UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Đorđe Jugović

Neki uzastopni razlomci i njihovi kombinatorni aspekti

Master rad

Mentor: Prof. dr Olga Bodroža – Pantić

Novi Sad, 2020.

Predgovor

Uzastopni razlomci pored svog neobičnog izgleda imaju niz zanimljivih osobina i primena. Najčešće primene su u teoriji brojeva i numeričkoj aproksimaciji. Jedna od takvih primena vezana za računanje sa transcedentnim funkcijama dovela je do prvog dokaza iracionalnosti broja π. Posebno je inspirativna veza ovih zanimljivih razlomaka sa nekim delovima kombinatorike kao što su permutacije i popločavanja.

Cilj ovog rada je predstavljanje nekih klasa uzastopnih razlomaka i veza koje ti razlomci imaju sa složivim i težinskim popločavanjima, kao i njihova zajednička primena u teoriji brojeva. Rad je podeljen u šest poglavlja.

Prva glava je uvodna i u njoj je dat istorijski osvrt na pojavu i razvoj teorije uzastopnih razlomaka i broja e. Pored toga, uvedeni su i osnovni pojmovi vezani za popločavanja n- trake.

U drugoj glavi definisani su konačni i beskonačni uzastopni razlomci kao i specijalna klasa i jednih i drugih, jednostavni razlomci. Dokazano je da se svaki racionalan broj može prikazati u obliku konačnog jednostavnog uzastopnog razlomka na tačno dva načina. Takođe je dokazano da su jednostavni beskonačni uzastopni razlomci iracionalni brojevi, kao i da se svaki iracionalan broj može zapisati u obliku beskonačnog jednostavnog uzastopnog razlomka. Razmatrani su i periodični beskonačni uzastopni razlomci i utvrđeno je da oni predstavljaju kvadratne iracionalnosti (realan broj je kvadratna iracionalnost ako je koren kvadratne jednačine sa celobrojnim koeficijentima i pozitivnom diskriminantom).

U trećoj glavi je izložena teorema koja daje vezu između složivih popločavanja sa zadatim visinskim uslovima i odgovarajućeg konačnog uzastopnog razlomka. Uvedena su težinska popločavanja koja su pored n - traka razmatrana i na kružnim i periodičnim trakama.

Četvrta glava ovog rada bavi se primenama popločavanja i uzastopnih razlomaka u teoriji brojeva. U njoj su opisane neke osnovne veze između Fibonačijevih i Lukasovih brojeva i uzastopnih razlomaka. U ovoj glavi dat je i jedan inspirativan dokaz poznatog tvrđenja da se svaki prost broj oblika $4k+1$, gde je k neki prirodan broj, može na jedinstven način predstaviti kao zbir kvadrata dva prirodna broja.

U petoj glavi opisana je primena težinskih popločavanja na izračunavanje konačnih i nekih beskonačnih uzastopnih razlomaka sa realnim parcijalnim koeficijentima.

Kroz primer jedne reprezentacije broja e kao beskonačnog uzastopnog razlomka, u poslednjoj, šestoj glavi ovog rada, predstavljena je veza između rastroja poretka, permutacija bez fiksnih susedstava i složivih popločavanja sa visinskim uslovima koji su definisani parcijalnim koeficijentima konvergenata pomenute reprezentacije za e. Da je taj beskonačni uzastopni razlomak zaista jednak broju e, dokazali smo na dva načina. Osim za ovu, dat je dokaz za još jednu reprezentaciju broja e kao beskonačnog uzastopnog razlomka.

Zahvaljujem se svom mentoru dr Olgi Bodroži – Pantić na nesebičnoj pomoći i razumevanju tokom izrade ovog rada. Takođe se zahvaljujem članovima komisije, dr Jeleni Aleksić i dr Petru Đapiću na sugestijama i primedbama.

S A D R Ž A J

Glava 1

Uvod

Neka je data kvadratna jednačina $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Koristeći kvadratnu formulu $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, dobijamo da su rešenja ove jednačine $x_1 = 1 + \sqrt{2} = 2,4142135...$ i $x_2 = 1 - \sqrt{2} = 0,4142135...$.

Međutim, šta ako jednačinu transformišemo tako što kvadratni član ostavimo na levoj strani a ostale članove prebacimo na desnu stranu jednačine, pa zatim celu jednačinu podelimo sa x?

Dobićemo $x = 2 + \frac{1}{x}$.

Na desnoj strani jednačine i dalje imamo nepoznatu x koju možemo zameniti sa $2 + \frac{1}{x}$.

Na taj način dobijamo $x = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$. Nastavljajuću ovaj postupak još nekoliko puta dobijamo,

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}}}}. \tag{1.1}$$

Kako je izraz na desnoj strani jednakosti (1.1) sve složeniji i pritom u njemu i dalje figuriše nepoznata x, čini se da smo sve dalje od rešenja jednačine.

Ipak, razmotrimo detaljnije desnu stranu jednakosti (1.1). Iz nje se može izolovati niz izraza

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}\ \text{i}\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}},\ ... \qquad (1.2)$$

Kad se gornji izrazi iz niza izraza (1.2) pretvore u razlomke pa potom zapišu u decimalnom zapisu dobija se redom,

$$2;\ \frac{5}{2}=2,5;\ \frac{12}{5}=2,4;\ \frac{29}{12}=2.4166666...;\ \frac{70}{29}=2,4137931...$$

Primećujemo da je svaki sledeći izraz iz (1.2) sve bliži pozitivnom rešenju $x_1 = 1+\sqrt{2} = 2,4142135...$ kvadratne jednačine $x^2-2x-1=0$.

Iz ovog opažanja rađaju se neka pitanja. Najpre, ako nastavimo da formiramo nove članove niza (1.2), da li će se nastaviti trend dobijanja sve boljih aproksimacija pozitivnog rešenja početne kvadratne jednačine? Pretpostavimo sada da se postupak zamene x sa $2+\frac{1}{x}$ u jednakosti (1.1) odvija neprekidno. Na taj način dobijamo

$$x = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}\ . \qquad (1.3)$$

Nameće se pitanje: Da li je izraz na desnoj strani jednakosti (1.3) ustvari jednak pozitivnom rešenju kvadratne jednačine $x^2-2x-1=0$? Odgovore na ova, kao i na mnoga druga zanimljiva pitanja daćemo u ovom radu. Izrazi iz (1.2) i izraz s desne strane jednakosti (1.3) samo su neki od primera široke klase matematičkih izraza po imenu *uzastopni razlomci*. Neke vrste uzastopnih razlomaka i njihove osnovne osobine biće obrađene u drugoj glavi ovog rada, dok će kroz ostatak teksta biti predstavljene zanimljive veze uzastopnih razlomaka i kombinatorike.

Pre nego što pređemo na formalno uvođenje potrebnih pojmova, dajemo kratak istorijski osvrt na pojavu uzastopnih razlomaka u matematici i razvoj moderne teorije uzastopnih razlomaka pre svega kroz imena velikih matematičara koju su postavili temelje za dalja proučavanja ove oblasti.

Koncept uzastopnih razlomaka usko je povezan sa Euklidovim[1] postupkom i Aryabhatinim[2] postupkom za rešavanje linearnih diofantskih jednačina.

Većina autoriteta se slaže da je moderna teorija uzastopnih razlomaka započeta radovima Rafaela Bombelija[3]. Njegova rasprava iz algebre iz 1572. godine sadrži deo o kvadratnim korenima, gde je pokazao da važi

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ddots}}$$

Pietro Antonio Cataldi[4] je 1613. godine pokazao da je

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}$$

Lord Brouncker[5] je 1655. godine transformisao formulu Džona Volisa[6] $\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots}$ u beskonačni uzastopni razlomak $\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}$.

[1] Euklid je bio legendarni grčki matematičar, tvorac čuvenog dela „Elementi“ koje spada u matematičke klasike.

[2] Aryabhata (476 - 550) – indijski matematičar

[3] Rafael Bombelli (1526 – 1572) – italijanski matematičar

[4] Pietro Antonio Cataldi (1548 – 1626) – italijanski matematičar, takođe iz Bolonje, kao I Bombeli

[5] William Brouncker (1620 – 1684) – engleski matematičar, prvi predsednik Kraljevskog društva za unapređenje prirodnih nauka

[6] John Wallis (1616 – 1703) – engleski matematičar

Upravo je Volis u svom delu “*Arithmetica Infinitorum*” iz 1655. godine, diskutujući o zapisu za $\frac{4}{\pi}$ koji je dao Lord Brouncker, uveo naziv uzastopni razlomak (continued fraction).

Veliki holandski matematičar, fizičar i astronom Kristijan Hajgens[7] jedan je od prvih koji je u praktične svrhe koristio ove neobične razlomke. On je pomoću uzastopnih razlomaka aproksimirao tačan dizajn za zupčanike planetarijuma a rezultate do kojih je došao opisao je u svojoj raspravi “*Descriptio Automati Planetarii*” objavljenoj 1698. godine.

Radovima pre svih Ojlera[8], Lambera[9] i Lagranža[10] teorija uzastopnih razlomaka dobila je današnju fizionomiju. Posebno značajno delo iz tog opusa je Ojlerova monografija “*De Fractionibus Continius*” iz 1737. godine kojom je postavljen temelj za dalja proučavanja.

Razna uopštenja uzastopnih razlomaka do kojih se došlo u dvadesetom veku proučavaju se u okviru analitičke teorije uzastopnih razlomaka i imaju široku primenu u teoriji brojeva, raznim aproksimacijama, kao i u mehanici, akustici, kriptografiji i astronomiji.

Između nekih uzastopnih razlomaka i tzv. popločavanja trake postoji jaka veza. Jedan od osnovnih ciljeva ovog rada je da tu vezu predstavi. Ideja da se preko popločavanja trake rešavaju razni problemi iz teorije brojeva često se koristi u $[6]$. Ova metoda rešavanja je vrlo elegantna a pritom elementarna. Neke njene primene biće predstavljene u trećoj, četvrtoj i petoj glavi ovog rada. Shodno rečenom, neophodno je uvođenje sledećih definicija.

---

[7] Christiaan Huygens (1629 – 1695) – holandski matematičar
[8] Leonhard Euler (1707 – 1783) – švajcarski matematičar
[9] Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) – švajcarski matematičar I fizičar
[10] Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) – italijansko – francuski matematičar i astronom

Definicija 1.1. Za pozitivan ceo broj n, pravougaonik dimenzije $1 \times n$ naziva se n - *traka*. Svaka n - traka sastoji se od kvadrata dimenzija 1×1 koje nazivamo *poljima*. Polja su numerisana od 0 do $n-1$. Zajedničku stranicu dva polja nazivamo *granicom*. Zajednička stranica $(i-1)$- og i i- tog polja n- trake, gde je $1 \leq i \leq n-1$ numeriše se brojem i i zove se i- ta granica.

Definicija 1.2. Pod *popločavanjem* n- *trake* podrazumeva se njeno prekrivanje pomoću kvadrata dimenzija 1×1 (u daljem tekstu, *kvadrati*) i pravougaonika dimenzija 1×2 (u daljem tekstu, *domine*) takvo da je unija svih korišćenih kvadrata i domina jednaka ovoj n - traci a unutrašnjosti svaka dva korišćena dela su disjunktne.

Neformalno rečeno, popločavanje n - trake opisano u gornjoj definiciji možemo zamisliti kao popločavanje hodnika pravougaonog oblika dimenzija $1 \times n$ keramičkim pločicama dimenzija 1×1 i 1×2.

Definicija 1.3. *Složivo popločavanje* n- *trake* je prekrivanje n- trake kvadratima i dominama takvo da važi:

i) unija svih kvadrata i domina jednaka je celoj n- traci

ii) unutrašnjosti bilo kog kvadrata i bilo koje domine koji učestvuju u prekrivanju n- trake su disjunktne

iii) unutrašnjosti svaka dva kvadrata (domine) su ili disjunktne ili se poklapaju.

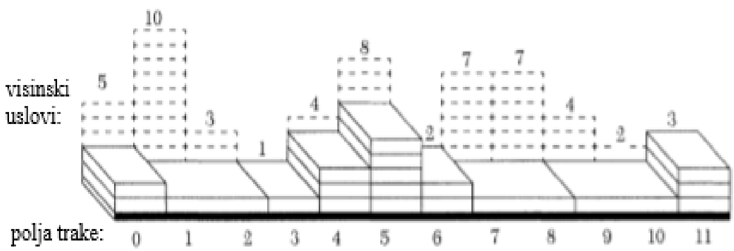
Jednostavnije rečeno, u složivom popločavanju dozvoljeno je slaganje (potpuno preklapanje, ređanje jedan na drugog) više kvadrata kao i slaganje domina. Preklapanje nepodudarnih objekata nije dozvoljeno, tj. nije dozvoljeno ređati kvadrate preko domina i obrnuto.

Definicija 1.4. *Složivo popločavanje* n- *trake sa visinskim uslovima* $\left(a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),\ldots,(b_{n-1},a_{n-1})\right)$, $a_i,b_j \in \mathbb{N}$, je složivo popločavanje n- trake kod kog se na i - tom polju trake ($0 \leq i \leq n-1$) nalazi naslagano najviše a_i kvadrata, a na poljima $j-1$ i j ($1 \leq j \leq n-1$) se nalazi naslagano najviše b_j domina. Ako je $n=1$, *složivo popločavanje 1 – trake sa visinskim uslovom* (a_0) je složivo popločavanje 1-trake kod kog se na jedinom polju trake nalazi naslagano najviše a_0 kvadrata.

Napomena 1.5. Ako u popločavanju n - trake nije dozvoljeno slaganje domina a dozvoljeno je slaganje kvadrata, odnosno ako važi $a_i \in \mathbb{N}$, za $0 \le i \le n-1$ i $b_j = 1$, za $1 \le j \le n-1$, onda se lista visinskih uslova $(a_0, (b_1, a_1), ..., (b_{n-1}, a_{n-1}))$ kraće zapisuje sa $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$.

Definicija 1.6. Neka je sa T obeleženo neko složivo popločavanje n - trake sa visinskim uslovima $(a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), ..., (b_{n-1}, a_{n-1}))$. Svaki skup kvadrata koji pokriva tačno jedno polje trake i svaki skup domina koji pokriva tačno dva susedna polja trake zvaćemo *pločicom* popločavanja T.

Na slici 1, prikazano je jedno složivo popločavanje 12 – trake sa zadatim visinskim uslovima.



Složivo popločavanje 12 - trake sa visinskim uslovima (5,10,3,1,4,8,2,7,7,4,2,3)

Slika 1

U daljem radu, od važnosti će biti određivanje broja složivih popločavanja neke trake sa zadatim visinskim uslovima. Neka je za nenegativan ceo broj n, sa

$t_n\left(a_0,\left(b_1,a_1\right),\left(b_2,a_2\right),...,\left(b_n,a_n\right)\right)$ označen broj složivih popločavanja $(n+1)$- trake sa visinskim uslovima $\left(a_0,\left(b_1,a_1\right),\left(b_2,a_2\right),...,\left(b_n,a_n\right)\right)$. Bez bojazni od zabune, ubuduće ćemo koristiti samo skraćenu oznaku t_n. Takođe, sa $t_{-1}:=1$ interpretiramo "prazno popločavanje" 0 – trake, što se ispostavlja kao vrlo korisno proširenje ove definicije.

Primer 1.7. Odredimo broj složivih popločavanja 4 - trake sa visinskim uslovima $\left(1,\left(1,2\right),\left(2,3\right),\left(3,4\right)\right)$. Radi jednostavnijeg zapisa, obeležimo sa S svaku pločicu složivog popločavanja ove trake koju čine kvadrati, a sa D svaku pločicu koju čine domine. Postoji 5 tipova složivih popločavanja koji zadovoljavaju date visinske uslove:

- *SSSS* Broj popločavanja ovog tipa je $a_0\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$.
- *DSS* Ovakvih ima $b_1\cdot a_2\cdot a_3=1\cdot 3\cdot 4=12$.
- *SSD* $a_0\cdot a_1\cdot b_3=1\cdot 2\cdot 3=6$.
- *SDS* $a_0\cdot b_2\cdot a_3=1\cdot 2\cdot 4=8$.
- *DD* $b_1\cdot b_3=1\cdot 3=3$.

Dakle, ukupan broj složivih popločavanja 4 - trake sa visinskim uslovima $\left(1,\left(1,2\right),\left(2,3\right),\left(3,4\right)\right)$ je 24+12+6+8+3=53.

□

Poslednja glava ovog rada odnosi se na interpretaciju broja *e* kao uzastopnog razlomka. Pokazuje se da postoji više takvih predstavljanja, od kojih će jedno biti detaljno obrađeno zbog toga što povezuje nekoliko aspekata kombinatorike. U redovima koji slede, predstavljena je ukratko jedna od najpoznatijih konstanti iz sveta matematike (vidi $[14]$).

Poznati švajcarski matematičar Jakob Bernuli (1655 – 1705) je 1683. godine razmatrao problem neprekidnog kapitalisanja. Cilj ovog problema je izračunavanje dobiti koja se može ostvariti ukoliko bi banka računala složen interes na beskonačno malim vremenskim intervalima. Bernuli je ispitivao kamatnu stopu i različite dohotke na osnovu učestalosti ulaganja. Zaključak koji je doneo za ovaj zadatak, koji se sada smatra originalnim problemom broja e, jeste da se dobija bolji rezultat i da je unosnije ako se češće ulaže novac i češće uzima kamata.

Pretpostavimo da ulažemo u banku sumu novca x. Ako bi banka davala 100%tnu kamatu na godišnjem nivou, nakon godinu dana suma novca koju bismo mogli da podignemo iznosila bi $2x$. Ukoliko bismo na pola godine podigli novac i ponovo ga uložili, nakon jedne godine imali bismo $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 x$. Ako bismo svaki dan u godini podizali novac i ponovo ga ulagali, naša suma bi se nakon godinu dana povećala $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$ puta (pod pretpostavkom da godina nije prestupna). Ukoliko bi bilo moguće neprestano kapitalisanje suma bi se uvećala $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ puta. Bernuli je došao do zaključka da ova granična vrednost postoji i da se nalazi između 2 i 3. Na ovaj način ćemo i mi definisati broj e, tj. $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Prvi put se broj e samostalno pojavljuje u pismu koje je Lajbnic[11] pisao Hajgensu 1690. godine, gde je za ovaj broj koristio oznaku b. Današnju oznaku uveo je Ojler 1731. godine u svom pismu Goldbahu[12] gde je broj e definisao kao "broj čiji je hiperbolni logaritam jednak 1". Ojler je 1748. godine objavio rad "*Introductio in analysin infinitorum*" gde su bile izložene sve njegove ideje vezane za broj e. Tu se posebno ističe čuvena Ojlerova formula $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ iz koje se za $x=\pi$ dobija, po ukusu mnogih matematičara, najlepši matematički identitet $e^{i\pi}+1=0$. Lepota ove jednakosti je u tome što su jednim tako jednostavnim i elegantnim izrazom povezane najvažnije matematičke konstante 0,

[11] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) – nemački filozof, matematičar, pronalazač, pravnik, istoričar I diplomata lužičkosrpskog porekla

[12] Christian Goldbach (1690 – 1764) – pruski matematičar

1, e, π i i. Pored ovoga, značajno je reći da je Ojler u istom delu procenio broj e na 18 decimala. Iracionalnost ovog broja utvrdio je Ojler, a njegovu transcedentnost je dokazao 1873. godine Šarl Ermit[13].

Ispostavilo se da je broj e fundamentalan, on predstavlja prirodan jezik rasta i kao takav je krucijalan za infinitezimalni račun. Pored matematike i statistike, nalazi značajno mesto u biologiji gde modelira rast populacije jedne vrste kroz logističke funkcije kao i u fizici gde figuriše u funkcijama koje opisuju radioaktivne pojave.

[13] Charles Hermite (1822 – 1901) – francuski matematičar

Glava 2

Uzastopni razlomci

2.1 Konačni uzastopni razlomci

Definicija 2.1.1. Izraz oblika

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}} \tag{2.1}$$

gde su a_i, b_j ($0 \le i \le n$ i $1 \le j \le n$) proizvoljni izrazi, naziva se *konačan uzastopni razlomak*.

Najčešće su a_i, b_j, $0 \le i \le n$ i $1 \le j \le n$ realni brojevi i tada ih nazivamo *parcijalni koeficijenti* uzastopnog razlomka. Za $n \in \mathbb{N}$, izraz (2.1) kraće zapisujemo kao $[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), ..., (b_n, a_n)]$ i kažemo da je njegova dužina $n+1$. Specijalno, $[a_0] := a_0$ je konačan uzastopni razlomak dužine 1.

