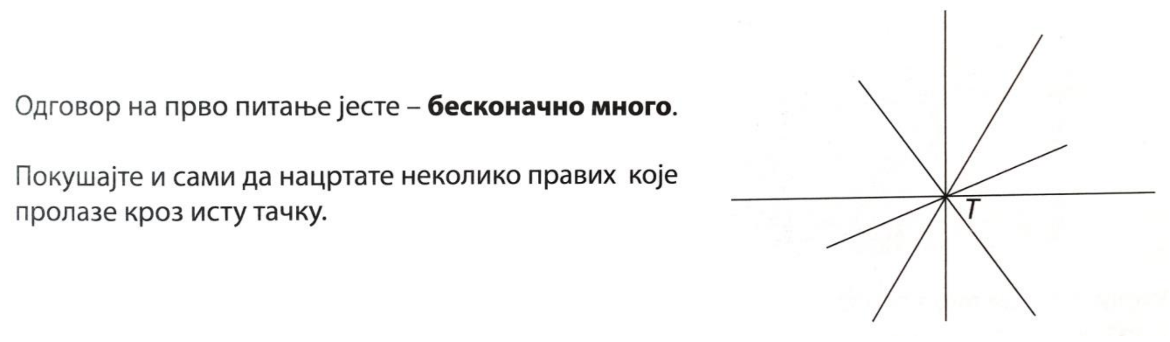
Učenici se prvi put upoznaju sa relacijom „biti između“, koja izražava raspored tačaka na pravoj. Dve veoma značajne osobine su:

За сваке две произвољно изабране различите тачке једне праве постоји тачка те праве која је између њих.

За сваке две произвољно изабране различите тачке једне праве, означимо их са *A* и *B*, постоји и нека тачка *C* те праве таква да је *A* – *B* – *C*, као и нека тачка *D* таква да је *D* – *A* – *B*.

Slika 22: Osobine tačaka prave (str. 30, [V])

One nam pokazuju da prava sadrži beskonačno mnogo tačaka, kako i glasi naslov lekcije na strani 29. Još jedno važno tvrđenje je da dve tačke određuju jedinstvenu pravu, tj. da postoji samo jedna prava koja sadrži dve zadate tačke. Tada se u udžbeniku postavlja pitanje koliko ima pravih koje sadrže jednu zadatu tačku. Odgovor je „beskonačno mnogo“ (slika 23).



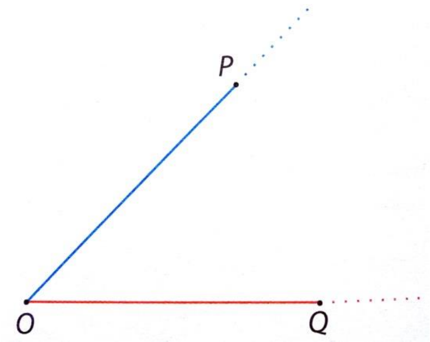
Slika 23: Broj pravih kroz jednu tačku (str. 31, [V])

Nakon toga, u udžbeniku postoji lekcija pod naslovom *„Ravan sadrži beskonačan broj tačaka“*, u kojoj se obrađuju odnosi pripadanja tačke i prave ravni, ali se nigde, osim u naslovu, ne spominje ova osobina ravni. Što se tiče iste osobine kod duži, „uvodi se“ na sledeći način:

Slika 24: Duž sadrži beskonačno mnogo tačaka (str. 37, [V])

U nastavku obrade ove oblasti, javlja se npr. zadatak: „Nacrtaj četvorougao i pravu tako da imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka“ (str. 47, [V]), gde se od učenika očekuje da primene prethodno naučeno znanje i zaključe da presek četvorougla i prave mora da bude duž, tj. stranica četvorougla.

Još neki beskonačni objekti su ugaona linija (unija dve poluprave sa zajedničkom početnom tačkom) i ugao (unija ugaone linije i skupa tačaka ravni koje su sa iste strane ugaone linije). Njihova beskonačnost se podrazumeva direktno po definiciji, jer predstavljaju uniju beskonačnih objekata. Da se ugaona linija može beskonačno produžavati, označeno je na sledeći način:



Slika 25: Ugaona linija (str. 80, [V])

Poslednja oblast u udžbeniku je *Osna simetrija*, u kojoj je, bez ikakvog objašnjenja, navedeno sledeće:

И кружница и круг су осносиметричне фигуре и имају бесконачно много оса симетрије.

Slika 26: Broj osnih simetrija kruga i kružnice (str. 178, [V])

Što se tiče teorije brojeva, na stranama 56 i 57 udžbenika [V], obrađuju se pojmovi delioca i sadržaoca nekog broja.

Скуп свих делилаца било ког броја има коначан број елемената, док је скуп свих садржалаца бесконачан.

Slika 27: Beskonačnost skupa sadržalaca broja (str. 57, [V])

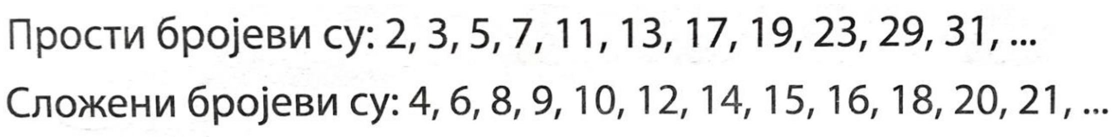
Dalje, na strani 75 istog udžbenika, učenici se upoznaju sa zajedničkim sadržaocima i najmanjim zajedničkim sadržaocem brojeva.

Примећујемо да скуп свих садржалаца броја 3 није коначан, јер су то сви природни бројеви облика $3 \cdot k$ ($k \in N$). Такође и скуп свих садржалаца броја 4 није коначан, јер су то сви природни бројеви облика $4 \cdot k$ ($k \in N$). Самим тим, ни скуп свих заједничких садржалаца бројева 3 и 4 није коначан. Из скупа заједничких садржалаца можемо издвојити најмањи од свих, број 12, и то ће бити **најмањи заједнички садржалац** бројева 3 и 4.

Slika 28: Beskonačnost skupa zajedničkih sadržalaca brojeva (str. 75, [V])

Način unapređenja ove nastavne jedinice dat je u poglavlju „Predlog nastavnih aktivnosti“.

U petom razredu uvode se i pojmovi prostog i složenog broja (str. 67, [V]). I jednih i drugih ima beskonačno mnogo, što je nagovešteno korišćenjem tri tačke (slika 29), ali nigde navedeno.

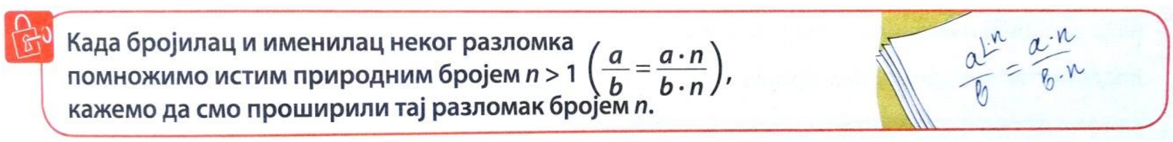


Прости бројеви су: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...
Сложени бројеви су: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, ...

Slika 29: Prosti i složeni brojevi, nabrajanje (str. 67, [V])

Na kraju ove oblasti, pod pitanjima bez odgovora (str. 78, [V]) navedeni su tzv. „prijateljski brojevi“ – parovi brojeva kod kojih svaki broj predstavlja zbir pravih delilaca onog drugog broja. Jedno od nerešenih pitanja je: da li ovakvih parova ima konačno ili beskonačno mnogo?

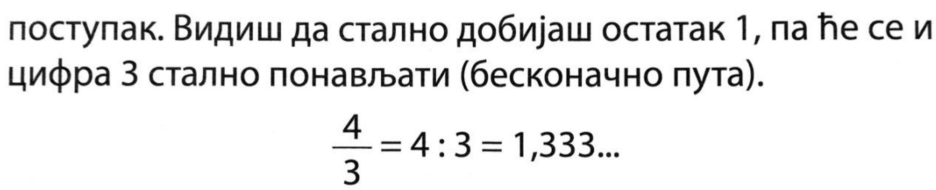
U prethodno obrađenom udžbeniku za četvrti razred navedeno je da jednom razlomku može da odgovara više zapisa. Kada u petom razredu nauče proširivanje razlomaka (slika 30), učenici mogu samostalno da zaključe da tih zapisa ima beskonačno mnogo.



Када бројилац и именилац неког разломка помножимо истим природним бројем $n > 1$ $\left(\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}\right)$, кажемо да смо проширили тај разломак бројем n.

Slika 30: Proširivanje razlomka prirodnim brojem (str. 115, [V])

Na 128. strani [V], u okviru lekcije *Decimalni zapis razlomka*, prvi put se javlja broj sa beskonačno mnogo decimala (slika 31).



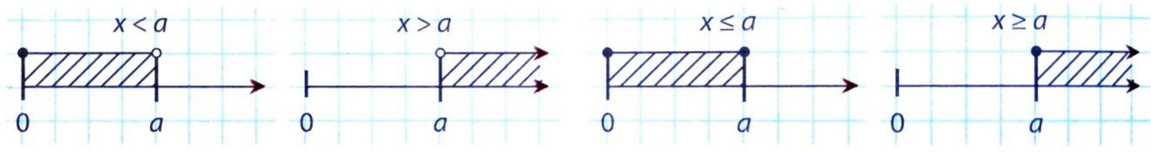
поступак. Видиш да стално добијаш остатак 1, па ће се и цифра 3 стално понављати (бесконачно пута).

$$\frac{4}{3} = 4 : 3 = 1{,}333...$$

Slika 31: Broj sa beskonačno decimala (str. 128, [V])

Detaljnije o periodičnim beskonačnim decimalnim brojevima i kako se prevode u razlomke možemo videti na strani 166 udžbenika [V]. U ovim lekcijama interesantno bi bilo provući pitanje jednakosti brojeva 0,999... i 1, koristeći se ili decimalnim zapisom razlomka $\frac{1}{3}$ ili zapisom broja 0,999 ... kao razlomka.

Na stranama 147–150 u [V], pokazano je kako se prikazuju rešenja nejednačina na brojevnoj polupravoj (slika 32). Pošto iste rešavamo u skupu pozitivnih racionalnih brojeva (razlomaka), one imaju beskonačno mnogo rešenja, koja se ne mogu nabrojati, već se predstavljaju crtanjem (ograničenih ili neograničenih) intervala na sledeći način:



Slika 32: Predstavljanje rešenja nejednačina na brojevnoj popolupravoj (str. 148, [V])

Kada uvedemo pojam aritmetičke sredine (strana 167, [V]), učenici nauče da se između svaka dva broja a i b nalazi novi broj $\frac{a+b}{2}$. Koristeći ovu osobinu, možemo da im nagovestimo da između svaka dva broja postoji beskonačno mnogo brojeva, kao i da povežemo znanje sa brojevnom (polu)pravom i osobinom da na (polu)pravoj postoji beskonačno mnogo tačaka.

[VI] Matematika 6, Udžbenik za šesti razred osnovne škole, *Prvo izdanje* (*Autori:* dr Nebojša Ikodinović, mr Slađana Dimitrijević; *Izdavač:* „Klett“ d.o.o, Beograd; *Godina izdavanja:* 2008.)

U šestom razredu upoznajemo učenike sa beskonačnim skupovima celih (str. 8, [VI]) i racionalnih brojeva (str. 88, [VI]), što možemo videti na slikama 33 i 34.

Скуп који чине позитивни цели бројеви, нула и негативни цели бројеви називамо скупом целих бројева и означавамо са Z.

$$Z = Z^{-} \cup \{0\} \cup Z^{+} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

Slika 33: Skup celih brojeva (str. 8, [VI])

Унију скупова позитивних Q^{+}, нуле $\{0\}$ и негативних рационалних бројева Q^{-} називамо скупом рационалних бројева и означавамо са Q.

Сваки рациналан број је количник два цела броја, то јест $Q = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0\right\}$.

Slika 34: Skup racionalnih brojeva (str. 88, [VI])

Rešavaju se nejednačine u skupu celih (str. 25, [VI], slika 35) i racionalnih brojeva (str. 102, [VI], slika 36).

Скуп решења неједначина са сабирањем и одузимањем у скупу целих бројева увек постоји и има бесконачно чланова.

Slika 35: Skup rešenja nejednačina u *Z* (str. 25, [VI])

Скуп решења неједначина у којима је непознат сабирак, умањеник или умањилац у скупу рационалних бројева је непразан и има бесконачно много елемената.

Slika 36: Skup rešenja nejednačina u *Q* (str. 102, [VI])

Analogno decimalnom zapisu razlomaka naučenom u prethodnom razredu, na 93. strani ovog udžbenika uvodi se decimalni zapis racionalnih brojeva (pod razlomcima podrazumevamo samo pozitivne racionalne brojeve!), gde se ponovo srećemo sa periodičnim decimalnim zapisom, tj. onim kod kog se neka cifra ili grupa cifara ponavlja beskonačno mnogo puta.

[VII] Matematika 7, Udžbenik za sedmi razred osnovne škole, *Sedmo izdanje* (*Autori:* dr Nebojša Ikodinović, mr Slađana Dimitrijević; *Izdavač:* „Klett“ d.o.o, Beograd; *Godina izdavanja:* 2015.)