Ako je u izrazu (2.1) $b_i = 1$, $a_i \in \mathbb{N}$ za $1 \le i \le n$ i $a_0 \in \mathbb{Z}$ onda za takav uzastopni razlomak kažemo da je *jednostavan* i možemo ga zapisati kao $[a_0, a_1, ..., a_n]$.

Svaki racionalan broj može se prikazati u obliku konačnog uzastopnog razlomka na beskonačno mnogo načina. Ako je r neki racionalan broj i $\lfloor r \rfloor$ najveći ceo broj koji nije veći od r, onda je $r = \lfloor r \rfloor + \dfrac{p}{q}$ za neke p i q, gde je $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$ i $p < q$. Tada važi i $r = \lfloor r \rfloor - i + \dfrac{iq + p}{q} = [\lfloor r \rfloor - i, (iq + p, q)]$ za svaki pozitivan ceo broj i. Pretpostavimo da dati racionalan broj želimo predstaviti u obliku jednostavnog uzastopnog razlomka. Onda se broj načina na koji to možemo uraditi značajno smanjuje, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 2.1.2. ($[13]$) *Svaki konačan jednostavan uzastopni razlomak predstavlja racionalan broj. Obrnuto, svaki racionalan broj se može predstaviti kao konačan jednostavan uzastopni razlomak na tačno dva načina.*

Dokaz. Prvi deo teoreme je očigledan pa ćemo dokazati samo njen drugi deo.

Neka je $\frac{p}{q}, q>0$ proizvoljan racionalan broj gde je p ceo, a q prirodan broj i važi $NZD(p,q)=1$. Deljenjem p sa q dobijamo

$$\frac{p}{q}=a_0+\frac{r_0}{q} \ ,$$

gde je a_0 jedinstven ceo broj takav da je $0 \le r_0 < q$. Ako je $r_0 = 0$, postupak se završava i važi $\frac{p}{q}=[a_0]$. Za $r_0>0$ je

$$\frac{p}{q}=a_0+\frac{1}{\frac{q}{r_0}} \ , \ 0<r_0<q \tag{2.2}$$

pa deleći q sa r_0 dobijamo

$$\frac{q}{r_0}=a_1+\frac{r_1}{r_0} \ , \ 0 \le r_1 < r_0 . \tag{2.3}$$

Primetimo da je zbog $\frac{q}{r_0}>1$ i $0 \le r_1 < r_0$, a_1 pozitivan ceo broj. Ako je $r_1 = 0$ dobijamo $\frac{q}{r_0}=a_1$, pa ubacivanjem ove jednakosti u (2.2) sledi

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1].$$

Slično prethodnom, ako je $r_1 > 0$ zapisujemo (2.3) kao

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}} \ , \ 0 < r_1 < r_0$$

i ponavljamo opisani postupak deleći r_0 sa r_1.

Postupak se završava kada za neki nenegativan ceo broj n dobijemo da je $r_n = 0$. To će se uvek desiti jer opisani postupak generiše strogo opadajući niz nenegativnih celih brojeva $q > r_0 > r_1 > r_2 > ...$ koji, jasno je, ne može biti beskonačan. Prema tome, dobijamo konačan niz jednakosti

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} \ , \ 0 < r_0 < q$$

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0} \ , \ 0 < r_1 < r_0$$

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} \ , \ 0 < r_2 < r_1 \tag{2.4}$$

…………………………....

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \ , \ 0 < r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n + \frac{0}{r_{n-1}} = a_n + 0 \ , \ r_n = 0$$

na osnovu kog je lako predstaviti racionalni broj $\frac{p}{q}$ u obliku konačnog jednostavnog uzastopnog razlomka. Naime, prema prve dve jednakosti iz (2.4) sledi

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}}$$

pa iz treće zamenjujemo $\frac{r_0}{r_1}$ sa $a_2 + \frac{r_2}{r_1}$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} = [a_0, a_1, ..., a_n].$$

Na osnovu opisane konstrukcije, jasno je da su parcijalni koeficijenti a_i, $0 \le i \le n$ jedinstveno određeni. Međutim, ako je $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, ..., a_n]$, razlomak $\frac{p}{q}$ moguće je napisati i kao $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, ..., a_n - 1, 1]$ u obliku jednostavnog uzastopnog razlomka. To zaključujemo iz činjenice da je $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1 + \frac{1}{1}}$ i $a_n = \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} > 1$, pa su svi parcijalni koeficijenti uzastopnog razlomka $[a_0, a_1, ..., a_n - 1, 1]$ osim eventualno prvog pozitivni celi brojevi.

Dokazaćemo da pored ove dve reprezentacije ne postoji nijedna više. Pretpostavimo suprotno, neka je $\frac{p}{q} = [b_0, b_1, ..., b_m]$, još jedna reprezentacija $\frac{p}{q}$ kao jednostavnog uzastopnog razlomka. Kako su $\frac{1}{[a_1, ..., a_n]} < 1$ i $\frac{1}{[b_1, ..., b_m]} < 1$, važi $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = a_0$ i $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = b_0$, tj. $a_0 = b_0$. Dalje, iz

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_n]} = [a_0, a_1, ..., a_n] = [b_0, b_1, ..., b_m] = b_0 + \frac{1}{[b_1, b_2, ..., b_m]}$$

sledi $[a_1, a_2, ..., a_n] = [b_1, b_2, ..., b_m]$. Slično kao gore zaključujemo da je $a_1 = b_1$. Štaviše, na opisani način dolazimo do toga da važi $a_i = b_i$ za $0 \leq i \leq n$ i $n = m$.

Time je dokaz završen.

■

Napomena 2.1.3. Ako u prethodnoj teoremi pretpostavimo da za reprezentaciju racionalnog broja kao jednostavnog uzastopnog razlomka uzimamo ono predstavljanje koje ima manji broj parcijalnih koeficijenata, onda je takvo predstavljanje jedinstveno. Primetimo da je u takvom predstavljanju za svaki $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ poslednji parcijalni koeficijent $a_n \geq 2$.

Primer 2.1.4. Napisaćemo racionalan broj $\frac{73}{22}$ kao jednostavan uzastopni razlomak.

$$\frac{73}{22} = 3 + \frac{7}{22} = 3 + \frac{1}{\frac{22}{7}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}} = [3, 3, 7].$$

Naravno, prema teoremi 1.1.2 važi i $\frac{73}{22} = [3, 3, 6, 1]$.

□

Definicija 2.1.5. Neka je $r = [a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), ..., (b_n, a_n)]$, gde su realni brojevi a_i ($0 \leq i \leq n$) i b_j ($1 \leq j \leq n$) takvi da je konačan uzastopni razlomak $[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), ..., (b_k, a_k)]$ izračunljiv[14] za sve k ($1 \leq k \leq n$). Tada se izraz

[14] Za konačan uzastopni razlomak kažemo da je izračunljiv ako se u procesu njegovog izračunavanja ne pojavljuje deljenje nulom.

$r_k = \dfrac{p_k}{q_k} = \left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_k,a_k)\right]$, gde je $1 \le k \le n$, naziva k - *ti konvergent* od r. *Brojilac* k - *tog konvergenta* od r, u oznaci p_k, i *imenilac* k - *tog konvergenta* od r, u oznaci q_k, dobijaju se pretvaranjem uzastopnog razlomka $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_k,a_k)\right]$ u razlomak pri čemu nije dozvoljeno skraćivanje unutar razlomka. Specijalno, za $n = 0$, $r_0 := \left[a_0\right]$ naziva se *nulti konvergent* od r, pri čemu je *brojilac nultog konvergenta* od r, $p_0 := a_0$ i *imenilac nultog konvergenta* od r, $q_0 := 1$.

Primer 2.1.6. Ukoliko je drugi konvegent nekog konačnog uzastopnog razlomka $r_2 = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{2}} = \dfrac{6}{4}$, tada je $p_2 = 6$ i $q_2 = 4$.

□

Lema 2.1.7. *Neka je* $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right] = \dfrac{p_n}{q_n}$ *, gde su realni brojevi* a_i *(*$0 \le i \le n$*) i* b_j *(*$1 \le j \le n$*) takvi da je svaki konvergent konačnog uzastopnog razlomka* $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]$ *izračunljiv. Za* $n \ge 0$ *važi*

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2},\ p_{-2} := 0,\ p_{-1} := 1$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2},\ q_{-2} := 1,\ q_{-1} := 0 \tag{2.5}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po dužini uzastopnog razlomka $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]$.

Baza indukcije. Za $n = 0$ (dužina uzastopnog razlomka 1) imamo $p_0 = a_0 = a_0 \cdot 1 + b_0 \cdot 0 = a_0 \cdot p_{-1} + b_0 \cdot p_{-2}$ i $q_0 = 1 = a_0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = a_0 \cdot q_{-1} + b_0 \cdot q_{-2}$.

Induktivni korak. Pretpostavimo da za neko $n \geq 0$ važi $p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$ i $q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$ i dokažimo da tada tvrđenje važi i za prirodan broj $n+1$. Primetimo da u $p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}$ i q_{n-2} ne figurišu a_n i b_n, kao i da se uzastopni razlomak

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}}}}$$

dužine $n+2$ može posmatrati kao uzastopni razlomak dužine $n+1$ ako izraz $a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ posmatramo kao jedan parcijalni koeficijent. Ako tako posmatramo ovaj uzastopni razlomak, onda za njega važi induktivna hipoteza. Dalje je iz (2.5)

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + b_n q_{n-2}} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} + p_{n-1} \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} + q_{n-1} \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}} = \frac{p_n + p_{n-1} \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}{q_n + q_{n-1} \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}} =$$

$\frac{a_{n+1} p_n + b_{n+1} p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}}$, što je i trebalo da se dokaže.

■

2.2 Beskonačni uzastopni razlomci

Definicija 2.2.1. Neka su a_i, b_j, $i \geq 0, j \geq 1$ proizvoljni izrazi. Tada se izraz oblika

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots}}} \tag{2.6}$$

naziva *beskonačan uzastopni razlomak* i označavamo ga sa $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...\right]$. Izrazi a_i,b_j, $i\geq 0, j\geq 1$ najčešće će biti neki realni brojevi i tada ih zovemo *parcijalni koeficijenti* beskonačnog uzastopnog razlomka (2.6).

Za uzastopni razlomak (2.6) kažemo da je *jednostavan* ako je $b_j=1, a_j\in\mathbb{N}$ za $j\geq 1$ i $a_0\in\mathbb{Z}$ i tada ga zapisujemo sa $\left[a_0,a_1,a_2,...\right]$.

Takođe, za beskonačni uzastopni razlomak $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...\right]$ i nenegativan ceo broj k, k - ti konvergent je po definiciji k - ti konvergent uzastopnog razlomka $\left[a_0,(b_1,a_1),...,(b_n,a_n)\right]$, za proizvoljno $n>k$. Prema tome, veze iz leme 2.1.7 važe i za konvergente beskonačnog uzastopnog razlomka $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...\right]$.

Videli smo da se svaki racionalan broj može predstaviti u obliku jednostavnog konačnog uzastopnog razlomka i da je ta reprezentacija jedinstvena ako se pretpostavi da poslednji parcijalni koeficijent a_n mora biti veći od 1. Postavlja se pitanje: Da li se slično može tvrditi i za iracionalne brojeve? Odgovor je potvrdan, što ćemo uskoro i pokazati.

Neka je x neki iracionalan broj. Predstavićemo ga u obliku jednostavnog uzastopnog razlomka. Ako postoji takvo predstavljanje, jasno je da ono ne može biti konačno zbog teoreme 2.1.2. Neka je $a_0:=\lfloor x\rfloor$. Tada važi

$$x=a_0+\frac{1}{x_1},\ 0<\frac{1}{x_1}<1,$$

gde je $x_1=\dfrac{1}{x-a_0}>1$ iracionalan broj. Sada je $a_1:=\lfloor x_1\rfloor$. Imamo

$$x_1=a_1+\frac{1}{x_2},\ 0<\frac{1}{x_2}<1,\ a_1\geq 1,$$

gde je $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1} > 1$ iracionalan, itd. Opisani postupak nije moguće završiti, jer bi u tom slučaju morao da postoji prirodan broj n takav da je $x_n = a_n$, što je kontradikcija jer su $x, x_1, x_2, ...$ iracionalni, a $a_0, a_1, a_2, ...$ celi brojevi. Dakle, na ovaj način dobijamo beskonačan niz jednakosti

$$
\begin{aligned}
&x = a_0 + \frac{1}{x_1},\ x_1 > 1,\ a_0 \in \mathbb{Z}\\
&x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},\ x_2 > 1,\ a_1 \in \mathbb{N},\\
&x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3},\ x_3 > 1,\ a_2 \in \mathbb{N},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}},\ x_{n+1} > 1,\ a_n \in \mathbb{N},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Koristeći niz jednakosti (2.7) dobijamo

$$
x = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = \ldots \text{ , tj. } x = [a_0, a_1, a_2, ...]. \tag{2.8}
$$

Zaključujemo da se svaki iracionalan broj može predstaviti[15] u obliku jednostavnog beskonačnog uzastopnog razlomka. Na osnovu postupka kojim do toga dolazimo jasno je da je takvo predstavljanje jedinstveno.

[15] Predstavljanje realnog broja kao jednostavnog uzastopnog razlomka još ćemo zvati i *razvoj* tog broja u jednostavni uzastopni razlomak.

Primer 2.2.2. Predstavićemo $\sqrt{3}$ u obliku jednostavnog uzastopnog razlomka.

$$\sqrt{3}=1+\left(\sqrt{3}-1\right)=1+\frac{2}{\sqrt{3}+1}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}}=$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\left(\sqrt{3}-1\right)}}=...$$

Kako smo ponovo dobili $\sqrt{3}-1$ postupak se nadalje periodično ponavlja pa zaključujemo da je $\sqrt{3}=[1,1,2,1,2,1,2,...]=\left[1,\overline{1,2}\right]$, gde $\overline{1,2}$ znači da se cifre 1 i 2 naizmenično i neprekidno ponavljaju.

□

Postavlja se pitanje: Da li svaki beskonačni uzastopni razlomak čiji su parcijalni koeficijenti realni brojevi ima vrednost, odnosno da li predstavlja neki realan broj? Shodno postavljenom pitanju, opravdano je uvođenje sledeće definicije.

Definicija 2.2.3. Neka je $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...\right]$ beskonačan uzastopni razlomak kod koga su svi parcijalni koeficijenti realni brojevi takvi da je svaki njegov konvergent izračunljiv. Tada se *vrednost* ovog uzastopnog razlomka definiše kao $\lim\limits_{n\to\infty}\left[a_0,(b_1,a_1),...,(b_n,a_n)\right]$ ako $\lim\limits_{n\to\infty}\left[a_0,(b_1,a_1),...,(b_n,a_n)\right]$ postoji. U protivnom, kažemo da dati beskonačni uzastopni razlomak nema vrednost.[16]

[16] Imajući u vidu uvedenu definiciju, jasno je da ne moraju svi beskonačni uzastopni razlomci čiji su parcijalni koeficijenti realni brojevi imati vrednost, tj. predstavljati neki realan broj. Uslovi pod kojima granična vrednost iz definicije 2.2.3 postoji mogu se pronaći u $[11]$.

Pokazaćemo da jednostavni beskonačni uzastopni razlomci uvek imaju vrednost i da su to ustvari iracionalni brojevi. Za tu svrhu biće nam potrebno nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Lema 2.2.4. *Neka je* $[a_0, a_1, a_2, ...]$ *jednostavan beskonačni uzastopni razlomak.*[17] *Tada za njegove konvergente važi*

$$1)\quad r_k - r_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}},\ gde\ je\ k \geq 1$$

$$2)\quad r_k - r_{k-2} = \frac{a_k(-1)^{k}}{q_k q_{k-2}},\ gde\ je\ k \geq 2.$$

Dokaz. Dokažimo najpre 1). Dokaz izvodimo indukcijom po k.

Baza indukcije. Za $k = 1$, iz leme 2.1.7 dobijamo

$$r_1 - r_0 = \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} - \frac{a_0}{1} = \frac{1}{a_1} = \frac{(-1)^{1+1}}{q_1 q_0}.$$

Induktivni korak. Pretpostavimo da za neko $k = m$ važi $r_m - r_{m-1} = \frac{(-1)^{m+1}}{q_m q_{m-1}}$ i dokažimo da tada tvrđenje važi i za $k = m+1$. Primetimo najpre da iz induktivne hipoteze i

$$r_m - r_{m-1} = \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} = \frac{p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m}{q_m q_{m-1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{q_m q_{m-1}}$$ sledi

$$p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = (-1)^{m+1}. \tag{2.9}$$

Dalje je iz leme 2.1.7 i jednakosti (2.9)

$$r_{m+1} - r_m = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_{m+1} p_m q_m + q_m p_{m-1} - p_m q_{m+1}}{q_{m+1} q_m} =$$

[17] Jednakosti iz ovog tvrđenja važe i za svaki konačan jednostavan uzastopni razlomak a dokazi se izvode potpuno isto kao ovde.

$$\frac{a_{m+1}p_mq_m+q_mp_{m-1}-p_m\left(a_{m+1}q_m+q_{m-1}\right)}{q_{m+1}q_m}=\frac{-\left(p_mq_{m-1}-p_{m-1}q_m\right)}{q_{m+1}q_m}=\frac{-(-1)^{m+1}}{q_{m+1}q_m}=\frac{(-1)^{m+2}}{q_{m+1}q_m}.$$

Na osnovu dokazanog, jasno je da se umesto jednakosti 1) može koristiti i jednakost (2.9).

Dokažimo sada jednakost 2).

Koristeći lemu 2.1.7 i jednakost (2.9) , za $k \geq 2$ dobijamo

$$r_k-r_{k-2}=\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}=\frac{p_kq_{k-2}-p_{k-2}q_k}{q_kq_{k-2}}=$$

$$\frac{\left(a_kp_{k-1}+p_{k-2}\right)q_{k-2}-p_{k-2}\left(a_kq_{k-1}+q_{k-2}\right)}{q_kq_{k-2}}=\frac{a_k\left(p_{k-1}q_{k-2}-p_{k-2}q_{k-1}\right)}{q_kq_{k-2}}=\frac{a_k\cdot(-1)^k}{q_kq_{k-2}},$$

što je i trebalo da se dokaže.

■

Napomena 2.2.5. Lako je uočiti da jednakost 1) ove leme važi i za $k \in \{-1,0\}$ s tim što tada nije u pitanju razlika konvergenata uzastopnog razlomka $[a_0,a_1,a_2,...]$. Slično, jednakost 2) prethodne leme važi i za $k \in \{0,1\}$.

Direktne posledice leme 2.2.4 su sledeća dva tvrđenja.

Posledica 2.2.6. *Konvergent* $r_k=\dfrac{p_k}{q_k}$ *jednostavnog (konačnog ili beskonačnog) uzastopnog razlomka je nesvodljiv za svako* $k \geq 0$.

Dokaz. Iz prethodne leme važi $p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^{k+1}$ za svaki nenegativan ceo broj k . Prema tome, svaki zajednički delilac od p_k i q_k deli i $(-1)^{k+1}$, tj. jedini zajednički delioci brojeva p_k i q_k su -1 i 1. To znači da su p_k i q_k uzajamno prosti, odnosno da je $r_k = \frac{p_k}{q_k}$ nesvodljiv.

$\blacksquare$

Posledica 2.2.7. *Za konvergente jednostavnog beskonačnog uzastopnog razlomka važi* $r_0 < r_2 < r_4 < ... < r_{2k} < r_{2k+1} < ... < r_5 < r_3 < r_1$ *za svaki nenegativan ceo broj* k.

Ovo tvrđenje govori o tome da je niz konvergenata sa parnim indeksima rastući a niz konvergenata sa neparnim indeksima opadajući, kao i da je svaki konvergent sa neparnim indeksom veći od svakog konvergenta sa parnim indeksom.

Sledeća teorema pokazuje da jednostavan beskonačan uzastopni razlomak predstavlja realan broj.

Teorema 2.2.8. $([9])$ *Svaki jednostavan beskonačni uzastopni razlomak* $[a_0, a_1, a_2, ...]$ *ima vrednost, tj. postoji* $\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, ..., a_n]$.

Dokaz. Ideja je da za $r_k = [a_0, a_1, ..., a_k]$, pokažemo da je niz $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ Košijev, odnosno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, l \in \mathbb{N}$ i $l > m \geq n_0$ važi $|r_l - r_m| < \varepsilon$.

Primetimo da ako je m paran i $l > m$, onda iz posledice 2.2.7 sledi $r_m < r_l < r_{m-1}$. Slično, ako je m neparan i $l > m$ tada je $r_{m-1} < r_l < r_m$. Prema tome je $|r_l - r_m| < |r_m - r_{m-1}|$ za svako l i m za koje važi $l > m$.

Dalje, za $l, m \in \mathbb{N}$ i $l > m$, iz leme 2.2.4 imamo $|r_l - r_m| < |r_m - r_{m-1}| = \frac{1}{q_m q_{m-1}}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno dato.

Kako je $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ strogo rastući niz pozitivnih celih brojeva, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $q_{n_0} \cdot q_{n_0-1} > \frac{1}{\varepsilon}$. Sada, za to n_0 i sve l i m za koje važi $l > m \geq n_0$ imamo

$|r_l - r_m| < \frac{1}{q_m q_{m-1}} \leq \frac{1}{q_{n_0} \cdot q_{n_0-1}} < \varepsilon$, pa je niz $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ Košijev.

Kako je u skupu realnih brojeva svaki Košijev niz konvergentan (vidi[1]), niz $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergira ka nekom realnom broju.

■

Tvrđenje koje sledi je posledica teoreme 2.2.8 i posledice 2.2.7.

Posledica 2.2.9. ([13]) *Neka je* $[a_0, a_1, a_2, ...]$ *jednostavan beskonačni uzastopni razlomak za koji važi* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0, a_1, ..., a_n) = l$. *Tada važi*

$r_0 < r_2 < r_4 < ... < l < ... < r_5 < r_3 < r_1$ *gde je* r_i, $i \geq 0$, i *- ti konvergent od* $[a_0, a_1, a_2, ...]$.

Lema 2.2.10. *Neka je* $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, *gde je* $n \in \mathbb{N}_0$, n *- ti konvergent jednostavnog beskonačnog uzastopnog razlomka* $[a_0, a_1, a_2, ...]$ *i neka je* $\lim\limits_{n\to\infty}[a_0, a_1, ..., a_n] = l$. *Tada je*

$$|l - r_n| < \frac{1}{q_{n+1}q_n}.$$

Dokaz. Iz posledice 2.2.9 i leme 2.2.4 sledi $|l - r_n| < |r_{n+1} - r_n| = \dfrac{1}{q_{n+1}q_n}$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

■

Videli smo da svaki jednostavan beskonačni uzastopni razlomak predstavlja neki realan broj. Sumnju da taj broj ne može biti racionalan potvrđuje tvrđenje koje ćemo dokazati.

Teorema 2.2.11. ([13]) *Jednostavan beskonačni uzastopni razlomak* $[a_0, a_1, a_2, ...]$ *predstavlja iracionalan broj.*

Dokaz. Zbog posledice 2.2.9 vrednost uzastopnog razlomka $[a_0, a_1, a_2, ...]$ je neki realan broj. Pretpostavimo suprotno tvrđenju ove teoreme, neka je $[a_0, a_1, a_2, ...] = \dfrac{p}{q}$, gde je $NZD(p,q) = 1$ i $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Neka je sa $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ obeležen n - ti konvergent od $[a_0, a_1, a_2, ...]$. Zbog toga što je niz

$\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotono rastući, za dovoljno veliki prirodan broj m važi $q < q_m$. Iz $\frac{p}{q} \neq \frac{p_m}{q_m}$

(ovo važi zbog posledice 2.2.9) sledi $pq_m - qp_m \neq 0$.

Prema lemi 2.2.10 je $\left|\frac{p}{q} - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{q_m q_{m+1}}$, odnosno $|pq_m - qp_m| < \frac{q}{q_{m+1}}$. Iz $q < q_m < q_{m+1}$

zaključujemo da je $0 < |pq_m - qp_m| < \frac{q}{q_{m+1}} < 1$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je

$pq_m - qp_m$ ceo broj. Dakle, jednostavan beskonačni uzastopni razlomak $[a_0, a_1, a_2, ...]$ predstavlja iracionalan broj.

■

Nameće se još jedno važno pitanje: Ako je $[a_0, a_1, a_2, ...]$ razvoj nekog iracionalnog broja x u jednostavan beskonačni uzastopni razlomak, da li je tada vrednost (u smislu definicije 2.2.3) ovog uzastopnog razlomka jednaka upravo broju x? Odgovor na postavljeno pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 2.2.12. *Ako je* $[a_0, a_1, a_2, ...]$ *razvoj iracionalnog broja* x *kao jednostavnog beskonačnog uzastopnog razlomka, tada je vrednost uzastopnog razlomka* $[a_0, a_1, a_2, ...]$ *upravo jednaka broju* x.

Dokaz. Ideja je da se pokaže da se x nalazi između svaka dva uzastopna konvergenta r_n i r_{n+1} jednostavnog beskonačnog uzastopnog razlomka $[a_0, a_1, a_2, ...]$.

Kako je $a_0 := \lfloor x \rfloor$, važi $r_0 < x$. Iz (2.7) je $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$, gde je x_1 neki iracionalan broj

veći od 1. Zbog $a_1 := \lfloor x_1 \rfloor$ imamo $x = a_0 + \frac{1}{x_1} < a_0 + \frac{1}{a_1} = r_1$. Prema tome, važi

$r_0 < x < r_1$.

Za proizvoljan prirodan broj n, iz (2.8) imamo

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}}$$

gde je x_n "ostatak" jednostavnog beskonačnog uzastopnog razlomka $[a_0, a_1, a_2, ...]$, tj.

$$x_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{\ddots}}} = a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \tag{2.10}$$

gde je

$$x_{n+1} = a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{a_{n+3} + \cfrac{1}{\ddots}}} \, . \tag{2.11}$$

Iz (2.10) i (2.11) dobijamo $x_n > a_n$ i $x_{n+1} > a_{n+1}$ pa važi i $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}}$. Dalje iz $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}}$ i (2.10) sledi $x_n < a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$. Prema tome, za svaki prirodan broj n važi

$$a_n < x_n < a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \, . \tag{2.12}$$

Posmatrajmo sada dva proizvoljna uzastopna konvergenta r_n i r_{n+1} uzastopnog razlomka $[a_0, a_1, a_2, ...]$ i broj x. Oni se mogu zapisati na sledeći način.

$$r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}$$

$$\text{i} \quad r_{n+1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}}.$$

Primetimo da tri prethodna uzastopna razlomka imaju n istih parcijalnih koeficijenata i da razliku između njih predstavljaju redom izrazi $\frac{1}{a_n}$, $\frac{1}{x_n}$ i $\cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}$. Dakle za poređenje brojeva r_n, x i r_{n+1} dovoljno je uporediti izraze $\frac{1}{a_n}$, $\frac{1}{x_n}$ i $\cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}$. Zbog (2.12) imamo $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{x_n} > \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}$, pa je prema tome x između r_n i r_{n+1}, za svaki prirodan broj n.[18] Dalje, iz posledice 2.2.7 sledi $r_0 < r_2 < r_4 < ... < x < ... < r_5 < r_3 < r_1$, pa je zbog posledice 2.2.9, $x = \lim_{n \to \infty} [a_1, a_2, ..., a_n]$, što je i trebalo da se dokaže.

■

U primeru 2.2.2 predstavili smo $\sqrt{3}$ kao jednostavan beskonačni uzastopni razlomak, $\sqrt{3} = [1,1,2,1,2,1,2,...] = [1,\overline{1,2}]$. U ovom razlomku, počevši od drugog parcijalnog koeoficijenta a_1, cifre 1 i 2 se naizmenično ponavljaju. Zbog toga se za uzastopni razlomak $[1,1,2,1,2,1,2,...] = [1,\overline{1,2}]$ kaže da je periodičan. Pre nego što i

[18] Ako je n neparan, tada je $r_{n+1} < x < r_n$, a ako je n paran važi $r_n < x < r_{n+1}$.

formalno uvedemo pojam beskonačnog uzastopnog periodičnog razlomka, podsetićemo se pojma periodičnog niza.

Definicija 2.2.13. Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je *periodičan* ako postoje $l,m\in\mathbb{N}$ takvi da za svako $k\geq l$ važi $a_{k+m}=a_k$. Ako pritom važi i $l=1$, niz je *čisto periodičan*. Broj m zovemo *period* niza, a najmanji od svih perioda *osnovni period* niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicija 2.2.14. Za beskonačni uzastopni razlomak $[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...]$ kažemo da je *periodičan* ako su nizovi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ periodični, a *čisto periodičan* ako su ovi nizovi čisto periodični.

Jednostavan beskonačni uzastopni razlomak $[a_0,a_1,a_2,...]$ koji je periodičan počevši od nekog prirodnog broja l a čiji je osnovni period m obeležavamo sa $[a_0,a_1,...,a_{l-1},\overline{a_l,...,a_{l+m-1}}]$, a ako je čisto periodičan sa osnovnim periodom m sa $[\overline{a_0,...,a_{m-1}}]$.

Primer 2.2.15. Uzastopni razlomak $[1,1,1,...]=[\overline{1}]$ je očigledno čisto periodičan. Prema teoremi 2.2.11 ovaj uzastopni razlomak jednak je nekom iracionalnom broju x. Videćemo koji je to broj. Važi

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}>0$$

odnosno $x=1+\dfrac{1}{x}$. Dakle, traženi iracionalan broj je pozitivno rešenje kvadratne jednačine $x^2-x-1=0$, tj. $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$. Kao što vidimo razvoj zlatnog preseka φ u uzastopni razlomak izgleda prilično elegantno.

□

Primeri 2.2.2 i 2.2.15 su dovoljni da se postavi hipoteza da jednostavni periodični uzastopni razlomci predstavljaju neke algebarske iracionalne brojeve. Da bi se izneli zaključci do kojih se došlo potrebno je uvesti sledeću definiciju.

Definicija 2.2.16. Realan broj x je *kvadratna iracionalnost* ako je koren kvadratne jednačine sa celobrojnim koeficijentima i pozitivnom diskriminantom.

Ova definicija je ekvivalentna tvrđenju da je realan broj x kvadratna iracionalnost ako i samo ako se može zapisati u obliku $x = q + r\sqrt{d}$, gde je $q, r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ i d prirodan broj koji nije potpun kvadrat prirodnog broja.

Poznati matematičar Žozef Luj Lagranž dokazao je 1770. godine da se svaka kvadratna iracionalnost može napisati u obliku jednostavnog periodičnog uzastopnog razlomka $[13]$. Pokazuje se da važi i obrnuto tvrđenje pa važi teorema:

Teorema 2.2.17. *Jednostvan uzastopni razlomak je periodičan ako i samo ako je jednak nekoj kvadratnoj iracionalnosti.*

Dajemo još dva primera kako se kvadratna iracionalnost može napisati kao jednostavan periodični uzastopni razlomak.

Primer 2.2.18. Predstavimo $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ u obliku jednostavnog uzastopnog razlomka.

$$\frac{3+\sqrt{15}}{2} = 3 + \frac{\sqrt{15}-3}{2} = 3 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{15}-3} \cdot \frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}+3}} = 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{15}+3}{3}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{15}-3}{3}}$$

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{15}-3} \cdot \frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}+3}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{15}+3}{2}}} = \ldots$$

Kako smo ponovo dobili $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ postupak se nadalje ponavlja, pa samim tim i dobijeni parcijalni koeficijenti, što znači da je $\frac{3+\sqrt{15}}{2} = [3,2,3,2,\ldots] = [\overline{3,2}]$.

□

Primer 2.2.19. Za $\frac{6+\sqrt{3}}{3}$ je $\frac{6+\sqrt{3}}{3}=2+\frac{\sqrt{3}}{3}=2+\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{3}}}=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Iz primera 1.1.9 imamo $\sqrt{3}=[1,1,2,1,2,1,2,...]=\left[1,\overline{1,2}\right]$, pa zaključujemo da je $\frac{6+\sqrt{3}}{3}=2+\frac{1}{\sqrt{3}}=\left[2,1,\overline{1,2}\right]$.

□

Glava 3

Složiva i težinska popločavanja

3.1 Složiva popločavanja

U ovom delu rada dajemo fundamentalnu teoremu koja objašnjava odnos između konačnih uzastopnih razlomaka i složivih popločavanja sa odgovarajućim visinskim uslovima.

Teorema 3.1.1. (*Benjamin & Quinn* $[6]$) *Posmatrajmo konačan uzastopni razlomak*

$$\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]=\frac{p_n}{q_n},$$

gde su p_n i q_n redom brojilac i imenilac n – tog konvergenta konačnog uzastopnog razlomka $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]$, a a_i ($0\le i\le n$) i b_j ($1\le j\le n$) prirodni brojevi.

Tada je, za $n\ge 0$, brojilac p_n jednak je broju složivih popločavanja $(n+1)$- trake (čija su polja numerisana od 0 do n) sa visinskim uslovima $\left(a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right)$, a imenilac q_n broju složivih popločavanja n- trake (čija su polja numerisana od 1 do n) sa visinskim uslovima $\left(a_1,(b_2,a_2),(b_3,a_3),...,(b_n,a_n)\right)$.

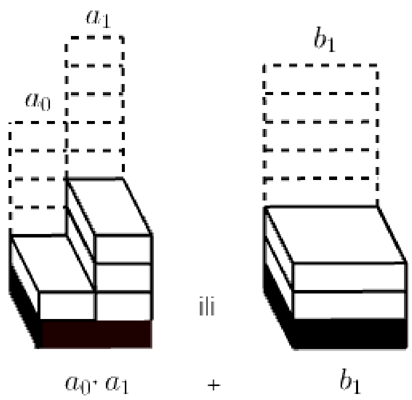
Dokaz. Prema lemi 2.1.7 za brojilac i imenilac konačnog uzastopnog razlomka $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]$ važe sledeće rekurentne veze

$$p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2}, \qquad p_0=a_0, \mathrm{p}_1=a_0a_1+b_1 \tag{3.1}$$

$$q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2}, \qquad q_0=1, \mathrm{q}_1=a_1. \tag{3.2}$$

Dokažimo deo tvrđenja vezan za brojilac datog uzastopnog razlomka.

Neka je za $n \geq 0$ sa t_n označen broj složivih popločavanja $(n+1)$- trake sa visinskim uslovima $(a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n))$. Jasno je da važi $t_0 = a_0 = p_0$ (broj popločavanja nultog polja ove trake je a_0 jer je to maksimalan broj kvadrata koji na to polje možemo naslagati). Broj načina da se poploča 2 – traka je $t_1 = a_0 a_1 + b_1$ (slika 2).



Slika 2

Ako posmatramo $(n+1)$- traku i računamo broj načina da se ona poploča u zavisnosti od toga šta je na poslednjoj pločici u popločavanju (da li naslagani kvadrati ili domine) dobijamo sledeću rekurentnu vezu $t_n = a_n t_{n-1} + b_n t_{n-2}$. Jasno je da je dobijena rekurentna veza ista kao (3.1) i da pritom ove dve rekurzije zadovoljavaju iste početne uslove. Prema tome je $p_n = t_n$ za svaki nenegativan ceo broj, što je i trebalo dokazati.

Analogno se dokazuje deo tvrđenja vezan za imenilac q_n ovog uzastopnog razlomka.

■

Prethodnu teoremu ilustruje sledeći primer. Koristimo iste oznake za pločice sa kvadratima i pločice s dominama kao u primeru 1.7.

Primer 3.1.2. Neka je dat uzastopni razlomak

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{4}}}=\left[3,(1,2),(2,1),(3,4)\right]=\frac{73}{22}\ .$$

Očigledno je $a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 4$; $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$ i $n = 3$.

Prebrojaćemo sva složiva popločavanja 4 - trake sa visinskim uslovima $\left(3,(1,2),(2,1),(3,4)\right)$. Postoji 5 tipova tih popločavanja:

- *SSSS* Ovog tipa ih je $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 24$.
- *DSS* Ovakvih ima $b_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$.
- *SSD* $a_0 \cdot a_1 \cdot b_3 = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$.
- *SDS* $a_0 \cdot b_2 \cdot a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.
- *DD* $b_1 \cdot b_3 = 1 \cdot 3 = 3$.

Dakle, ukupan broj ovakvih složivih popločavanja je $24 + 4 + 18 + 24 + 3 = 73$ što je jednako brojiocu našeg uzastopnog razlomka.

Sada ćemo videti koliko ima složivih popločavanja 3 - trake sa visinskim uslovima $\left(2,(2,1),(3,4)\right)$. To su:

- *SSS* Ima ih $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 2 \cdot 1 \cdot 4 = 8$.
- *SD* $a_1 \cdot b_3 = 2 \cdot 3 = 6$.
- *DS* $b_2 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 = 8$.

Iz prethodnog je jasno da je broj ovih složivih popločavanja jednak imeniocu našeg razlomka.

□

3.2 Težinska popločavanja

Definicija 3.2.1. Niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa $f_0 = 0, f_1 = 1$ a za $n \geq 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ naziva se *Fibonačijev*[19] *niz*, a članovi ovog niza *Fibonačijevi brojevi*.

Neka je sa $\mathcal{F}_{n-1}$ označen skup svih popločavanja n - trake u smislu definicije 1.2. Važi tvrđenje:

Lema 3.2.2. ($[6]$) *Neka je za* $n \in \mathbb{N}$ *,* $\mathcal{F}_{n-1}$ *skup svih popločavanja* n *- trake a* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *niz Fibonačijevih brojeva. Tada za svaki prirodan broj n važi* $|\mathcal{F}_{n-1}| = f_{n+1}$.

Dokaz. Za $n \geq 0$, posmatrajmo složiva popločavanja $(n+1)$ - trake sa visinskim uslovima $a_i = b_j = 1$ za $0 \leq i \leq n$ i $1 \leq j \leq n$. Broj ovih popločavanja smo obeležili sa t_n. Očigledno je da je za svaki nenegativan ceo broj n ispunjeno $t_n = |\mathcal{F}_n|$. Definišemo $t_{-1} := 1$. Jasno je da važi $t_0 = 1$. Za $n \geq 1$, važi formula $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ (prebrojavamo popločavanja $(n+1)$ - trake u zavisnosti od toga da li se popločavanje završava kvadratom ili dominom). Prema tome, imamo da za svaki nenegativan ceo broj n važi $t_{n-1} = f_{n+1}$, tj. za svaki prirodan broj n je $|\mathcal{F}_{n-1}| = f_{n+1}$.

∎

Napomena 3.2.3. Zbog praznog popločavanja 0 - trake jednakost iz prethodne leme je tačna i za $n = 0$. Ako uvedemo $|\mathcal{F}_{-2}| := 0$, jednakost $|\mathcal{F}_{n-1}| = f_{n+1}$ će važiti i za $n = -1$.

Definicija 3.2.4. Neka su $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ i $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ nizovi realnih brojeva. Za proizvoljan prirodan broj n i dato $T \in \mathcal{F}_{n-1}$, svakoj pločici ovog popločavanja dodeljujemo realan broj na sledeći način:

[19] Leonardo Fibonacci (1170-1250) - italijanski matematičar

1) ako kvadrat pokriva polje k ($0 \le k \le n-1$), onda mu dodeljujemo broj a_k

2) ako domina pokriva polja $l-1$ i l (ili drugačije rečeno, domina pokriva l- tu granicu između susednih polja, $1 \le l \le n-1$), onda joj dodeljujemo broj b_l.

Za pločicu popločavanja T, broj koji joj je dodeljen na opisani način nazivamo *težina pločice*.

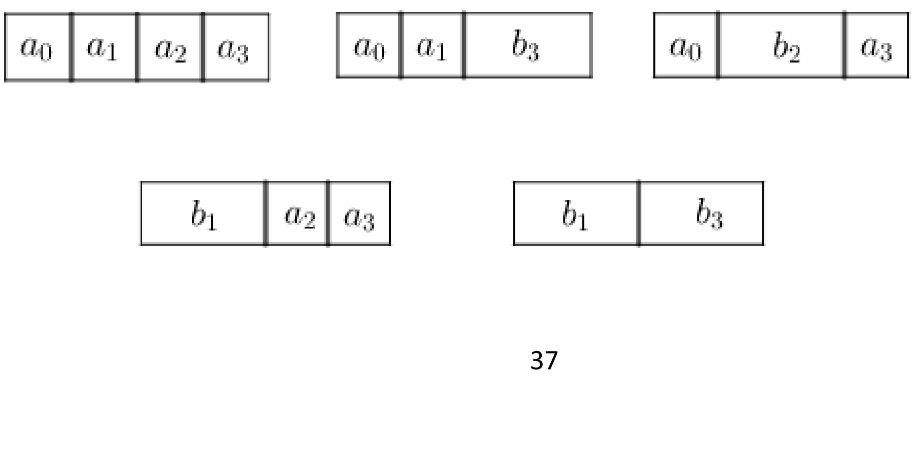
Definicija 3.2.5. Za $n \in \mathbb{N}$ i $T \in \mathcal{F}_{n-1}$ sa $\omega(T)$ označavamo proizvod težina svih pločica koje figurišu u popločavanju T. Broj $\omega(T)$ nazivamo *težina popločavanja* T.