Na samom početku sedmog razreda, obrađuju se realni brojevi. Da bi učenici razumeli potrebu za uvođenjem ovog skupa brojeva, dat je zadatak da se odredi dijagonala kvadrata stranice 1, gde je učenicima nakon određivanja nekoliko decimala nagovešteno da se taj postupak nikad neće završiti, tj. da nikada nećemo uspeti tačno da odredimo d (slika 37).

$1{,}414 < d < 1{,}415$	$1{,}999396 < d^2 < 2{,}002225$
$1{,}4142 < d < 1{,}4143$	$1{,}99996164 < d^2 < 2{,}00024449$
$1{,}41421 < d < 1{,}41422$	$1{,}9999899241 < d^2 < 2{,}0000182084$
$1{,}414213 < d < 1{,}414214$	$1{,}999998409369 < d^2 < 2{,}000001237796$
$1{,}4142135 < d < 1{,}4142136$	$1{,}99999982358225 < d^2 < 2{,}00000010642496$

Slika 37: Približne vrednosti za dijagonalu jediničnog kvadrata (str. 7, [VII])

Dakle, za razliku od racionalnih brojeva, decimalni zapis iracionalnog broja ne možemo nikada „do kraja“ napisati niti označiti (slika 38).

Децимални запис ирационалних бројева је бесконачан и није периодичан.

Slika 38: Osobina iracionalnih brojeva (str. 17, [VII]).

Znamo da su dva realna broja jednaka ako im odgovaraju isti decimalni zapisi. Jedini izuzetak čine zapisi koji se završavaju sa beskonačno mnogo devetki, npr: $0{,}999\ldots = 1$; $1{,}6999\ldots = 1{,}7$; $34{,}02999\ldots = 34{,}03$. U primeru 1 na strani 17 udžbenika [VII] (slika 39) dat je jedan od argumenata za jednakost $0{,}999\ldots = 1$.

Пример 1. Докажимо да је 0,999... = 0,(9) = 1.
Нека је $x = 0{,}(9)$. Тада је $10x = 9{,}(9)$ па је $10x - x = 9{,}(9) - 0{,}(9)$, односно $9x = 9$. Дакле, $x = 1$.

Slika 39: Jednakost brojeva 0,999... i 1 (str. 17, [VII])

Zatim, uvodi se realna brojevna prava (str. 15, [VII]). Ranije, pri predstavljanju prirodnih, celih i racionalnih brojeva na brojevnoj pravoj, svakom broju dodeljivali smo tačno jednu tačku te prave. Sada, osim toga, i svakoj tački brojevne prave možemo da dodelimo broj.

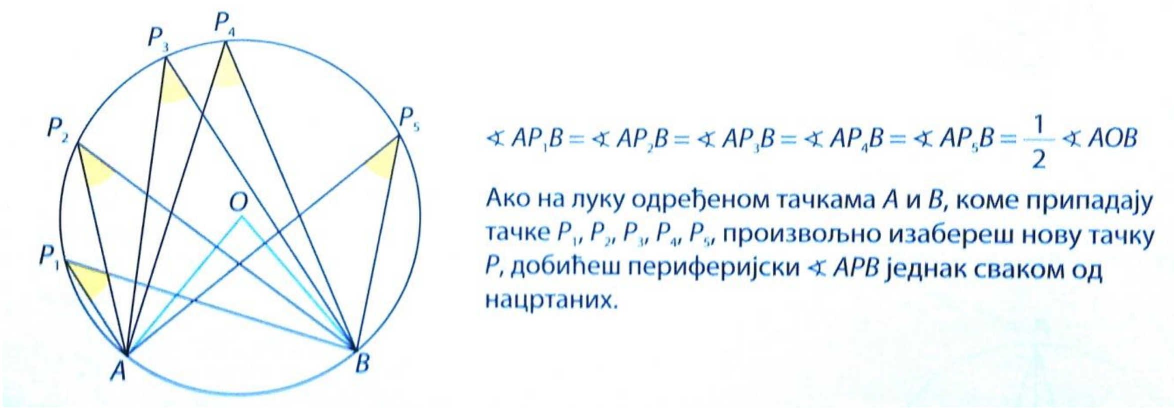
Pojavljuje se problem konstrukcije npr. tačke $T(\sqrt{3})$. Predložen je postupak deljenja intervala za koji smo ustanovili da sadrži $\sqrt{3}$ na 10 jednakih delova i odabir onog u kom je sadržan ovaj broj (str.16, [VII]).

Ако бисмо наставили да понављамо овај поступак, добијали бисмо интервале (1,732, 1,733), (1,7320, 1,7321), (1,73205, 1,73206) и тако даље, који сви садрже тачку $T(\sqrt{3})$ и од којих је сваки следећи садржан у претходном (интервали су све мање дужине). Када бисмо овај поступак поновили бесконачно пута, једина заједничка тачка за све добијене интервале би била тачка $T(\sqrt{3})$. Засад ту тачку не можемо тачно да одредимо, али можемо да одредимо произвољно мали интервал који је садржи.

Slika 40: Nemogućnost konstrukcije $\sqrt{3}$ (str. 16, [VII])

Pravougli koordinatni sistem uveden je pomoću 2 normalne brojevne prave (str. 102, [VII]), za koje se podrazumeva da znamo da su beskonačne dimenzije, te se induktivno zaključuje i da je koordinatni sistem beskonačan, tj. da pokriva celu ravan.

Kod obrade centralnog i periferijskog ugla kruga, rečeno je da su svi periferijski uglovi nad istim lukom međusobno podudarni (slika 41), ali ne i koliko takvih uglova ima, što bi svakako bilo dobro makar nagovestiti učenicima.



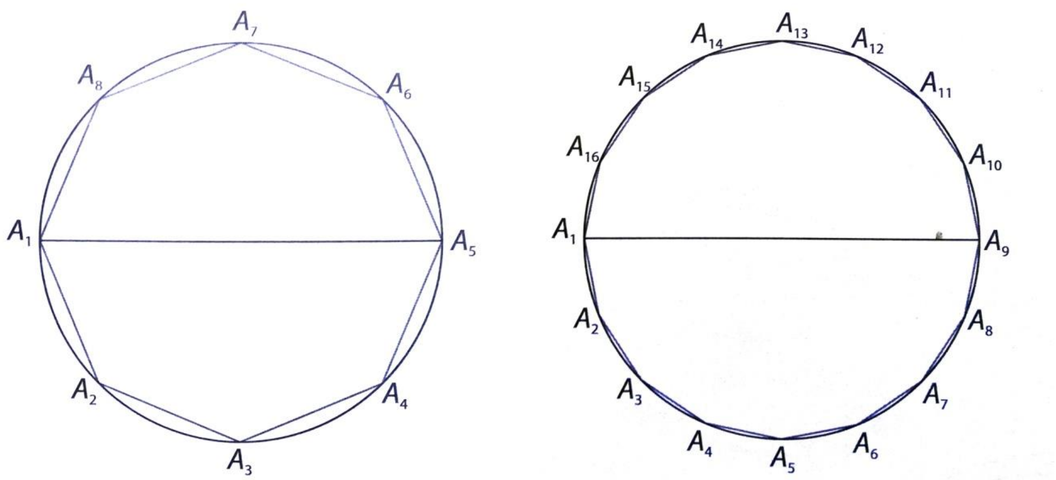
Slika 41: Periferijski uglovi nad istim lukom (str. 124, [VII])

Za izračunavanje obima kruga učenici se upoznaju sa novim iracionalnim brojem.

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795\ldots$$

Slika 42: Prvih 31 decimala broja „pi“ (str. 132, [VII])

Na strani 134 udžbenika [VII], dat je prikaz činjenice na kojoj se zasniva određivanje obima kruga: što više stranica ima pravilan mnogougao upisan u neki krug, on sve više podseća na odgovarajuću kružnicu.



Slika 43: Krug i upisan mnogougao (str. 134, [VII])

Pored ovog prikaza, računati su odnosi obima mnogougla i prečnika kruga u koji je upisan, gde se takođe može primetiti da je, sa povećanjem broja stranica, ovaj odnos sve bliži broju „pi“.

[VIII] Matematika 8, Udžbenik za osmi razred osnovne škole, *Prvo izdanje* (*Autori:* dr Nebojša Ikodinović, mr Slađana Dimitrijević; *Izdavač:* „Klett“ d.o.o, Beograd; *Godina izdavanja:* 2010.)

U osmom razredu podsećamo se poznatih i učimo nove osobine i odnose osnovnih geometrijskih objekata:

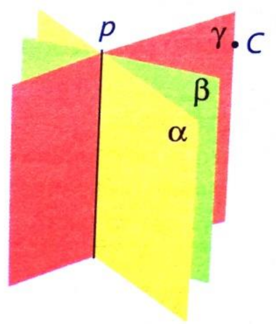
Права садржи бесконачно много тачака. Између сваке две различите тачке неке праве (ма колико оне биле блиске) може се изабрати нова тачка те праве. Права је неограничена са обе стране, па њен графички приказ можемо неограничено продужавати са обе стране.

Раван садржи бесконачно много тачака. „Раван је неограничена у свим правцима.“

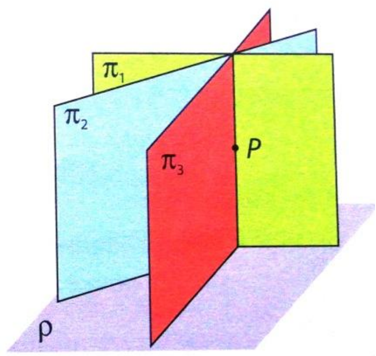
У свакој равни постоји бесконачно много правих.

Такође, постоји бесконачно много равни које садрже неку задату праву у простору.

Ако је осим праве задата још само једна тачка која јој не припада, онда постоји тачно једна раван која садржи ту праву и задату тачку. Ову чињеницу изражавамо и на следећи начин: права и тачка ван ње одређују јединствену раван.

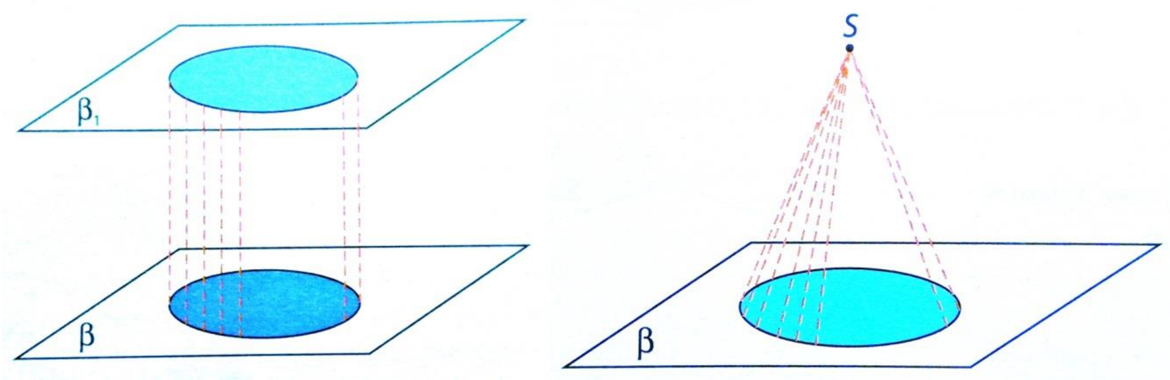


Претходно тврђење не важи за тачке и равни. За сваку тачку и сваку раван постоји бесконачно много равни које садрже ту тачку и нормалне су на дату раван. Такође, ако је права нормална на раван, онда постоји бесконачно много равни које садрже ту праву и нормалне су на дату раван.
Али, као што смо већ видели, за сваку тачку и сваку раван, постоји само једна права која садржи ту тачку и нормална је на дату раван.



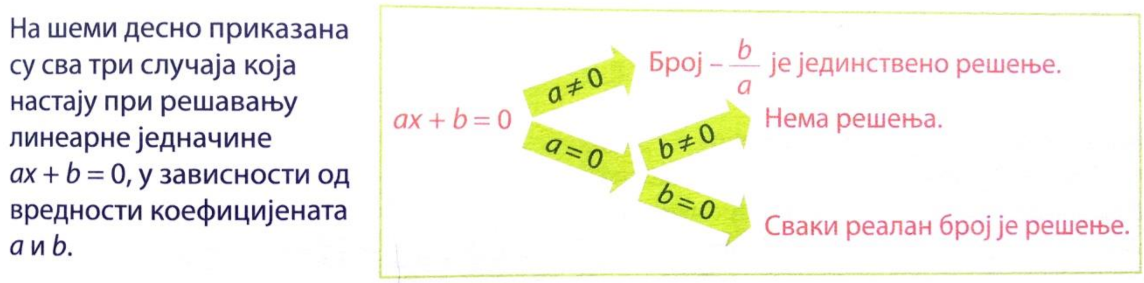
Slika 44: Neke osobine i odnosi osnovnih geometrijskih objekata (str 28-41, [VIII])

Analogno polupravoj u ravni, definišemo poluravan u prostoru (str. 47, [VIII]). Analogno uglu u ravni, u prostoru definišemo diedar (str. 47, [VIII]), a nakon toga i triedar (str. 49, [VIII]). Na samom kraju udžbenika definišu se neograničene površi: cilindrična i konusna (slika 45). Ni kod jednog od ovih pojmova ne spominju se niti grafički prikazuju njegove beskonačne dimenzije.