Definicija 3.2.6. Za nizove realnih brojeva $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ i $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ i n- traku kojoj su članovi ovih nizova dodeljeni u smislu definicije 3.2.4, definišemo *težinsku sumu*, u oznaci $|0:n-1|$, kao zbir težina svih mogućih popločavanja date n- trake, tj. važi

$$|0:n-1| := \sum_{T\in\mathcal{F}_{n-1}} \omega(T).$$

Napomena 3.2.7. Za $n \in \mathbb{N}$ i cele brojeve i i j takve da je $0 \le i \le j \le n-1$, sa $|i:j|$ označavamo težinsku sumu podtrake date n- trake kojoj su polja numerisana od i do j. Na primer, $|i:i| = a_i$ za sve i ($0 \le i \le n-1$), dok je $|i:i+1| = a_i a_{i+1} + b_{i+1}$ za sve i, $0 \le i \le n-2$. Prethodna definicija se može proširiti za $n=0$ i $n=-1$ sa $|0:-1| := 1$ i $|0:-2| := 0$. Slično, za $i \ge 1$ definišemo i $|i:i-1| := 1$ i $|i:i-2| := 0$.

Primer 3.2.8. Za zadatu 4 – traku i nizove realnih brojeva $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ i $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, odredimo $|0:3|$. Na slikama ispod, prikazana su sva popločavanja 4 – trake pri čemu su na svakoj pločici ovih popločavanja napisane njihove težine.



Dakle, $|0:3| = a_0a_1a_2a_3 + a_0a_1b_3 + a_0b_2a_3 + b_1a_2a_3 + b_1b_3$.

□

Lema 3.2.9. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *i* $i, j, k \in \mathbb{Z}$ *takve da je* $0 \le i \le k \le j \le n-1$*, važi*
$|i:j| = |i:k-1||k:j| + b_k|i:k-2||k+1:j|$.

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja:

1° $k = i$. Tada zbog $|i:i-1| = 1$ i $|i:i-2| = 0$ imamo
$|i:k-1||k:j| + b_k|i:k-2||k+1:j| = |i:i-1||i:j| + b_i|i:i-2||i+1:j| = |i:j|$.

2° $k > i$. Kako je $i < k \le j$, broj k možemo posmatrati kao k- tu granicu početne n- trake koja je i granica podtrake koja počinje poljem i a završava se poljem j. Ako se u popločavanjima ove podtrake na poljima $k-1$ i k ne nalazi ista domina, onda je zbir težina takvih popločavanja jednak $|i:k-1||k:j|$. S druge strane, ako posmatramo sva popločavanja ove podtrake u kojim polja $k-1$ i k pokriva jedna ista domina, onda je zbir težina takvih popločavanja $b_k|i:k-2||k+1:j|$. Kako su na ovaj način razmatrana sva popločavanja date podtrake, važi $|i:j| = |i:k-1||k:j| + b_k|i:k-2||k+1:j|$, što je i trebalo da se se dokaže.

■

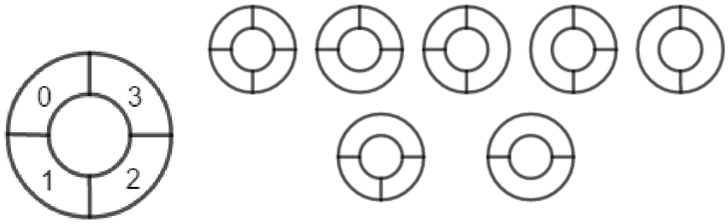
Napomena 3.2.10. Ako je u prethodnoj lemi $k = i+1$ dobijamo

$$|i:j| = a_i|i+1:j| + b_{i+1}|i+2:j| , \tag{3.3}$$

a za $k = j$ imamo da je $|i:j| = a_j|i:j-1| + b_j|i:j-2|$. (3.4)

Zamislimo sada da n- traku savijemo tako da od nje formiramo kružnu traku (nalik na selotejp ili narukvicu) koja će takođe imati n polja (“kružni kvadrati”). Za $n \ge 2$, jedina suštinska razlika između n- trake i kružne n- trake je što kružna n- traka ima jednu granicu više između susednih polja. Naime, kod kružne n- trake susedna su i polja numerisana sa 0 i $n-1$. Prema tome, sve definicije uvedene u uvodu koje se odnose na n- traku zadržavamo i za kružnu traku uz izvesne logične korekcije koje su tehničke i terminološke prirode.

Razmatramo sada problem popločavanja kružne n - trake. Naravno, pritom se popločavanja kružne n - trake vrše “kružnim kvadratima” i “kružnim dominama”[20]. Za definiciju ovakvih popločavanja može se uzeti definicija 1.2. Za $n \geq 1$, označimo sa $\mathcal{L}_{n-1}$ skup svih popločavanja kružne n - trake. Elemente ovog skupa nazivamo *Lukasove*[21] *n - narukvice* ili kraće *n - narukvice*. Ako u n - narukvici granicu između polja 0 i $n-1$ pokriva domina, onda za tu n - narukvicu kažemo da je *van faze*; u suprotnom je n - narukvica *u fazi*.



Slika 3. Levo je prikazana kružna 4 – traka sa numerisanim poljima, a desno sve 4 – narukvice. U prvom redu su narukvice u fazi, a u drugom redu su 4 – narukvice van faze.[22]

Da bi dali odgovor na pitanje koliko n - narukvica postoji za dati prirodan broj n, potrebna nam je sledeća definicija.

Definicija 3.2.11. Niz $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa $l_0 = 2, l_1 = 1$ a za $n \geq 2, l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ naziva se *Lukasov niz*, a članovi ovog niza *Lukasovi brojevi*.

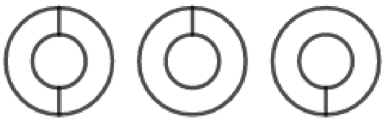
Lema 3.2.12. *Za $n \in \mathbb{N}$, broj n – narukvica jednak je n – tom članu Lukasovog niza, tj. važi $|\mathcal{L}_{n-1}| = l_n$.*

Dokaz. Za $n = 1$, jasno je da imamo samo jednu 1 - narukvicu, pa važi $\mathcal{L}_0 = l_1$.

---

[20] Kružni kvadrati i kružne domine su objekti koje dobijamo od kvadrata i domina prilikom savijanja proizvoljnog popločavanja (koje sadrži bar po jednu dominu i jedan kvadrat) n – trake u kružnu n – traku.
[21] Edouard Lucas (1842 – 1891) – francuski matematičar
[22] Kružna traka je radi jednostavnosti crteža prikazana kao kružni prsten

Za $n = 2$, imamo tri 2 - narukvice (slika 4).



Slika 4. Narukvice dužine 2

Prema tome je $\mathcal{L}_1 = l_2$.

Najpre ćemo objasniti kako numerišemo pločice proizvoljne n - narukvice čija je dužina ne manja od 3. Pločica koja pokriva polje 0 kružne n - trake (bilo da je u pitanju kružni kvadrat, kružna domina koja pokriva polja 0 i 1, ili kružna domina koja pokriva polja 0 i n) je prva pločica. Druga pločica je sledeća pločica u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, itd. Prema tome, poslednja pločica je ona koja prethodi prvoj. Kako prva pločica određuje faznost n - narukvice, postoji $\mathcal{L}_{n-2}$ n - narukvica kojima je poslednja pločica kružni kvadrat i $\mathcal{L}_{n-3}$ n - narukvica kod kojih je poslednja pločica kružna domina (jasno je da odsecanjem poslednje pločice od svake n - narukvice pa spajanjem ostatka u novu narukvicu, generišemo sve narukvice dužine $n-1$ i $n-2$). Dakle, za $n \geq 3$ važi $\mathcal{L}_{n-1} = \mathcal{L}_{n-2} + \mathcal{L}_{n-3}$.

Na osnovu prethodno rečenog i definicije 3.2.11 sledi $\mathcal{L}_{n-1} = l_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

■

Napomena 3.2.13. Ako uzmemo da je $\mathcal{L}_{-1} := 2$, onda će jednakost $\mathcal{L}_{n-1} = l_n$ važiti i za $n = 0$.

Da bismo definisali težinu n - narukvice proširićemo neznatno definiciju 3.2.4. Pored težina koje su u ovoj definiciji uvedene, "kružnoj pločici" koja pokriva polja 0 i $n-1$ (tj. n - tu granicu) dodeljujemo broj b_n. Jasno, tada je težina date n - narukvice T, u oznaci $\omega(T)$, jednaka proizvodu težina svih pločica koje u njoj figurišu. Prirodno je uvesti i narednu definiciju.

Definicija 3.2.14. *Za nizove realnih brojeva* $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *i* $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *i kružnu* n *- traku, težinska suma* $|0::n-1|$ *predstavlja zbir težina svih* n *- narukvica, tj. važi* $|0::n-1| := \sum_{T\in\mathcal{L}_{n-1}} \omega(T)$.

Lema 3.2.15. *Za svaki prirodan broj* n *važi* $|0::n-1| = |0:n-1| + b_n|1:n-2|$.

Dokaz. Za $n=1$ je $|0:1-1| + b_1|1:1-2| = |0:0| + b_1|1:-1| = |0:0| = a_0 = |0::0|$.

Ako je $n \geq 2$ razmatramo dva slučaja:

1° n- narukvica je u fazi. Tada se "rezom" po n- toj granici n- narukvice dobija tačno jedno popločavanje n- trake, očigledno iste težine kao početna n- narukvica. Kako je proces obostran (možemo od svakog popločavanja n- trake dobiti tačno jednu n- narukvicu iste težine) zaključujemo da je zbir težina ovakvih n- narukvica jednak $|0:n-1|$.

2° n- narukvica je van faze. Tada je težina kružne domine koja pokriva polja 0 i $n-1$, jednaka b_n . Ako isečemo tu kružnu dominu iz početne n- narukvice, dobijamo popločavanje $(n-2)$ - trake sa početnim poljem 1 i poslednjim poljem $n-2$. Težinska suma popločavanja ovakve $(n-2)$ - trake je $|1:n-2|$, a zbir težina odgovarajućih n- narukvica je $b_n|1:n-2|$.

Imajući u vidu slučajeve 1° i 2°, dobijamo $|0::n-1| = |0:n-1| + b_n|1:n-2|$, što je i trebalo da se dokaže.

■

Napomena 3.2.16. Podtraka kružne n – trake koja počinje poljem i a završava se poljem j se formira tako što od kružne n – trake sa dva reza po i – toj i $(j+1)$ – oj granici odseče potrebni deo trake a onda se dobijena traka savije u kružnu traku.

Za prirodan broj n i cele brojeve i i j takve da je $0 \le i \le j \le n-1$, sa $|i :: j|$ označavamo težinsku sumu podtrake date kružne n - trake kojoj su polja numerisana od i do j. Na primer, važi $|i :: i| = a_i$ a za $i \ne n-1$ i $|i :: i+1| = a_i a_{i+1} + b_{i+1} + b_{i+2}$. Za potrebe narednih tvrđenja definišemo $|i :: i-1| := 2$.

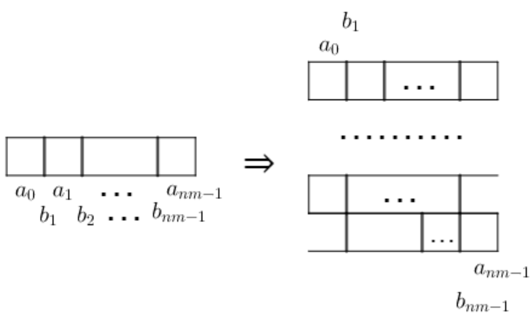
Primer 3.2.17. Za zadatu kružnu 4 – traku i nizove realnih brojeva $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ i $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, odredimo $|0 :: 3|$. Na osnovu leme 3.2.15 i primera 3.2.8 imamo

$$|0::3| = |0:3| + b_4|1:2| = |0:3| + b_4(a_1a_2 + b_2) = |0:3| + b_4a_1a_2 + b_4b_2 =$$

$$a_0a_1a_2a_3 + a_0a_1b_3 + a_0b_2a_3 + b_1a_2a_3 + b_1b_3 + b_4a_1a_2 + b_4b_2.$$

□

Neka su sada nizovi realnih brojeva $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ i $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ periodični sa osnovnim periodima redom a i b. *Za prirodan broj* m *takav da* $NZS(a,b)|m$ *posmatrajmo* nm *- traku (čija su polja numerisana od* 0 *do* $nm-1$*) čijim su poljima i granicama dodeljeni članovi nizova* $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *i* $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *kao u definiciji 3.2.4. Tada za ovu traku kažemo da je perioda* m. Neka je T jedno popločavanje ovakve nm - trake. Tada se ono može posmatrati kao popločavanje pravougaone mreže dimenzija $n \times m$ koje se dobija tako što se T iseče na n delova od po m polja, pa se dobijene m - trake slože prirodnim redosledom jedna ispod druge. Prilikom ovog postupka se može desiti da leva polovina neke domine završava jedan a desna polovina te domine počinje drugi red (vidi sliku 5). Primetimo da je pritom svim poljima u istoj koloni mreže dodeljen isti broj.



Slika 5. Popločavanje nm – trake perioda m se može posmatrati kao popločavanje pravougaone mreže dimenzija $n \times m$

Sledeća lema koristi sličan način razmišljanja koji je iznet u redovima iznad. Naime, ona popločavanje trake razbija u dva reda (u opštem slučaju redovi ne moraju imati jednak broj polja) tako da je poljima u istim kolonama dodeljen isti realan broj.

Lema 3.2.18. *Za ceo broj $j \geq -1$ i nizove realnih brojeva $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ i $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ perioda m koji su dodeljeni $(j+2m+1)$- traci, važi*

$$|0:j+2m| = L|0:j+m| + \beta|0:j|,$$

gde su $L = |j+m+1::j+2m|$ *i* $\beta = (-1)^{m+1}\prod_{k=1}^{m} b_k$.

Dokaz. Razmotrimo dva slučaja:

1° $m = 1$. Tada za dobijenu $(j+3)$- traku na osnovu jednakosti (3.4) i periodičnosti niza $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ važi

$$|0:j+2| = a_{j+2}|0:j+1| + b_{j+2}|0:j| = |j+2:j+2||0:j+1| + b_1|0:j| =$$

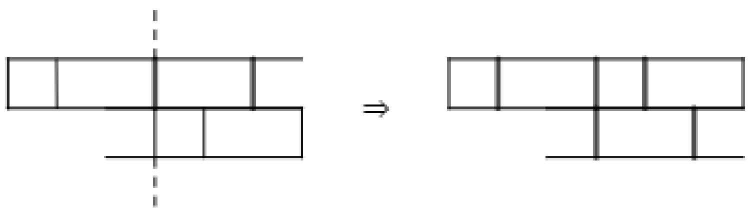
$$|j+1+1::j+2\cdot 1||0:j+1| + (-1)^{1+1}\prod_{k=1}^{1} b_k|0:j| = L|0:j+1| + \beta|0:j|.$$

2° Neka je $m > 1$ i $T \in \mathcal{F}_{j+2m}$. Podelimo popločavanje T u dva paralelna reda, od kojih je prvi dužine $j+m+1$ a drugi dužine m. Pritom, kraći red se nalazi ispod dužeg i oni su „desno poravnani".[23] Kao što je već objašnjeno, ako se u T na poljima $j+m$ i $j+m+1$ nalazi domina, onda se prilikom ovakve podele popločavanja u dva reda prvi red završava levom polovinom domine a drugi red počinje njenom desnom polovinom. Ako je l pozitivan ceo broj, gde je $j+1 \leq l \leq j+m+1$, takav

[23] Ova dva reda su „desno poravnani" ako za svako i takvo da je $j+1 \leq i \leq j+m$, važi da su polja i i $i+m$ u istoj koloni.

da nijedna od granica l i $l+m$ nije pokrivena dominom, kažemo da popločavanje T *ima grešku* na granici l.

Posmatramo najpre ona popločavanja koja imaju bar jednu grešku, pa stoga pretpostavimo da je T jedno takvo popločavanje. Neka je za dato popločavanje T, $g := \max\{l : T \text{ ima grešku na granici } l\}$. Zamenimo deo prvog reda desno od granice g sa delom drugog reda desno od granice $g+m$.[24] Na ovaj način dobijamo jedan par popločavanja. Prvi red je popločavanje $(j+m+1)$- trake, dok je drugo popločavanje m - narukvica (ono može početi i završiti se polovinom domine, pa se savijanjem može dobiti i narukvica van faze) čije je prvo polje $j+m+1$, a poslednje $j+2m$. Ovaj postupak zamene delova popločavanja ilustrovan je na slici 6.



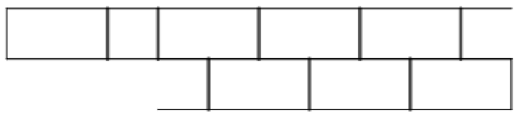
Slika 6. Prikazano je 10 – popločavanje sa greškom na trećoj granici (levo), a na slici desno prikazani su 6 – popločavanje u prvom redu i 4 – narukvica van faze u drugom redu koji se dobijaju postupkom zamene delova (tailswaping) od početnog 10 – popločavanja

Primetimo da je opisani postupak reverzibilan jer ne menja mesto poslednje greške. On takođe zbog periodičnosti nizova $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ i $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ očuvava težinu (proizvod težina pločica) popločavanja. Na ovaj način smo pokazali da postoji bijektivno preslikavanje između skupa svih popločavanja $(j+2m+1)$- trake koja imaju grešku i podskupa od $\mathcal{F}_{j+m} \times \mathcal{L}_{m-1}$ koji takođe čine elementi s greškom.

[24] Ovakva tehnika zamene delova popločavanja se zove tailswaping (zamena pločica) tehnika.

Ostaje da u skupovima $\mathcal{F}_{j+2m}$ i $\mathcal{F}_{j+m} \times \mathcal{L}_{m-1}$ nađemo sve elemente bez greške. Razmatramo dva slučaja:

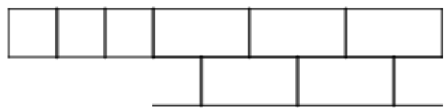
1) Broj m je neparan. Posmatrajmo proizvoljnu formaciju od dva reda bez grešaka. Prvi red ove formacije počinje nekim $(j+1)$ - popločavanjem na koje se nadovezuje $\dfrac{m-1}{2}$ domina, a završava se polovinom domine. Drugi red počinje polovinom domine na koju se nadovezuje $\dfrac{m-1}{2}$ domina. Jasno je da je svaka takva formacija element skupa $\mathcal{F}_{j+2m}$ (slika 7).



Slika 7. Za $j=2$, $m=7$ jedna od ukupno tri formacije bez greške

Težina svake od ovih formacija se može računati tako što se težina popločavanja $(j+1)$- trake kojom počinje prvi red pomnoži sa težinom preostalog dela popločavanja koje se sastoji od m domina (težina dela koji se sastoji samo od domina je zbog periodičnosti uvek $\prod_{k=1}^{m} b_k$). Dakle, ukupna težina ovakvih formacija jednaka je $\prod_{k=1}^{m} b_k \cdot \sum_{P \in \mathcal{F}_j} \omega(P) = (-1)^{m+1} \prod_{k=1}^{m} b_k \cdot |0:j| = \beta \cdot |0:j|$. Imajući u vidu prethodno rečeno, zaključujemo da od zbira težina svih popločavanja $(j+2m+1)$- trake treba oduzeti zbir težina popločavanja $(j+2m+1)$- trake bez greške da bi se dobio zbir težina svih elemenata skupa $\mathcal{F}_{j+m} \times \mathcal{L}_{m-1}$, tj. da važi $|0:j+2m| = L|0:j+m| + \beta|0:j|$.

2) Broj m je paran. Posmatrajmo formaciju od dva reda bez grešaka. Pošto je m parno, ta formacija predstavlja popločavanje jedne $(j+m+1)$ - trake i kružne m - trake koje nije popločavanje $(j+2m+1)$ - trake. Prvi red ovakvih formacija sastoji se od proizvoljnog $(j+1)$ - popločavanja na koje se nadovezuje $\frac{m}{2}$ domina. Drugi red počinje desnom polovinom domine na koju se nadovezuje $\frac{m-2}{2}$ domina i završava se levom polovinom domine (slika 8). Dakle, sve ovakve formacije su elementi skupa $\mathcal{F}_{j+m} \times \mathcal{L}_{m-1}$.



Slika 8. Za $j = 2, m = 6$ jedna od ukupno tri formacije bez greške

Slično kao u slučaju 1) dolazimo do toga da je zbir težina ovih formacija $\beta \cdot |0:j|$ pa s obzirom da je m paran a da su formacije elementi skupa $\mathcal{F}_{j+m} \times \mathcal{L}_{m-1}$, dobijamo $|0:j+2m| = L|0:j+m| + \beta|0:j|$.