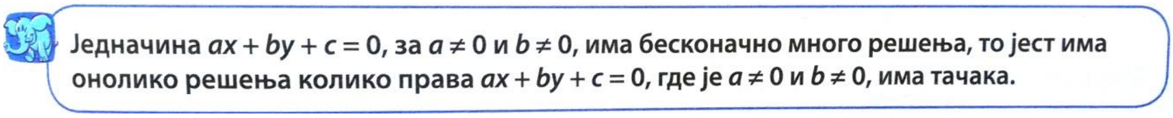


Slika 45: Cilindrična (str. 166, [VIII]) i konusna (str. 174, [VIII]) površ.

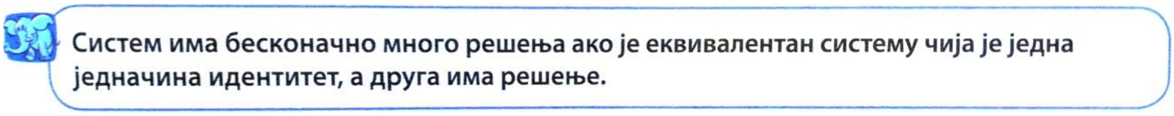
Pojam beskonačnosti se implicitno i eksplicitno javlja i kod rešavanja linearnih jednačina i nejednačina. Pored nejednačina, koje imaju beskonačno mnogo rešenja, javljuju se i jednačine i sistemi jednačina sa beskonačno mnogo rešenja:



Slika 46: Linearna jednačina sa beskonačno mnogo rešenja (str. 69, [VIII])



Slika 47: Jednačina sa dve nepoznate sa beskonačno mnogo rešenja (str. 149, [VIII])



Slika 48: Sistem jednačina sa beskonačno mnogo rešenja (str. 157, [VIII])

Dalje, obrađuje se linearna funkcija, čiji je grafički prikaz prava (str. 116, [VIII]). I sistemi od dve linearne jednačine sa dve nepoznate mogu se grafički prikazati.

Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две праве које се поклапају, тада тај систем има бесконачно много решења.

Slika 49: Beskonačno mnogo rešenja sistema u grafičkom prikazu (str. 152, [VIII])

Na 80. strani udžbenika za osmi razred prvi put se javlja simbol ∞ (slika 50). Ova oznaka omogućava zapis skupova realnih brojeva x sa osobinom $x > a$, $x \geq a$, $x < a$, $x \leq a$, kao neograničenih intervala oblika: $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, respektivno.

Као ознаку за бесконачно у математици користимо симбол ∞, односно симболе +∞ и −∞.

Slika 50: Simbol beskonačnosti (str. 80, [VIII])

Тачан разлог за увођење баш симбола ∞ као ознаке за бесконачно није познат (постоји више различитих тумачења). За само увођење овог симбола је највероватније заслужан енглески математичар Џон Валис (1616–1703).

Slika 51: Poreklo simbola beskonačnosti (str. 81, [VIII])

Po završetku analize, zaključujemo da se koncept beskonačnosti u udžbenicima za osnovnu školu javlja veoma često, naročito u višim razredima. Nažalost, isti se formalno ne uvodi niti objašnjava. Učenikovo razumevanje bazirano je na sopstvenim mentalnim sposobnostima i zbog toga se javljaju problemi, ne samo u razumevanju pojma beskonačnosti, već i svih ostalih tema u kojima je on prisutan, što može rezultirati pojavom odbojnog stava prema matematici već u ranim godinama školovanja.

Istraživanja o beskonačnosti

Koncept beskonačnosti dotiče mnoga područja programa nastave matematike. Poimanje beskonačnosti je sadržaj značajnog broja istraživanja, čiji rezultati predstavljaju smernice za preispitivanje i unapređivanje obrazovne prakse. Naime, istraživanja sa jedne strane omogućuju bolji uvid u stanje i mogućnosti učenika, a sa druge pokazuju da li bi promena (metodičkog) pristupa (npr. korišćenje rečenog konteksta, digitalne tehnologije, istraživačkih pitanja itd.) omogućila bolje rezultate. U nastavku će biti dati kratki prikazi nekoliko radova koji su se bavili istraživanjem koncepta beskonačnosti.

Jedna od glavnih poteškoća prilikom pokušaja razumevanja pojma beskonačnosti jeste apstraktna priroda ovog pojma. Prethodna istraživanja sugerišu da deca osnovnoškolskog uzrasta beskonačnost razumeju kao proces koji je beskrajan, a ne kao objekat sličan broju koji ima red veličine, i insistiraju na ulozi reprezentacija u intuitivnom razmišljanju učenika o beskonačnosti. Naime, kako je beskonačnost teško dovesti u vezu sa životnim iskustvom, njeno razumevanje zavisi od sposobnosti mentalne vizuelizacije pojedinca. Izvan matematičkog sveta, izraz kao što je „teži beskonačnosti“ za dete bi bio besmislen, jer ne postoji proces koji može da traje beskonačno. Pošto je naš um u osnovi prilagođen konačnim stvarnostima u prostoru i vremenu, intuicija je presudna u razumevanju beskonačnosti. Prema Fišbejnu, intuitivno znanje je vrsta neposredne samorazumljive kognicije koju prihvatamo kao istinitu, što dovodi do generalizacije koja nadilazi poznate podatke ([5]).

Jednu od prvih studija koja se bavila dečijim razumevanjem koncepta beskonačnosti sproveli su (prema [18]) Pijaže i Inhelder[17] 1956. godine. Ona je uključivala neke geometrijske probleme tipa: kako nacrtati najmanji i najveći mogući kvadrat na listu papira, šta bi se desilo kada bi se proces deljenja datih figura nastavio misaono itd. Pijaže i Inhelder su zaključili da je detetova sposobnost da vizuelizuje deljenje geometrijske figure na manje delove, u *fazi konkretnih operacija*, ograničena konačnim brojem iteracija. Tek u *fazi formalnih operacija*, na uzrastu oko 11-12 godina, dete postaje sposobno da shvati ovakvu podelu kao beskonačan proces.

Ranija istraživanja na temu intuitivnog razumevanja beskonačnosti od strane dece pokazala su da se ono javlja relativno kasno. Krajem 20. veka, Gelman, Hartnet i Evans, u svojim intervjuima, postavljali su pitanja deci uzrasta od 5 do 9 godina o iterativnom dodavanju i postojanju najvećeg broja. Iako i odrasli često imaju problema sa formalnim pojmom beskonačnosti, većina zna da se 1 rekurzivno može dodati bilo kom broju. Čini se da deca ovu osobinu nauče oko šeste godine, dok sa 7-8 godina eksplicitno govore o beskonačnosti. Razumevanje beskonačnosti razvija se u tri faze:

1. Deca tvrde da postoji najveći broj i da se njemu ne može dodati 1.
2. Deca daju paradoksalne odgovore: da 1 može neprestano da se dodaje, ali da postoji najveći broj.

[17] ***Jean Piaget*** (1896 – 1980) i ***Bärbel Elisabeth Inhelder*** (1913 – 1997), švajcarski psiholozi.

3. Deca odmah odgovaraju da ne postoji najveći broj i diskutuju o beskonačnoj prirodi brojeva, tj. tvrde da se svakom broju može dodati 1.

Ova otkrića sugerišu da je razvoj razumevanja beskonačnosti dugotrajan i postavlja se pitanje povezanosti sa razumevanjem funkcije sledbenika[18]. U istraživanju predstavljenom u [1], izvršeno je ispitivanje o sticanju znanja o funkciji sledbenika kod dece, na osnovu pitanja kada oni postaju sposobni da identifikuju sledbenike poznatih brojeva i shvataju da svaki broj n ima sledbenika $n+1$, te da se tako brojevi nikad ne završavaju. Učestvovalo je 100 dece uzrasta 4 do 6 godina. Rezultati otkrivaju da dete može da odredi vrednosti sledbenika za sve brojeve u svom dometu brojanja u proseku sa oko 5,5 godina starosti. Što se drugog pitanja tiče, većina dece (61%) dala je konzistentne odgovore: 37% njih smatra da postoji najveći broj i da nemaju svi brojevi sledbenika, dok 24% veruje da se brojevi nikad ne završavaju i da svaki ima sledbenika. Čini se da deca počinju tako što nauče da svaki broj koji poznaju ima sledbenika, a potom generališu to na sve moguće brojeve, pre nego što konačno shvate da to implicira da se brojevi nikad ne završavaju. To se desi godinama nakon što nauče da broje.

U okviru istraživanja [5], ispitivano je, između ostalog, kako učenici osnovnih škola donose argumente za beskonačnost prirodnih brojeva i prenose rezonovanje na druge skupove. Rezultati pokazuju da je primarna percepcija[19] beskonačnosti dovoljno jaka u uzrastu od 6 do 8 godina, tako da bi, na osnovu nje, učenici trebalo da budu u stanju da konstruišu argumente za beskonačnost skupa prirodnih brojeva. Tvrdnja da ne postoji najveći prirodan broj pojavila se kao spontana reakcija u mnogim razgovorima sa učenicima u prvom i drugom razredu. Učenici obično opravdavaju beskonačnost $\boldsymbol{N}$ korišćenjem rekurzije. Štaviše, u petom i šestom razredu uspevaju da izvrše prenose sa $\boldsymbol{N}$ na $\boldsymbol{Q}$ i da opravdaju da je skup racionalnih brojeva beskonačan. Istraživanje je pokazalo i da su učenici u dobi od 11-12 godina, kada počnu da uče decimalne brojeve, u stanju da naprave analogije o beskonačnosti u $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{N}$ bez ikakve vežbe i formalnog znanja o tim konceptima. Ispravno rezonovanje je uglavnom proizvod korišćenja nizova – ovo pokazuje da su Peanove aksiome u ovoj dobi potpuno integrisane i učenici su u stanju da prošire svoje znanje za izgradnju argumenata u situacijama koje nisu poznate njihovom nivou znanja.

[18] Funkcija koja prirodnom broju n dodeljuje njegovog sledbenika $n+1$.

[19] Primarna percepcija je aktivan i spontan proces kojim ljudska bića organizuju i tumače senzorne informacije, nezavisno od bilo kojeg uputstva. Što se više novih informacija dobija, percepcijsko iskustvo se obogaćuje. ([5])

Racionalni brojevi imaju beskonačno mnogo elemenata između bilo koja dva broja i stoga nijedan nema jedinstvenog sledbenika. Ovo svojstvo naziva se *gustina*. U istraživanju [2], sprovedenom među finskim petacima, samo 2% je reklo da postoji beskonačno mnogo brojeva između 0.8 i 1.1, a manje od 1% je uočilo da ne postoji najveći broj manji od 1. Među sedmacima, odgovarajuće brojke su 12% i 2%, respektivno. Ideja o sledbeniku duboko je utemeljena u intuiciji učenika o brojevima, te ograničava učenike u razumevanju svojstva gustine racionalnih i realnih brojeva. Kako saznajemo iz [26], od 411 nemačkih učenika sedmog razreda, samo 10% je moglo tačno da imenuje jedan razlomak između $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$, a 18% između 0.3 i 0.6. U intervjuu u kom je učestvovalo 28 učenika, samo 4 je shvatilo da postoji beskonačno mnogo mogućih odgovora za prvi problem, dok je za drugi isto zaključilo dvoje. U [7], testirani su učenici uzrasta 14-15 godina. Njihov zadatak je bio da odrede koliko ima brojeva između dva zadata broja (npr. 0 i 1, 0.9 i 1, 2.4 i 2.5, $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$). Ponuđeni odgovori bili su: da nema brojeva, da ima konačno mnogo razlomaka ili konačno mnogo decimalnih brojeva (u zavisnosti od toga da li je granica bila razlomak ili decimalni broj), da ima beskonačno mnogo razlomaka ili beskonačno mnogo decimalnih brojeva (opet, u zavisnosti od granice) i da ih ima beskonačno mnogo i mogu biti u različitim oblicima. Kod oko $\frac{1}{4}$ učenika dominirala su prva dva odgovora, tj. da između zadatih brojeva nema ili ima konačno mnogo brojeva. Kod 28.3% učenika svi ili skoro svi odgovori su bili da ima beskonačno brojeva, čiji oblik ne zavisi od granice. Čak i učitelji imaju problem sa gustinom skupova. U studiji [26], čak 40% studenata, budućih učitelja, nije koristilo beskonačnost u problemima koji od njih to zahtevaju, kao npr. određivanje broja racionalnih brojeva između 0.4 i 1.1 ili najvećeg razlomka manjeg od 3. Zablude koje predavači imaju o beskonačnosti mogu da uzrokuju pogrešne stavove učenika o ovom konceptu. Ovo je samo jedan od niza problema koji uključuju beskonačnost.

Hanula i drugi ([2] i [4]) pokazali su da većina učenika petog razreda (11-12 godina) nema razvijen koncept o beskonačnosti, a slična je situacija i sa učenicima sedmog razreda (13-14 godina). Većina se fokusira na beskonačnost kao proces, dok se viđenje beskonačnosti kao objekta javlja kod manjeg broja učenika. U zadacima koji se bave beskonačnošću, dečaci su dali značajno bolje odgovore. Do sličnih rezultata došao je i Monagan ([17]), istražujući među učenicima starosti 16 do 18 godina. Utvrdio je da većina učenika beskonačnost vidi kao proces koji se ne završava. Drugo viđenje beskonačnosti, kao veoma velikog broja ili kao kolekcije koja sadrži više od bilo kog konačnog broja elemenata, primetio je kod malog broja učenika. Kolar i Čadež ([18]) navode da učenici, nakon što beskonačnost shvate kao nešto što nema kraja, nisu sposobni da je sagledaju kao celinu i ukazuju na to da tendencija interpretiranja problema potencijalnom umesto aktuelnom beskonačnošću ostaje prisutna i na univerzitetskom nivou, pa čak i kod samih nastavnika. To potvrđuje istraživanje [10], sprovedeno među nastavnicima petog razreda, čija je svrha bila da se ispitaju njihove reakcije na argumente da je $0.9999\ldots = 1$. Odgovori su pokazali da mnogi ne veruju u ovu jednakost, čak ni nakon prezentovanja argumenata, što najčešće proizilazi iz posmatranja ponavljajućih decimala kao procesa, a ne broja. Posebno je zanimljivo da nastavnici dovode u pitanje jednakost $\frac{1}{3}$ i $0.3333\ldots$, koja je čvrsto ukorenjena u sadržajima elementarne matematike.