Time je dokaz završen.

■

Napomena 3.2.19. Jasno je da zbog periodičnosti nizova $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *i* $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ važi $L = |0::m-1|$, što ćemo ubuduće koristiti.

Napomena 3.2.20. Slično kao lema 3.2.18. može se pokazati da važi i

$$|i:j+2m| = L|i:j+m| + \beta|i:j|, \text{ za } 0 \le i \le j. \tag{3.5}$$

Posledica 3.2.21. *Ako uvedemo oznaku* $G_n = |0:nm-1|$ *gde je* n *nenegativan ceo broj a* m *period nizova realnih brojeva* $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *i* $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *, tada važi*

$$G_{n+2} = LG_{n+1} + \beta G_n \tag{3.6}$$

gde su $G_0 = 1$ *i* $G_1 = |0:m-1|$.

Dokaz. Ako u jednakost iz leme 3.2.18. uvrstimo $j = nm-1$ dobijamo jednakost (3.6).

■

Sledeće tvrđenje je centralno tvrđenje ovog dela. Ono govori o tome kako je moguće skup popločavanja proizvoljne trake perioda m svesti na skup popločavanja takozvane "skoro periodične trake perioda 1", tj. trake koja je periodična ako zanemarimo nulti član niza $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$, tj. ako ignorišemo prvo polje trake.

Teorema 3.2.22. (Prva teorema kompresije) *Ako je nm- traka perioda m ,gde je* $n\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{N}$, *tada važi*

$$|0:nm-1| = \|0:n-1\|,$$

gde je za $n\geq 1$ *sa* $\|0:n-1\|$ *označena težinska suma popločavanja* n*- trake čije su težine određene periodičnim nizovima realnih brojeva perioda 1,* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *i* $\{B_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ *koji su definisani sa:*

$A_0 = |0:m-1|$, *a* $A_i = L = |0::m-1|$, *za sve* $i\in\mathbb{N}$ *i*

$B_l = \beta = (-1)^{m+1}\prod_{k=1}^{m} b_k$ *za sve* $l\in\mathbb{N}$,

dok je $\|0:-1\| = 1$ *po definiciji.*

Dokaz. Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po n.

Baza indukcije. Za $n=0$ je $|0:-1| = 1 = \|0:-1\|$, a za $n=1$ je $|0:m-1| = A_0 = \|0:0\|$.

Induktivni korak. Za $n\geq 2$, pretpostavimo da za svaki nenegativan ceo broj k, gde je $k<n$, važi $|0:km-1| = \|0:k-1\|$ i pokažimo da tada tvrđenje važi i za $k=n$. Iz jednakosti (3.6) i induktivne hipoteze imamo

$|0:nm-1| = G_n = LG_{n-1} + \beta G_{n-2} = L|0:(n-1)m-1| + \beta|0:(n-2)m-1| =$

$L\|0:(n-1)-1\| + \beta\|0:(n-2)-1\| = L\|0:n-2\| + \beta\|0:n-3\| =$

$A_{n-1}\|0:n-2\| + B_{n-1}\|0:n-3\| = \|0:n-1\|$, gde se poslednja jednakost dobija iz (3.4) za $i=0$ i $j=n-1$.

■

Na sličan način se može dokazati i sledeća teorema.

Teorema 3.2.23. (Druga teorema kompresije $[5]$)

Za nm-traku perioda m i $n \in \mathbb{N}_0$ *važi* $|1:nm-1| = |1:m-1|\|1:n-1\|$.

Glava 4

Primena u teoriji brojeva

U ovoj glavi ćemo posmatrati isključivo jednostavne uzastopne razlomke čiji su svi parcijalni koeficijenti prirodni brojevi.

4.1 Veza uzastopnih razlomaka i popločavanja sa Fibonačijevim i Lukasovim brojevima

U ovom delu rada videćemo kako se odnosi između nekih članova Fibonačijevog (Lukasovog) niza brojeva mogu opisati uzastopnim razlomcima. Takođe ćemo uočiti da se preko uzastopnih razlomaka mogu opisati odnosi između uzastopnih članova još jedne klase rekurzivno zadatih nizova.

Iz teoreme 3.1.1 i leme 3.2.2 dobija se sledeće tvrđenje.

Posledica 4.1.1. *Za svaki nenegativan ceo broj n važi* $\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n+1}\right] = \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$.

Dakle, svaki uzastopni razlomak oblika $\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n}\right]$ jednak je količniku dva uzastopna Fibonačijeva broja. Ako posmatramo beskonačan uzastopni razlomak $[1,1,1,...]$ za koji smo u primeru 2.2.15 videli da je jednak zlatnom preseku, dolazimo do zaključka da niz količnika uzastopnih Fibonačijevih brojeva konvergira ka zlatnom preseku.

Postavlja se pitanje: Da li slične osobine ima niz Lukasovih brojeva?

Teorema 4.1.2. *Za svaki nenegativan ceo broj* n *važi* $\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n},3\right] = \dfrac{l_{n+2}}{l_{n+1}}$.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom.

Baza indukcije. Za $n=0$ je $[3]=\frac{3}{1}=\frac{l_2}{l_1}$.

Induktivni korak. Neka za $k=n$ važi $\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n},3\right]=\frac{l_{n+2}}{l_{n+1}}$.

Dokažimo da tada tvrđenje važi i za $k=n+1$.

$$\frac{l_{(n+1)+2}}{l_{(n+1)+1}}=\frac{l_{n+3}}{l_{n+2}}=\frac{l_{n+2}+l_{n+1}}{l_{n+2}}=1+\frac{l_{n+1}}{l_{n+2}}=1+\frac{1}{\frac{l_{n+2}}{l_{n+1}}}=1+\frac{1}{\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n},3\right]}=\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n+1},3\right].$$

Ovim je dokaz završen.

■

Teorema 4.1.3. *Ako je* $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *niz Lukasovih brojeva, onda je* $\lim_{n\to\infty}\frac{l_{n+1}}{l_n}=\varphi$,

gde je $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *zlatni presek.*

Dokaz. Ideja je da se za $n\geq 2$, $\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n-1},3\right]=\frac{l_{n+1}}{l_n}$ predstavi preko Fibonačijevih brojeva.

Prema teoremi 3.1.1 brojilac p_{n-1} uzastopnog razlomka $\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n-1},3\right]$ jednak je broju složivih popločavanja n - trake sa visinskim uslovima $a_i=1, 0\leq i\leq n-2, a_{n-1}=3, b_j=1, 1\leq j\leq n-1$. Iz leme 3.2.2 sledi da je broj takvih popločavanja koja se završavaju kvadratom je $3\cdot f_n$ a koja se završavaju dominom f_{n-1}. Dakle, $p_{n-1}=f_{n-1}+3f_n$.

Analogno je imenilac razlomka $\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n-1},3\right], q_{n-1}=f_{n-2}+3f_{n-1}$.

Dalje je za $n\geq 2$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_{n+1}}{l_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{1,1,...,1}_{n-1},3\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n-1}+3f_n}{f_{n-2}+3f_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n-1}+3f_n}{2f_{n-1}+f_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{f_{n-1}}{f_{n-1}}+3\frac{f_n}{f_{n-1}}}{2\frac{f_{n-1}}{f_{n-1}}+\frac{f_n}{f_{n-1}}}=$$

$$\frac{1+3\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{5+3\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{5+3\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{10+10\sqrt{5}}{20}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi .$$

■

Videli smo da niz količnika uzastopnih Fibonačijevih brojeva konvergira ka zlatnom preseku. Može se pokazati da članovi ovog niza predstavljaju dobre aproksimacije za broj φ (vidi [9]). Prirodno se nameće pitanje: Da li slično važi i za neke druge nizove količnika Fibonačijevih brojeva? Delimični odgovor na to pitanje daje sledeći primer.

Primer 4.1.4. Dokažimo da za svaki nenegativan ceo broj n važi $\left[\underbrace{4,4,...,4}_{n+1}\right]=\frac{f_{3n+6}}{f_{3n+3}}$.

Dokazujemo tvrđenje indukcijom.

Baza indukcije. Za $n=0$ je $[4]=\frac{4}{1}=\frac{8}{2}=\frac{f_6}{f_3}$.

Induktivni korak. Pretpostavimo da tvrđenje važi za neko $k=n$, tj. neka je

$\left[\underbrace{4,4,...,4}_{n+1}\right]=\frac{f_{3n+6}}{f_{3n+3}}$ i dokažimo da tada ono važi i za $k=n+1$.

$$\frac{f_{3(n+1)+6}}{f_{3(n+1)+3}} = \frac{f_{3n+9}}{f_{3n+6}} = \frac{f_{3n+8}+f_{3n+7}}{f_{3n+6}} = \frac{2f_{3n+7}+f_{3n+6}}{f_{3n+6}} = \frac{3f_{3n+6}+2f_{3n+5}}{f_{3n+6}} =$$

$$\frac{3f_{3n+6}+f_{3n+5}+f_{3n+4}+f_{3n+3}}{f_{3n+6}} = \frac{3f_{3n+6}+f_{3n+6}+f_{3n+3}}{f_{3n+6}} = \frac{4f_{3n+6}+f_{3n+3}}{f_{3n+6}} = 4+\frac{f_{3n+3}}{f_{3n+6}} =$$

$4+\dfrac{1}{\dfrac{f_{3n+6}}{f_{3n+3}}} = 4+\dfrac{1}{\left[\underbrace{4,4,...,4}_{n+1}\right]} = \left[\underbrace{4,4,...,4}_{n+2}\right]$, što je i trebalo da se pokaže.

Kako je beskonačni uzastopni razlomak $[4,4,...] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\underbrace{4,4,...,4}_{n}\right]$ periodičan, on je jednak nekoj kvadratnoj iracionalnosti pa zaključujemo da ka tom broju konvergira i niz količnika $\left\{\dfrac{f_{3n+3}}{f_{3n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ostaje samo da vidimo koji je broj u pitanju.

Za tu svrhu označimo $[4,4,...] = 4+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{4+\ddots}}$ sa x. Odavde je $4+\dfrac{1}{x} = x$.

Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobija se $x_{1,2} = 2\pm\sqrt{5}$. Kako je $x>0$ važi $x = 2+\sqrt{5}$.

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_{3n+3}}{f_{3n}} = 2+\sqrt{5}$.

□

Sledeća teorema daje jedno interesantno uopštenje posledice 4.1.1 i primera 4.1.4.

Teorema 4.1.5. *Za prirodne brojeve s i d, neka je* $u_0 = 1, \mathrm{u}_1 = s$ *a za* $n \geq 2$ $u_n = su_{n-1}+du_{n-2}$. *Tada je* $\left[s,\underbrace{(\mathrm{d},s),(\mathrm{d},s),...,(\mathrm{d},s)}_{n}\right] = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Dokaz. Za $n \geq 0$, neka je t_n broj složivih popločavanja $(n+1)$ - trake sa visinskim uslovima $\left(s, \underbrace{(\mathrm{d}, s),(\mathrm{d}, s),\ldots,(\mathrm{d}, s)}_{n}\right)$. Imamo $t_{-1} := 1$ i trivijalno $t_0 = s$. U zavisnosti da li se popločavanje $(n+1)$ - trake sa zadatim visinskim uslovima završava kvadratima ili dominama, za $n \geq 1$ dobijamo vezu $t_n = st_{n-1} + dt_{n-2}$. Odavde zaključujemo da za svaki nenegativan ceo broj n važi $u_n = t_{n-1}$. Dalje, na osnovu teoreme 3.1.1 sledi

$$\left[s, \underbrace{(\mathrm{d}, s),(\mathrm{d}, s),\ldots,(\mathrm{d}, s)}_{n}\right] = \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

■

4.2 Prikazivanje prostih brojeva oblika $4k+1, k \in \mathbb{N}$ kao zbira kvadrata dva prirodna broja

Označimo sa $t(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$ broj složivih popločavanja $(j-i+1)$ - trake sa visinskim uslovima $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$, gde su i i j takvi da važi, $0 \leq i \leq j$ i $a_k \in \mathbb{N}$ za sve k, $i \leq k \leq j$.

Za prirodan broj $n \geq 2$, ako prebrojavamo popločavanja $(n+1)$- trake sa visinskim uslovima $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ u zavisnosti od toga da li se na poslednjem polju trake nalaze naslagani kvadrati ili domina, dobijamo

$$t(a_0, \ldots, a_n) = a_n t(a_0, \ldots, a_{n-1}) + t(a_0, \ldots, a_{n-2}), \tag{4.1}$$

a za $n = 1$ je $t(a_0, a_1) = a_1 t(a_0) + 1$.

Slično za cele brojeve n i l, gde je $n \geq 2$ i $0 \leq l \leq n-2$, važi

$$t(a_0, \ldots, a_n) = t(a_0, \ldots, a_l) t(a_{l+1}, \ldots, a_n) + t(a_0, \ldots, a_{l-1}) t(a_{l+2}, \ldots, a_n), \tag{4.2}$$

dok za $n=1$ imamo, $t(a_0,a_1)=t(a_0)t(a_1)+1$.

(prvi proizvod u jednakosti (4.2) računa broj složivih popločavanja $(n+1)$ - trake sa visinskim uslovima $(a_0,...,a_n)$ u kojima polja l i $l+1$ nisu prekrivena istom dominom, a drugi proizvod broj takvih popločavanja u kojima se na poljima l i $l+1$ nalazi ista domina).

Očigledno, za sve $n\in\mathbb{N}_0$ na osnovu simetričnosti važi i

$$t(a_0,...,a_n)=t(a_n,...,a_0). \tag{4.3}$$

Na osnovu teoreme 3.1.1 je

$$[a_0,...,a_n]=\frac{t(a_0,...,a_n)}{t(a_1,...,a_n)}.\text{[25]} \tag{4.4}$$

Kako je $[a_0,...,a_n]$ jednostavan uzastopni razlomak, iz posledice 2.2.6 sledi da je $\frac{t(a_0,...,a_n)}{t(a_1,...,a_n)}$ nesvodljiv, tj. važi $NZD\big(t(a_0,...,a_n),t(a_1,...,a_n)\big)=1$.

Iz leme 2.2.4 i $p_n=t(a_0,...,a_n), q_n=t(a_1,...,a_n)$ direktno sledi naredno tvđenje.

Posledica 4.2.1. *Ako je* $t(a_0,...,a_n)$ *broj složivih popločavanja* $(n+1)$ - *trake sa visinskim uslovima* $(a_0,...,a_n)$, *onda važi*

$t(a_0,...,a_n)t(a_1,...,a_{n-1})-t(a_0,...,a_{n-1})t(a_1,...,a_n)=(-1)^{n-1}$, *za* $n\geq 1$.

U dokazu centralne teoreme ovog dela koriste se sledeće definicije.

Definicija 4.2.2. Za jednostavan uzastopni razlomak $[a_0,...,a_n]$ jednostavan uzastopni razlomak $[a_n,...,a_0]$ se naziva *reverzibilan*.

[25] Pritom važi baš $p_n=t(a_0,...,a_n)$ i $q_n=t(a_1,...,a_n)$, gde su p_n i q_n definisani u definiciji 1.1.5.

Definicija 4.2.3. Neka je $[a_0,...,a_n]$ jednostavan uzastopni razlomak kod kog je $a_0 \in \mathbb{N}$ i $a_n \geq 2$. Tada je on *palindrom* ako i samo ako važi $[a_0,...,a_n]=[a_n,...,a_0]$. Uzastopni razlomak $[1]$ je takođe palindrom.

Pokazaćemo kako je moguće uz pomoć uzastopnih razlomaka i popločavanja dokazati čuveno tvrđenje iz teorije brojeva.

Teorema 4.2.4. $([7])$ *Svaki prost broj oblika* $4m+1$*, gde je* m *neki prirodan broj, može se na jedinstven način prikazati kao zbir kvadrata dva prirodna broja.*

Dokaz. Neka je $p=4m+1$ posmatrani prost broj. Posmatramo one reprezentacije razlomaka $\frac{p}{i}$, $1 \leq i \leq 2m$ kao jednostavnih uzastopnih razlomaka za koje je poslednji parcijalni koeficijent ne manji od 2. Jasno je da je svaki od razlomaka $\frac{p}{i}$ veći od 2, pa važi $\frac{p}{i}=\left[a_{0_i},...,a_{n_i}\right]$, gde je $a_{0_i} \geq 2$, $a_{n_i} \geq 2$ i $n_i \geq 0$ za $1 \leq i \leq 2m$. Iz jednakosti (4.4) i (4.3) je

$$p=t\left(a_{0_i},...,a_{n_i}\right)=t\left(a_{n_i},...,a_{0_i}\right).$$

Ovo znači da $\left[a_{n_i},...,a_{0_i}\right]$ takođe ima brojilac p, pa kako su $a_{0_i} \geq 2$, $a_{n_i} \geq 2$, to je $\left[a_{n_i},...,a_{0_i}\right]=\frac{p}{j}$, za neko j, $1 \leq j \leq 2m$. Odavde zaključujemo da svaka od posmatranih $2m$ reprezentacija razlomaka $\frac{p}{i}$, $1 \leq i \leq 2m$ kao jednostavnih uzastopnih razlomaka ima svoj reverzibilni par među njima.

Kako je $\frac{p}{1}=[p]$ palindrom, on je sam sebi reverzibilan. Jasno je da među ostalih $2m-1$ razlomaka mora postojati bar još jedan koji je sam sebi reverzibilan, tj. bar još jedan palindrom. Neka je to $\frac{p}{s}=\left[a_{0_s},...,a_{n_s}\right]=\left[a_{n_s},...,a_{0_s}\right]$.

Dokazaćemo da dužina palindroma (broj parcijalnih koeficijenata) mora biti parna. Radi jednostavnijeg zapisa, izostavljaćemo slovo s u zapisu parcijalnih koficijenata uzastopnog razlomka $\frac{p}{s}=\left[a_{0_s},...,a_{n_s}\right]$. Pretpostavimo suprotno, neka je dužina palindroma $\frac{p}{s}$ neparna i iznosi $2l+3$, za neko $l\geq 0$. Tada za $l\geq 1$, koristeći redom (4.4), (4.2) i (4.3) dobijamo

$$
\begin{aligned}
p &= t\left(a_0,...,a_l,a_{l+1},a_l,...,a_0\right) \\
&= t\left(a_0,...,a_l\right)t\left(a_{l+1},...,a_0\right)+t\left(a_0,...,a_{l-1}\right)t\left(a_l,...,a_0\right) \\
&= t\left(a_0,...,a_l\right)\left(t\left(a_{l+1},...,a_0\right)+t\left(a_0,...,a_{l-1}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Kako je $t\left(a_0,...,a_l\right)\geq 2$ i $t\left(a_{l+1},...,a_0\right)+t\left(a_0,...,a_{l-1}\right)\geq 3$ (zbog $a_0\geq 2$ i $t\left(a_0,a_{-1}\right):=1$), dolazimo u kontradikciju sa činjenicom da je p prost. Na isti način, ako je $l=0$, sledi

$$p=t\left(a_0,a_1,a_0\right)=t\left(a_0\right)t\left(a_1,a_0\right)+t\left(a_0\right)=t\left(a_0\right)\left(t\left(a_1,a_0\right)+1\right),$$

što je očigledno složen broj jer su mu oba činioca prirodni brojevi veći od 1. Kontradikcija.

Dakle, palindrom $\frac{p}{s}$ je parne dužine, pa je $\frac{p}{s}=t\left(a_0,...,a_l,a_l,...,a_0\right)$, za neko $l\geq 0$. Dalje, ako je $l\geq 1$ imamo,

$$p=t\left(a_0,...,a_l,a_l,...,a_0\right)$$

$$=t(a_0,...,a_l)t(a_l,...,a_0)+t(a_0,...,a_{l-1})t(a_{l-1},...,a_0)$$

$$=\left(t(a_0,...,a_l)\right)^2+\left(t(a_0,...,a_{l-1})\right)^2.$$

Slično, ako je $l=0$, imamo

$$p=t(a_0,a_0)=t(a_0)t(a_0)+1=\left(t(a_0)\right)^2+1^2.$$

Ostaje još da pokažemo jedinstvenost predstavljanja. Neka je $p=r^2+s^2$ i $p=u^2+v^2$ za neke pozitivne cele brojeve r,s,u i v za koje važi $r>s$ i $u>v$. Kako je p prost važi $NZD(r,s)=1=NZD(u,v)$. Prema tome, $\frac{r}{s}$ i $\frac{u}{v}$ se na jedinstven način mogu predstaviti kao jednostavni uzastopni razlomci kod kojih poslednji parcijalni koeficijenti nisu manji od 2. Označimo $\frac{r}{s}=[r_0,...,r_t]$ i $\frac{u}{v}=[u_0,...,u_w]$, gde je $t,w\geq 0$ i $r_t\geq 2$, $u_w\geq 2$. Dalje, zbog praktičnijeg zapisa, izvodimo dokaz jedinstvenosti uz pretpostavku da t i w nisu manji od 2. Ako je bar jedan od brojeva t i w manji od 2, dokaz se uz neophodne korekcije zapisa izvodi potpuno analogno kao i kada to nije slučaj.