Koncepcije nastavnika osnovnih škola o beskonačnosti ispitala je i studija [19], koja je takođe pokazala da većina nastavnika shvata beskonačnost kao neograničen proces. Otprilike polovina ispitanika bila je u stanju da da tačan odgovor na zadatke kao što su npr. upoređivanje kardinalosti skupa prirodnih i parnih brojeva. U jednom od zadataka, koji se odnosio na kardinalnost skupa $\{-3, -2, -1, 0, \{1, 2, 3, \ldots\}\}$, čak 88.4% nastavnika pogrešno je odgovorilo da ona iznosi beskonačno, jer je jedan od njegovih elemenata beskonačan skup. Što se tiče definicije beskonačnosti, preko $\frac{2}{3}$ njih je napisalo da je to beskonačan proces. Brojne studije o poređenju beskonačnih skupova pokazuju da među učenicima i studentima – budućim nastavnicima, samo manjina koristi bijekciju kao metodu upoređivanja dva skupa ([18]). Osim toga, bolje se snalaze sa problemima koji uključuju probleme sa „beskonačno velikim“ i „beskonačno mnogo“, nego sa „beskonačno blizu“. Nalazi prethodnih istraživanja takođe pokazuju da se na razumevanje beskonačnosti može uticati korišćenjem odgovarajućih reprezentacija. Npr., kako je navedeno u [2], učenici lakše uočavaju jednakost skupova $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ i $\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots\}$ nego $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ i $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Matematički paradoksi mogu igrati značajnu ulogu u obrazovanju. Nagon da se reši paradoks moćan je motivator za promenu okvira znanja. Reakcije studenata na dva paradoksa beskonačnosti modernijeg doba istražene su u [8]. Ovi paradoksi, koje ćemo navesti, mogu poslužiti za diskusije učenika i nastavnika, i kao takvi imaju važnu pedagošku vrednost.

PARADOKS TOMSONOVA LAMPA: *Zamislimo lampu za čitanje sa dugmetom za uključivanje/isključivanje. Pretpostavimo da se dugme može pritisnuti u trenu i da je u početnom trenutku lampa isključena. Nakon 1 minuta pritisnemo dugme i upalimo lampu. Zatim, nakon* $\frac{1}{2}$ *minuta ponovo pritisnemo dugme i ugasimo lampu. Nakon još* $\frac{1}{4}$ *minuta upalimo lampu, pa nakon još* $\frac{1}{8}$ *ugasimo itd. Znači, prekidač pritiskamo i stanje lampe (uključeno/isključeno) se menja tačno kada istekne polovina prethodnog vremenskog intervala. Pitanje glasi: nakon isteka 2 minuta, da li će lampa biti uključena ili isključena?*

PARADOKS ZELENI VANZEMALJAC: *Zeleni vanzemaljac stigao je na Zemlju u ponoć, 5. novembra, i ima tačno jedan dan da provede na našoj planeti, tj. mora da ode u ponoć, 6. novembra, inače će se pretvoriti u tikvu. Međutim, on saznaje da FBI juri za njim, pa u podne, 5. novembra, u trenu menja boju u ružičastu (kako bi se uklopio sa lokalnim devojkama). Kada se potraga intenzivira, on u 18h vraća boju na prvobitnu zelenu i nastavlja da je menja u poluintervalima preostalog vremena (tačnije, u 21h postaje ružičaste boje, u 22h 30min zelene, u 23h 15min opet ružičaste, u 11h 37min 30s zelene, 11h 48min 45s ružičaste itd.). Pitanje je: koje boje će vanzemaljac biti u ponoć, kada napusti Zemlju?*

Nastavni sadržaji koji zahtevaju razumevanje aktuelne beskonačnosti obrađuju se tek u starijim razredima srednje škole. S obzirom na to da tokom ranijih godina školovanja nemaju priliku da se formalno upoznaju sa pojmom beskonačnosti, većina učenika kreće od svojih intuitivnih ideja i predstava i to često dovodi do poteškoća sa dubljim razumevanjem ovih pojmova i sadržaja. Postoji mnogo tema u programima nastave matematike za osnovnu školu koje nude dobre mogućnosti za diskusiju o beskonačnosti, kao što su prirodni i racionalni brojevi, progresije, prava itd. Međutim, u istima se ne pojavljuje tema pod naslovom „beskonačnost“. Nastavnici beskonačnost uglavnom shvataju kao matematičku ideju sa ograničenim primenama u svakodnevnom životu. Većina se povremeno površno osvrne na ovaj koncept (govoreći da prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo, da prava linija može da se produži u oba smera u beskonačnost i sl.), ali ne zalazi dublje u temu, da li zbog nedostatka slobode i vremena, da li zbog toga što ne želi da pokaže svoju nesigurnost. Stoga možemo zaključiti da ovoj temi treba da se posveti više pažnje u mlađem uzrastu, naročito u periodu razvoja apstraktnog mišljenja. Pri tome, pristup mora biti prilagođen, a sadržaj metodički oblikovan i predstavljen na način pristupačan učenicima.

III EMPIRIJSKO ISTRAŽIVANJE

Kako je u prethodnom delu pokazano, nastava matematike u osnovnoj školi koristi pojam beskonačnosti. Međutim, kako formalno, kao tema, nije obuhvaćen osnovnoškolskim programom nastave, nudi dobru priliku za uvid u način razmišljanja učenika i granice njihovog razumevanja. Za potrebe ovog rada sprovedena su dva istraživanja – jedno među učenicima prvog i jedno među učenicima sedmog i osmog razreda osnovne škole. Cilj istraživanja bio je da ispitamo kako učenici percipiraju beskonačnost na početku i pri kraju osnovnoškolskog obrazovanja. Kod učenika prvog razreda akcenat je bio na intuiciji, dok je pažnja kod učenika starijih razreda bila usmerena na povezivanje ovog koncepta sa poznatim matematičkim pojmovima.

Metodologija

Prvi razred

Učestvovalo je 42 učenika u dva prva razreda Osnovne škole „Jovan Jovanović Zmaj" iz Subotice. Sva deca su u toku redovnog školskog časa, uz prusustvo učitelja, popunjavala isti upitnik, u trajanju od 10 minuta. Istraživanje je bilo anonimno. Upitnik je sadržao 5 pitanja, preuzetih iz istraživanja [1] (*„Infinity task"*). Učenicima je bila nephodna pomoć učitelja u tumačenju nekih pitanja, prvenstveno zbog njihove dužine. Ovo istraživanje su realizovala dva iskusna učitelja, koji su učenicima čitali pitanja, te su oni više pažnje mogli da usmere na razmišljanje o odgovoru, nego na čitanje i razumevanje pitanja. S obzirom na to da se radi o učenicima prvog razreda, koji su tek naučili da čitaju i pišu, ovaj način je zasigurno doprineo boljim i merodavnijim rezultatima. U okviru ovog istraživanja, naglasak je bio na intuitivnom mišljenju o sledbenicima poznatih i nepoznatih brojeva, pa samim tim i konceptu beskonačnosti. Instrument (upitnik) se nalazi u prilogu, na kraju rada.

Sedmi i osmi razred

Učestvovalo je ukupno 79 učenika Osnovne škole „Sveti Sava" iz Subotice, od toga 35 u dva sedma i 44 učenika u dva osma razreda, 32 devojčice i 47 dečaka. Sva deca su u toku redovnog školskog časa, uz prisustvo nastavnika matematike, popunjavala upitnik, u trajanju od 15 minuta. Upitnik je sadržao 4 otvorena pitanja u kojima su učenici zamoljeni da opišu ili upotrebe beskonačnost, kao i da napišu šta im je najteže, a šta najlakše iz matematike. Cilj ovih pitanja je bio da istraživaču približi profil i stavove učenika, kako prema konceptu beskonačnosti, tako i prema samoj matematici. Drugi deo upitnika sastojao se iz zadataka u kojima su učenici trebali da prepoznaju ili uporede beskonačne skupove, bez potrebe za objašnjenjem ili formalnim dokazom. Iz tog razloga, redosled pitanja i ponuđenih odgovora nije bio identičan na upitnicima. Na samom kraju svaki učenik je zaokruživanjem jedne od tri ponuđene opcije odredio koliko je siguran u odgovore koje je dao na prethodna pitanja. Za potrebe ovog istraživanja iskorišćene su ideje iz istraživanja sprovedenog u [5]. Instrument (upitnik) se nalazi u prilogu, na kraju rada.

Rezultati istraživanja

Prvi razred

Na prvo pitanje, najveći broj učenika, 38%, tačnije njih 16, odgovorilo je da je najveći broj koji znaju broj 10. Ovaj odgovor verovatno je rezultat toga što su prvaci do momenta sprovođenja istraživanja u školi naučili brojeve do 10. Pozitivna je činjenica da 13 od ovih 16 učenika smatra da 10 nije najveći broj i može da zamisli veći (pitanja 2 i 3), svih 16 je odgovorilo da uvek možemo dodati 1 (pitanje 5), dok je na pitanje da li možemo da brojimo zauvek njih takođe 13 odgovorilo potvrdno (pitanje 4). Drugi broj koji se više puta javio kao odgovor na prvo pitanje je 1000. Taj odgovor dalo je 7 učenika, odnosno oko 17%. Ostali odgovori se javljaju po jednom ili dva puta (11, 99, 200, 300, 1999, 999999, 500000, 100000000...). Na 2 papirića pojavio se odgovor ∞ (napisan upravo ovaj simbol), što je posebno zanimljivo, s obzirom na to da su u pitanju učenici prvog razreda. Jedan od njih u nastavku je odgovorio da beskonačno jeste najveći broj koji postoji i da ne može da zamisli veći, da ćemo brojeći redom stići do kraja i da ne može uvek da se doda 1. Drugi učenik je napisao da beskonačno nije najveći broj, ali da ne može da zamisli veći, da nikad ne dolazimo do kraja brojanja i da se 1 može uvek dodati.

Odgovori učenika na pitanja da li je broj koji su napisali najveći koji postoji i da li mogu da zamisle veći dati su u sledećoj tabeli:

2. pit.\ 3. pit.	**DA**	**NE**
DA	2	3
NE	31	6

Tabela 1: Ukrštanje odgovora učenika na 2. i 3. pitanje.

Dakle, većina učenika, tj. skoro tri četvrtine, smatra da postoji i mogu da zamisle broj veći od onog koji su napisali. Jedan od tri učenika koja smatraju da je njihov broj iz prvog zadatka najveći koji postoji i ne mogu da zamisle veći je i učenik koji je u prvom pitanju dao odgovor ∞. Manje od 5% učenika dalo je nekonzistentne odgovore – da su u prvom pitanju napisali najveći broj koji postoji, ali i da mogu da zamisle veći.

Na četvrto pitanje, čak 74% učenika, odnosno njih 31, odgovorilo je da možemo brojati zauvek. Preostalih 26% smatra da ćemo u jednom momentu stići do kraja. Što se tiče petog pitanja, 90% ispitanika smatra da svakom broju, koliko god velik bio, možemo da dodamo 1. 4 učenika smatra da postoji broj toliko velik da njemu ne može da se doda 1. Ukrštanjem odgovora na ova dva pitanja dobijamo sledeće:

4.pit.\ 5.pit.	**uvek može +1**	**ne može uvek +1**
možemo brojati zauvek	29	2
postoji kraj brojanju	9	2

Tabela 2: Ukrštanje odgovora učenika na 4. i 5. pitanje.

Dakle, skoro tri četvrtine učenika je dalo konzistentne odgovore: da možemo brojati zauvek i svakom broju dodati 1 (69%) ili da postoji kraj brojanju i broj toliko velik da ne može da mu se doda 1 (5%).

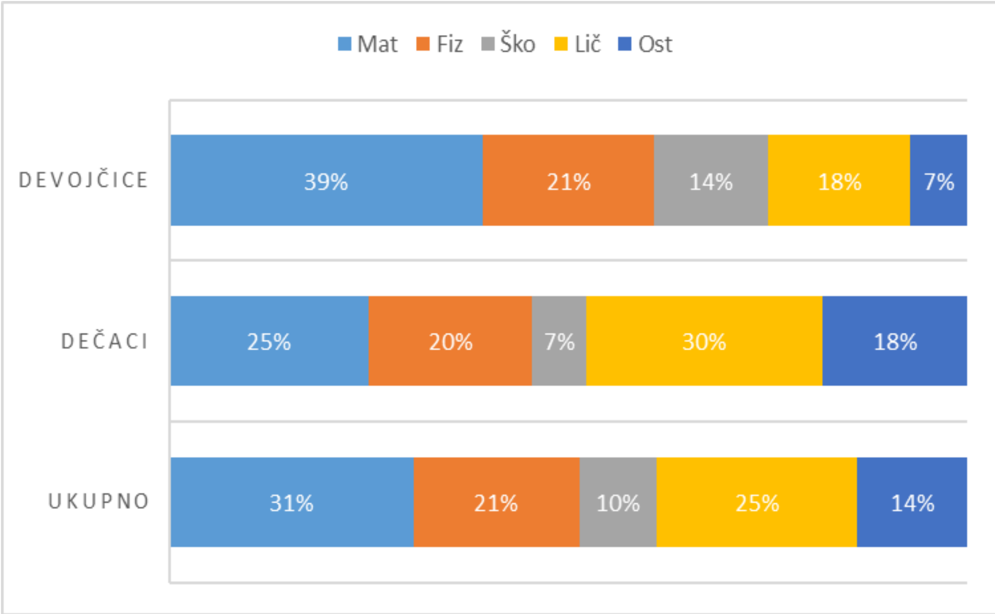
Sedmi i osmi razred

1. pitanje: NAPIŠI JEDNU REČENICU U KOJOJ ĆEŠ UPOTREBITI REČ BESKONAČNO.

Na ovo pitanje odgovorilo je 72 učenika. Pitanje je bilo otvorenog tipa, kako bi se učeniku omogućilo da zaista stavi reč „beskonačno“ u kontekst koji mu je najbliži ili najsmisleniji. Nakon analize dobijenih odgovora, pristupilo se kodiranju odgovora na osnovu sadržaja rečenica koje su učenici napisali. Dobijeno je pet grupa odgovora.

KOD	OPIS	PRIMER
Mat	Rečenice se odnose na neke matematičke pojmove ili sadržaje.	– *Jedan zadatak može imati beskonačno mnogo rešenja.* – *Decimalni broj može imati beskonačno decimala.* – *Prava je linija bez kraja, tj. beskonačna je.*
Fiz	U rečenici su korišćene pojmovi iz realnog konteksta ili iz fizičkog sveta.	– *Svemir je beskonačan.* – *Ima beskonačno šuma u svetu.* – *Postoji beskonačan broj reči.* – *Nebo.*
Ško	Sadržaj rečenice obuhvata stav u vezi sa školskim životom.	– *Beskonačno ne volim časove od 60 minuta.* – *Beskonačno dugo ne bih išao na čas nemačkog.*
Lič	Rečenica sadrži neki lični stav, emociju ili iskustvo.	– *Ja do beskonačnosti ništa ne razumem zadatke.* – *Beskonačno ne znam nemački.* – *Moj IQ je veći od beskonačno.* – *Zahvalna sam svojim roditeljima beskonačno.*
Ost		– *Ja volim da sve bude beskonačno.* – *Perica želi da ima beskonačno slatkiša.*

Tabela 3: Kodiranje odgovora na zadatak „Napiši jednu rečenicu u kojoj ćeš upotrebiti reč beskonačno.“



Grafik 1: Distribucija odgovora na prvo pitanje.

Uočavamo da manje od $\frac{1}{3}$ učenika beskonačno prvo povezuje sa matematikom. Dosta je izraženo povezivanje sa realnim kontekstom (pogotovo sa fizikom), a četvrtina učenika beskonačno povezuje sa svojim emocijama ili stavom. Od 15 odgovora koji su uključivali neki lični stav ili osećanje, 7 odgovora je bilo u negativnom kontekstu, a 8 u pozitivnom. Zanimljivo je što su devojčice u većem procentu navele primere beskonačnosti iz matematike, dok su dečaci u većem procentu naveli rečenice koje sadrže emocije, stavove ili lična iskustva. Primeri iz matematike pokazuju da su učenici upoznati sa nekim nastavnim sadržajima koji uključuju beskonačnost, odnosno da su se tokom osnovne škole kroz obradu gradiva susreli sa ovim konceptom.

Čini se da se učenicima dopalo prvo pitanje, jer su odgovori bili raznoliki, interesantni i veoma kreativni. Izdvojila bih jedan matematički: *„Postoji beskonačno mnogo brojeva, pa ni Čak Noris ne može brojati do kraja.“*

2. pitanje: OPIŠI ŠTA ZA TEBE ZNAČI BESKONAČNOST.

Na drugo otvoreno pitanje odgovorilo je 74 učenika. Analizom njihovih odgovora uočava se da dominira odgovor (47 učenika, 64%) u kojem se beskonačnost definiše preko same reči, tj. da to znači da nešto nema kraja, dok je preostalih 27 učenika dalo dosta raznovrsne odgovore.

Primeri prve grupe odgovora su:

- *Nešto što ne može da se završi.*
- *Beskonačno znači nešto što nema kraj.*
- *„Broj“ kojim se iskazuju vrednosti bez kraja.*
- *Pa... nešto što nema kraj, logično.*

Primeri iz druge grupe odgovora su:

- *Za mene beskonačno ne znači ništa, jer beskonačnog nema.*
- *Beskonačno znači za mene kada ima jako mnogo nečega i ne želiš da brojiš pa kažeš beskonačno.*
- *Kada imamo nečeg beskonačno, znači da se ne može istrošiti.*
- *Beskonačnost je za mene neograničenost.*

REZULTATI ZADATAKA SA BESKONAČNIM SKUPOVIMA

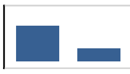
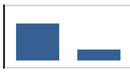
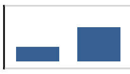
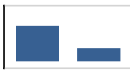
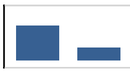
	ZADATAK/TVRDNJA	TAČNO		NETAČNO		
1a	Skup svih parnih prirodnih brojeva je beskonačan.	58	73.4%	21	26.6%	
1b	$\{1,3,5,\dots\}$ je beskonačan.	61	77.2%	18	22.8%	
1v	Skup delilaca broja 24 je beskonačan.	59	74.7%	20	25.3%	
1g	Skup sadržalaca broja 8 je beskonačan.	37	46.8%	42	53.2%	
1d	Skup prirodnih brojeva koji su rešenje jednačine $x > 4$ je beskonačan.	47	59.5%	32	40.5%	
1đ	Skup prirodnih brojeva koji su rešenje jednačine $x < 4$ je beskonačan.	47	59.5%	32	40.5%	
1e	Skup racionalnih brojeva između 0 i 1 je beskonačan.	25	31.6%	54	68.4%	
1ž	Skup tačaka duži AB je beskonačan.	33	41.8%	46	58.2%	
2	Upoređivanje skupova $A = \{1,2,3,\dots\}$ i $B = \{2,4,6,\dots\}$	59	74.7%	20	25.3%	
3	Upoređivanje skupova racionalnih brojeva između 1 i 2 i između 2 i 3.	46	58.2%	33	41.8%	
4	Upoređivanje skupa tačaka duži AB i AC.	59	74.7%	20	25.3%	

Tabela 4: Rezultati po svim zadacima.

Što se tiče zadatka 1, u prva tri slučaja (1a, 1b i 1v) učenici su dali najviše tačnih odgovora. Pozitivno iznenađenje je što je u zadatku 2 tačan odgovor dalo skoro $\frac{3}{4}$ učenika. Sa druge strane, ima izuzetno mnogo netačnih odgovora na pitanje 1g, što može biti rezultat jedino nepoznavanja pojma sadržaoca broja. Primetimo, najmanje tačnih odgovora učenici su dali na pitanja 1e i 1ž, odnosno, više od polovine učenika je dalo netačan odgovor. To nam sugeriše da učenici, nažalost, nisu dovoljno upoznati sa konceptom beskonačnosti i prirodom veoma važnih matematičkih pojmova, koje su učili u školi i koje često koriste.

Evo još nekih opažanja koja se dobijaju ukrštanjem obeležja:

☻ Iako je broj učenika koji su tačno odgovorili na pitanja 1a i 1b podjednak i blizu $\frac{3}{4}$ učenika, tačan odgovor na oba pitanja dao je 41 učenik, dok su preostali učenici davali tačan odgovor na samo jedno od posmatrana dva pitanja.

☻ Ako posmatramo pitanja vezana za sadržioce (1v) i delioce (1g), 29 učenika je tačno odgovorilo na oba.

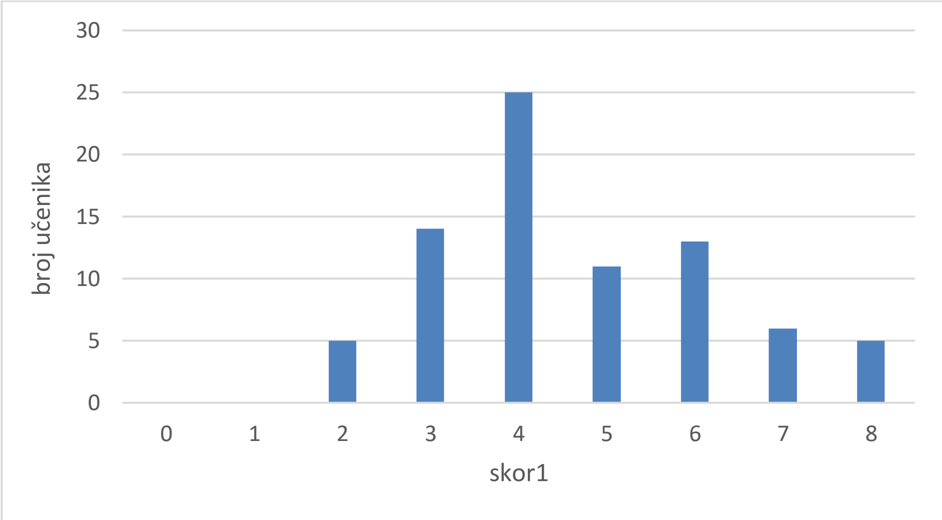
☻ Iako je na svako od pitanja vezana za rešavanje nejednačine u skupu prirodnih brojeva, 1d i 1đ, bilo 47 tačnih odgovora, broj učenika koji su tačno odgovorili na oba pitanja je znatno manji i iznosi 31 učenik.

Za potrebe dodatne analize urađeno je skoringovanje postignuća svakog učenika. Svaki zadatak iz tabele je vrednovan sa 1 poenom ako je odgovor tačan i sa 0 ako je netačan. Napravljenja su tri skora:

skor1 – zbir poena na pitanja iz prvog zadatka (1a-1ž)
skor2 – zbir poena na pitanja 2, 3 i 4
skor – ukupan zbir poena na svim zadacima

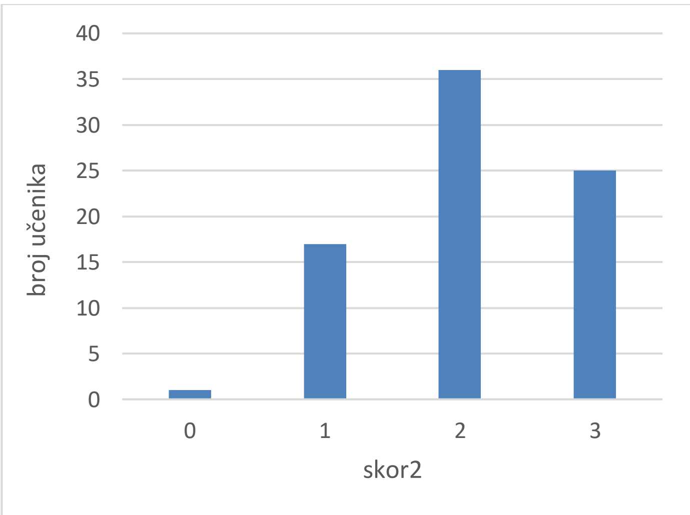
Raspodele i osnovne karakteristike svakog skora date su u nastavku.

Skor1: Najviše učenika osvojilo je 4 od mogućih 8 poena (32%), dok 0 i 1 poen nije osvojio nijedan učenik. Tačan odgovor na svih osam pitanja dalo je 5 učenika (grafik 3). Prosečan broj poena po učeniku iznosi 4.6 sa standardnim odstupanjem 1.6.



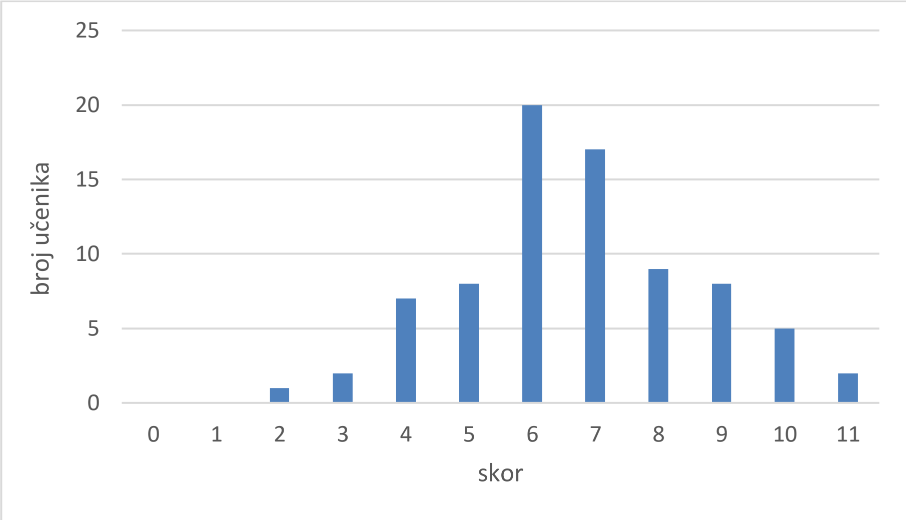
Grafik 2: Postignuća učenika na zadatku 1.

Skor2: Najviše učenika je tačno rešilo dva zadatka, njih 36, dok jedan učenik nije dao tačan odgovor ni na jedno od tri pitanja. Prosečan broj poena po učeniku iznosi 2.1 sa standardnim odstupanjem 0.8.