Iz (4.4) sledi $\frac{r}{s}=\frac{t(r_0,...,r_t)}{t(r_1,...,r_t)}$. Dalje je iz (4.3) i (4.2)

$$p=r^2+s^2=t(r_t,...,r_0)t(r_0,...,r_t)+t(r_t,...,r_1)t(r_1,...,r_t)=t(r_t,...,r_0,r_0,...,r_t).$$

Neka je $x=t(r_t,...,r_0,r_0,...,r_{t-1})$. Iz jednakosti (4.1) dobijamo

$p=t(r_t,...,r_0,r_0,...,r_t)=xr_t+t(r_t,...,r_0,r_0,...,r_{t-2})\geq 2x+1$. Odavde zaključujemo da je

$2\leq x\leq\frac{p-1}{2}$. Takođe, iz posledice 4.2.1.imamo

$$t(r_t,...,r_0,r_0,...,r_t)t(r_{t-1},...,r_0,r_0,...,r_{t-1})-t(r_t,...,r_0,r_0,...,r_{t-1})t(r_{t-1},...,r_0,r_0,...,r_t)=$$

$(-1)^{2t}=1$, tj. $p\cdot t(r_{t-1},...,r_0,r_0,...,r_{t-1})-x^2=1$. Dakle, $x^2\equiv -1(\bmod p)$.

Analogno dobijamo $\dfrac{u}{v}=\dfrac{t(u_0,...,u_w)}{t(u_1,...,u_w)}$, $p=t(u_w,...,u_0,u_0,...,u_w)$ i za

$y=t(u_w,...,u_0,u_0,...,u_{w-1})$ važi $2\leq y\leq \dfrac{p-1}{2}$ i $y^2\equiv -1(\bmod p)$.

Dalje, iz $x^2\equiv y^2(\bmod p)$ sledi p deli $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Kako je p prost, važi $x\equiv y(\bmod p)$ ili $x\equiv -y(\bmod p)$. Iz činjenice da su x i y između 2 i $\dfrac{p-1}{2}$ sledi $x=y$. Tada je prema (4.4)

$$[r_t,...,r_0,r_0,...,r_t]=\frac{t(r_t,...,r_0,r_0,...,r_t)}{t(r_{t-1},...,r_0,r_0,...,r_t)}=\frac{p}{x}=\frac{p}{y}$$

$$=\frac{t(u_w,...,\mathrm{u}_0,\mathrm{u}_0,...,\mathrm{u}_w)}{t(u_{w-1},...,\mathrm{u}_0,\mathrm{u}_0,...,\mathrm{u}_w)}=[u_w,...,\mathrm{u}_0,\mathrm{u}_0,...,\mathrm{u}_w],$$

a zbog jedinstvenosti razvoja razlomka u jednostavan konačan uzastopni razlomak (jer su $r_t\geq 2$ i $u_w\geq 2$) važi $t=w$ i $r_i=u_i$ za sve i, $0\leq i\leq t$. Kao direktnu posledicu ovoga dobijamo $\dfrac{r}{s}=[r_0,...,r_t]=[u_0,...,u_w]=\dfrac{u}{v}$ odakle je $r=u$ i $s=v$, čime je dokaz kompletiran.

■

Primer 4.2.5. Koristeći isti način razmišljanja kao u dokazu prethodne teoreme, napisaćemo prost broj 17 kao zbir kvadrata dva prirodna broja. Najpre, napišemo sve razlomke $\dfrac{17}{i}$, $1\leq i\leq 8$ u obliku jednostavnih uzastopnih razlomaka kod kojih je poslednji parcijalni koeficijent ne manji od 2.

$$\frac{17}{1}=[17]$$

$$\frac{17}{2}=8+\frac{1}{2}=[8,2]$$

$$\frac{17}{3}=5+\frac{1}{\frac{3}{2}}=5+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=[5,1,2]$$

$$\frac{17}{4}=4+\frac{1}{4}=[4,4]$$

$$\frac{17}{5}=3+\frac{1}{\frac{5}{2}}=3+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=[3,2,2]$$

$$\frac{17}{6}=2+\frac{1}{\frac{6}{5}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=[2,1,5]$$

$$\frac{17}{7}=2+\frac{1}{\frac{7}{3}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}=[2,2,3]$$

$$\frac{17}{8}=2+\frac{1}{8}=[2,8]$$

Očigledno je da postoji tri para reverzibilnih uzastopnih razlomaka, kao i dva razlomka koji su palindromi. Pored $\frac{17}{1}=[17]$, palindrom je i $\frac{17}{4}=[4,4]$.

Posmatramo palindrom $\frac{17}{4}=[4,4]$. Važi

$17=t(4,4)=t(4)t(4)+1=4\cdot 4+1=4^2+1^2$, što je i trebalo da se uradi.

□

Glava 5

Primena popločavanja kod uzastopnih razlomaka sa realnim parcijalnim koeficijentima

Posmatrajmo konačni uzastopni razlomak $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]$ gde su $a_i,b_i \in \mathbb{R}$, za sve $1 \le i \le n$. Pritom, pretpostavimo da su pomenuti parcijalni koeficijenti takvi da je uzastopni razlomak $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]$ izračunljiv.[26] Da li i ovi uzastopni razlomci imaju slične osobine kao i uzastopni razlomci kod kojih su parcijalni koeficijenti prirodni brojevi? Sledeća teorema predstavlja uopštenje teoreme 3.1.1 i daje odgovor na postavljeno pitanje.

Teorema 5.1. ($[5]$) *Neka su* $a_i,b_j \in \mathbb{R}$*, gde je* $0 \le i \le n, 1 \le j \le n$*, takvi da je uzastopni razlomak* $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]$ *izračunljiv. Tada važi*

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{\ddots+\cfrac{b_n}{a_n}}}=\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]=\frac{|0:n|}{|1:n|},$$

gde je $|0:n|$ *(*$|1:n|$*) težinska suma* $(n+1)$*- trake (*n*- trake) čijim su poljima redom dodeljeni brojevi* a_i*, za* $0 \le i \le n$ *(*$1 \le i \le n$*), a granicama brojevi* b_j*, za* $1 \le j \le n$ *(* $2 \le j \le n$*).*

Dokaz. Dokazaćemo opštije tvrđenje, tj. da za nenegativne cele brojeve i i j, gde je $0 \le i \le j \le n$, važi $[i:j]=\dfrac{|i:j|}{|i+1:j|}$, gde je

[26] Konačni uzastopni razlomak $\left[a_0,(b_1,a_1),(b_2,a_2),...,(b_n,a_n)\right]$ je izračunljiv ako se prilikom postupka njegovog izračunavanja ne pojavljuje deljenje nulom.

$$[i:j] := a_i + \cfrac{b_{i+1}}{a_{i+1} + \cfrac{b_{i+2}}{\ddots + \cfrac{b_j}{a_j}}} = \left[a_i, (b_{i+1}, a_{i+1}), (b_{i+2}, a_{i+2}), \ldots, (b_j, a_j)\right].$$

Dokaz izvodimo indukcijom po dužini uzastopnog razlomka

$\left[a_i, (b_{i+1}, a_{i+1}), (b_{i+2}, a_{i+2}), \ldots, (b_j, a_j)\right]$, tj. po veličini $j - i + 1$.

Baza indukcije. Ako je prethodni uzastopni razlomak dužine 1, tj. ako je $j = i$ dobijamo:

$$[i:j] = [i:i] = a_i = \frac{a_i}{1} = \frac{|i:i|}{|i+1:i|} = \frac{|i:j|}{|i+1:j|} \ .$$

Induktivni korak. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki uzastopni razlomak dužine $j - i + 1$ i dokažimo da ono tada važi i za razlomke dužine $j - i + 2$. Na osnovu induktivne hipoteze i jednakosti (3.3) dobijamo

$$[i:j+1] = a_i + \frac{b_{i+1}}{[i+1:j+1]} = a_i + \frac{b_i}{\frac{|i+1:j+1|}{|i+2:j+1|}} = \frac{a_i|i+1:j+1| + b_{i+1}|i+2:j+1|}{|i+1:j+1|} =$$

$$\frac{|i:j+1|}{|i+1:j+1|} \ .$$

Sada za $i = 0$ i $j = n$ dobijamo traženo tvrđenje.

■

Kada je $a_i, b_j \in \mathbb{N}$ za sve i i j gde je $0 \le i \le n, 1 \le j \le n$, tada se teorema 5.1 svodi na teoremu 3.1.1.

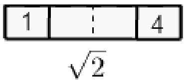
Primer 5.2. Koristeći teoremu 5.1 izračunaćemo vrednost uzastopnog razlomka

$$1+\cfrac{\sqrt{2}}{2+\cfrac{\sqrt{2}}{3+\cfrac{\sqrt{2}}{4}}}=\left[1,\left(\sqrt{2},2\right),\left(\sqrt{2},3\right),\left(\sqrt{2},4\right)\right].$$

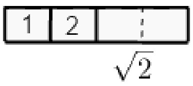
Najpre ćemo prikazati sva popločavanja 4 - trake sa težinskim uslovima $\left(1,\left(\sqrt{2},2\right),\left(\sqrt{2},3\right),\left(\sqrt{2},4\right)\right)$ i izračunati njihove težine.

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

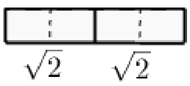
$\sqrt{2}\cdot 3\cdot 4=12\sqrt{2}$



$1\cdot\sqrt{2}\cdot 4=4\sqrt{2}$



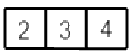
$1\cdot 2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$



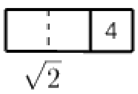
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$

Dakle, $\left|0:3\right|=24+12\sqrt{2}+4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2=26+18\sqrt{2}$.

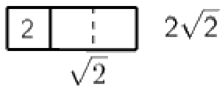
Da bi odredili brojilac ovog uzastopnog razlomka potrebno je odrediti težinsku sumu $\left|1:3\right|$, tj. zbir težina svih popločavanja 3 - trake koja se dobija kad od prethodne 4 - trake odbijemo početno polje. To su sledeća tri popločavanja:



$2\cdot 3\cdot 4=24$



$\sqrt{2}\cdot 4=4\sqrt{2}$



Prema tome, $|1:3| = 24 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 24 + 6\sqrt{2}$.

Odavde je prema teoremi 5.1, $1+\cfrac{\sqrt{2}}{2+\cfrac{\sqrt{2}}{3+\cfrac{\sqrt{2}}{4}}} = \dfrac{|0:3|}{|1:3|} = \dfrac{26+18\sqrt{2}}{24+6\sqrt{2}}$.

□

Sledeća teorema pojednostavljuje izračunavanje beskonačnih periodičnih uzastopnih razlomaka[27] čiji su nizovi parcijalnih koeficijenata a_i i b_i perioda m ($m > 1$) svodeći ih na izračunavanje beskonačnog uzastopnog razlomka čiji su nizovi parcijalnih koeficijenata perioda 1.

Teorema 5.3. ([5]) *Neka su* $a_0, a_1, \ldots$ *i* $b_1, b_2, \ldots$ *periodični nizovi realnih brojeva perioda* m *i neka beskonačni uzastopni razlomak* $[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots]$ *ima vrednost. Tada je*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots}} = \frac{1}{|1:m-1|}\left(|0:m-1| + \cfrac{\beta}{L+\cfrac{\beta}{L+\cfrac{\beta}{\ddots}}}\right)$$

gde je $L = |0::m-1|$ *težinska suma kružne* m – *trake određena gornjim nizovima, a* $\beta = (-1)^{m+1}\prod_{k=1}^{m} b_k$.

[27] Govori se o izračunavanju onih beskonačnih uzastopnih periodičnih razlomaka kod kojih je to moguće u smislu definicije 2.2.3.

Dokaz. Za ceo broj $n \geq -1$, a na osnovu teoreme 3.2.22 i teoreme 3.2.23 važi $\left|0:(n+1)m-1\right| = \left\|0:n\right\|$ i $\left|1:(n+1)m-1\right| = \left|1:m-1\right| \cdot \left\|1:n\right\|$, a za $n \geq 0$ je

$$\frac{\left|0:(n+1)m-1\right|}{\left|1:(n+1)m-1\right|} = \frac{1}{\left|1:m-1\right|} \cdot \frac{\left\|0:n\right\|}{\left\|1:n\right\|} \quad . \tag{5.1}$$

Koristeći činjenicu da svaki podniz konvergentnog niza konvergira ka istoj granici kao i sam niz, teoremu 5.1, jednakost (5.1) i teoremu 3.2.22 imamo[28],

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots}} = \lim_{n\to\infty}\left(a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}} \right) = \lim_{n\to\infty}\left(a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots a_{(n+1)m-2} + \cfrac{b_{(n+1)m-1}}{a_{(n+1)m-1}}}} \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|0:(n+1)m-1\right|}{\left|1:(n+1)m-1\right|} = \frac{1}{\left|1:m-1\right|} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|0:n\right\|}{\left\|1:n\right\|} = \frac{1}{\left|1:m-1\right|} \lim_{n\to\infty}\left(A_0 + \cfrac{B_1}{A_1 + \cfrac{B_2}{\ddots A_{n-1} + \cfrac{B_n}{A_n}}} \right) =$$

$$\frac{1}{\left|1:m-1\right|}\left(A_0 + \cfrac{B_1}{A_1 + \cfrac{B_2}{\ddots}} \right) = \frac{1}{\left|1:m-1\right|}\left(\left|0:m-1\right| + \cfrac{\beta}{L + \cfrac{\beta}{L + \cfrac{\beta}{\ddots}}} \right)$$

, što je i trebalo da se dokaže.

■

[28] U daljem tekstu ovog dokaza, srecu se nizovi $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ i $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Oni su definisani u teoremi 3.2.22.

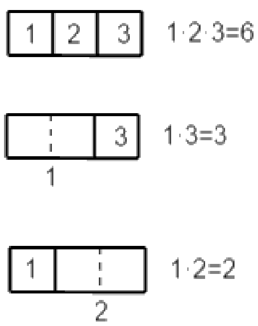
Napomena 5.4. Nizovi parcijalnih koeficijenata $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ i $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ne moraju imati iste osnovne periode. Ako je l osnovni period niza $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$, a n osnovni period niza $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, onda se kao period ovih nizova može uzeti bilo koji prirodan broj m za koji važi $NZS(l,n)\,|\,m$.

Primer 5.5. Neka je dat beskonačni uzastopni periodični razlomak

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{1+\ddots}}}}}} \tag{5.2}$$

Koristeći teoremu 5.3 odredimo koji iracionalan broj predstavlja beskonačni uzastopni razlomak (5.2). Jasno je da su oba niza parcijalnih koeficijenata $a_{3i+k}=k+1$ za $i\geq 0, 0\leq k\leq 2$ i $b_{3i+k}=k$ za $i\geq 0, 1\leq k\leq 3$, periodični perioda 3, tj. $m=3$.

Na osnovu leme 3.2.15 imamo $L=|0::2|=|0:2|+3\cdot|1:1|=11+3\cdot 2=17$ (slika 9).



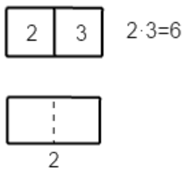
Slika 9: $|0:2|$ *za zadate težinske uslove*

Takođe je $\beta=(-1)^{m+1}b_1\cdot b_2\cdot b_3=(-1)^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3=6$.

Iz teoreme 5.3 zaključujemo

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{1+\ddots}}}}}}=\frac{1}{|1:m-1|}\left(|0:m-1|+\cfrac{\beta}{L+\cfrac{\beta}{L+\cfrac{\beta}{\ddots}}}\right)=$$

$$\frac{1}{|1:2|}\left(|0:2|+\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{\ddots}}}\right)=\frac{1}{8}\left(11+\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{\ddots}}}\right)$$ (za $|1:2|=8$ vidi sliku 10).



Slika 10: $|1:2|=6+2=8$

Jasno je da se izračunavanje razlomka (5.2) svodi na izračunavanje razlomka $\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{\ddots}}}$.

Neka je $x=\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{\ddots}}}$. Tada je $x=\dfrac{6}{17+x}$. Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo $x_{1,2}=\dfrac{-17\pm\sqrt{313}}{2}$, a kako je $x>0$ sledi $x=\dfrac{-17+\sqrt{313}}{2}$.

Dalje je

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{1+\ddots}}}}}}=\frac{1}{8}\left(11+\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{17+\cfrac{6}{\ddots}}}\right)=\frac{1}{8}(11+x)=\frac{1}{8}\left(\frac{5+\sqrt{313}}{2}\right)=$$

$$\frac{5+\sqrt{313}}{16}.$$

$\square$

Glava 6

Broj e kao uzastopni razlomak

6.1 Broj e i rastroj poretka

U ovom delu ćemo pričati o dva tipa permutacija koji su usko povezani sa jednom interpretacijom broja e kao uzastopnog razlomka.

Definicija 6.1.1. *Rastroj poretka* od n elemenata je permutacija $(i_1, i_2, ..., i_n)$ skupa $\{1, 2, ..., n\}$ takva da je $i_j \neq j$, za sve $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Rastroj poretka je prema tome svaka permutacija bez fiksnih elemenata. Za $n \geq 1$, označavaćemo sa d_n broj rastroja poretka od n elemenata. Nije teško utvrditi da je $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ ($(2,1)$) i $d_3 = 2$ ($(2,3,1)$ i $(3,1,2)$). Za potrebe daljeg teksta definišemo $d_0 := 1$.

Lema 6.1.2. ([8]) *Za svaki nenegativan ceo broj n važi* $d_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Dokaz. Za $n = 0$ je $d_0 = 1 = 0!\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Za $n \geq 1$, ukupan broj permutacija skupa od n elemenata je $n!$. Za $j \in \{1, 2, ..., n\}$, kažemo da permutacija $(i_1, i_2, ..., i_n)$ ima osobinu P_j ako je u njoj elemenat j na prirodnoj poziciji, tj. ako važi $i_j = j$. Jasno, permutacija je rastroj poretka ako nema nijednu od osobina P_j. Neka je sa A_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$ obeležen skup permutacija od n elemenata u kojem se nalaze one permutacije koje zadovoljavaju osobinu P_j. Prema tome, skup svih rastroja poretka od n elemenata je $\bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$, pa važi $d_n = \left|\bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}\right|$. Da bi odredili broj elemenata skupa $\bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$ koristimo princip uključenja i isključenja $[8]$.

Permutacije koje pripadaju skupu A_j imaju na j - tom mestu elemenat j dok se preostalih $n-1$ elemenata mogu proizvoljno permutovati. Zbog toga je $|A_j| = (n-1)!$, za $j \in \{1,2,...,n\}$. Dalje, ako je $\{k,j\}$ dvoelementni podskup skupa $\{1,2,...,n\}$, tada skupu $A_k \cap A_j$ pripadaju tačno one permutacije koje imaju fiksne elemente na mestima k i j ($i_k = k, i_j = j$), dok se ostalih $n-2$ elemenata mogu proizvoljno rasporediti. Dakle, $|A_k \cap A_j| = (n-2)!$. Slično za $k \geq 3$, za bilo koji k - točlani podskup $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ važi $\left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| = (n-k)!$. Na osnovu principa uključenja i isključenja, obzirom da broj svih mogućih izbora k elemenata $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ skupa $\{1,2,...,n\}$ iznosi $\binom{n}{k}$ dobijamo:

$$d_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + ... + (-1)^n \binom{n}{n} 0! = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} -$$

$$\frac{n!}{3!} + ... + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

■

Lako se dokazuju sledeće tri jednakosti (vidi $[8]$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e} \tag{6.1}$$

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n \ , \ \ n \geq 1 \tag{6.2}$$

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}), \ n \geq 2 \tag{6.3}$$

Definicija 6.1.3. *Permutacija bez fiksnih susedstava* od n elemenata je permutacija $(i_1, i_2, ..., i_n)$ skupa $\{1, 2, ..., n\}$ takva da za svako $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ važi $i_j + 1 \neq i_{j+1}$.

Drugim rečima, u permutaciji bez fiksnih susedstava ne može se desiti da dva uzastopna prirodna broja budu susedi u rastućem poretku (npr. (1,3,2,4) jeste a (2,3,1,4) nije permutacija bez fiksnih susedstava od 4 elementa).