Grafik 3: Skor učenika na zadacima 2, 3 i 4.

Skor: Najviše učenika osvojilo je 6 ili 7 poena od mogućih 11 poena (46.8%), dok 0 i 1 poen nije osvojio nijedan učenik. Tačan odgovor na svih 11 pitanja dala su dva učenika, grafik 5. Prosečan broj poena po učeniku iznosi 6.7 sa standardnim odstupanjem 1.9.

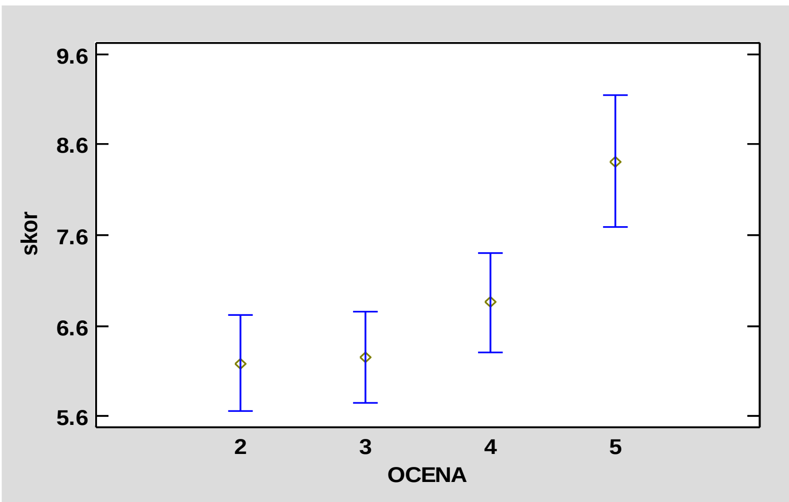


Grafik 4: Ukupan skor učenika.

Učenici osmog razreda su postigli nešto bolji rezultat (prosečni skor je 7.0, SD=1.9) u odnosu na sedmi razred (skor je 6.4, SD=1.9), ali razlika nije statistički značajna.

Prosečno postignuće dečaka je 6.75, SD=1.8, a devojčica 6.67, SD=2.1, i ne postoji značajna razlika.

Statistički značajna razlika uočena je samo u odnosu na ocenu koju učenik ima iz predmeta matematika. Najbolje su uradili učenici koji imaju ocenu 5 iz matematike i osvojili su u proseku 8.4 poena, SD=2.0. Učenici sa dvojkom i trojkom uradili su slabije i osvojili 6.2, dok su učenici sa četvorkom osvojili prosečno 6.9 poena. Statistički značajna razlika je potvrđena između učenika koji imaju peticu i učenika koji imaju ostale ocene, grafik 6.



Grafik 5: LSD intervala poena u odnosu na ocenu iz matematike.

Poslednji deo u upitniku/testu odnosio se na samoprocenu. Učenici su odgovarali koliko su sigurni u svoje odgovore na zadatke. Najveći broj učenika, njih 39, odgovorilo je da „ne zna koliko je sigurno u date odgovore“, dok je njih 26 odgovorilo da nije sigurno. Samo 14 učenika (18%) je odgovorilo da je sigurno da su njihovi odgovori tačni. Ovakvi odgovori učenika mogu ukazati na to da su postavljena pitanja/zadaci učenicima nepoznati i u velikoj meri nisu uopšte sigurni u svoje znanje. Što se tiče postignuća, učenici koji su odgovorili da su sigurni u tačnost svojih odgovora su ostvarili 6.6, SD=2,2, učenici koji nisu sigurni 6.2, SD=1.7, a učenici koji ne znaju koliko su sigurni 7.1, SD=1,9.

NAJTEŽE I NAJLAKŠE IZ MATEMATIKE

Učenici su takođe zamoljeni da odgovore na pitanja šta im je najteže, a šta najlakše iz matematike. Ponovo su otvorena pitanja omogućila učenicima da iznesu svoje mišljenje bez ograničenja. Na taj način su dobijeni veoma raznoliki odgovori, koji ipak u značajnoj meri otkrivaju nekoliko zanimljivih činjenica.

Za kodiranje odgovora iskorišćeni su obrazovni standardi za nastavni predmet matematike za kraj osnovne škole. U ovim standardima matematika je podeljena u pet oblasti:

- BROJEVI I OPERACIJE SA NJIMA
- ALGEBRA I FUNKCIJE
- GEOMETRIJA
- MERENJE
- OBRADA PODATAKA

Ove oblasti su iskorišćene za kodiranje odgovora. Naime, učenici su u opisu najtežeg ili najlakšeg koristili sadržaje matematatike. Interesantno je primetiti da sadržaji na koje su učenici ukazivali pripadaju prvim trima oblastima, dok se sadržaji iz merenja i obrade podataka ne pominju ni u jednom odgovoru. Jedan od razloga ovakvih rezultata može biti taj što ove oblasti nisu u dovoljnoj meri obuhvaćene važećim programom i vrlo malo su zastupljene u postojećim udžbenicima. Sa druge strane, odgovarajuća znanja i veštine upotrebljavaju se u svakodnevnom životu, pa ih učenici često i ne povezuju sa gradivom predmeta matematike.

3. pitanje: ŠTA TI JE NAJTEŽE IZ MATEMATIKE?

Analiza 75 dobijenih odgovora ukazuje na značajnu razliku u definisanju stava. Jedna grupa učenika je konkretizovala svoj odgovor kroz navođenje tačno određene oblasti, čak i lekcije, dok je druga grupa davala znatno opštiji odgovor. Za kodiranje odgovora definisano je šest grupa, tabela 3.

KOD	OPIS	PRIMER
Broj	Sadržaji obuhvaćeni standardima iz brojeva i operacije sa njima	– *Razlomci.* – *Veliki brojevi u dugačkim zadacima.*
Alg	Sadržaji obuhvaćeni standardima iz algebre i funkcija.	– *Polinomi, binomi.* – *Nejednačine.*
Geo	Sadržaji obuhvaćeni standardima iz geometrije.	– *Geometrija.* – *Diedar.* – *Pitagorina teorema.*
Sve	Sve u celosti ili većem delu.	– *Sve.* – *Ceo 7. razred.*
Lič	Neki oblik ličnog iskustva.	– *Stvari koje ne shvatim iz prve.* – *Kada izađem na tablu.*
Ost		– *Ništa, geometrija je dosadna, a ne teška.*

Tabela 5: Kodiranje odgovora na pitanje „Šta ti je najteže iz matematike?“

Čak 22 učenika (29%) je izjavilo da im je sve teško. Jednu ili više konkretnih oblasti matematike navelo je 43 učenika (57%), dok je preostalih 10 učenika navelo ili neko lično iskustvo ili nešto drugo. Nešto više od 30% učenika (23 učenika) u odgovoru je navelo neki sadržaj iz algebre, dok je 27% (20 učenika) navelo neki sadržaj iz geometrije. Sadržaj iz prve oblasti, tj. brojeva, navelo je 7 učenika (9%).

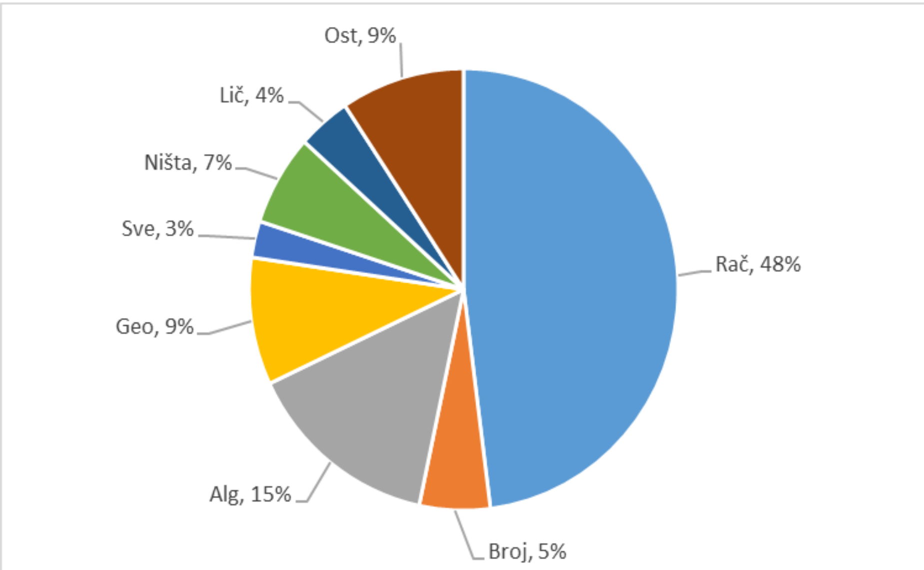
Možda je iznenađujući podatak da su odgovori iz kategorije „Sve“ podjednako davali učenici bez obzira na ocenu iz matematike. Tako je 6 učenika od 19 koji imaju ocenu dva iz matematike navelo da im je sve teško, 7 od 23 učenika sa ocenom tri je dalo isti odgovor, među 21 učenikom sa četvorkom iz matematike njih 5 je reklo da je sve najteže, a od 12 učenika sa najvećom ocenom iz matematike, čak trećina (njih 4) se izjasnilo da im je sve teško. Ovo nam ukazuje da učenici, generalno, imaju teškoće u savladavanju matematike i da mnogi, čak i oni sa najboljim ocenama, ne razumeju u potpunosti gradivo koje uče za potrebe ocenjivanja.

4. pitanje: ŠTA TI JE NAJLAKŠE IZ MATEMATIKE?

Analiza 75 odgovora ukazala je na to da se jedan odgovor pojavljuje veoma često, a odnosi se na osnovne računske operacije. Takođe se, za razliku od najtežeg u matematici, sada pojavio u značajnom obimu i odgovor ništa. Odgovori su svrstani u osam grupa datih u tabeli 4.

KOD	OPIS	PRIMER
Rač	U odgovoru dominaraju četiri osnovne računske operacije.	– *Brojanje, sabiranje i oduzimanje.* – *Množenje sa 10.* – *2+2.*
Broj	Sadržaji obuhvaćeni standardima iz brojeva i operacije sa njima	– *Razlomci.* – *Proporcija.*
Alg	Sadržaji obuhvaćeni standardima iz algebre i funkcija.	– *Jednačine i nejednačine.* – *Brojevni izrazi.*
Geo	Sadržaji obuhvaćeni standardima iz geometrije.	– *Geometrija.* – *Crtanje geometrije.*
Sve	Sve u celosti ili većem delu.	– *Dosta toga.* – *Sve osim par izuzetaka kojih se ne mogu setiti.*
Ništa		– *Ništa.*
Lič	Neki oblik ličnog iskustva.	– *Lako je sve ako se pre toga objasni.* – *Zadaci koji su za 2 ili 3-.*
Ost		– *Računski zadaci.*

Tabela 6: Kodiranje odgovora na pitanje „Šta ti je najlakše iz matematike?“



Grafik 6: Distribucija odgovora na pitanje „Šta ti je najlakše iz matematike?“

Ova pitanja nam zapravo ne otkrivaju ništa o beskonačnosti, već samo o stavovima učenika prema predmetu matematici. Opšte je poznato da učenici imaju predrasude i, često, psihičku barijeru koja im onemogućava da se u potpunosti prepuste razmišljanju o matematičkim problemima. To je delimično posledica organizacije nastavnog procesa. Osim toga, učenici nisu svesni matematičkog znanja koje upotrebljavaju u svakodnevnom životu, izuzev računanja. Takođe, osnovne računske operacije tokom života najviše koriste i uvežbavaju, stoga im one postaju rutinske i lake.

Ključni nalazi

Čini se da učenici prvog razreda (uzrast 6-8 godina) imaju prilično dobru intuiciju o beskonačnosti. Kod većine je prisutna logička povezanost među odgovorima. Većina smatra da ne postoji kraj brojanju, kao i da svakom broju možemo da dodamo 1. Ovi rezultati treba da motivišu učitelje i nastavnike da posvete posebnu pažnju pri obradi tema koje uključuju beskonačnost, kao i da neguju interesovanje i ispravno rezonovanje koje deca imaju na početku školovanja.

Kod učenika sedmog i osmog razreda, situacija nije toliko povoljna. Iako je u zadacima oko $\frac{3}{4}$ učenika svrstalo skupove parnih i neparnih prirodnih brojeva među beskonačne, jedva polovina je dala tačan odgovor za oba pomenuta skupa, iako se čini da bi učenici završnih razreda osnovne škole trebalo da budu sigurni u osobinu beskonačnosti datih skupova. Veći broj tačnih odgovora dat je za skup neparnih brojeva, zadat nabrajanjem elemenata, dok je skup parnih brojeva bio zapisan rečima. To nam ukazuje na ulogu reprezentacije, što se slaže sa rezultatima iz [19].

Iako se činilo da će u zadatku sa nejednačinom $x < 4$ učenici imati više problema nego sa $x > 4$ (jer se traži presek skupa rešenja sa skupom prirodnih brojeva, što u prvom slučaju utiče na kardinalnost), procenat tačnih odgovora je bio identičan. Međutim, ispod 40% učenika je tačno odgovorilo na oba pitanja.

Zabrinjavajuć je podatak da, iako se sadržalac broja čini jednim od jednostavnijih pojmova u matematici i uči već u petom razredu, na pitanje beskonačnosti skupa datog broja više od polovine učenika je odgovorilo netačno. Pored toga, veliki broj njih ne zna da duž sadrži beskonačno mnogo tačaka, kao i da u proizvoljnom brojevnom intervalu postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Mogući uzrok ovakvih rezultata leži u načinu na koji se informacije prezentuju učenicima. Nastavnici, uglavnom, pri uvođenju pomenutih skupova, napomenu činjenicu da su oni beskonačni, ali retko izvedu dokaz ili stimulišu učenike da sami dođu do tog zaključka. Učenici ovakve informacije pamte trenutno, ali, kako nikada nisu razumeli niti detaljnije razmišljali o ovoj osobini i njenim posledicama, nakon nekog vremena informaciju koju su čuli zaborave, a ne budu u stanju da samostalno ispravno prosude o jednom tako složenom konceptu.

Što se tiče upoređivanja skupova, učenici su bolje odgovore dali na drugo, nego na treće pitanje (Tabela 4). Razlog je verovatno što se skupovi u drugom zadatku odnose na prirodne brojeve i dati su nabrajanjem prvih nekoliko elemenata. Tri tačkice koje slede za učenike sugerišu da se radi o beskonačnom skupovima, te su na osnovu beskonačnosti oba skupa zaključili da oni imaju isti broj elemenata. Kako nisu zahtevana obrazloženja odabranih odgovora, ne možemo znati da li je neki od učenika koristio bijekciju kao metod za upoređivanje dva skupa. U trećem zadatku radilo se o skupovima racionalnih brojeva, datih u verbalnoj reprezentaciji, koja se u istraživanju [19] pokazala kao najproblematičnija. Kako je više od polovine učenika imalo poteškoće da prepozna beskonačnost ovih skupova, a procenat tačnih odgovora na ovo pitanje je bliži 60%, vrlo je moguće da učenici u svom rezonovanju nisu koristili koncept beskonačnosti, već su prosto zaključili da, kako su 1 i 2, kao i 2 i 3, uzastopni prirodni brojevi, između prva dva i druga dva mora biti jednak broj racionalnih brojeva, koliko god on iznosio. Četvrti zadatak, koji se odnosio na upoređivanje duži AB i AC, gde je raspored tačaka na pravoj greškom bio A-B-C, nije zahtevao poznavanje i korišćenje osobine beskonačnosti skupa tačaka duži, ali i pored toga je četvrtina učenika dala pogrešan odgovor. To nam sugeriše ili da ga učenici nisu ozbiljno pročitali i shvatili ili da im je bio previše lak, pa su pomislili da postoji „trik“ i zbog toga izabrali nelogičan odgovor.

Za razliku od rezultata koji su dobijeni u istraživanjima predstavljenim u [2], tj. [4], u istraživanju koje smo sproveli među učenicima sedmog i osmog razreda, nije se pojavila značajna razlika između postignuća dečaka i devojčica. Dečaci su postigli neznatno bolje rezultate. Što se tiče postignuća po uzrastu, učenici osmog razreda u proseku su dali više tačnih odgovora od učenika sedmog razreda, ali razlika nije statistički značajna. To nam govori da ne postoji napredak u razumevanju koncepta beskonačnosti u toku školovanja. U odnosu na ocenu iz matematike, ispostavlja se da statistički značajna razlika između prosečnog broja osvojenih bodova postoji između učenika koji imaju zaključenu ocenu pet i učenika sa svim ostalim ocenama. S obzirom na to da su se u zadacima u upitniku pojavljivali isključivo matematički pojmovi učeni u školi, očekivano je bilo da se učenici sa boljim ocenama iz matematike bolje snađu u problemskim zadacima koji uključuju iste, te čudi da ne postoji značajna razlika i između učenika sa ostalim ocenama.

Generalni utisak je da učenici tokom školovanja bivaju naučeni da matematiku uče šablonski, za ocenu, često napamet, bez udubljivanja i razmišljanja. Deca mlađeg uzrasta imaju dobru intuiciju o konceptu beskonačnosti, žele da uče, istražuju i saznaju sve o svetu oko sebe, ali ih tradicionalna nastava sputava u tome i oni vremenom gube interesovanje za ovaj vid učenja. Zaključak koji se može izvući je da bi aspekti povezani sa beskonačnošću trebalo da budu deo obuke vrlo rano, pri učenju pojmova. Pri tome, ne misli se da bi trebalo da budu deo formalnog nastavnog plana i programa, jer u ovom slučaju svaki pokušaj formalizacije nosi sa sobom rizik od pojave zabluda, koje je kasnije teško ispraviti; naprotiv, pristup mora da uzme primere iz različitih konteksta i naglasi više perspektiva, van matematike. Potrebne su mnoge mere predostrožnosti, jer se, s jedne strane, beskonačnost može definisati i objasniti samo uz pomoć brojeva i geometrijskih figura, a sa druge strane, zamka paradoksa uvek je blizu kada se bavimo beskonačnim skupovima. Ako uzmemo u obzir nedavna istraživanja uma i mozga, postoji uska veza između prirodnih predispozicija-intuicija i procesa učenja, koji obnavljaju veze i strukture. Iz ove perspektive, poučavanje treba da naglasi specifične aspekte procesne i topološke prirode, koji ne samo da doprinose boljem razumevanju matematičkih osnovnih predmeta, već razvijaju i opšte kvalitete mišljenja.

Istraživanje pokazuje da bi bilo korisno omogućiti učiteljima i nastavnicima dodatna saznanja o ovoj temi, kako bi im se ukazalo na probleme koje učenici imaju u razumevanju koncepta beskonačnosti i kako bi posvetili dodatnu pažnju obradi gradiva koje ga uključuje i, samim tim, unapredili nastavu matematike.

IV PREDLOG NASTAVNIH AKTIVNOSTI

Na profesorima je da dobrom i zanimljivom organizacijom časa više motivišu i podstaknu učenike na razmišljanje o beskonačnosti. U ovom delu rada biće predstavljena jedna ideja koja se može sprovesti kod učenja pojma NZS.

NZS je skraćenica od tri slova i svako ima svoje značenje. S – sadržalac, Z – zajednički, N – najmanji. U okviru ove aktivnosti želimo da, ponavljajući i uvežbavajući prethodno naučeno gradivo o sadržaocima (S) i zajedničkim sadržaocima brojeva (ZS), kroz aktivno uključivanje učenika u nastavu, pokušamo da izvedemo zaključke i uvedemo novi pojam, pojam najmanjeg zajedničkog sadržaoca (NZS).

Za početak, učenicima podelimo papiriće, svakom po jedan, na kome će da zapisuju rešenja svojih zadataka. Podelimo učenike u 4 grupe po 3 člana. Svaka grupa ima zadatak da odredi skup sadržalaca jednog broja. Neka, u ovom slučaju, prva grupa određuje skup sadržalaca broja 2, druga grupa skup sadržalaca broja 3, treća broja 4 i četvrta broja 6. Svaki učenik iz grupe mora da zapiše rešenje zadatka svoje grupe na svoj papirić.

- rešenje učenika koji su dobili zadatak da odrede skup sadržalaca broja 2 treba da bude $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, \dots\}$
- rešenje učenika koji su dobili zadatak da odrede skup sadržalaca broja 3 treba da bude $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, \dots\}$
- rešenje učenika koji su dobili zadatak da odrede skup sadržalaca broja 4 treba da bude $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, \dots\}$
- rešenje učenika koji su dobili zadatak da odrede skup sadržalaca broja 6 treba da bude $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$

Na ovaj način učenici „određuju“ slovo S, tj. pronalaze skup sadržalaca. Trebalo bi da uoče da sadržalaca nekog broja ima beskonačno mnogo.

Sada uparujemo učenike iz različitih grupa, tj. pravimo parove učenika gde je svaki doneo po jedan skup sadržalaca (uzimamo učenika koji je bio u grupi sa brojem 2 i učenika koji je bio u grupi sa brojem 3, učenika iz grupe sa brojem 2 i učenika iz grupe sa brojem 6 itd.). Sada svaki par učenika treba da napravi presek dva skupa koja imaju na svojim papirićima.

- rešenje para učenika iz grupe 2 i grupe 3 treba da bude: $\{6, 12, 18, 24, 30, 36 \ldots\}$
- rešenje para učenika iz grupe 2 i grupe 4 treba da bude: $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \ 36, 40, \ldots\}$
- rešenje para učenika iz grupe 2 i grupe 6 treba da bude: $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$
- rešenje para učenika iz grupe 3 i grupe 4 treba da bude: $\{12, 24, 36, \ldots\}$
- rešenje para učenika iz grupe 3 i grupe 6 treba da bude: $\{6, 12, 18, 24, 30, 36 \ldots\}$
- rešenje para učenika iz grupe 4 i grupe 6 treba da bude: $\{12, 24, 36, \ldots\}$

Na taj način učenici „određuju“ slovo Z, tj. prave skup zajedničkih sadržalaca za dva broja. Trebalo bi da uoče da i zajedničkih sadržalaca dva broja ima beskonačno.

Konačno, u tako dobijenom skupu zajedničkih sadržalaca, koji predstavlja presek skupova dobijenih u prvom zadatku, učenici traže najmanji broj, odnosno „određuju“ slovo N.

- konačno rešenje para učenika iz grupe 2 i grupe 3 treba da bude: 6
- konačno rešenje para učenika iz grupe 2 i grupe 4 treba da bude: 4
- konačno rešenje para učenika iz grupe 2 i grupe 6 treba da bude: 6
- konačno rešenje para učenika iz grupe 3 i grupe 4 treba da bude: 12
- konačno rešenje para učenika iz grupe 3 i grupe 6 treba da bude: 6
- konačno rešenje para učenika iz grupe 4 i grupe 6 treba da bude: 12

Sada je svaki par pronašao NZS za dva broja koja je svako od njih dobio u prvom zadatku. Trebalo bi da uoče da im je je preostao samo jedan broj.

Na ovaj način učenici mogu da usvoje šta znači NZS i odrede ga koristeći isključivo značenje skraćenice i prethodno stečeno znanje o sadržaocima broja i preseku skupova. Potpuno isti princip može da se odredi kod uvođenja pojma NZD i to pre nego što se odradi NZS.

Aktivnost se može modifikovati u zavisnosti od broja učenika i njihovih mogućnosti. Brojevi koje grupe dobijaju mogu da budu različiti i složeniji od navedenih. Analogan pristup može da se primeni i na traženje NZS više od dva broja, tj. da nakon prvog zadatka ne pravimo parove već trojke ili četvorke učenika, koji onda treba da odrede preseke tri ili četiri skupa sadržalaca.

Tek kada razumeju ovaj postupak pronalaženja NZS, ima smisla ukazati im na to da nema potrebe da uvek određujemo ove skupove. Naime, uviđamo da je u svim slučajevima kao konačno rešenje dobijen jedan broj. Kako postupak koji smo koristili zahteva dosta vremena, sada je trenutak da im prezentujemo algoritam koji će im omogućiti efikasnije određivanje NZS. Dajemo im zadatak da ovaj algoritam primene na svoje brojeve iz prethodnog zadatka i zaključe da će dobiti isto rešenje.

Zaključak

Beskonačnost je jedan od najvažnijih, ali istovremeno i najmisterioznijih koncepata u matematici. Označava nešto što je beskrajno, bezgranično. On nije iskustven – ne možemo ga videti, opipati niti na bilo koji drugi čulni način spoznati. Obrađuje se isključivo misaonim metodama. Pojavljuje se u različitim kontekstima. Nisu sve beskonačnosti iste. Postoje beskonačno male i beskonačno velike veličine, koje, jasno, nisu međusobno jednake. Ni sve beskonačno male, kao ni sve beskonačno velike veličine, nisu međusobno jednake. Mnoge intuitivne ideje koje funkcionišu u radu sa „normalnim“ brojevima ovde ne važe, a umesto toga se javlja gomila očiglednih paradoksa.

Sa beskonačnošću se susrećemo na časovima matematike, a kasnije saznajemo da se ona koristi i u okviru drugih nauka. Beskonačnost, a posebno njena vremenska verzija – večnost, igra značajnu ulogu u velikom delu religioznog mišljenja. To je standardna tema u filozofiji. Zaintrigirala je umetnike i naučnike. Zvuči impresivno to što možete da joj pripišete svakakva svojstva i niko ne može da vam dokaže da niste u pravu ako vam je logika ispravna. Reč je o fascinantnom konceptu, prepunom suptilnosti, logičkih zamki, zagonetki i paradoksa. Jedan od najvećih paradoksa beskonačnosti jeste taj što se pokazala izuzetno korisnom. Matematičarima je veoma teško da stignu bilo gde bez beskonačnosti, čak i u oblastima koje se bave konačnim skupovima objekata.

Koncept beskonačnosti predstavlja jednu od najvažnijih apstrakcija koje bi trebalo da savladaju učenici osnovne škole. Kako je ovaj koncept veoma zahtevan, izuzetno je važno prilagoditi podučavanje mogućnostima apstrakcije koje učenici poseduju. Deca već u ranom uzrastu, pre polaska u školu, sreću ovaj pojam i počinju da razvijaju model beskonačnosti. Polaskom u školu, započinje formalno matematičko obrazovanje, koje podrazumeva razvoj logičkog i apstraktnog mišljenja kod učenika.

Kao što smo mogli da vidimo kroz analizu, beskonačnost se, implicitno ili eksplicitno, često pojavljuje u udžbenicima za osnovnu školu, naročito u višim razredima, kada se i razvija apstraktno mišljenje kod učenika. Međutim, ovaj koncept se formalno ne uvodi, a pristupi koji se koriste često mogu da dovedu do zabune kod učenika.