Za $n \in \mathbb{N}$, obeležimo sa s_n broj permutacija bez fiksnih susedstava od n elemenata. Važi sledeća lema.

Lema 6.1.4. *Za* $n \geq 1$ *važi* $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!$.

Dokaz. Za $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$, kažemo da permutacija $(i_1, i_2, ..., i_n)$ ima osobinu P_j ako se u njoj pojavljuje susedstvo $(j, j+1)$. To znači da skup permutacija bez fiksnih susedstava od n elemenata sadrži tačno one permutacije koje ne zadovoljavaju nijedno od svojstava P_j. Neka je sa A_j, $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ obeležen skup permutacija od n elemenata u kojem se nalaze one permutacije koje zadovoljavaju osobinu P_j. Tada je

$$s_n = \left| \bigcap_{j=1}^{n-1} \overline{A_j} \right|.$$

Za $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ proizvoljna permutacija od n elemenata se nalazi u A_j ako i samo ako se u njoj pojavljuje susedstvo $(j, j+1)$. Ovo susedstvo možemo posmatrati kao jedan blok i proizvoljno ga permutovati sa preostalih $n-2$ elemenata. Prema tome je $|A_j| = (n-1)!$.

Neka je za prirodan broj k, gde je $2 \le k \le n-1$, $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ proizvoljan k - točlani podskup skupa $\{1, 2, ..., n-1\}$. Posmatrajmo sve permutacije koje sadrže sva susedstva $(i_j, i_j + 1)$, za $j \in \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, tj. skup $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$. U takvim permutacijama ima k susedstava, ali može biti i t ($0 \le t \le k-1$) tzv. **preklapanja** (Ako se isti elemenat pojavljuje u dva susedstva, time je generisano jedno preklapanje.). U tom slučaju susedstva sa preklapanjima određuju elemente istog bloka. Broj blokova[29] je $k-t$ (svako preklapanje umanjuje broj blokova za 1). Broj elemenata permutacije od n elemenata koji ne figurišu u blokovima je $n-2k+t$. Da bi odredili broj ovakvih permutacija posmatramo svaki blok kao jedan elemenat i onda ih proizvoljno permutujemo sa preostalih $n-2k+t$ elemenata. Na taj način dobijamo da je
$\left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| = (k-t+n-2k+t)! = (n-k)!$.

Na osnovu principa uključenja i isključenja je

$$s_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \binom{n-1}{3}(n-3)! + ... + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1! =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}(n-k)!.$$

■

Sledeća teorema daje jednu značajnu vezu između rastroja poretka i permutacija bez fiksnih susedstava.

Teorema 6.1.5. Za svaki prirodan broj n važi $s_n = d_n + d_{n-1}$.

Dokaz. Za $n = 1$ je $s_1 = 1 = 0 + 1 = d_1 + d_0$.

[29] Npr. u permutaciji (2,3,4,5,7,6,1,8,9) blokovi su (2,3,4,5) i (8,9). Očigledno je k=4, t=2 (brojevi 3 i 4 se preklapaju).

Za $n \geq 2$, iz jednakosti $\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}$, gde je $1 \leq k \leq n-1$, sledi

$$s_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \binom{n-1}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1! =$$

$$n! - \left(\binom{n}{1} - \binom{n-1}{0}\right)(n-1)! + \left(\binom{n}{2} - \binom{n-1}{1}\right)(n-2)! - \left(\binom{n}{3} - \binom{n-1}{2}\right)(n-3)! + \ldots +$$

$$(-1)^{n-1}\left(\binom{n}{n-1} - \binom{n-1}{n-2}\right)1! + \underbrace{(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}0! + (-1)^{n}\binom{n}{n}0!}_{0} = n! - \binom{n}{1}(n-1)! +$$

$$\binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^{n}\binom{n}{n}0! + (n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! + \binom{n-1}{2}(n-3)!$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}0! = d_n + d_{n-1}.$$

■

6.2 Dve reprezentacije broja e kao uzastopnog razlomka

Do prve reprezentacije broja e kao uzastopnog razlomka došao je poznati švajcarski matematičar Leonard Ojler. On je u delu *Observationes circa fractiones continuas* (vidi $[10]$), objavljenom posle njegove smrti, zapisao e kao

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ddots}}}}.$$

Teorema 6.2.1. (Prva interpretacija broja e preko uzastopnih razlomaka)

$$e=\left[2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...\right]=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\ddots}}}}}.$$

Podsetimo se, n -ti konvergent za beskonačni uzastopni razlomak

$$\left[2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...\right] \tag{6.4}$$

u oznaci e_n, je za $n=0$ $e_0=2=\frac{2}{1}=[2]$, za $n=1$ $e_1=2+\frac{1}{1}=\frac{3}{1}=3=\left[2,(1,1)\right]$, a za

$$n\geq 2 \quad e_n=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{\ddots+\cfrac{n-1}{n}}}}=\left[2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...,(n-1,n)\right].$$

Označimo sa P_n brojilac n - tog konvergenta uzastopnog razlomka (6.4), a sa Q_n njegov imenilac. Važno je napomenuti da su P_n i Q_n brojilac i imenilac onog razlomka koji se dobija kada se konačan uzastopni razlomak koji predstavlja n-ti konvergent od (6.4) napiše u obliku razlomka pri čemu se u toku tog postupka ne koristi skraćivanje razlomaka. Niz brojilaca konvergenata za uzastopni razlomak (6.4) je 2, 3, 8, 30, 144, 840, ... (niz A001048 u $[15]$), dok je niz imenilaca 1, 1, 3, 11, 53, 309, ... (niz A000255 u $[15]$).

Iz leme 6.1.2 se dobija da su prvih nekoliko članova niza d_n rastroja poretka od n elemenata 1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, ... (niz A000166 u $[15]$). U $[15]$ stoji da se opšti član niza brojilaca konvergenata uzastopnog razlomka (6.4) izračunava po formuli

$a(n)=n!+(n-1)!$ gde je nulti konvergent indeksiran sa 1, prvi sa 2, itd. Takođe, za prvih nekoliko članova niza imenilaca konvergenata beskonačnog uzastopnog razlomka $[2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...]$ važi $Q_0 = d_1 + d_0$, $Q_1 = d_2 + d_1$, itd. Ova zapažanja su sistematizovana u sledećem tvrđenju.

Lema 6.2.2. ($[3]$) *Za n - ti konvergent beskonačnog uzastopnog razlomka $[2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...]$, gde je $n\in\mathbb{N}_0$, brojilac je $P_n=(n+1)! + n!$, a imenilac $Q_n = d_{n+1}+d_n$, gde je d_n broj rastroja poretka od n elemenata.*

Dokaz. Dokaz izvodimo potpunom matematičkom indukcijom.

Baza indukcije. Za $n=0$ je $e_0=\dfrac{P_0}{Q_0}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{1+1}{0+1}=\dfrac{1!+0!}{d_1+d_0}$.

Induktivni korak. Pretpostavimo da za svako $k<n$ važi tvrđenje leme, tj. neka je $e_k=\dfrac{P_k}{Q_k}=\dfrac{(k+1)!+k!}{d_{k+1}+d_k}$ i dokažimo da tada tvrđenje važi i za $k=n$.

Na osnovu leme 2.1.7, induktivne hipoteze i jednakosti (6.3) sledi

$$e_n=\frac{P_n}{Q_n}=\frac{nP_{n-1}+(n-1)P_{n-2}}{nQ_{n-1}+(n-1)Q_{n-2}}=\frac{n\left(n!+(n-1)!\right)+(n-1)\left((n-1)!+(n-2)!\right)}{n\left(d_n+d_{n-1}\right)+(n-1)\left(d_{n-1}+d_{n-2}\right)}=$$

$$\frac{n(n-1)!(n+1)+(n-1)(n-2)!(n-1+1)}{d_{n+1}+d_n}=\frac{(n+1)!+n!}{d_{n+1}+d_n}.$$

∎

Sada možemo dokazati da je $e=[2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...]$.

Dokaz teoreme 6.2.1. Pokazaćemo da niz $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergenata beskonačnog uzastopnog razlomka (6.4) konvergira ka e. Koristeći redom lemu 6.2.2, jednakost (6.3) i jednakost (6.1) dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+n!}{d_{n+1}+d_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)n!}{\frac{d_{n+2}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{d_{n+2}} = \lim_{n+2\to\infty}\frac{(n+2)!}{d_{n+2}} = e,$$

što je i trebalo da se dokaže.

■

U nastavku dajemo još jedan dokaz teoreme 6.2.1 korišćenjem kombinatornih interpretacija nizova $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Lema 6.2.3. *Broj složivih popločavanja* $(n+1)$ *- trake* $(n\geq 1)$ *sa visinskim uslovima* $(2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...,(n-1,n))$ *koja se završavaju pločicom sa naslaganim dominama je* $n!$*, a koja se završavaju poljem na kome su naslagani kvadrati je* $(n+1)!$.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po dužini trake koja se popločava.

Baza indukcije. Ako je traka dužine $2\,(n=1)$, onda je broj složivih popločavanja koja se završavaju poljem s kvadratima $2\cdot 1=2=(1+1)!$. Jasno, postoji samo jedno popločavanje 2 – trake sa zadatim visinskim uslovima koje se završava dominama.

Induktivni korak. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve trake sa visinskim uslovima $(2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...,(k-1,k))$, gde je $k<n$ i pokažimo da tvrđenje onda važi i za $(n+1)$ - traku sa visinskim uslovima $(2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...,(n-1,n))$. Dokažimo deo tvrđenja koji se odnosi na

broj složivih popločavanja $(n+1)$ - trake koja se završavaju pločicom sa dominama. Označimo broj takvih popločavanja sa t_d.

$$t_d = (n-1)(n-2)! + (n-1)(n-1)! \;=\; (n-1)! + (n-1)(n-1)! = (n-1)!(1+n-1) =$$
$$(n-1)! \cdot \mathrm{n} = \mathrm{n}!$$

Gornji izraz $(n-1)(n-2)!$ predstavlja broj složivih popločavanja $(n+1)$ - trake koja na poslednja četiri polja imaju domine i dobija se uz pomoć indukcijske hipoteze i činjenice da se na poslednja dva polja može naslagati najviše $n-1$ domina.
Drugi izraz $(n-1)(n-1)!$ predstavlja broj složivih popločavanja $(n+1)$ - trake koja na poslednja dva polja imaju domine a na trećem polju sdesna kvadrate i dobija se uz pomoć indukcijske hipoteze i činjenice da se na poslednja dva polja može naslagati najviše $n-1$ domina.
Analogno se dokazuje drugi deo tvrđenja.

■

Sada ćemo dati opis postupka uspostavljanja bijekcije između skupa složivih popločavanja $(n+1)$ - trake sa visinskim uslovima $(2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...,(n-1,n))$ i unije skupova permutacija od n i $n+1$ elemenata. Uspostavićemo bijekciju tako što ćemo objasniti algoritam kojim se određeni tipovi složivih popločavanja $(n+1)$ - trake preslikavaju u permutacije od n i $n+1$ elemenata. Preslikaćemo složiva popločavanja $(n+1)$ - trake koja se završavaju kvadratima u permutacije od $n+1$ elemenata, a ona koja se završavaju dominama u permutacije od n elemenata. Ovo je moguće zbog leme 6.2.3. U daljem tekstu će sa S^i biti označeno i naslaganih kvadrata, a sa D^j j naslaganih domina.

Preslikaćemo najpre popločavanja 2 – trake:

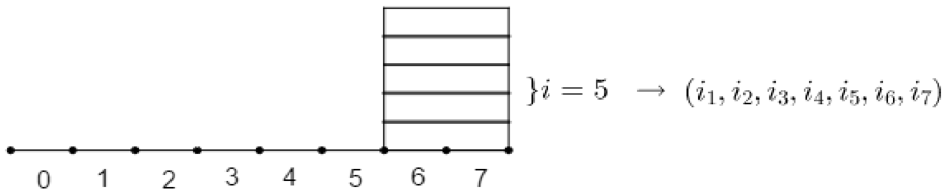
$$SS \mapsto (1,2)$$

$$S^2S \mapsto (2,1)$$

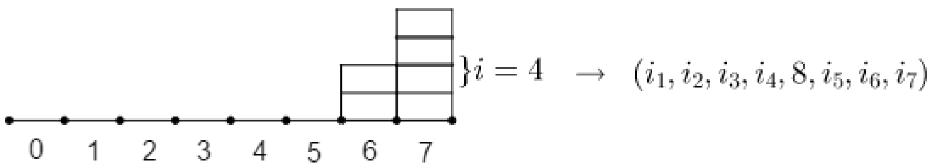
$$D \mapsto (1)\ .$$

Za preslikavanje popločavanja duže trake, koristi se već definisano preslikavanje popločavanja trake kraće za 1. Odnosno, ako pretpostavimo da je definisana bijekcija između složivih popločavanja n - trake i skupa permutacija od n i $n-1$ elemenata, onda ćemo složiva popločavanja $(n+1)$ - trake sa zadatim visinskim uslovima preslikati na sledeći način:

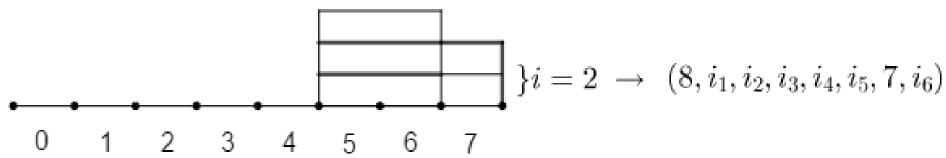
1° Popločavanje T $(n+1)$ - trake koje se završava pločicom na kojoj je složeno i domina: Ovo popločavanje zamenjujemo popločavanjem koje dobijamo kada umesto poslednje pločice sa i domina, stavimo pločicu sa i kvadrata. Dobijamo popločavanje n- trake koje je potpuno isto kao početno u prvih $n-1$ polja trake, a na n- tom polju ima i kvadrata. Kako je dobijeno popločavanje n - trake, ono se već preslikava u neku permutaciju od n elemenata, i u tu permutaciju ćemo preslikati popločavanje T. Na slici ispod, prikazano je kako se preslikava složivo popločavanje 8 – trake sa visinskim uslovima $(2,(1,1),(1,2),(2,3),...,(6,7))$ koje se završava sa pet domina naslaganih na poslednja dva polja trake. Od ovog popločavanja, odseče se poslednje polje i na taj način se od složivog popločavanja 8 – trake koje se završava sa pet domina dobije popločavanje 7 – trake koje je isto kao početno u prvih šest polja s tim što na poslednjem, sedmom polju ima 5 naslaganih kvadrata. Dobijeno popločavanje se već preslikava u neku permutaciju $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7)$, i u tu istu permutaciju preslikavamo početno preslikavanje 8 – trake.



2° Popločavanje T koje se završava sa i kvadrata na poslednjem polju ispred kojih je polje s kvadratima: Počinjemo od permutacije od n elemenata u koju se preslikava popločavanje n - trake koje se dobija kad se od T odbije poslednja pločica. U tu permutaciju ubacimo $n+1$ na i - tu poziciju sdesna. Kako je $1 \le i \le n$ jasno je da se $n+1$ može pojaviti na bilo kom mestu u novoj permutaciji osim na prvom sleva. Na slici ispod prikazano je kako se preslikava složivo popločavanje 8 – trake sa visinskim uslovima $\big(2,(1,1),(1,2),(2,3),\ldots,(6,7)\big)$ koje ima 4 kvadrata na poslednjem polju, a ispred koga je polje s dva kvadrata. Naime, popločavanje 7 – trake koje se dobija odsecanjem poslednjeg polja pomenutog složivog popločavanja 8 – trake se preslikava u neku permutaciju od 7 elemenata $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7)$. U ovu permutaciju, ubacujemo broj 8 na četvrto mesto sdesna.



3° Popločavanje T koje se završava sa i kvadrata na poslednjem polju ispred kojih su domine: U ovom slučaju, popločavanje n - trake koje se dobija kad se od T odbije poslednja pločica preslikava se u permutaciju od $n-1$ elemenata. Toj permutaciji dodajemo broj n na i - to mesto sdesna, a nakon toga ubacujemo $n+1$ na prvo mesto sleva. Na slici ispod prikazano je kako se preslikava složivo popločavanje 8 – trake sa visinskim uslovima $(2,(1,1),(1,2),(2,3),...,(6,7))$ koje na poslednjem polju ima dva kvadrata a na pretposlednjem tri domine. Prateći opisani postupak, u permutaciju od 6 elemenata $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$ u koju se preslikava popločavanje koje se dobija kada odsečemo od popločavanja 8 – trake poslednje polje sa dva kvadrata, ubacujemo najpre na drugo mesto sdesna broj 7, a potom na prvo mesto sleva broj 8.



Jasno je da je na osnovu opisanog algoritma definisano preslikavanje “1-1”. Na osnovu leme 6.2.3 sledi da domen i kodomen preslikavanja imaju isti broj elemenata pa je opisano preslikavanje i “na”.

Primer 6.2.4. Na osnovu opisanog algoritma preslikaćemo skup svih složivih popločavanja 3- trake sa visinskim uslovima $(2,(1,1),(1,2))$ u uniju skupova permutacija od 2 i 3 elementa, tj. uspostavićemo bijekciju između skupova $\{SSS, SSS^2, S^2SS, S^2SS^2, DS, DS^2, SD, S^2D\}$ i $\{(1,2),(2,1),(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$.

- SSS : Kako je na poslednjem polju jedan kvadrat onda permutaciji $(1,2)$ u koju se preslikava SS dodajemo broj 3 na prvo mesto zdesna i dobijamo permutaciju $(1,2,3)$.
- Slično prethodnom, $SSS^2 \mapsto (1,3,2)$
- $S^2SS \mapsto (2,1,3)$ zbog $S^2S \mapsto (2,1)$ i slučaja 2° gore opisanog algoritma
- $S^2SS^2 \mapsto (2,3,1)$

- $DS \mapsto (3,1,2)$ zbog $D \mapsto (1)$ i slučaja 3° gore opisanog algoritma
- $DS^2 \mapsto (3,2,1)$
- $SD \mapsto (1,2)$ zbog $SS \mapsto (1,2)$ i slučaja 1° gore opisanog algoritma
- $S^2D \mapsto (2,1)$.

□

Postavlja se pitanje kako preslikati popločavanje duže trake u odgovarajuću permutaciju. Neka je T složivo popločavanje n - trake. Formiramo niz popločavanja T_i, $1 \le i \le n-1$, gde je T_i popločavanje koje se dobija od T odsecanjem $i-1$ polja počevši od poslednjeg i brojeći sdesna na levo. Poslednje u tom nizu popločavanja, T_{n-1}, je popločavanje 2 - trake kojem je pridružena jedna od tri bazne permutacije. Dalje, vraćajući se unazad kroz niz T_i i prateći gore opisani algoritam, dobijamo permutaciju pridruženu popločavanju T. Opisani postupak je ilustrovan sledećim primerom.

Primer 6.2.5. Koja permutacija je pridružena složivom popločavanju 10 - trake $T = S^2SDD^2S^3S^6D^5$?

$$T = T_1 = S^2SDD^2S^3S^6D^5 \mapsto (7,5,8,2,9,1,6,4,3)$$

$$T_2 = S^2SDD^2S^3S^6S^5 \mapsto (7,5,8,2,9,1,6,4,3)$$

$$T_3 = S^2SDD^2S^3S^6 \mapsto (7,5,8,2,1,6,4,3)$$

$$T_4 = S^2SDD^2S^3 \mapsto (7,5,2,1,6,4,3)$$

$$T_5 = S^2SDD^2 \mapsto (5,2,1,4,3)$$

$$T_6 = S^2SDS^2 \mapsto (5,2,1,4,3)$$

$$T_7 = S^2SD \mapsto (2,1,3)$$

$$T_8 = S^2SS \mapsto (2,1,3)$$

$$T_9 = S^2S \mapsto (2,1)$$

Dakle, $S^2SDD^2S^3S^6D^5 \mapsto (7,5,8,2,9,1,6,4,3)$.

$\square$

Sledeća lema daje vezu između imenioca n - tog konvergenta uzastopnog razlomka $e=[2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...]$ i permutacija bez fiksnih susedstava od $n+1$ elemenata.

Lema 6.2.6. ([3]) *Postoji bijekcija između*

- *Skupa permutacija bez fiksnih susedstava od $n+1$ elemenata, i*
- *Skupa složivih popločavanja n - trake sa visinskim uslovima $(1,(1,2),(2,3),...,(n-1,n))$.*

Dokaz. Prikazaćemo način na koji se složiva popločavanja n - trake sa zadatim visinskim uslovima preslikavaju u permutacije bez fiksnih susedstava od $n+1$ elemenata.

Ako sa T_0 označimo jedino složivo popločavanje 0 - trake (prazno popločavanje), njemu dodeljujemo permutaciju (1) (koja je po definiciji permutacija bez fiksnih susedstava), tj. $T_0 \mapsto (1)$.

Kako je jedan kvadrat jedino složivo popločavanje 1 - trake sa visinskim uslovom (1) a $(2,1)$ jedina permutacija bez fiksnih susedstava od dva elementa, jasno je da važi $S \mapsto (2,1)$.

Za $n \geq 2$, pretpostavimo da smo svim složivim popločavanjima traka kraćih od n pridružili odgovarajuće permutacije bez fiksnih susedstava. Tada imamo dva slučaja za popločavanja n - trake:

1° Popločavanje T se završava sa i kvadrata na poslednjem polju trake. Počinjemo od permutacije od n elemenata bez fiksnih susedstava koja je pridružena složivom poločavanju $(n-1)$ - trake koje se dobija kad se od T odseče poslednja pločica. U tu permutaciju ubacujemo $n+1$ na i - tu poziciju sdesna isključujući poziciju koja bi dovela do susedstva $(n,n+1)$ (to je jedina *nelegalna* pozicija za $n+1$, ostale zovemo *legalne*). Kako je $1 \leq i \leq n$, $n+1$ se može pojaviti na bilo kom mestu osim odmah do n s desne strane. Formalnije rečeno, definišemo skup preslikavanja $\sigma_i : \mathrm{S}_n \to S_{n+1}$ za $1 \leq i \leq n$, takvih da svako od njih u permutaciju od n elemenata bez fiksnih susedstava ubacuje $n+1$ na i - to legalno mesto sdesna. Pritom smo ovde sa S_j, gde je $j \in \{n, n+1\}$, označili skup permutacija od j elemenata bez fiksnih susedstava koje su pridružene složivim popločavanjima $(j-1)$- trake sa visinskim uslovima $\big(1,(1,2),(2,3),...,(j-2,j-1)\big)$.

2° Popločavanje T se završava pločicom sa i domina. Počinjemo od permutacije π od $n-1$ elemenata koja je pridružena popločavanju $n-2$ trake koje se dobija kad se od T odseče poslednja pločica. Formiranje permutacije od $n+1$ elemenata bez fiksnih susedstava koja se pridružuje popločavanju T ide u tri koraka:

1) u permutaciji π svaki element veći od i uvećamo za 1
2) napravimo susedstvo $(i, i+1)$ ubacivanjem broja $i+1$ u π
3) razbijemo susedstvo $(i, i+1)$ ubacivanjem broja $n+1$ između i i $i+1$

Primetimo da zbog $1 \leq i \leq n-1$, opisanim postupkom možemo dobiti bilo koji podniz $(1, n+1, 2)$, $(2, n+1, 3)$, ... , $(n-1, n+1, n)$. Formalnije rečeno, definišemo skup preslikavanja $\delta_i : \mathrm{S}_{n-1} \to S_{n+1}$, (sa S_j, gde je $j \in \{n-1, n+1\}$, smo označili skup permutacija od j elemenata bez fiksnih susedstava koje su pridružene složivim popločavanja $(j-1)$- trake sa visinskim uslovima $\big(1,(1,2),(2,3),...,(j-2,j-1)\big)$) gde je $\delta_i(\pi)$ permutacija od $n+1$ elemenata bez fiksnih susedstava koja se dobija od permutacije π bez fiksnih susedstava od $n-1$ elemenata tako što se na π primene koraci 1), 2) i 3).

Iz opisanog algoritma jasno je da je definisano preslikavanje "1-1". Pokazaćemo da je ovo preslikavanje i „na".

Neka je za $n \geq 2$, π proizvoljna permutacija bez fiksnih susedstava od $n+1$ elemenata. Razlikujemo dva slučaja:

1° Permutacija π sadrži podniz $(i, n+1, i+1)$ za neko i, gde je $1 \leq i \leq n-1$. Izbacimo iz π članove $n+1$ i $i+1$, pa potom svaki preostali elemenat veći od i umanjimo za 1. Na taj način dobijamo permutaciju bez fiksnih susedstava od $n-1$ elemenata koju ćemo označiti sa π'. Permutaciji π' pridruženo je neko složivo popločavanje $(n-2)$- trake sa zadatim visinskim uslovima, u oznaci T'. Neka je T složivo popločavanje n - trake koje je isto kao T' u prvih $n-2$ polja, a na poslednja dva polja ima i naslaganih domina. Na osnovu opisanog algoritma, jasno je da se popločavanje T preslikava u permutaciju π.

2° Permutacija π ne sadrži podniz $(i, n+1, i+1)$ ni za jedno i, gde je $1 \leq i \leq n-1$. Izbacivanjem $n+1$ iz π dobijamo neku permutaciju bez fiksnih susedstava od n elemenata. Označimo je sa π'. Permutacija π' pridružena je nekom složivom popločavanju $(n-1)$- trake sa zadatim visinskim uslovima, u oznaci T'. Složivo popločavanje n - trake T, koje je isto kao T' u prvih $n-1$ polja a na poslednjem polju ima i naslaganih kvadrata se očigledno preslikava u permutaciju π.

Ovim smo dokazali da je opisano preslikavanje „na".

■

Odavde na osnovu leme 6.2.6 i teoreme 6.1.5 sledi da je i kombinatorno potvrđena veza $Q_n = d_{n+1} + d_n$, za $n \geq 0$.

Primer 6.2.7. U ovom primeru ćemo složivim popločavanjima 2- trake sa visinskim uslovima $(1,(1,2))$ pridružiti odgovarajuće permutacije od 3 elementa bez fiksnih susedstava.

- SS: Kako je kod ovog popločavanja jedan kvadrat na poslednjem polju a važi $S \mapsto (2,1)$, ubacujemo broj 3 na prvo legalno mesto sdesna i dobijamo $(2,1,3)$ tj. važi $(\sigma_1 \circ \sigma_1)(1) = \sigma_1(\sigma_1(1)) = \sigma_1(2,1) = (2,1,3)$.
- SS^2 : Ubacujemo 3 na drugo legalno mesto sdesna i dobijamo $(\sigma_2 \circ \sigma_1)(1) = \sigma_2(\sigma_1(1)) = \sigma_2(2,1) = (3,2,1)$.
- D: Polazimo od permutacije (1) koja je pridružena praznom popločavanju i kreiramo susedstvo $(1,2)$ a onda ga razbijemo brojem 3 dobijajući $(1,3,2)$, tj. važi $\delta_1(1) = (1,3,2)$.

□

Primer 6.2.8. Na primeru složivog popločavanja 8 - trake $SSS^2D^2D^4S^3$ prikazaćemo postupak opisan u prethodnoj teoremi kojim ćemo ovom popločavanju dodeliti permutaciju od 9 elemenata bez fiksnih susedstava.

$$SSS^2D^2D^4S^3 \mapsto \sigma_3\delta_4\delta_2\sigma_2\sigma_1\sigma_1(1) = \sigma_3\delta_4\delta_2\sigma_2\sigma_1(2,1) = \sigma_3\delta_4\delta_2\sigma_2(2,1,3) =$$

$$\sigma_3\delta_4\delta_2(2,4,1,3) = \sigma_3\delta_4(2,6,3,5,1,4) = \sigma_3(2,7,3,6,1,4,8,5) = (2,7,3,6,1,9,4,8,5).$$

Vredi objasniti samo četvrtu jednakost u nizu. Počinjemo od permutacije $(2,4,1,3)$ koja korespondira sa popločavanjem SSS^2 , pa kako je sledeća pločica u popločavanju ona sa dve složene domine, uvećavamo sve brojeve veće od 2 u permutaciji $(2,4,1,3)$ za 1 . Na taj način dobijamo četvorku $(2,5,1,4)$ u koju ubacujemo broj 3 tako da kreiramo susedstvo $(2,3)$ formirajući permutaciju od 5 elemenata sa tačno jednim fiksnim susedstvom, $(2,3,5,1,4)$. Ostaje još da ubacivanjem broja 6 razbijemo dobijeno susedstvo što rezultira permutacijom $(2,6,3,5,1,4)$.

□

U sledećem primeru dajemo i obrnuti postupak, tj. za zadatu permutaciju formiramo odgovarajuće popločavanje.

Primer 6.2.9. Neka je data permutacija $(6,3,5,1,4,2)$.

Kako je broj 6 na petom legalnom mestu u ovoj permutaciji jasno je da se na petom polju u odgovarajućem popločavanju nalazi 5 kvadrata. Izbacimo 6 iz permutacije i dobijemo $(3,5,1,4,2)$. Slično prethodnom, na četvrtom polju popločavanja nalaze se tri kvadrata. Sledeća permutacija koju posmatramo je $(3,1,4,2)$. Kako u njoj broj 4 razbija susedstvo $(1,2)$ jasno je da je sledeća pločica u popločavanju jedna domina (pokriva drugo i treće polje trake). Izbacimo 4, rasformiramo susedstvo $(1,2)$ izbacivanjem broja 2 i preostale brojeve u permutaciji koji su veći od 1 umanjimo za 1. Na taj način dobijamo permutaciju $(2,1)$ koja korespondira sa jednim kvadratom. Dakle, traženo složivo popločavanje 5 - trake je SDS^3S^5.

□

Pored ovog postoji još nekoliko prikaza broja e kao uzastopnog razlomka. Svakako je jedna od elegantnijih reprezentacija za e

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{6}{6 + \ddots}}}}}$$

Da je gornji uzastopni razlomak zaista jednak broju e pokazuje sledeća teorema.

Teorema 6.2.10. (Druga interpretacija broja e preko uzastopnih razlomaka)

Važi $e = [2,(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),...] = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{6}{6 + \ddots}}}}}.$

Dokaz. Dokazaćemo da ako su r_n i $\widehat{r_n}$ redom n - ti konvergenti uzastopnih razlomaka $e=[2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...]$ i $[2,(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),...]$, onda važi $r_n=\widehat{r_n}$ za svaki nenegativan ceo broj n.

Neka je $r_n=\dfrac{P_n}{Q_n}$ i $\widehat{r_n}=\dfrac{\widehat{P_n}}{\widehat{Q_n}}$ gde su P_i, Q_i, $\widehat{P_i}$ i $\widehat{Q_i}$, $i\geq 0$ definisani u definiciji 2.1.5.

U lemi 2.1.7 smo uveli $P_{-1}=\widehat{P_{-1}}=1$ i $Q_{-1}=\widehat{Q_{-1}}=0$.

Dokazaćemo indukcijom da za svaki nenegativan ceo broj n važi $\widehat{P_n}=(n+1)P_n$ i $\widehat{Q_n}=(n+1)Q_n$.

Baza indukcije.

Za $n=0$ važi $\widehat{P_0}=2=(0+1)\cdot 2=(0+1)P_0$.

Induktivni korak. Pretpostavimo da za svako $k<n$ važi $\widehat{P_k}=(k+1)P_k$ i $\widehat{Q_k}=(k+1)Q_k$ i pokažimo da tvrđenje važi i za $k=n$. Iz leme 2.1.7 i induktivne hipoteze imamo

$\widehat{P_n}=(n+1)\widehat{P_{n-1}}+(n+1)\widehat{P_{n-2}}=(n+1)\left(\widehat{P_{n-1}}+\widehat{P_{n-2}}\right)=(n+1)\left(nP_{n-1}+(n-1)P_{n-2}\right)=$
$(n+1)P_n$.

Analogno se dokazuje da važi $\widehat{Q_n}=(n+1)Q_n$.

Odavde je $\widehat{r_n}=\dfrac{\widehat{P_n}}{\widehat{Q_n}}=\dfrac{(n+1)P_n}{(n+1)Q_n}=\dfrac{P_n}{Q_n}=r_n$. Prema tome je

$[2,(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),...]=[2,(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),...]=e$,

što je i trebalo da se dokaže.

■

Pored dve interpretacije broja e kao uzastopnog razlomka koje smo ovde izneli, postoji i jedinstveni prikaz ovog broja kao jednostavnog beskonačnog uzastopnog razlomka. Naime važi,

$$e=\left[2,(1,1),(1,1),(1,2),(1,1),(1,1),(1,4),(1,1),(1,1),(1,6),\ldots\right](\text{vidi } [3]).$$

Ova interpretacija broja e potencijalno otvara nove mogućnosti. Moguće je da postoji kombinatorna interpretacija i za ovaj zanimljiv uzastopni razlomak što ostavlja prostor za dalja istraživanja.

Literatura

[1] D. Adnađević i Z. Kadelburg, *Matematička analiza* I, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[2] B. Balof, E. Farmer, and J. Kawabata, *The link between scrambling numbers and derangements*, Rose – Hulman Technical Report MS TR (1997), 97 – 02

[3] B. Balof and H. Jenne, *Tilings, Continued Fractions, Derangements, Scramblings, and e*, Journal of Integer Sequences, Vol. 17 (2014), Article 14.2.7.

[4] A. T. Benjamin, F. E. Su, J. J. Quinn, *Counting on Continued Fractions*, Mathematics Magazine, Vol 73, No. 2, pp. 98 – 104, 2000.

[5] Arthur T. Benjamin, Alex K. Eustis, Mark A. Shattuck, *Compression Theorems for Periodic Tlings and Consequences*, Journal of Integer Sequences, Vol. 12, Article 09.6.3, 2009.

[6] A. T. Benjamin and J. J. Quinn, *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, Mathematical Association of America, 2003.

[7] Arthur T. Benjamin, Doron Zeilberger, *Pythagorean Primes and Palindromic Continued Fractions*, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 5(1), #A30, 2005.

[8] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, 5th ed., Prentice Hall, 2009.

[9] M. Erickson, A. Vazzana, *Introduction to Number Theory*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2008.

[10] L. Euler, *Observationes circa fractiones continuas*, Opera Omnia: Series 1 16, Springer, 1933, pp. 136 – 161.

[11] L. Lorentzen, H. Waadeland, *Continued Fractions with Applications*, Stud. Comput. Math 3 North – Holland, 1992.

[12] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley and Sons, Inc., New York, NY, 1991.

[13] C. D. Olds, *Continued Fractions*, The Mathematical Association of America, Washington, 1963.

[14] M. Pezer, J. Matejaš, *Brojevi* π, e, i *kroz povijest*, Matematičko – fizički list 1/241, 2010/11, 7-14.

[15] N. J. A. Sloane, *The Online Encyclopedia of Integer Sequences*, http://oeis.org.

Biografija

Đorđe Jugović je rođen 26. maja 1987. godine u Loznici. Osnovnu školu „Stepa Stepanović“ u Tekerišu završio je kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Nakon toga pohađao je Gimnaziju „Vuk Karadžic“ u Loznici, koju je završio 2006. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje osnovne studije na smeru “Diplomirani profesor matematike” na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Diplomirao je u martu 2014. godine sa prosečnom ocenom 8,89. Nakon toga, upisuje master studije na smeru “Master profesor matematike” i pošto je položio sve ispite predviđene nastavnim planom, stekao je uslov za odbranu master rada. Od septembra 2012. godine, s kraćim prekidima, radio je u nekoliko osnovnih i srednjih škola. Trenutno radi u izdvojenom odeljenju Osnovne škole “Svetozar Miletić” Titel u Loku.

Novi Sad, 2020. godine Đorđe Jugovic

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Đorđe Jugović
AU
Mentor: dr Olga Bodroža-Pantić
MN
Naslov rada: Neki uzastopni razlomci i njihovi kombinatorni aspekti
NR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2020.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA
Fizički opis rada: 6/90/15/0/10/0/0
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Teorija brojeva / Kombinatorika
ND
Ključne reči: konačni uzastopni razlomci, beskonačni uzastopni razlomci, složiva popločavanja, težinska popločavanja, rastroji poretka, permutacije bez fiksnih susedstava
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku, PMF, Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U ovom master radu se proučavaju osnovne osobine uzastopnih razlomaka, njihove veze sa popločavanjima, rastrojima poretka i permutacijama bez fiksnih susedstava kao i neke primene uzastopnih razlomaka i popločavanja u teoriji brojeva. Rad se sastoji od šest poglavlja. U prvoj glavi je dat istorijski osvrt na pojavu i razvoj teorije uzastopnih razlomaka i broja e. Takođe, uvedeni su i osnovni pojmovi vezani za popločavanja n- trake. U drugoj glavi definisani su konačni i beskonačni uzastopni razlomci kao i specijalna klasa i jednih i drugih, jednostavni razlomci. Dokazano je da se svaki racionalan broj može prikazati u obliku konačnog jednostavnog uzastopnog razlomka na tačno dva načina. Takođe je dokazano da su jednostavni beskonačni uzastopni razlomci iracionalni brojevi, kao i da se svaki iracionalan broj može zapisati u obliku beskonačnog jednostavnog uzastopnog razlomka. Razmatrani su i periodični beskonačni uzastopni razlomci i utvrđeno je da oni predstavljaju kvadratne iracionalnosti. U trećoj glavi je izložena teorema koja daje vezu između složivih popločavanja sa zadatim visinskim uslovima i odgovarajućeg konačnog uzastopnog razlomka. Uvedena su težinska popločavanja koja su pored n - traka razmatrana i na kružnim i periodičnim trakama. Četvrta glava ovog rada bavi se primenama popločavanja i uzastopnih razlomaka u teoriji brojeva. U njoj su opisane neke osnovne veze između Fibonačijevih i Lukasovih brojeva i uzastopnih razlomaka. U ovoj glavi dat je i jedan inspirativan dokaz poznatog tvrđenja da se svaki prost broj oblika $4k+1$, gde je k neki prirodan broj, može na jedinstven način predstaviti kao zbir kvadrata dva prirodna broja. U petoj glavi opisana je primena težinskih popločavanja na izračunavanje konačnih i nekih beskonačnih uzastopnih razlomaka sa realnim parcijalnim koeficijentima. U šestoj glavi predstavljena je veza između jedne repezentacije broja e kao uzastopnog razlomka i rastroja poretka i permutacija sa fiksnim susedstvima. Osim za ovu, dat je dokaz za još jednu reprezentacija broja e kao uzastopnog razlomka.

IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 15.1.2020.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije: Predsednik: dr Jelena Aleksić, vanredni profesor, PMF, Novi Sad
KO Mentor: dr Olga Bodroža - Pantić, redovni profesor, PMF, Novi Sad
Član: dr Petar Đapić, vanredni profesor, PMF, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master thesis
CC
Author: Đorđe Jugović
AU
Mentor: Olga Bodroža-Pantić, Ph. D.
MN
Title: Some continued fractions and its combinatorial aspects
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2020.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad, Serbia
PP
Physical description: 6/90/15/0/10/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Number theory / Combinatorics
SD
Key words: finite continued fractions, infinite continued fractions, stackable tilings, weighted tilings, derangements, scramblings
SKW
UC
Holding data: Library of Department of Mathematics, Faculty of Science, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: In this Master degree thesis we are analyzing basic properties of continued fractions, their connections with tilings, derangements and scramblings as well as some applications of continued fractions and tilings in number theory.
The thesis consists of six chapters. In the first chapter, we gave historical review of phenomenon and development of theory of continued fractions and number e. Also, we introduced basic terms related to tilings of n - board. In the second chapter, we define finite and infinite continued fractions as well as special class of both – simple continued fractions. We have proved that any rational number can represented as a finite simple continued fraction in exactly two ways. Also, we have proved that any infinite simple continued fraction represents a irrational number as well as any irrational number can be represented as a infinite simple continued fraction. We considered infinite periodic continued fractions and it had been established that infinite periodic continued fractions represent quadratic irrationals. In the third chapter, it is presented a theorem that gives the connection between stackable tilings with given height conditions and corresponding finite continued fraction. Weighted tilings was introduced and considered next to the n-boards on the circular and periodic boards. The fourth section of this thesis deals with applications of tilings and continued fractions in number theory. In this section, the basic connnections between Fibonacci and Lucas numbers and continued fractions are described. Also, it had been given inspiring proof of well – known claim that every prime number of the form $4k+1$, where k is a positive integer, can be represented as a sum of the squares of two positive integers in a unique way. In the fifth chapter, the application of weighted tilings to the calculation of finite and some infinite continued fractions whose partial coefficients are real numbers is described. In the sixht chapter, it is presented connection between one continued fraction representation of e and derangements and scramblings. Except for this one, proof is given for another continued fraction representation of e.

AB
Accepted by the Scientific Board on*:* 15.1.2020.
ASB
Defended on:
DE
Thesis defend board:
DB
President: dr Jelena Aleksić, Associate Professor, Faculty of Science, Novi Sad
Mentor: dr Olga Bodroža-Pantić, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad
Member: dr Petar Đapić, Associate Professor, Faculty of Science, Novi Sad