Sprovedeno istraživanje je pokazalo da učenici prvog razreda imaju veoma dobru intuiciju o beskonačnosti (prirodnih brojeva). Sa druge strane, zaključili smo da mnogo učenika završnih razreda osnovne škole ima problem sa određivanjem i upoređivanjem beskonačnih skupova, što je verovatno rezultat načina obrade pojmova koji ga uključuju. Uloga i pristup nastavnika je ključan za razumevanje koncepta beskonačnosti od strane učenika.

Istorijski razvoj shvatanja beskonačnosti nam ukazuje na probleme sa kojima se suočavaju i učenici prilikom razvoja sopstvenog razumevanja ovog koncepta. Problemi sa kojima su se suočavali mislioci i matematičari predstavljaju osnovu na kojoj se može izgraditi metodički put formiranja pojma beskonačnosti. Ovom pojmu bi se, u svakom slučaju, trebalo posvetiti više pažnje, naročito u periodu razvoja apstraktnog mišljenja, tačnije u višim razredima osnovne škole.

Za matematičare, beskonačnost je oduvek bila nadahnjujući, ali težak koncept. Stoga ne čudi što učenici imaju poteškoća sa razumevanjem istog. Do danas, otkriveno je mnogo toga o beskonačnosti, međutim, ne možemo reći da je ta tema zatvorena. Bez obzira na razvoj nauke u celini, uprkos velikim matematičkim otkrićima, beskonačnost će i dalje ostati jedna od najvećih inspiracija matematičara i drugih naučnika.

Literatura

[1] Cheung, P., Rubenson, M., & Barner, D. (2017). To infinity and beyond: Children generalize the successor function to all possible numbers years after learning to count. *Cognitive Psychology*, *92*, 22–36. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2016.11.002

[2] Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4*(2), 317–337. https://doi.org/10.5485/tmcs.2006.0129

[3] Montes, M., & Carrillo, J. (2016). What does it mean as a teacher to "know infinity" ? The case of convergence series To cite this version : HAL Id : hal-01289865 What does it mean as a teacher to "know infinity"? The case of convergence series.

[4] Pehkonen, E., Hannula, M. S., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Infinity of Numbers: How Students Understand It. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 345–352.

[5] Singer, F. M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *Journal of Mathematical Behavior*, *27*(3), 188–205. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.06.001

[6] Trninic, D., Wagner, R., & Kapur, M. (2018). Rethinking failure in mathematics education: A historical appeal. *Thinking Skills and Creativity*, *30*(July 2017), 76–89. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2018.03.008

[7] Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, *21*(5), 676–685. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.03.005

[8] Wijeratne, C., & Zazkis, R. (2016). Exploring conceptions of infinity via super-tasks: A case of Thomson's Lamp and Green Alien. *Journal of Mathematical Behavior*, *42*, 127–134. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.04.001

[9] Wistedt, I., & Martinsson, M. (1996). Orchestrating a mathematical theme: Eleven-year olds discuss the problem of infinity. *Learning and Instruction*, *6*(2), 173–185. https://doi.org/10.1016/0959-4752(96)00001-1

[10] Yopp, D. A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality 0.999...=1. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(4), 304–318. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.07.007

[11] Suljić, M. (2015). O beskonačnosti kroz istoriju, *Zimska škola matematike, JU „Gimnazija Lukavac“, Lukavac, Bosna i Hercegovina*, http://www.gimnazijalukavac.com.ba/dokumenti/SmBeskonacnost.pdf.

[12] https://mathigon.org/world/Infinity

[13] https://elementarium.cpn.rs/teme/beskonanost/

[14] https://www.mathsisfun.com/numbers/infinity.html

[15] https://www.alumni.cam.ac.uk/news/beyond-number-the-role-of-infinity-in-understanding-the-universe

[16] http://srednjeskole.edukacija.rs/zanimljiva-matematika/najveci-brojevi-u-matematici

[17] Mihajlović, A., & Ristić, V. (2014). Concept of infinity – historical view and young learners' understanding of the concept/Pojam beskonačnosti – Istorijski osvrt i shvatanja učenika mladjeg školskog uzrasta. https://learning.blogs.nytimes.com/2013/01/30/teaching-the-mathematics-of-infinity/

[18] Kolar, V. M., Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concepts of infinity. *Educational studies in Mathematics*, Vol. 80, 389–412.

[19] Kattou, M., Michael, T., Kontoyianni, K., Christou, C., & Philippou, G. (2009). Teachers' perceptions about infinity: a process or an object?, *Department of Education, University of Cyprus. Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010*

[20] Štivić, M. (2015). Pojam beskonačnosti i limesa u nastavi matematike, *Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek.*

[21] https://www.gresham.ac.uk/lectures-and-events/cantors-infinities

[22] Cucić, D. (2006). Paradox in physics, the consistency of inconsistency. *6th International Conference of the Balkan Physical Union BPU6, Istanbul – Turkey 22-26. August 2006.*

[23] https://dms.rs/wp-content/uploads/2019/02/17-Misterije-beskonacnosti.pdf

[24] https://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/#ParMot

[25] Stewart, I. (2017). Infinity: A Very Short Introduction (Very Short Introductions), *1st Edition, Oxford University Press.*

[26] Hannula, M. S., Laine, A., Pehkonen, E., & Kaasila, R. (2012). Learning density of numbers in elementary teacher education. *In G. H. Gunnarsdóttir, F. Hreinsdóttir, G. Pálsdóttir, M. S. Hannula, M. Hannula-Sormunen, & E. Jablonka (Eds.), Proceedings of NORMA 11: The Sixth Conference on Mathematics Education in Reykjavík, May 11.-14. 2011. Reykjavík: Háskólaútgáfan, University of Iceland Press.*

Prilozi

Upitnik za učenike prvog razreda

1. Koji je najveći broj koji znaš? ___________
2. Da li je to najveći broj koji postoji? ___________
3. Da li možeš da zamisliš veći broj? ___________
4. Ako krenem da brojim redom $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$, da li ću nekad doći do kraja ili mogu da brojim zauvek? ____
5. Ako zamislimo jako velik broj, da li uvek možemo da mu dodamo 1 i na taj način dobijemo još veći broj ili postoji neki broj koji je toliko velik da njemu ne možemo da dodamo 1? ____

- -

Cilj prva tri pitanja bio je da saznamo da li su deca svesna da postoje veći brojevi od njima poznatih, kao i koliki je opseg njihovog brojanja. Četvrto i peto pitanje odnosilo se na intuitivno mišljenje o beskonačnosti prirodnih brojeva.

Upitnik za učenike sedmog i osmog razreda

OTVORENA PITANJA

1. Napiši jednu rečenicu u kojoj ćeš upotrebiti reč beskonačno.

   ____
2. Opiši šta za tebe znači beskonačnost.

   ____
3. Šta ti je najteže iz matematike?

   ____
4. Šta ti je najlakše iz matematike?

   ____

ZADACI

1. Pored svakog skupa zaokruži DA ako je skup beskonačan, a NE ako skup nije beskonačan.

   - skup svih parnih prirodnih brojeva DA NE
   - $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ DA NE

- skup delilaca broja 24	DA	NE
- skup sadržalaca broja 8	DA	NE
- skup prirodnih brojeva koji su rešenje nejednačine $x > 4$	DA	NE
- skup prirodnih brojeva koji su rešenje nejednačine $x < 4$	DA	NE
- skup racionalnih brojeva između 0 i 1	DA	NE
- skup tačaka duži AB	DA	NE

2. Data su dva skupa $\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3, ...\}$ i $\boldsymbol{B} = \{2, 4, 6, ...\}$. Zaokruži slovo ispred odgovora koji misliš da je tačan:

M. Skup $\boldsymbol{A}$ i skup $\boldsymbol{B}$ imaju isti broj elemenata.

N. Skup $\boldsymbol{B}$ ima više elemenata od skupa $\boldsymbol{A}$.

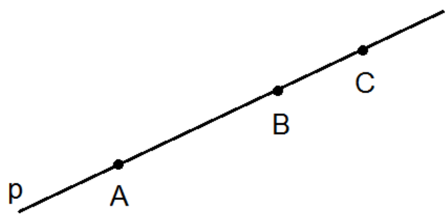
3. Skup $\boldsymbol{A}$ čine svi racionalni brojevi između brojeva 1 i 2, a skup $\boldsymbol{B}$ čine svi brojevi između 2 i 3. Zaokruži slovo ispred odgovora koji misliš da je tačan:

M. Skup $\boldsymbol{A}$ i skup $\boldsymbol{B}$ imaju isti broj elemenata.

N. Skup $\boldsymbol{B}$ ima više elemenata od skupa $\boldsymbol{A}$.

4. Na pravoj p date su tačke A, B i C. Da li je tačno da duž AB ima više tačaka od duži AC?

DA NE



<u>*SAMOPROCENA*</u>

Koliko si siguran-a da si tačno odgovorio-la na prethodna četiri zadatka? Zaokruži broj iznad odgovora.

1	2	3
nisam siguran-a	potpuno sam siguran-a	ne znam koliko sam siguran-a

- -

U okviru prva dva otvorena pitanja, želeli smo da otkrijemo ideje učenika o konceptu beskonačnosti i sa kojim kontekstom iz realnog života ga povezuju. Nije se zahtevalo da opisi i primeri budu povezani sa matematikom, niti je ispitivama njihova tačnost. Cilj druga dva pitanja bio je da otkrijemo stavove učenika prema gradivu matematike, a samim tim i predmetu. Osim toga, otvorena pitanja daju uvid u njihove komunikacione, odnosno sposobnosti izražavanja.

Nastavak upitnika odnosi se na beskonačnost u matematici. Prvi zadatak je za cilj imao prepoznavanje konačnosti, odnosno beskonačnosti različitih skupova, koji se uče tokom osnovne škole. Kroz ovaj zadatak, učenici je trebalo da se podsete poznatih pojmova, kao što su prirodni i racionalni brojevi, sadržaoci i delioci broja, nejednačine, duži, kao i njihovih osobina. U sklopu ostalih zadataka, pokušali smo da saznamo da li kod učenika postoji primarna intuicija za upoređivanje kardinalnosti beskonačnih skupova, zadatih u različitim reprezetntacijama.

Poslednje pitanje u upitniku odnosilo se na samoprocenu. Cilj je bio da učenici procene sopstevno znanje, odnosno da odrede koliko su sigurni u odgovore koje su prethodno dali.

Biografija

Maja Zavišić je rođena 1. jula 1995. godine u Subotici. Osnovnu školu „Jovan Jovanović Zmaj“ u Subotici završila je 2010. godine, kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Iste godine je upisala Gimnaziju „Svetozar Marković“ u Subotici, prirodno-matematički smer, koju je završila 2014. godine, takođe kao nosilac Vukove diplome. Nakon završetka srednje škole, upisala je osnovne akademske studije Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike, koje je završila u oktobru 2018. godine, sa prosečnom ocenom 9,15. Iste godine je upisala petu godinu integrisanih akademskih studija, smer Master profesor matematike, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Sve ispite predviđene planom i programom položila je u septembru 2019. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, 2020. Maja Zavišić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Maja Zavišić
AU

Mentor: dr Zorana Lužanin
MN

Naslov rada: Razumevanje koncepta beskonačnosti kod učenika osnovnih škola
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski i engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2020.
GO

Izdavac: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovica 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: 4/79/26/6/51/6/2
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Metodika matematike
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: koncept beskonačnosti, nastava matematike, osnovna škola, udžbenik za predmet matematike

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Tema ovog master rada je istraživanje razumevanja koncepta beskonačnosti u osnovnoj školi, kao jedne od najvažnijih apstrakcija koje bi učenici tebalo da savladaju. Glavni deo rada se sastoji iz četiri dela. U prvom delu prikazan je razvoj i opis koncepta beskonačnosti u matematici. U drugom delu data je analiza o uključivanju ovog koncepta u nastavu matematike u osnovnoj školi, posebno o predstavljanju u udžbenicima, kao i nekoliko publikovanih istraživanja o razumevanju beskonačnosti. U trećem delu dat je prikaz dva istraživanja sprovedena među učenicima I i VII/VIII razreda osnovne škole u Subotici, Srbija. U četvrtom delu predstavljena je jedna mogućnost obrade nastavne jedinice „Zajednički sadržalac i najmanji zajednički sadržalac".
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veca: 18.06.2020.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Đurđica Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzotet u Novom Sadu
Mentor:	dr Zorana Lužanin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Goran Radojev, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master’s thesis
CC

Author: Maja Zavišić
AU

Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D.
MN

Title: Understanding of the concept of infinity in elementary school
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian and English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2020
PY

Publisher: Author’s reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 4/79/26/6/51/6/2
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Teaching of mathematics
SD

Subject/Key words: concept of infinity, teaching mathematics, elementary school, classbook for the subject of mathematics
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The topic of this master's thesis is the research of understanding of the concept of infinity in primary school, as one of the most important abstractions that students should master. The main part of the thesis consists of four parts. The first part presents the development and description of the concept of infinity in mathematics. The second part provides an analysis of the inclusion of this concept in the teaching of mathematics in primary school, especially of its presentation in classbooks, as well as several published studies about the understanding of infinity. The third part presents two researches conducted among students of I and VII/VIII grade of elementary school in Subotica, Serbia. In the fourth part, one possibility of processing the teaching unit "Common multiple and least common multiple" is presented.
Accepted by the Scientific Board on: 18.06.2020.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Đurđica Takači, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor:	Zorana Lužanin, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Goran Radojev, Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad